
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00177344 9



Galvanographirt v. Leo Schöninger in München.

*Paul Henri Fuss*

# LEONHARDI EULERI

# OPERA POSTUMA

## MATHEMATICA ET PHYSICA

ANNO MDCCCXLIV DETECTA

QUAE

ACADEMIAE SCIENTIARUM PETROPOLITANAE

OBTULERUNT EJUSQUE AUSPICIIS EDIDERUNT

AUCTORIS PRONEPOTES

**PAULUS HENRICUS FUSS ET NICOLAUS FUSS.**




---

**TOMUS ALTER.**



---

PETROPOLI, 1862.

**Petropoli** apud Eggers et Socios; **Rigae** apud Samuelem Schmidt; **Lipsiae** apud Leopoldum Voss.

Pretium: 7 Rub. 20 Kop. = 8 Thlr.

Consensu Academiae impressum.

C. Vesselofski, Academiae secretarius perpetuus.

Mense Decembri a. 1861.

Typis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae.

# L. Euleri Operum postumorum Tomi II Index.

---

## Mechanica. p. 1 — 173



*

## Astronomia mechanica. p. 177 — 332



## Astronomia. p. 335 — 446

## Physica. p. 449 — 780

## Varia. p. 783—826





# MECHANICA.

# I.

# Statica.

1. **Definitio 1.** *Statica* est scientia aequilibrii potentiarum cuivis objecto applicatarum.

2. **Definitio 2.** *Potentia* est vis, quae cuivis objecto applicata, id movere conatur.

3. **Definitio 3.** *Directio potentiae* est linea, secundum quam potentia motum imprimere conatur.

4. **Definitio 4.** *Aequilibrium* est dispositio potentiarum objecto applicatarum, id in quiete servans.

5. **Coroll.** Cum quaevis potentia conetur objectum movere (2), in statu autem aequilibrii objectum quiescat (4), sequitur tum cujuslibet potentiae actionem a reliquis impediri.

6. **Theorema 1.** Vis gravitatis est potentia.

**Demonstratio.** Vis gravitatis causa est, quod omnia corpora gravia conentur descendere deorsum; ergo ea movere conatur; consequenter (2) vis gravitatis est potentia. Q. E. D.

7. **Coroll.** Cum vis gravitatis conetur deorsum movere gravia, ejus directio est linea verticalis (3).

8. **Definitio 5.** Vis, qua gravia deorsum descendere conantur, vocatur *pondus*.

9. **Problema 1.** Ope ponderis efficere, ut datum objectum conetur deorsum descendere.

**Solutio.** Fig. 1. Sit objectum datum $A$, alligetur ei filum, filoque corpus grave $P$. Cum grave $P$ conetur deorsum descendere, filum tendet, eoque ipso etiam objectum $A$ conatur abripere, quare hoc modo objectum $A$ conabitur descendere. Q. E. F.

10. **Coroll. 1.** Objectum ergo $A$ tanta vi conabitur descendere, quanta ipsum grave $P$.

11. **Coroll 2.** Effici ergo potest, ut datum objectum data vi conetur descendere, ope gravis datam habentis vim.

12. **Problema 2.** Ope ponderis efficere, ut datum objectum secundum datam directionem incedere conetur.

**Solutio.** Fig. 2. Sit objectum $A$, dataque directio $AB$; in ea directione ubicunque firmetur clavus $B$, et filum ipsi $A$ applicatum ducatur super $B$, eique tum alligetur pondus seu grave $P$.

Quia hoc grave conatur descendere, tendet filum $PBA$, eoque ipso conabitur objectum $A$ secum abripere, idque in directione fili $AB$, id est, in directione data; quare objectum hoc modo conabitur secundum directionem $AB$ incedere. Q. E. F.

13. **Coroll. 1.** Patet hinc etiam objectum $A$ tanta vi conari in directione $AB$ promoveri, quanta vi $P$ tendit descendere.

14. **Coroll. 2.** Ergo effici potest, ut $A$ secundum datam directionem data vi conetur moveri, applicando grave tanta vi deorsum tendens.

15. **Coroll. 3.** Potest igitur quaecunque potentia et quamcunque habens directionem ad pondus reduci, quia inveniri potest pondus faciens, ut objectum data vi in data directione incedere conetur (14).

16. **Scholion 1.** Haec de ponderibus ideo adjeci, ut in posterum quae de potentiis inveniuntur et demonstrabuntur etiam ad corpora gravia, quae nihil aliud sunt nisi objecta, quibus potentiae deorsum tendentes sunt applicatae, referri queant, et quaevis potentiae cum ponderibus possint comparari.

17. **Scholion 2.** Monendum etiam est, in sequentibus omnia corpora tanquam gravitatis expertia considerari, quae nullâ applicatâ potentiâ nullibi se movere conarentur; ideoque vim gravitatis in potentiis habeo, qua superveniente corpora demum conantur deorsum descendere.

18. **Divisio generalis.** Dividitur Statica optime quoad diversitatem objectorum, quibus potentiae applicatae intelliguntur. Quare in *prima* sectione de potentiis puncto applicatis disseretur, quae tractatio instar fundamenti est sequentium. In *secunda* de aequilibrio potentiarum objectis rigidis applicatarum. In *tertia* de potentiis, flexibilibus objectis applicatis. In *quarta* objecta considerabuntur, ex pluribus partibus certo modo junctis composita. Tandem in *quinta* de potentiis plurimis corporibus a se invicem liberis et dissolutis agere constitui, ubi agetur de Hydrostatica.

## Sectio prima.

### De aequilibrio potentiarum puncto applicatarum.

*Annotatio manu Cel. Auctoris margini adscripta:* Dividenda est haec Sectio in duas partes, quarum prima considerat punctum liberum, quod aeque libere in omnes partes moveri potest, altera vero punctum non liberum, quod ob obstacula in unam vel plures plagas moveri nequit. Id quod evenit, si firmo obstaculo inclinet ut lineae vel rectae vel curvae.

19. **Axioma 1.** Fig. 3. Si puncto $A$ duae potentiae aequales et quarum directiones directe sunt oppositae $AB$, $AC$, applicatae fuerint, punctum $A$ in neutram plagam verget, et proin habebitur aequilibrium.

20. **Scholion.** Veritas hujus axiomatis constat ex principio sufficientis rationis; nulla est enim ratio, quare potius in hanc vel illam plagam tenderet. Sin autem altera alterâ major fuerit, tum amplius aequilibrium existere nequit, quia non deest ratio, quare in unam plagam potius quam in aliam tendat.

21. **Coroll.** Quando ergo duabus potentiis directe contrarie puncto applicatis, id in aequilibrio consistit, concludendum est, eas potentias esse inter se aequales.

22. **Problema 3.** Datae potentiae puncto applicatae aequale invenire pondus.

**Solutio.** Fig. 4. Sit puncto $A$ applicata potentia in directione $AB$; producatur $BA$ ultra $A$, in eaque alicubi firmetur clavus $C$; filum puncto $A$ alligatum super $C$ traducatur, eique dein alia atque alia pondera appendantur, donec aequilibrium obtineatur. Erit tum pondus $P$ aequale potentiae, punctum $A$ secundum $AB$ trahenti. Trahitur enim $A$ versus $AC$ vi, quae aequalis est ponderi $P$ (14). Et quia est aequilibrium, haec vis ipsi $AB$ aequatur (21). Q. E. F.

23. **Coroll.** Hoc ergo modo omnes potentiae ad pondera reduci possunt, cum inveniri possint pondera cuilibet datae potentiae aequivalentia.

24. **Definitio 6.** *Potentia a aequalis* dicitur duabus aliis, $b$ et $c$, simul sumtis, si hisce $b$ et $c$, puncto $A$ (Fig. 5) secundum directiones $AB$, $AC$, inter se parallelas et coincidentes applicatis, illa $a$, directe contrarie applicata juxta $AD$ cum hisce in aequilibrio consistit.

25. **Coroll.** Hinc innotescit, quid sit potentia dupla, tripla etc. nempe si sit $c = b$, erit $a = 2b$; si $c = 2b$, erit $a = 3b$ etc.

26. **Hypothesis.** Potentiae in posterum designabuntur per lineas rectas in earum directione sumtas rationemque ipsarum potentiarum servantes, ut potentia dupla per lineam duplam, tripla per triplam exponetur; et generaliter, si dico (Fig. 6) puncto $A$ duas potentias $AB$ et $AC$ esse applicatas, inde intelligi debet trahere eas secundum directiones $AB$ et $AC$, et esse inter se ut lineas $AB$ et $AC$.

27. **Scholion.** Possunt etiam potentiae hoc modo concipi, quemadmodum eas considerabo in demonstratione sequentis theorematis. Si (Fig. 7) puncto $A$ applicata fuerit potentia $AB$, concipio ei normaliter junctam esse $CD$, quae cum basi $EF$ cohaeret pluribus filis $CE$, $DF$ contractibilibus; unde fiet, ut haec fila contrahere se quaerentia lineam $CD$ ad $EF$ trahere conentur, et hoc ipso punctum $A$ in linea $AB$ promovere contendant. Cum dein supponam, singula fila aequali vi sese contrahendi valere, potentiae diversae erunt inter se ut numeri filorum; ita ut potentiam duplam duplus filorum numerus exhibeat, triplam triplus, etc.

28. **Axioma 2.** Omnis potentia tantum agit quantum potest.

29. **Theorema 2.** Fig. 8. Si puncto $A$ tres potentiae $AB$, $AC$, $AD$ fuerint applicatae, obtinueritque aequilibrium, erit quaevis potentia $AC$ ut sinus anguli $BAD$ a reliquis comprehensi.

**Demonstratio.** Considerentur potentiae, ut § 27 monitum est, erunt potentiae $AB$, $AC$, $AD$ inter se ut numeri filorum (Fig. 9) $BE$, $CF$, $DG$. Cum omnis potentia tantum agat, quantum potest (28), omnia haec fila se tantum contrahent, quantum possunt, antequam acquiescant, aequilibriumque efficiant. Quare in statu aequilibrii omnium filorum summa erit contractio, seu summa longitudinum omnium filorum erit minima. Unde status aequilibrii per methodum maximorum et minimorum determinari poterit. Ea sic se habet, ut totius status situs proximus concipiatur, quo ea quantitas, quae maxima vel minima esse debet, invariata deprehendetur. Transferatur igitur $A$ in $a$, ita ut sit $AB = aB$, et hoc modo longitudo filorum $BE$ non immutatur. Ducantur $Ca$ et $Da$ et perpendicula $Ag$ et $ah$. Patet fila $CF$ elongata esse elemento $ag$, verum fila $DG$ decurtata elemento $Ah$. Sit

numerus filorum $CF = m$, filorum $DG = n$. Omnium ergo filorum longitudo crevit elemento $m.ag$ et decrevit elemento $n.Ah$. Quare ex proprietate minimi, cum in utroque situ $A$ et $a$ eadem esse debeat filorum longitudo, erit $m.ag = n.Ah$, unde $m:n = Ah:ag$. Est autem $Ah:ag = \sin Aah : \sin aAg$; sed $\sin Aah = \sin BaD$ seu $\sin BAD$, quia $Aah + BaD$ aequatur duobus rectis, ob $Dag$ et $BaA$ rectos. Simili modo est $\sin aAg = \sin BAC$. Ergo $m:n = \sin BAD : \sin BAC$. Est vero $m:n = AC:AD$ (27); ergo $AC:AD = \sin BAD : \sin BAC$. Simili ratiocinio evincitur esse $AB:AC = \sin CAD : \sin BAD$, ut ergo quaevis potentia sit ut sinus anguli a reliquis duabus potentiis formati. Q. E. D.

30. **Coroll. 1.** Ergo substituendo loco potentiarum pondera $P$, $Q$ et $R$ (Fig. 10) requiritur ad aequilibrium obtinendum, ut sit

$$P:Q = \sin DAC : \sin BAD$$
$$\text{et} \quad P:R = \sin CAD : \sin BAC.$$

31. **Coroll. 2.** Habito ergo aequilibrio, cognoscetur inde ratio potentiarum seu ponderum ex sinibus angulorum.

32. **Problema 4.** Fig. 11. Puncto $A$ duabus potentiis $AB$, $AC$ applicatis, applicare tertiam $AD$, cum illis in aequilibrio consistentem.

**Solutio.** Ex potentiis datis $AB$, $AC$ compleatur parallelogrammum $ABEC$, in quo per $A$ ducatur diagonalis $AE$, in qua ultra $A$ prolongata accipiatur $AD = AE$; dico hanc $AD$ exhibere tertiam potentiam quaesitam. Est enim $AD\,(= AE) : AB = \sin ABE : \sin AEB$. Sed ob figuram $ABEC$ parallelogrammum, est $\sin ABE = \sin BAC$ et $\sin AEB = \sin EAC = \sin CAD$. Consequenter erit $AD:AB = \sin BAC : \sin CAD$, ergo hae tres potentiae in aequilibrio consistunt (29). Q. E. I.

33. **Coroll. 1.** Si ducatur in parallelogrammo $ABEC$ altera diagonalis $BC$, haec et altera $AE$ se mutuo bisecabunt in $F$. Quamobrem $AD$ est dupla ipsius $AF$; unde haec fluit problematis constructio: Fig. 12. Datae duae potentiae $AB$, $AC$ jungantur recta $BC$; haec bisecetur in $F$, ducaturque $AF$, et in hac ultra $A$ producta sumatur $AD = 2AF$. Exprimet $AD$ tertiam potentiam, cum datis $AB$ et $AC$ in aequilibrio constantem.

34. **Coroll. 2.** Si ergo Fig. 13 tres potentiae $AB$, $AC$, $AD$, puncto $A$ applicatae, aequilibrium composuerint, junganturque $BC$, $BD$, $CD$, singula haec latera bifariam secabuntur in $F$, $G$ et $H$ a productis directionibus potentiarum $DA$, $CA$ et $BA$.

35. **Theorema 3.** Fig. 14. Si fuerint puncto $A$ quotcunque potentiae $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, $AF$, $AG$ in aequilibrio constantes applicatae, et earum quaevis $AB$ in alteram partem in $P$ producatur, ut sit $AP = AB$, exprimet haec $AP$ potentiam reliquis $AC$, $AD$, $AE$, $AF$, $AG$ aequivalentem, aequalem nimirum cum illis in punctum $A$ effectum exerentem.

**Demonstratio.** Cum omnes potentiae aequilibrium servent, potentiae $AC$, $AE$, $AF$, $AG$ impediunt ne potentia $AB$ effectum suum obtineat; oportet ergo, ut eae omnes simul conentur punctum $A$, secundum plagam ipsi $A$ oppositam, i. e. secundum $AP$, et vi ipsi $AB$ aequali promovere (5). Sed idem praestat potentia $AP$, quae una cum $AB$ puncto $A$ applicata, etiam aequilibrium constituit (19). Quare potentia $AP$ aequivalet omnibus, praeter $AB$ nempe, $AC$, $AD$, $AE$, $AF$, $AG$ simul agentibus. Q. E. D.

36. **Coroll. 1.** Potentiis ergo quotcunque puncto applicatis, ut definiatur potentia iis aequivalens, oportet determinari potentiam cum iis in aequilibrio constantem, huicque aequalem et contrariam applicari: erit haec potentia iis aequivalens.

37. **Coroll. 2.** Patet etiam, data potentia quotcunque datis aequivalente, inde inveniri facillime potentiam, insuper ad aequilibrium obtinendum applicandam, illi nimirum omnibus aequivalenti aequalem et oppositam applicando.

38. **Coroll. 3.** Fig. 15. Si ergo puncto $A$ applicatae sint duae potentiae $AC$, $AD$, compleaturque parallelogrammum $ACPD$, diagonalis $AP$ repraesentabit potentiam ambabus $AC$ et $AD$ aequivalentem; ejus enim aequalis et contraria $AB$ cum illis in aequilibrio consistet (32).

*Auct. script. in margine.* Hic principium compositionis et resolutionis potentiarum inseratur.

39. **Coroll. 4.** Poterit ex § 33 eadem potentia aequivalens sine completione parallelogrammi inveniri, jungendo $CD$ et ad ejus medietatem $E$ ducendo $AE$: hujus duplum $AB$ exhibebit potentiam aequivalentem (§ cit.).

40. **Definitio 7.** *Media directio* quotcunque potentiarum vocatur directio potentiae, iis potentiis omnibus aequivalentis.

41. **Coroll.** Duabus ergo potentiis $AC$ et $AD$ puncto $A$ applicatis, media earum directio incidit in diagonalem $AP$ parallelogrammi $ACPD$ (38).

42. **Axioma 3.** Loco quotcunque potentiarum puncto applicatarum, earum potentia aequivalens substitui potest.

43. **Problema 5.** Fig. 16. Puncto $A$ quotcunque potentiis $AC$, $AD$, $AE$, $AF$ applicatis, invenire potentiam iis omnibus aequivalentem.

**Solutio.** Duarum potentiarum $AC$ et $AD$ quaeratur aequivalens $AG$, jungendo puncta $C$ et $D$ recta $CD$, et per ejus medium $L$ ducendo $AG = 2AL$ (38). Substituatur loco $AC$ et $AD$ haec $AG$ (42), et eodem modo quaeratur potentia $AH$ aequivalens potentiis $AG$ et $AE$ (38), aequivalebit haec tribus potentiis $AC$, $AD$ et $AE$; quarum loco hac $AH$ substituta (42), porro quaeratur potentia $AP$, potentiis $AH$ et $AF$ aequivalens (38), aequivalebit haec $AP$ potentiis $AC$, $AD$, $AE$ et $AF$. Q. E. I.

44. **Coroll.** Potentiis ergo quotcunque $AC$, $AD$, $AE$ et $AF$ puncto $A$ applicatis, invenietur potentia $AB$ insuper applicanda, ut aequilibrium obtineatur, accipiendo $AB$ aequalem et oppositam potentiae $AP$, datis aequivalenti (39).

45. **Theorema 4.** Fig. 17. Puncto $A$ tribus potentiis $AC$, $AD$ et $AE$ applicatis, si ducatur $CD$, eaque in $L$ bifariam secetur, dein jungatur $LE$, in eaque accipiatur $LM = \frac{1}{3} LE$, ducaturque $AM$, hujus triplum $AP$ exprimet potentiam datis $AC$, $AD$ et $AE$ aequivalentem.

**Demonstratio.** Producatur $AL$ in $G$, ut sit $AG = 2AL$, erit potentia $AG$ aequivalens potentiis $AC$ et $AD$; ducatur $GE$: demonstrari oportet *primo* rectam $AM$ productam in medio $H$ secari, et *dein* esse $AM$ tertiam partem duplae $AH$, seu esse

$$AM : MH = 2 : 1 \ (38).$$

Ex Geometria constat esse $\sin GAH : \sin EAH = GH.AE : EH.AG$ ex consideratione trianguli $AGE$; sed ex triangulo $ALE$ erit $\sin GAH : \sin EAH = LM.AE : EM.AL$, unde haec eruitur analogia:

$$GH : AE : EH . AG = LM . AE : EM . AL$$

ergo ob $AL : AG = 1 : 2$ et $LM : ME = 1 : 2$, habebitur

$$GH : EH = LM : \tfrac{1}{2} EM = LM : LM, \text{ ergo } GH = EH, \quad \text{Q. E. Primum.}$$

Dein in triangulo $AEG$ est $\sin AEL : \sin GEL = GE : AE$, ob $AL = LG$. Et in triangulo $AEH$ est $\sin AEL : \sin GEL = AM . EH : MH . AE$; ergo erit $GE : AE = AM . EH : MH . AE$. Ergo ob $GE : HE = 2 : 1$ erit $2 : 1 = AM : MH$. Q. E. Alterum. Consequenter

$$AM : AH = 2 : 3 \text{ et } AM : AP = 1 : 3. \quad \text{Q. E. D.}$$

46. **Theorema 5.** Fig. 18. Si puncto $A$ sint plures potentiae applicatae (quae in figura non sunt expressae) quarum numerus sit $n + 1$; potentiis autem $n$ sit aequipollens $AL$, $n$ vicibus sumta; si ducatur ex $L$ ad residuam potentiam $AE$ recta $LE$, eaque dividatur in $M$, ut sit $LM : EM = 1 : n$, erit $AM$ pars $\frac{1}{n+1}$ potentiae, omnibus $n + 1$ aequivalentis.

**Demonstratio.** Producatur $AL$ in $G$, ut sit $AL : AG = 1 : n$, erit $AG$ potentia aequivalens omnibus praeter $AE$; jungatur $GE$; patet, ut $AM$ sit media directio potentiarum $AG$ et $AE$, oportere eam per medium $H$ lineae $GE$ transire (41), et ut sit $\frac{1}{n+1}$ potentiae aequivalentis omnibus $AM : 2AH = 1 : n + 1$ (38). In triangulo $ALE$ est

$$\sin GAH : \sin EAH = LM . AE : EM . AL = AE : nAL.$$

Dein in triangulo $EAG$ est $\sin GAH : \sin EAH = GH . AE : EH . AG$. Ergo

$$AE : n . AL = GH . AE : EH . AG;$$

ob $AG = n . AL$ erit $1 : 1 = GH : EH$, ergo $GH = EH$. Dein in triangulo $AEG$ est

$$\sin AEL : \sin GEL = AL . GE : GL . AE = GE : (n - 1) AE;$$

at in triangulo $AEH$ est $\sin AEL : \sin GEL = AM . EH : HM . AE$. Ergo ex his duabus oritur haec proportio $GE : (n - 1) AE = AM . EH : HM . AE$; ob $GE = 2EH$ erit $2 : n - 1 = AM : HM$. Ergo componendo $AM : AH = 2 : n + 1$, unde $AM : 2AH = 1 : n + 1$, sed $2AH$ seu $AP$ exprimit potentiam omnibus aequivalentem (39). Q. E. D.

47. **Coroll.** Si ergo fuerit $AL$ pars tertia potentiae aequivalentis tribus potentiis, erit $AM$ pars quarta potentiae aequivalentis quatuor. Si fuerit $AL$ pars quarta potentiae aequivalentis quatuor potentiis, erit $AM$ pars quinta potentiae aequivalentis quinque, et ita porro.

48. **Problema 6.** Fig. 19. Puncto $A$ quotcunque potentiis $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, etc. applicatis, invenire potentiam $AP$ iis aequivalentem, alio breviori modo.

**Solutio.** Juncta $BC$, bisecetur in $H$, ductaque $HD$ secetur in $J$, ut sit $HJ = \frac{1}{3} HD$, erit $AJ$ pars tertia potentiae aequivalentis tribus $AB$, $AC$ et $AD$ (45). Ducta $JE$ secetur in $K$, ut sit $JK = \frac{1}{4} JE$, erit $AK$ pars quarta potentiae aequivalentis quatuor $AB$, $AC$, $AD$ et $AE$ (47). Jungatur $KF$, eaque secetur in $L$, ut sit $KL = \frac{1}{5} KF$, erit $AL$ pars quinta potentiae aequivalentis illis quatuor cum $AF$ (47). Sumta $LM = \frac{1}{6} LG$, erit assumta $AP = 6AM$, $AP$ aequivalens datis sex (47) etc. Q. E. I.

49. **Definitio 8.** *Centrum* plurium potentiarum puncto applicatarum voco punctum, cujus a puncto, cui potentiae applicantur, distantia, per numerum potentiarum multiplicata, exprimit potentiam omnibus potentiis applicatis aequivalentem.

50. **Coroll. 1.** Punctum ergo $M$, ex praecedente problemate determinatum, est centrum potentiarum sex: $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, $AF$ et $AG$, et quomodo pro quotcunque potentiis determinetur, ex eodem problemate constat.

51. **Coroll. 2.** Patet etiam ex problemate (48), punctum $M$, nonnisi ex extremitatibus $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ linearum, potentias exprimentium, determinari, quae si sint eaedem, centrum potentiarum idem erit, ubicunque situm sit punctum, cui potentiae applicantur.

52. **Scholion.** De hoc centro in sequentibus demonstrabitur, esse id centrum gravitatis punctorum potentias determinantium, nempe esse $M$ centrum gravitatis punctorum $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ et $G$.

53. **Lemma 1.** Fig. 20. Si sint duo puncta $C$ et $D$, ex iisque ad lineam quamcunque $AB$ demittantur perpendicula $CA$, $DB$, linea autem $CD$ ita secetur in $F$, ut sit $CF : DF = 1 : n$, et ex $F$ in $AB$ perpendiculum $FE$ demittatur, erit

$$(n+1)\, FE = n \,.\, AC + BD.$$

**Demonstratio.** Ducatur $CG$ parallela ipsi $AB$, erit $DG : FH = CD : CF = n+1 : 1$, ergo $FH = \frac{DG}{n+1}$. Sed $DG = BD - AC$, ergo $FH = \frac{BD - AC}{n+1}$. Ergo

$$AC + FH = EF = \frac{BD + n.AC}{n+1}, \text{ consequenter } (n+1)\, EF = n.AC + BD, \text{ Q. E. D.}$$

54. **Theorema 6.** Fig. 21. Sint $B$, $C$, $D$, $E$ extremitates rectarum, potentias puncto cuidam applicatas exprimentium, $M$ centrum potentiarum. Assumta quacunque recta $be$, ad eamque ex punctis $B$, $C$, $D$, $E$, item ex centro $M$ demittantur perpendicula $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$ et $Mm$, erit $Mm$, in numerum punctorum $B$,$C$, etc. ducta, aequalis summae perpendiculorum $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$.

**Demonstratio.** Juncta $BC$ bifariam secetur in $F$, ductoque perpendiculo $Ff$ erit

$$2Ff = Bb + Cc \quad (53).$$

Juncta $FD$ secetur in $G$, ut sit $FG : DG = 1 : 2$; demisso ex $G$ perpendiculo $Gg$, erit

$$3Gg = 2Ff + Dd = Bb + Cc + Dd.$$

Porro juncta $GE$, eaque secta in $M$, ut sit $GM : EM = 1 : 3$, erit $M$ centrum potentiarum in punctis $B$, $C$, $D$ et $E$ desinentium (48, 50); demittatur ex $M$ perpendiculum $Mm$, erit

$$4Mm = 3Gg + Ee\ (53) = Bb + Cc + Dd + Ee.$$

Simili modo de quocunque potentiarum numero demonstratur $Mm$, in numerum potentiarum ductam, aequari summae omnium $Bb$, $Cc$, $Dd$ etc. Q. E. D.

*Nota in marg.* Idem ex resolutione potentiarum potest demonstrari.

55. **Coroll.** Me non monente patet, si quae puncta ultra lineam $be$ cadant, perpendicula ex iis demissa in $be$ negativa accipi debere.

56. **Problema 7.** Fig. 22. Quotcunque potentiarum $BA$, $CA$, $DA$, $EA$, etc. puncto $A$ applicatarum invenire centrum $M$.

**Solutio.** Ducta quacunque recta $GH$, ex punctis $B$, $C$, $D$ et $E$ extremis potentiarum datarum, in eam rectam demittantur perpendicula $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$, quorum summa aequalis erit distantiae centri potentiarum $M$ a recta $GH$, ductae in numerum potentiarum (54). Erit ergo distantia centri potentiarum a recta $GH$ aequalis summae omnium perpendiculorum $Bb$, $Cc$ etc. divisae per numerum potentiarum. Accipiatur in $HJ$, normali in $GH$, distantia haec centri sic inventa $H\mu$. Dein demittantur ex punctis $B$, $C$, $D$, $E$ in rectam $HJ$ perpendicula, erunt haec $bH$, $cH$, $dH$, $eH$. Quorum summa divisa per numerum potentiarum exhibebit distantiam centri quaesiti a recta $HJ$; sit ea $Hm$. Compleatur rectangulum $HmM\mu$. Cum puncti $M$ distantia a $HG$ sit $Mm = H\mu$, et a $HJ$, sit $M\mu = Hm$, erit $M$ centrum potentiarum quaesitum. Q. E. I.

57. **Coroll. 1.** Ducta ergo $AM$, eaque pro numero potentiarum replicata, habebitur potentia omnibus aequivalens.

58. **Coroll. 2.** Fig. 23. Si numerus punctorum $B$, $C$, $D$, etc. sit infinitus, constituatque curvam continuam $BE$, simili modo invenietur centrum potentiarum. Quaeratur summa omnium distantiarum punctorum $M$, $m$ a recta $GH$, eaque dividatur per numerum punctorum, qui exprimetur curvâ $BME$, et obtinebitur distantia centri potentiarum a $GH$. Eodem modo quaeratur summa distantiarum singulorum curvae punctorum a recta $HJ$, qua divisa per curvam $BME$, obtinetur distantia ejusdem centri a recta $HJ$ et hoc modo determinabitur. Accipiatur elementum curvae quodvis $Mm$, quod dicatur $ds$; demittantur perpendicula $MP$, $mp$, sit $PM = y$, exprimet $yds$ summam distantiarum punctorum in $Mm$ contentorum a $GH$; ergo $\int yds$ exhibebit summam omnium punctorum in $BE$ distantiarum a $GH$. Ergo $\int yds : BME$ aequatur distantiae centri potentiarum a $GH$. Eodem modo demissis ex $M$ et $m$ in $HJ$ perpendiculis $MQ$, $mq$ dictoque $MQ = x$, erit distantia centri a $HJ = \int xds : BME$. Unde dabitur

59. **Exemplum.** Sit Fig. 24 curva parabola $AMC$ parametri $a$; sit $AP = x$, $PM = y$, $AB$ axis curvae, erit $yy = ax$, ergo

$$Mm = ds = \frac{dy}{a}\sqrt{(aa + 4yy)}, \quad \text{unde} \quad yds = \frac{ydy}{a}\sqrt{(aa + 4yy)};$$

$$\text{ergo} \qquad \int yds = \frac{1}{12a}(aa + 4yy)^{\frac{3}{2}} - \frac{aa}{12} = \frac{2}{3a}\left(\frac{aa}{4} + yy\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{aa}{12}.$$

Sit $E$ focus, erit $AE = \frac{1}{4}a$, $PE = x - \frac{1}{4}a$, ergo

$$EM = \frac{1}{a}\left(\frac{aa}{4} + yy\right) \quad \text{et} \quad \frac{aa}{4} + yy = a.EM, \quad \text{consequenter} \quad \int yds = \frac{2}{3}EM\sqrt{a.EM} - \frac{aa}{12}.$$

Ducta tangente $MT$ et demisso ex foco $E$ perpendiculo $EN$, erit $EN = \frac{1}{2}\sqrt{a.EM}$, unde

$$\int yds = \frac{4EM.EN}{3} - \frac{4AE^2}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(EN^3 - AE^3)}{AE}.$$

Ergo distantia centri potentiarum arcus $AM$ ab axe $AB$ est $= \frac{4(EN^3 - AE^3)}{3AE.AM}$. Dein $xds = \frac{yydy}{aa}\sqrt{(aa + 4yy)}$,

cujus summa a rectificatione parabolae dependet; vocetur summa ejus $S$, erit distantia centri potentiarum a recta $AJ = \frac{S}{AM}$.

60. **Coroll. 3.** Fig. 25. Si curva $CBD$ habuerit duos ramos $BC$, $BD$ similes et aequales. Ducatur ejus diameter $BA$, ad eamque normalis $EF$. Patet centrum potentiarum in $CBD$ terminatarum in ipsam diametrum $AB$ incidere. Ad hoc centrum ergo determinandum, nonnisi distantiam ejus a recta $EF$ investigari oportet, modo § 58 tradito. Distantiae inde inventae accipiatur $AG$ aequalis, erit $G$ centrum quaesitum.

61. **Exemplum.** Fig. 26. Sit $CBD$ arcus circuli, cujus centrum $A$; bisecto arcu $CBD$ radio $AB$, ducatur ad eum normalis $AP$. Sit $AB = a$, $PM = y$, $AP = x$, erit $y = \sqrt{(aa - xx)}$ et $Mm = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$; unde $\int yds = \int adx = ax$. Adeoque summa distantiarum omnium punctorum in arcu $CBD$ erit $AB.CD$. Ergo distantia centri potentiarum $G$ ab $A$ erit $= \frac{AB.CD}{CBD} = AG$.

62. **Theorema 7.** Fig. 27. Si punctum $A$ attrahatur ad puncta $B$, $C$, $D$ et $E$ viribus, quae sunt ut distantiae a punctis iisdem, trahetur illud semper ad punctum fixum $M$, centrum potentiarum in punctis $B$, $C$, $D$, $E$ terminatarum, vi, quae est ut distantia ipsius $A$ ab $M$.

**Demonstratio.** Ductis rectis $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, exponent hae rectae, quae sunt distantiae puncti $A$ ab $B$, $C$, $D$ et $E$, potentias, quibus $A$ respective ad haec puncta trahitur (per hypoth.); habemus ergo casum potentiarum hucusque tractatarum (26). Quare $A$ trahetur semper versus punctum fixum $M$ (51) centrum potentiarum, et vi, quae est ut distantia $AM$, ducta in punctorum numerum (57) i. e. numero punctorum dato atque manente, ut distantia $AM$. Q. E. D.

63. **Coroll.** Si ergo punctum $A$ ad quotcunque puncta $B$, $C$, $D$ et $E$ attrahatur in ratione distantiarum, idem est ac si illud ad unicum punctum $M$ traheretur in eadem ratione distantiarum.

64. **Scholion.** Hucusque potentiae expressae sunt per lineas in directionibus earum assumtas, ut inde deduceretur lex, qua punctum ad quotlibet alia data, ad quae urgetur vi, quae semper est ut distantia ab iisdem, trahitur. At si ad ea puncta attrahatur vi, quae sit ut functio quaevis distantiae ab iisdem punctis, ad inventionem legis, qua ad omnia simul urgetur, potentias per functiones linearum exprimere oportet; quocirca sequentia ad hoc obtinendum adjungo.

65. **Theorema 8.** Fig. 28. Si punctum $A$ urgeatur utcunque ad puncta $B$ et $C$ viribus, quae sint ut $P$ et $Q$, ducaturque linea $AD$ secans angulum $BAC$ ita, ut sit $\sin BAD : \sin CAD = Q : P$, exprimet $AD$ mediam directionem.

**Demonstratio.** Producantur lineae $AB$ et $AC$ in $b$ et $c$, ut sit $Ab : Ac = P : Q$; exprimen ergo hae lineae $Ab$, $Ac$ potentias, quibus punctum $A$ secundum rectas $AB$ et $AC$ sollicitatur. Juncta $bc$, erit $\sin BAD : \sin CAD = bD.Ac : cD.Ab = bD.Q : cD.P$. Est autem ex hyp.

$$\sin BAD : \sin CAD = Q : P, \quad \text{ergo} \quad Q : P = bD.Q : cD.P, \quad \text{consequenter} \quad bD = cD.$$

Quare erit $AD$ media directio (33). Q. E. D.

66. **Theorema 9.** Fig. 29. Urgeatur punctum $A$ ad $B$ et $C$ potentiis $P$ et $Q$, ducaturque media directio $AD$. Erit $BD : CD = Q.AB : P.AC$.

*

**Demonstratio.** Cum $AD$ sit media directio, erit $\sin BAD : \sin CAD = Q:P$ (65); sed est $\sin BAD : \sin CAD = BD.AC:CD.AB$, ergo

$$Q:P = BD.AC:CD.AB \text{ consequenter } BD:CD = Q.AB:P.AC. \quad \text{Q. E. D.}$$

67. **Coroll.** Si fuerit $P = b.AB^n$ et $Q = c.AC^n$, erit $BD:CD = c.AC^{n-1}:b.AB^{n-1}$. Si ergo puncta $B$ et $C$ in ratione reciproca duplicata distantiarum attrahant, erit $n = -2$, unde

$$BD:CD = c.AB^3:b.AC^3.$$

68. **Theorema 10.** Fig. 28. Puncto $A$ sollicitato ad $B$ et $C$ potentiis $P$ et $Q$, erit potentia aequipollens ad alteram datarum $P$ ut se habet sinus anguli $BAC$ ad sinum $CAD$, existente $AD$ media directione.

**Demonstratio.** Productis $AB$ et $AC$ in $b$ et $c$, ut sit $Ab:Ac = P:Q$, bisecta $bc$, exprimet $AD$ dimidium potentiae aequivalentis (33). Est autem

$\sin BAC : \sin CAD = bc.AD:cD.Ab$; sed $bc = 2cD$, ergo $\sin BAC : \sin CAD = 2AD:Ab =$ potentia aequivalens : $P$; ergo potentia aequivalens est ad $P$ ut $\sin BAC$ ad $\sin CAD$. Q. E. D.

69. **Coroll. 1.** Fig. 29. Juncta recta $BC$, quam media directio in $D$ secet, erit

$$\sin BAC : \sin CAD = BC.AD:CD.AB;$$

consequenter potentia aequivalens erit ad alterutram datarum, puta ad eam, quae secundum $AB$ agit, $P$, ut $BC.AD:CD.AB$.

70. **Coroll. 2.** Est autem $BD:CD = Q.AB:P.AC$ (66), ergo $BC:CD = Q.AB + P.AC:P.AC$. consequenter, potentia aequivalente dicta $Æ$, erit $Æ.AC.AB = P.AC.AD + Q.AB.AD$.

71. **Problema 8.** Fig. 30. Si punctum $A$ ad puncta quotcunque $B$, $C$, $D$, $E$, etc. attrahatur in ratione cujusvis functionis distantiarum $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, etc., invenire mediam directionem harum potentiarum et potentiam aequivalentem.

**Solutio.** Producantur, si opus est, directiones $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, etc. et accipiantur $Ab$, $Ac$, $Ad$, $Ae$, etc., quae se habeant ut eae functiones, adeoque exprimant potentias, quibus punctum $A$ secundum respectivas directiones sollicitatur. Quo facto media directio et potentia aequivalens ex §§ 56 et 57 determinabitur, demittendo ad invicem normales $FR$ et $LR$, ex punctis $b$, $c$, $d$, $e$, etc. perpendicula $bF$, $cG$, $dH$, $eJ$ et $bK$, $cL$, $dM$, $eN$, etc.; dein accipiendo $RP$ aequalem summae perpendiculorum in $FR$, divisae per numerum potentiarum, et denique ducendo perpendiculum $PO$, aequale summae perpendiculorum in $RL$, divisae per numerum potentiarum, erit $O$ centrum potentiarum; unde reliqua facile determinantur. Q. E. I.

72. **Problema 9.** Fig. 31. Si punctum $A$ ad singula puncta curvae $BM$ trahatur in ratione cujusvis functionis distantiarum, invenire mediam directionem et potentiam aequivalentem.

**Solutio.** Assumatur quodvis curvae elementum $Mm$, et dimittantur in $AB$ perpendicula $MP$, $mp$; dicatur $AP = x$, $PM = y$, $Am = z = \sqrt{(xx + yy)}$. Sit functio, secundum quam $A$ ad puncta elementi $Mm$ attrahitur, $Z$; producatur $Am$ in $N$, ut sit $AN = Z$, demittanturque perpendicula $NQ$

et $NT$; erit vis, qua $A$ ad $N$ sollicitatur ut $Z$ in numerum punctorum $Mm$; sit $Mm = ds$; erit haec vis $= Zds$. Fiat $z:y = Zds:\frac{Zyds}{z}$, quae exprimet potentiam secundum $NQ$ agentem, et $\frac{Zxds}{z}$ potentiam secundum $NT$. Ergo summa omnium perpendiculorum $NQ$ est $\int\frac{Zyds}{z}$, quae divisa per numerum punctorum in curva $BM$ $(s)$ dat $\int\frac{Zyds}{z}:s$. Huic aequalis accipiatur $AS$. Dein summa omnium perpendiculorum $NT = \int\frac{Zxds}{z}$, quae divisa per numerum potentiarum $s$, dabit distantiam centri potentiarum (56) a $AT$, nempe $SO = \int\frac{Zxds}{z}:s$; erit ergo $O$ centrum potentiarum (56), unde quaesita facile determinantur. Q. E. I.

73. **Coroll. 1.** Fig. 32. Si curva $BCD$ ita fuerit comparata, ut a recta $AC$ in duas partes similes et aequales dividatur, insuper autem functio $Z$ eadem maneat, manente $z$, palam est centrum potentiarum in ipsam $AC$ incidere, ad quod investigandum saltem accipiatur $AO = \int\frac{Zxds}{z}:s$; erit $O$ centrum potentiarum quaesitum: idque, si tantum ramus $CB$ consideretur, quia alter ipsi aequalis est et similis.

74. **Coroll. 2.** Patet dein vim omnibus aequivalentem esse $AO.s$ (57) seu manente $s$; positione autem puncti $A$ variata, erit vis aequivalens ut $AO$.

75. **Exemplum 1.** Sit curva attrahens (Fig. 33) linea recta $BC$ perpendicularis in $AB$, et $AB = a$, erit $x = a$, $BM = s = y$; ergo $AM = z = \sqrt{(aa + ss)}$, unde

$$AS = \int\frac{Zsds}{\sqrt{(aa+ss)}}:s \quad \text{et} \quad SO = \int\frac{Zads}{\sqrt{(aa+ss)}}:s.$$

Sit $Z = cz^n = c\,(aa + ss)^{\frac{n}{2}}$, erit

$$AS = \int csds\,(aa + ss)^{\frac{n-1}{2}}:s = \frac{c}{n+1}\cdot\frac{(aa+ss)^{\frac{n+1}{2}} + C}{s}.$$

Quia $AS$ evanescit si $s = 0$, erit $C = -a^{n+1}$, ergo

$$AS = \frac{c\,(aa+ss)^{\frac{n+1}{2}} - ca^{n+1}}{(n+1)\,s} \quad \text{et} \quad SO = \int acds\,(aa+ss)^{\frac{n-1}{2}}:s.$$

Quae expressio, quoties $\frac{n-1}{2}$ non est numerus integer affirmativus, non integrari potest. Si ergo Fig. 34 punctum $A$ ad duas rectas $BC$, $DE$ parallelas, aequidistantes ab $A$, aequales et in $BD$ normales attrahatur, quia tum $SO$ evanescit, erit

$$AO = \frac{c\,(aa+ss)^{\frac{n+1}{2}} - ca^{n+1}}{(n+1)\,s}.$$

76. **Exemplum 2.** Fig. 35. Attrahat recta $BC$, cum qua in directum jacet punctum $A$, erit $y = 0$, $BM = s$ ($AB$ posito $= a$), $AM = x = a + s$, $z = a + s$, erit

$$AO = \int\frac{Zds\,(a+s)}{a+s}:s = \frac{\int Zds}{s}.$$

Sit $Z = (a+s)^n$, erit $AO = \frac{(a+s)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)\,s}$. Designet $s$ totam $BC$, ergo vis aequipollens

$=\frac{(a+s)^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$, seu ut $(a+s)^{n+1}-a^{n+1}$. Si $n=1$, erit haec vis ut distantia puncti $A$ a medietate lineae $BC$; si $n=-2$, erit vis aequivalens in ratione reciproca duplicata mediae proportionalis inter $AB$ et $AC$, seu erit reciproce ut rectangulum ex $AB$ in $AC$. At si sit $n=-1$, erit

$$AO=\int\frac{ds}{a+s}:s=l\left(\frac{a+s}{a}\right):s=\frac{l(a+s)-la}{s}.$$

Ergo vis aequivalens est ut log. $AC$ demto log. $AB$.

77. **Exemplum 3.** Fig. 36. Sit peripheria circuli $BMD$; ex centro $C$ erigatur perpendiculum $CA$ super ejus plano, in quo situm sit punctum $A$, quod a peripheria attrahatur. Sit radius $BC=a$, $AC=b$, erit $AM=\sqrt{(aa+bb)}$; unde in nostro casu $x=b$, $y=a$, $z=\sqrt{(aa+bb)}$. Sit centrum potentiarum $O$, erit enim in recta $AC$; erit

$$AO=\int\frac{Zxds}{z}:s=\int\frac{Zbds}{\sqrt{(aa+bb)}}:s=\frac{Zb}{\sqrt{(aa+bb)}} \text{ ob } Z \text{ constantem.}$$

Sit $\sqrt{(aa+bb)}=c$ et $Z=c^n$, erit $AO=bc^{n-1}$. Ergo tota vis $=bc^{n-1}p$, existente $p$ peripheria circuli. Sit $T$ punctum, in quo, si tota peripheria, eadem manente lege attractionis, congregeretur, $A$ eadem vi attraheretur; sit $AT=x$, erit vis $=x^np=bc^{n-1}p$, unde $x=b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{n-1}{n}}=AT$. Si $n=1$, incidet $T$ semper in $C$, sin vero $n=-2$, erit $AT=c\sqrt{\frac{c}{b}}$.

78. **Exemplum 4.** Fig. 37. Attrahatur punctum $A$ a tota circuli $CBb$ area. Assumatur circulus quivis concentricus $CMN$ radio $CM=y$, et ejus peripheria $\frac{py}{r}$, posita ratione radii ad peripheriam $r:p$; erit vis, qua punctum $A$ a peripheria hac $MN$ trahitur $=b(bb+yy)^{\frac{n-1}{2}}py:r$. Ergo vis, qua a limbo $MNmn$, posito $Mm=dy$, attrahitur, erit $b(bb+yy)^{\frac{n-1}{2}}pydy:r$, quae expressio integrata exhibet vim, qua punctum $A$ a circulo $CMN$ attrahitur, nempe

$$bp(bb+yy)^{\frac{n+1}{2}}:(n+1)r-b^{n+2}p:(n+1)r.$$

Sit $CB=a$, erit vis, qua a toto circulo $CBb$ trahitur

$$=bp(aa+bb)^{\frac{n+1}{2}}:(n+1)r-b^{n+2}p:(n+1)r.$$

Ad inveniendum punctum, in quo, si totus circulus congestetur, punctum $A$ eodem modo urgeretur, ponatur hujus puncti $T$ ab $A$ distantia $AT=x$, erit vis attractiva inde orta $=x^npaa:2r$, ergo

$$x=\sqrt[n]{\frac{2b}{(n+1)aa}\left((aa+bb)^{\frac{n+1}{2}}-b^{n+1}\right)}=\left(\frac{2b(aa+bb)^{\frac{n+1}{2}}-2b^{n+2}}{(n+1)aa}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

79. **Exemplum 5.** Fig. 38. Attrahatur punctum $A$ a superficie sphaerica, genita revolutione semiperipheriae $BMD$ circa diametrum $BD$. Dicatur $AC=b$, $BC=a$, et assumto puncto quovis $M$, ductaque applicata $MP$, sit $CP=x$, erit $AP=b-x$, $PM=\sqrt{(aa-xx)}$; erit vis, qua punctum $A$ a peripheria a puncto $M$ genita trahitur, $AP.AM^{n-1}.p.PM:r$. Est vero

$$AM=\sqrt{(aa+bb-2bx)}, \text{ unde haec vis } =(b-x)(aa+bb-2bx)^{\frac{n-1}{2}}p\sqrt{(aa-xx)}:r.$$

Assumto puncto proximo $m$, erit $Mm = \frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, unde vis, qua $A$ a limbo a $Mm$ genito trahitur,

$$= -apdx\,(b-x)\,(aa+bb-2bx)^{\frac{n-1}{2}} : r.$$

Sit $b-x=z$, erit haec vis $= apzdz\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n-1}{2}} : r$. Ergo vis a producto arcus $BM$ genita

$$= \frac{ap\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+3}{2}}}{2rbb\,(n+3)} + \frac{ap\,(bb-aa)\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+1}{2}}}{2rbb\,(n+1)} - \frac{ap\,(b-a)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} - \frac{ap\,(b+a)\,(b-a)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Ergo vis a tota superficie sphaerica orta est

$$= \frac{ap\,(a+b)^{n+3} - ap\,(b-a)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} + \frac{ap\,(b-a)\,(a+b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)} - \frac{ap\,(b+a)\,(b-a)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Si $n=1$, abit haec expressio in $\frac{2aabp}{r}$; ut ergo attractiones sint ut distantiae a centro, et eodem modo se habeant ac si tota superficies ibi esset congesta. Si $n=-2$, erit vis attractiva $=\frac{2aap}{rbb}$, quae est reciproce ut quadratum distantiae a centro, et eodem fit modo ac si tota superficies in centro congregetur. Hoc modo res se habet, si $A$ sit extra superficiem; sin vero intra in $P$, erit vis, qua a $BM$ trahitur

$$= \frac{ap\,(aa-bb)^{\frac{n+3}{2}}}{(n+3)\,(n+1)\,rbb} + \frac{ap\,(a-b)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} - \frac{ap\,(a+b)\,(a-b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Et a genito ex $DM$, $\quad = \frac{ap\,(aa-bb)^{\frac{n+3}{2}}}{(n+3)\,(n+1)\,rbb} + \frac{ap\,(a+b)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} - \frac{ap\,(a-b)\,(a+b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$

Trahetur ergo ad $C$ vi

$$= \frac{ap\,(a+b)^{n+3} - ap\,(a-b)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} + \frac{ap\,(a+b)\,(a-b)^{n+2} - ap\,(a-b)\,(a+b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Sit $n=1$, erit vis rursus $=\frac{2aabp}{r}$; si $n=-2$, erit haec vis $=0$. Nempe intra superficiem versus omnes plagas aequaliter trahitur. Id notandum, quod si $n$ sit numerus impar, expressionem attractionis extra et intra esse eandem; at si sit $n$ numerus par, tum eam esse diversam.

80. **Exemplum 6.** Attrahatur punctum $A$ a tota sphaera genita convolutione semicirculi $BMD$ circa axem $BD$, et vis, qua ad quamvis particulam attrahitur, sit ut potentia $n$ distantiae. Manentibus iisdem denominationibus ac in § praeced., erit vis, qua $A$ ad circulum revolutione $MP$ genitum attrahitur,

$$= \frac{AP.p}{(n+1)\,r}\left(AM^{n+1} - AP^{n+1}\right) = \frac{pz}{(n+1)\,r}\left((aa-bb+2bz)^{\frac{n+1}{2}} - z^{n+1}\right)$$

ergo vis, qua a genito elementi $PpmM$ trahitur, est

$$\frac{pzdz}{(n+1)\,r}\left((aa-bb+2bz)^{\frac{n+1}{2}} - z^{n+1}\right),$$

cujus integrale est

$$\frac{p\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+5}{2}} - p\,(b-a)^{n+5}}{2\,(n+1)\,(n+5)\,rbb} + \frac{p\,(bb-aa)\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+3}{2}} - p\,(bb-aa)\,(b-a)^{n+3}}{2\,(n+1)\,(n+3)\,rbb} - \frac{pz^{n+3} + p\,(b-a)^{n+3}}{(n+1)\,(n+3)\,r},$$

quod exprimit vim, qua $A$ a frusto globi ab $BPM$ genito attrahitur. Vis autem, qua a toto globo trahitur, est

$$=\frac{p(b+a)^{n+5}-p(b-a)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(b+a)^{n+3}+p(bb+aa)(b-a)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)rbb}=$$

$$\frac{p(nab+3ab-aa-bb)(b+a)^{n+3}+p(nab+3ab+aa+bb)(b-a)^{n+3}}{(n+1)(n+3)(n+5)rbb}.$$

Si $n=1$, erit attractio $=\frac{-2pba^3}{3r}$; attrahetur ergo $A$ in ratione distantiae a centro, et eodem modo ac si totus globus in centro esset collectus. Si $n=-2$, erit attractio $=\frac{2pa^3}{3rbb}$, eodemque modo se habet ac si totus globus in centro esset coadunatus. Si punctum $A$ sit intra globum in $P$, erit vis, qua a solido a segmento $BPM$ genito trahitur,

$$=\frac{p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}+p(a-b)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(a-b)^{n+3}-p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}}{2(n+1)(n+3)rbb};$$

reliqua vero globi pars attrahit vi, quae est

$$=\frac{p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}+p(a+b)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(a+b)^{n+3}-p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}}{2(n+1)(n+3)rbb}$$

trahitur ergo ad centrum globi vi

$$\frac{-p(a-b)^{n+5}+p(a+b)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(a+b)^{n+3}+p(bb+aa)(a-b)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)rbb}=$$

$$\frac{p(-aa-bb+nab+3ab)(a+b)^{n+3}+p(nab+3ab+aa+bb)(a-b)^{n+3}}{(n+1)(n+3)(n+5)rbb}.$$

Ubi notandum, si $n$ sit numerus impar, hanc formulam a superiore non differre; at si sit $n$ numerus par, valde fore diversam, ut si sit $n=-2$, erit vis $=\frac{2pb}{3r}$. Ergo intra globum attrahitur in ratione distantiae a centro.

81. **Scholion.** Cum iis in casibus, ubi $n$ est numerus par, formula vim attractricem exprimens, duplex haberi debeat, prout punctum $A$ sit extra vel intra figuram attrahentem. Videtur hic lex continuitatis non servari, cum tractio modo hanc, modo illam legem sequatur. Ad hoc dubium tollendum, dico vim attractivam talem algebraice non posse exprimi. Haec enim vis expressio: $x^n$, si $n$ est par, non congruit cum hypothesi attractionis: Sit enim (Fig. 39) punctum attrahens $C$, attractum $A$, $AC=x$, et vis, qua $A$ ad $C$ trahitur $x^n$, quae exhibet vim, qua $A$ deorsum tendit. Transferatur $A$ in $a$, ut sit $Ca=-x$; erit denuo vis, qua deorsum tendit, $=(-x)^n=$ (ob $n$ numerum parem) $x^n$; oporteret ergo $a$ denuo deorsum ad $D$ tendere; at ex hypoth. debet versus $C$ trahi, unde haec expressio . . . . . et correctione opus habet. Sin autem $n$ numerus impar, erit attractio deorsum versus $D=-(x)^n$ i. e. sursum tum trahetur, ob signum —, secundum legem attractionis.

82. **Axioma.** Fig. 40. Si punctum $C$ adjaceat firmo obstaculo $AB$, eique applicata sit potentia trahens $CD$, normalis in $AB$, punctum $C$ nihilominus quiescet. Obstaculum autem $AB$ premet

potentia, quae aequalis est potentiae *CD*. Si vero puncto *C* plures potentiae applicatae fuerint, id quiescet, si media directio in obstaculum fuerit normalis.

83. **Coroll. 1.** Fig. 41. Si ergo grave seu pondus *C* incumbat firmo obstaculo *AB*, quiescet illud, at subjectum obstaculum *AB* premet potentia aequali ejus ponderi (6).

84. **Coroll. 2.** Fig. 42. Si autem puncto *C* duae potentiae *CD* et *CE* oppositae fuerint applicatae, quarum utraque in *AB* normalis, patet si *CD* fuerit major *CE*, punctum *C* in quiete permanere, et obstaculum *AB* premere excessu potentiae *CD* super *CE*, at si $CE = CD$, ob statum aequilibrii (19), *C* quiescere et prorsus non obstaculum *AB* premere. Sin vero *CE* major fuerit quam *CD*, tum *C* amplius quiescere non posse, sed eodem modo in recta *CE* procedere, ac si differentia potentiarum $CE - CD$ illuc traheretur.

85. **Coroll. 3.** Fig. 43. Si ergo puncto *C* potentia *CD*, perpendicularis in tangentem *ab* obstaculi curvilinei *ACB* applicata sit, me non monente patet, eodem modo *C* in quiete permansurum, ac si *ab* designaret obstaculum, quoniam *ab* et *ACB* in puncto contactus *C* coincidunt.

86. **Scholion.** Veritas axiomatis inde patet, quod ob firmitatem obstaculi *C* (Fig. 40) directionem *CD* sequi non possit, et nulla adsit ratio, quare potius versus *A* quam *B* moveretur.

87. **Problema 10.** Fig. 44. Puncto *O* obstaculo *AB* adjacente, eique potentia *OC* applicata, invenire potentiam ei insuper applicandam, ut *O* in quiete permaneat.

**Solutio.** Potentia *OC* resolvatur in potentias laterales *OD*, *OE*, complendo parallelogrammum rectangulum *CDOE*, quarum *OE* est normalis in *AB*, altera vero *OD* agit secundum directionem obstaculi *AB*. Aequivalet potentia *OC* duabus *OE* et *OD* simul agentibus (38). Potentia autem *OE* puncto *O* nullum motum valet imprimere (82); adeoque non opus est hanc potentiam, applicatione contrariae, destruere. Altera vero *OD* punctum *O* libere valet secundum *OD* promovere, quia obstaculum ejus actionem non impedit; haec ergo applicatione contrariae, eique aequalis *OF* destruatur. Punctum *O*, applicata ei insuper potentia *OF*, in quiete persistet; obstaculum vero *AB* premetur potentia *OE*. Persistet autem *O* etiam in quiete, si potentia *OE* vel prorsus vel ex parte destruatur (84), applicata ergo $OJ = OE$. Duae potentiae *OF* et *OJ* simul, seu quae iis aequivalet *OH* (38) servabit *O* in quiete, et in hoc casu est $OH \doteq OC$, eique directe contraria. Deinde si saltem *OG*, quae minor est quam *OJ*, applicetur, conservabit *OK*, aequivalens ipsis *OG* et *OF*, denuo quietem. Quocirca ducta *FH* parallela et aequali ipsi *OE*, omnes rectae *OK*, quae ex *O* ad *FH* duci possunt, exhibebunt potentias una cum *OC*, in quiete punctum *O* conservantes. Poterit porro *OE*, quantum libet, augeri, et nihilominus quietis status conservabitur. Applicetur ergo, praeter *OF* destruentem *OD*, potentia *OL*: haec duae *OF* et *OL* simul, seu iis aequivalens *OM* denuo *O* in quiete servat. Ergo si producetur *CO* in *H*, ut sit $OH = CO$, atque ex *H* demittatur infinita recta *HR* perpendicularis in *AB*, quaecunque recta ex *O* ad eam ducta *OK*, *OM* punctum *O* in quiete conservabit. Q. E. I.

*Script. ad marg.* Melius haec solutio adornatur, praemittendo constructionem.

88. **Coroll. 1.** Problema ergo hoc infinitas admittit solutiones, cum infinite possint applicari potentiae, cum data *OC* statum quietis servantes.

89. **Coroll. 2.** Ex solutione manifestum est, conferendo cum ea § 84, quanta vi obstaculum $AB$, in quo vis casu prematur, nempe applicata potentia $OK$ vel $OM$, obstaculum premetur vi, quae exponitur recta $HK$ vel $HM$. Cum in priori casu sit $HK = OE - OG$, in posteriori $HM = OE + OL$.

90. **Coroll. 3.** Fig. 45. Si ergo fuerit obstaculum $AB$ ad horizontem inclinatum, eique incumbat punctum grave $O$, seu cui applicata est potentia verticalis $OC$: patet quomodo id in statu quietis servari debet. Erecta nempe verticali $OH = OC$, ducatur infinita $HR$, directionem $AB$ obstaculi in $F$ normaliter secans. Quaelibet recta $OK$, $OM$, ex $O$ ad hanc $HR$ ducta, exhibet potentiam, cum $OC$ statum quietis servantem. Et loco harum potentiarum poterunt pondera adhiberi (12).

91. **Scholion.** Facile patet, quare perpendiculum $HF$ in plagam $R$ in infinitum liceat producere non item ultra $H$. Cum enim pressio, quam sustinet obstaculum $AB$, sit proportionalis ipsi $KH$ electa potentia $OK$. Si ergo applicetur potentia $OH$, pressio haec evanescet. Sin autem potentia ultra $OH$ accipiatur, vis obstaculum premens erit negativa. Ergo (84) punctum $O$ directe ab obstaculo removeretur.

92. **Theorema 11.** Fig. 46. Puncto $O$ obstaculo $AB$ adjacenti, applicatis potentiis $CO$, $OD$, id in quiete conservantibus, erunt potentiae $OC$ et $OD$ inter se reciproce ut cosinus angulorum $AOC$, $BOD$, quos cum $AB$ constituunt.

**Demonstratio.** Cum $OC$ et $OD$ quietem conservent, patet ex solutione problematis praecedentis, demissis in $AB$ perpendiculis $CE$, $DF$, fore $OE = OF$. Est autem $\cos AOC = \frac{OE}{OC}$ et $\cos BOD = \frac{OF}{OD}$, unde erit $\cos AOC : \cos BOD = OE.OD : OF.OC = OD : OC$. Ergo $OC : OD = \cos BOD : \cos AOC$. Q. E. D.

93. **Coroll. 1.** Obstaculum autem $AB$ premitur potentia, quae est $= CE - DF$; exprimit autem $CE$ tangentem anguli $AOC$ et $DF$ tangentem anguli $BOD$, ob radios $OE$, $OF$ aequales. Premitur ergo obstaculum $AB$ potentia, quae est ut $\tang AOC - \tang BOD$. Cavendum igitur, ne haec expressio negativa evadat, quo in casu $O$ ex statu quietis exturbabitur (91).

94. **Coroll. 2.** Fig. 47. Si fuerit planum $AB$, cum horizonte $AE$ angulum $BAE$ constituens, eique incumbat grave $O$, seu cui applicata est potentia verticalis $OC$, trahaturque $O$ quoque a pondere $P$ secundum $OD$. Ad id, ut $O$ in quiete servetur, requiritur ut sit pondus $P$ ad pondus puncti $O$, seu ad vim, qua deorsum niti supponitur, ut $\cos AOC : \cos BOD = \sin BAE : \cos BOD$ id est, ut sinus anguli inclinationis plani, ad cosinum anguli, quem directio $OD$ cum plano $AB$ conficit.

95. **Coroll. 3.** Fig. 48. Si ergo angulus $DOB$ evanescit, recta $DO$ incidente in $AB$, erit cosinus hujus anguli = sinui toto. Erit ergo $P$ ad pondus ipsius $O$ ut sinus ang. $BAE$ ad sinum totum, i. e. ut $BE$ ad $AB$.

96. **Theorema 12.** Fig. 49. Si fuerint duo pondera $O$ et $o$, planis inclinatis $AB$ et $ab$ incumbentia, cum horizontalibus $AE$, $ae$ angulos $BAE$, $bae$ constituentibus, sintque ea pondera $O$ et $o$ juncta filo $ODo$, supra clavum firmum $D$ protenso, aequilibrium habebitur, si ex utraque parte factum ex pondere in sinum anguli inclinationis applicatum ad cosinum anguli, quem filum cum directione plani constituit, fuerit idem.

**Demonstratio.** Ut pondus $O$ in quiete conservetur, oportet, ut filum $OD$ trahatur seu tendatur potentia, quae est $=\frac{O\sin BAE}{\cos DOB}$ (94). Hac ergo vi conabitur $O$ filum $OD$ promovere. Eodem modo pondus $o$ tendet filum $Do$ vi $=\frac{o\sin bae}{\cos Dob}$ (cit.), quae duae expressiones, ut aequilibrium obtineatur, debent esse aequales. Etenim in statu aequilibrii necesse est, ut filum ex utraque parte aequaliter trahatur. Consequenter in statu aequilibrii oportet, ut sit $\frac{O\sin BAE}{\cos DOB}=\frac{o\sin bae}{\cos Dob}$. Q. E. D.

97. **Coroll. 1.** Fig. 50. Incumbat pondus $O$ curvae $AOB$, cujus tangens $OT$, sitque id alligatum filo in $D$ firmato, ducaturque verticalis $DP$, in hancque perpendiculum $OP$. Erit vis filum $OD$ tendens $=\frac{O\sin TOP}{\cos DOT}$. Est autem $\sin TOP=\frac{PT}{OT}$, et demisso ex $T$ in $OD$ perpendiculo $TQ$, $\cos TOQ=\frac{OQ}{OT}$, ergo $\frac{O\sin TOP}{\cos TOQ}=\frac{O.PT}{OQ}$. Ad has determinandas vocetur

$$DP=x,\quad PO=y,\quad DO=\sqrt{(xx+yy)}=z,\quad PT=t;$$

erit ob triangula $DQT$, $DPO$ similia, $DQ=\frac{xx-tx}{z}$, unde $OQ=\frac{zz-xx+tx}{z}=\frac{yy+tx}{z}$, hincque vis filum $OD$ tendens $=\frac{O.tz}{yy+tx}$.

98. **Coroll. 2.** Quia $t$ est subtangens, erit ex natura tangentium $t=\frac{ydx}{dy}$, unde

$$\frac{O.tz}{yy+tx}=\frac{O.zydx}{yydy+yxdx}=\frac{O.zdx}{ydy+xdx}.$$

Est autem $ydy+xdx=zdz$; unde vis filum $OD$ tendens erit $=\frac{O.dx}{dz}$.

99. **Problema 11.** Fig. 51. Junctis ponderibus $O$ et $o$ filo $ODo$ super clavo $D$ mobili, et eorum alterutro ubicunque super curva $AB$ data posito. Determinare alteram curvam $ba$, super qua, si alterum $o$ incumbat, semper habeatur aequilibrium.

**Solutio.** Ducta verticali $DP$, in eamque demissis perpendiculis ex $O$ et $o$, $OP$ et $op$, dicatur fili longitudo $OD+Do=a$, $DP=x$, $DO=z$, erit $Do=a-z$, sitque $Dp=v$. Erit vis, qua filum $DO$ a pondere $O$ trahitur $=\frac{O.dx}{dz}$ (98); et eodem modo tendetur filum $Do$ a pondere $o$ vi $=\frac{o.dv}{-dz}$. Hae duae vires tendentes filum $ODo$, ut aequilibrium obtineatur, debent esse aequales; est ergo $\frac{Odx}{dz}=\frac{odv}{-dz}$, hincque $Odx=-odv$; consequenter integrando erit $Ox=ob-ov$, ubi pro $b$ quaecunque data accipi potest. Est ergo $x=\frac{o(b-v)}{O}$. Dein dictis $PO=y$ et $po=t$, erit

$$a=\sqrt{(xx+yy)}+\sqrt{(vv+tt)}=\frac{\sqrt{(oo(b-v)^2+OOyy)}}{O}+\sqrt{(vv+tt)}$$

ergo $oo(b-v)^2+OOyy=aaOO+OOvv+OOtt-2OOa\sqrt{(vv+tt)}$, consequenter

$$y=\sqrt{\left(aa+vv+tt-2a\sqrt{(vv+tt)}-\frac{oo(b-v)^2}{OO}\right)}.$$

Hi valores ipsorum $x$ et $y$, si in aequatione inter $x$ et $y$ pro curva data $BOA$ substituantur, orietur aequatio inter $v$ et $t$ pro curva quaesita $boa$. Q. E. I.

100. **Coroll.** Est ergo, sumto $DO+Do=a$, $DP.O+Dp.o$ quoque constans. Si ergo fuerit $O=o$, erit summa abscissarum $DP+Dp$ constans, sumta $DO+Do$ constante. Patet ergo quomodo data una, altera facile construi possit.

*

101. **Exemplum 1.** Fig. 52. Sit curva data recta $DO$, per $D$ transiens, et $y = nx$; erit ad alteram curvam:

$$\sqrt{\left(aa + vv + tt - 2a\sqrt{(vv+tt)} - \frac{oo(b-v^2)}{OO}\right)} = \frac{no(b-v)}{O}.$$

Ergo $\frac{(nn+1)oo}{OO}(b-v)^2 = (a - \sqrt{(vv+tt)})^2$, unde $\frac{o(b-v)}{O}\sqrt{(nn+1)} = a - \sqrt{(vv+tt)}$.

Sit $\sqrt{(nn+1)} = m$, erit $Oa - mob + mov = O\sqrt{(vv+tt)}$, quae est aequatio ad hyperbolam vel ellipsin, prout $mo$ majus vel minus est quam $O$; sin autem $mo = O$, erit curva quaesita parabola. Si $Oa = mob$, erit $Ot = v\sqrt{(mmoo - OO)}$, etiam pro recta per $D$ transeunte.

102. **Exemplum 2.** Fig. 53. Sit curva data circuli quadrans $DOA$ per $D$ transiens. Erit dicto radio $DC = c$, $yy = 2cx - xx$. Substitutis loco $y$ et $x$ valoribus inventis (99), erit

$$(a - \sqrt{(tt+vv)})^2 = \frac{oo(b-v)^2}{OO} + \frac{2oc(b-v)}{O} - \frac{oo(b-v)^2}{OO} = \frac{2oc(b-v)}{O}$$

consequentér
$$aa + tt + vv - \frac{2oc(b-v)}{O} = 2a\sqrt{(tt+vv)}.$$

Quae aequatio exhibet curvam quarti ordinis. Si $aa = \frac{2obc}{O}$, erit

$$tt + vv + \frac{aav}{b} = 2a\sqrt{(tt+vv)}.$$

103. **Scholion.** Obiter hic moneo inservire hanc curvam pontibus elevandis. Si enim $OC$ designet pontem, circa $C$ mobilem: dum is elevatur, punctum extremum $O$ movetur in quadrante $AOD$. Si ergo altera curva $Doa$ dicto modo construatur et pondus debitum $o$ funi, circa trochleam in $D$ circumplicato, appendatur, in quocunque situ pontis, pondus $o$ eum in aequilibrio conservabit, ut ergo minima vis, hoc aequilibrium tollens, pontem attollere et rursus demittere possit. Ratio hujus autem in sequentibus, ubi de natura vectis dissceretur, quaeri debet.

104. **Problema 12.** Fig. 54. Si pondera $O$ et $o$ fuerint aequalia, determinare casus, quibus curvae $BA$ et $Ba$ sunt inter se eaedem et similiter applicatae.

**Solutio.** In statu quocunque $ODo$ demissis perpendiculis $OP$, $op$, erit $DP + Dp$ constans; accepta ergo $DC = \frac{DP+Dp}{2}$, erit $C$ punctum fixum, ergo semper $CP = Cp$. Dicatur $CP = x$, erit $Cp = -x$, sit $DC = b$, erit $DP = b + x$ et $Dp = b - x$. Exprimatur $DO$ per functionem ipsius $P$, quae, si loco $x$ substituatur $-x$, abeat in $p$ Designabit ergo $p$ rectam $Do$; oportet igitur, ut sit $P + p$ constans (100); ponatur $P + p = 2a$. Erit ergo $P = a + Q$ et $p = a - Q$; ut autem $P$ abeat in $p$, si loco $x$ substituatur $-x$, patet $Q$ talem esse debere ipsius $x$ functionem, quae abeat in $-Q$, posito $-x$ loco $x$. Unde loco $Q$ subrogari possunt $x$, $x^3$, $x^5$ etc. $x^{\frac{n}{m}}$, si $n$ numerus impar et $m$ par, etiam $x\sqrt{(cc+xx)}$ et hujusmodi infinitae, quae facile determinantur. Est ergo $DO = a + Q$; sit $PO = y$, erit

$$yy + bb + 2bx + xx = aa + 2aQ + QQ. \quad \text{Q. E. I.}$$

105. **Exemplum.** Sit $Q = hx$, erit $yy + xx(1 - hh) + 2x(b - ah) + bb - aa = 0$, quae aequatio, si $1 > h$, est ad ellipsin, si autem $1 < h$, ad hyperbolam; si vero $1 = h$, ad parabolam. Erit tum $yy = 2x(a - b) + aa - bb$; erit ergo $BC = \frac{a+b}{2}$ et $DB = \frac{b-a}{2}$. Sit

$$BP = t = x + \frac{a+b}{2}, \text{ ergo } x = t - \frac{a-b}{2}, \text{ consequenter } yy = 2t(a - b);$$

est ergo curva parabola, cujus parameter $= 2a - 2b$. Facta ergo Fig. 55 parabola $OBo$, cujus axis verticalis $BC$, constitui debet punctum fixum $D$ in foco. Punctum $C$ autem ubi lubet accipi potest. Et dein longitudo fili erit $= 2BC + 2BD$, atque hoc modo parabola satisfacit. Sin autem fuerit $\frac{b - ah}{hh - 1} = \sqrt{\frac{-bb + aa}{hh - 1}}$, erit $a = hb$ et $\frac{by}{\sqrt{(aa - bb)}} = b + x$, seu $by = (b + x)\sqrt{(aa - bb)}$ pro linea recta per $D$ transeunte.

106. **Theorema 13.** Fig. 56. Si duo pondera $O$ et $o$, filo rigido $Oo$ alligata, incumbant respective planis inclinatis $AB$ et $Ab$, erunt ea in aequilibrio, si fuerit $O$ ad $o$ ut (ducta horizontali $Bb$) factum ex $BA$ in $\cos . AOo$ ad factum ex $Ab$ in $\cos . AoO$.

**Demonstratio.** Accepto in $Oo$ puncto quocunque $D$, patet ad aequilibrium obtinendum, punctum tanta vi versus $o$ trahi debere, quanta versus $O$ trahitur. Etenim ut $O$ in statu suo conservetur, oportet ut filum $OD$ ad $D$ certa vi trahatur. Sed $o$, quia descendere conatur, filum $oD$ certa vi trahit; hae ergo vires ad aequilibrium obtinendum aequales esse debent. Vis autem, qua $OD$ versus $D$ trahi debet, est $= \frac{O . \sin ABb}{\cos AOo}$; vis vero, qua $o$ filum $Do$ tendit, est $= \frac{o \sin AbB}{\cos AoO}$. Oportet ergo ut sit $\frac{O \sin ABb}{\cos AOo} = \frac{o \sin AbB}{\cos AoO}$; sed $\sin ABb : \sin AbB = Ab : AB$, ergo

$$O : o = AB \cos AOo : Ab \cos AoO. \quad \text{Q. E. D.}$$

107. **Coroll. 1.** Ex demonstratione patet esse etiam $O : o = \frac{\cos AOo}{\sin ABb} : \frac{\cos AoO}{\sin AbB}$.

*Script. ad marg.* Corollarium hoc in theorema, theorema vero in corollarium mutetur.

108. **Coroll. 2.** Fig. 57. Si lineae $AB$, $Ab$ fuerint parallelae, obtinebitur ob $\sin ABb = \sin AbB$ et $\cos AOo = -\cos AoO$, haec analogia $O : o = -1 : 1$ i. e. $O = -o$, seu alterutrum corpus sursum tendere debet, ut figura annexa monstrat.

109. **Coroll. 3.** Fig. 58. Si altera linea $Ab$ fuerit horizontalis, erit $AB : Ab = 0 : 1$, hincque $O : o = 0 . \cos AOo : \cos AoO$. Quia autem $O : o$ datur, oportet ut sit $\cos AoO = 0$ seu ang. $AoO$ rectus.

110. **Coroll. 4.** Fig. 59. Si altera linea $AB$ fuerit verticalis, erit $O : o = \frac{\cos AOo}{1} : \frac{\cos AoO}{\sin AbB}$, ergo $\cos AOo : \cos AoO = O . Ab : o . AB$. Constructio hujus ex sequenti generali patebit.

111. **Coroll. 5.** Fig. 60. Sint latera $AB$, $Ab$ utcunque posita, et $Bb$ sit horizontalis; oportet sit $O : o = AB \cos AOo : Ab \cos AoO$, erit $\cos AOo : \cos AoO = O . Ab : o . AB$. Ad $Oo$ erigatur normalis $OE$, ipsi $bA$ productae in $E$ occurrens. Erit

$$\sin EOA = \cos AOo \quad \text{et} \quad \sin AEO = \cos AoO;$$

sed $\sin EOA : \sin AEO = AE : AO$. Ergo haec habetur analogia $AE : AO = O . Ab : o . AB$. Datur igitur ratio ipsius $AE$ ad $AO$, unde haec oritur constructio. Cum detur ratio ponderum, producatur

(Fig. 61) $bA$ in $F$, ut sit $AF:AB = O.Ab:o.AB$, seu accipiatur $AF = \frac{O.Ab}{o}$ i. e. $o:O = Ab:AF$. Jungatur $BF$ et in eam ex $A$ demittatur perpendicularis $AD$, aequalis longitudini fili datae. Ex $D$ ducatur parallela ipsi $Ab$, alteram $AB$ in $O$ secans, et ex $O$ parallela ipsi $AD$ applicetur $Oo$, exhibebit haec $Oo$ positionem fili ad aequilibrium requisitum.

112. **Problema 13.** Fig. 62. Data una curva $AO$, invenire alteram $Ao$ ejus conditionis, ut pondera $O$ et $o$, filo $Oo$ alligata, quomodocunque applicata, sint in aequilibrio.

**Solutio.** Sit situs fili $Oo$; utriusque curvae axis verticalis $AC$; ducantur applicatae $OP$, $op$, nec non tangentes $OT$, $ot$, plana, quibus pondera incumbunt, exhibentia. Sit $Oo = a$ et $AP = x$, $PO = y$; in altera curva $Ap = v$, $po = z$. Erit primo $Oo^2 = Pp^2 + (PO + po)^2$ i. e. $aa = (y+z)^2 + (x-v)^2$. Dein ex § 107 est $O:o = \frac{\cos TOC}{\sin TOP} : \frac{\cos toC}{\sin top}$. Demisso ex $T$ in $Oo$ productam perpendiculo $TQ$, erit $\cos TOC = \frac{OQ}{OT}$ et $\sin TOP = \frac{TP}{OT}$, ergo $\frac{\cos TOC}{\sin TOP} = \frac{OQ}{PT}$. $OQ$ autem sic invenitur: Ob triangula similia $OCP$ et $TCQ$ fac $OC:CP = TC:CQ$; ad obtinendum $OC$ fiat $y+z:a = y:\frac{ay}{y+z} = OC$; ad $CP$ fiat $y+z:x-v = y:\frac{y(x-v)}{y+z} = CP$, et $TC = TP - CP = \frac{ydx}{dy} - \frac{y(x-v)}{y+z}$; est ergo

$$CQ = \frac{ydx(x-v)}{ady} - \frac{y(x-v)^2}{a(y+z)}; \quad \text{ergo} \quad OQ = \frac{ydx(x-v)}{ady} - \frac{y(x-v)^2}{a(y+z)} + \frac{aay}{a(y+z)}.$$

Sed est $aa - (x-v)^2 = (y+z)^2$, ergo $OQ = \frac{ydx(x-v)}{ady} + \frac{y(y+z)}{a}$. Cum autem sit $PT = \frac{ydx}{dy}$, erit

$$\frac{OQ}{PT} = \frac{x-v}{a} + \frac{dy(y+z)}{adx} = \frac{ydy + zdy + xdx - vdx}{adx} = \frac{\cos TOC}{\sin TOP}.$$

Eodem modo est
$$\frac{\cos toC}{\sin top} = \frac{zdz + ydz + vdv - xdv}{adv}.$$

Quia autem est $aa = (y+z)^2 + (x-v)^2$, erit

$$0 = ydy + ydz + zdy + zdz + xdx - xdv - vdx + vdv,$$

ergo
$$zdz + ydz + vdv - xdv = -ydy - zdy - xdx + vdx,$$

consequenter
$$\frac{\cos toC}{\sin top} = \frac{-ydy - zdy - xdx + vdx}{adv}.$$

Erit igitur $O:o = \frac{1}{adx} : \frac{-1}{adv} = -dv:dx$, adeoque $Odx = -odv$ et integrando $Ox + ov = \text{Const. } C$. Quia autem est $aa = (y+z)^2 + (x-v)^2$, erit

$$x = \frac{C - ov}{O} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{(aa - (x-v)^2)} - z = -z + \sqrt{\left(aa - \left(\frac{C - v(O+o)}{O}\right)^2\right)}.$$

Unde data aequatione inter $x$ et $y$, invenietur aequatio inter $v$ et $z$. Q. E. I.

113. **Coroll. 1.** Sit $C = (O+o)b$, erit $x = \frac{(O+o)b - ov}{O}$ et $y = -z + \frac{\sqrt{(OOaa - (O+o)^2(b-v)^2)}}{O}$.

114. **Coroll. 2.** Si fuerit $O = o$, erit $x = 2b - v$ et $y = -z + \sqrt{(aa - 4(b-v)^2)}$.

115. **Coroll. 3.** Fig. 63. Data una curva, hoc modo facile altera construitur. Sit una $AO$, et accepto quovis puncto $O$, demittatur applicata $OP$. In axe accipiatur $Ap$, ut sit $\frac{AP.O + Ap.o}{O+o} = b$;

ex $p$ erigatur perpendiculum $po$. Centro $O$ radio $= a$ describatur circulus secans $po$ in $o$, erit $o$ punctum in curva quaesita. $a$ est longitudo fili, sed $b$ linea ad arbitrium sumta.

116. **Exemplum 1.** Si altera linea fuerit recta, erit altera sectio conica, ut calculum tentanti facile patebit.

117. **Exemplum 2.** Sint pondera $O$ et $o$ aequalia et una curva circulus, cujus diameter $= a$, ut adeo sit $yy = ax - xx$; sit porro $2b = a$, erit $x = a - v$ et

$$y = -z + \sqrt{(aa - (a - 2v)^2)} = -z + \sqrt{(4av - 4vv)}$$

at $ax - xx = av - vv$, unde $-z + 2\sqrt{(av - vv)} = \sqrt{(av - vv)}$, ergo $z = \sqrt{(av - vv)}$, seu $zz = av - vv$; altera ergo curva est rursus semicirculus. Consequenter in circulo, si linea pondera jungens fuerit diametro aequalis, quomodocunque ea applicetur, aequilibrium habebitur. Sed linea non solum non extensibilis, sed etiam neque contractibilis, neque flexibilis esse debet.

118. **Problema 14.** Determinare casus, ubi hae duae curvae sunt eaedem, positis ponderibus aequalibus.

**Solutio.** Fig. 64. Sint duae curvae quaesitae $AO$, $Ao$, quae debeant esse eaedem. Accipiantur duo loca $O$ et $o$, in quibus pondera existunt, homologa. Erit ductis applicatis $OP$, $op$, $AP + Ap$ constans $= 2b$, accipiatur ergo $AE = b$, erit semper $PE = pE$; erit autem $po = p\omega$. Dicatur $PE = x$, erit $pE = -x$, sitque $PO = y$, unde si haberetur aequatio inter $x$ et $y$, inveniri posset $p\omega$ ponendo, loco $x$, $-x$. Interim autem dicatur $p\omega = z$, quae ex eo definiri debet, quod puncta $O$ et $\omega$ sint in eadem curva. Est vero $aa = (y + z)^2 + 4xx$, ergo $y + z = \sqrt{(aa - 4xx)}$; fiat $y = P + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4xx)}$, abeat autem $P$ in $Q$, si loco $x$ ponetur $-x$, unde erit

$$z = Q + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 4xx)}.$$

Oportet ergo sit $P + Q = 0$. Unde patet loco $P$ poni posse $x$, $x^3$, $x^5$, etc., seu loco $P$ substitui potest quaevis functio impar ipsius $x$; functio enim impar abit in sui negativam, posito $-x$ loco $x$, ut ergo earum summa sit nihilo aequalis. Designante igitur $P$ functione impari, erit

$$y = P + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 4xx)}, \text{ hincque } 4yy - 8Py + 4PP = aa - 4xx,$$

adeoque est

$$yy + xx = \tfrac{1}{4}aa + 2Py - PP,$$

quae aequatio exhibet generalissime curvas quaesitas. Q. E. I.

119. **Exemplum 1.** Fig. 65. Sit $P = nx$, erit $yy + xx(1 + nn) = \frac{1}{4}aa + 2nxy$, quae est aequatio generalis pro omnibus ellipsibus. Videamus ergo, quomodo quaevis ellipsis applicari ad hunc usum possit. Sit ellipsis $AMB$, cujus axis transversus $c$; erit conjugatus $= \frac{aa}{c}$. Erit autem $n = \frac{cc - aa}{ac}$; ex $B$ constituatur perpendicularis $BD$ in axem $AB = \frac{cc}{2a}$, et ex centro $C$ ducatur $CD$, ut sit $CB : BD = a : c$. Erit haec $CD$ verticalis quaesita, cujus pars $D$ infra tendere debet, ut figura praesens exhibet (Fig. 66): habet nimirum formam cordis inversi. Si fuerit $a = c$, abit ellipsis in circulum, et etiam figura cordiformis fit circularis, juxta § 117.

120. **Exemplum 2.** Quia $nx\sqrt{(aa - 4xx)}$ est quoque functio impar ipsius $x$, substituatur loco $P$, et habebitur $y = (nx + \frac{1}{2})\sqrt{(aa - 4xx)}$, erit ergo

$$yy = (nx + \tfrac{1}{2})^2 (aa - 4xx) = nnaaxx - 4nnx^4 + naax - 4nx^3 + \tfrac{1}{4}aa - xx,$$

aequatio ad curvam quarti ordinis. Et quoniam $y$ habet duas dimensiones, erit curva ex utraque axis plaga eadem, quapropter curva satisfaciens erit una continua curva, non ex duabus curvis composita. (Fig. 67).

121. **Theorema 14.** Fig. 68. Si fuerit puncto $O$, intra angulum $AOB$ sito, potentia quaecunque $OC$ applicata, producta $CO$, erit potentia, qua $AO$ premitur, ad potentiam, qua $BO$ premitur, ut $\cos BOF$ ad $\cos AOF$.

**Demonstratio.** Vis $OC$ resolvatur in duas laterales $OD$ et $OE$, quae sint perpendiculares in $AO$ et $OB$. Cum vis $OC$ aequivaleat duabus $OD$ et $OE$ simul agentibus (38), vis autem $OD$ tota in pressionem lateris $AO$, et vis $OE$ in pressionem lateris $OB$ impendatur, erit vis, qua $AO$ premitur, ad vim, qua $BO$ premitur, ut $OD$ ad $OE$, seu $CD$, i. e. ut $\sin DCO : \sin DOC$; sed $\sin DCO = \sin COE$, et ob angulos $AOD$, $BOE$ rectos, est $\sin COE = \cos BOF$ et $\sin DOC = \cos AOF$. Ergo vis in $AO$ est ad vim in $BO$, ut $\cos BOF$ ad $\cos AOF$. Q. E. D.

122. **Coroll. 1.** Fig. 69. Si ergo fuerint duo plana inclinata $AO$ et $BO$ in $O$ concurrentia, et in angulo pondus $O$ incumbat, quia in hoc casu $OF$ est verticalis, ducatur horizontalis $MN$, et erit $\cos AOF = \sin AOM$ et $\cos BOF = \sin BON$. Quare vires, quibus plana haec inclinata premuntur, sunt reciproce ut sinus angulorum inclinationis.

123. **Coroll. 2.** Fig. 68. Si $OC$ in $OD$ incidat, tota vis in pressionem lateris $AO$ impenditur; si autem ultra $OD$ cadit, tum punctum $O$ non amplius in aequilibrio persistit, sed juxta $OA$ movebitur; ut ergo $O$ in quiete persistat, oportet ut $OC$ intra $OD$ et $OE$ cadat.

## Sectio secunda.

### De aequilibrio potentiarum, virgae rigidae applicatarum.

124. **Axioma 5.** Fig. 70. Si figurae cujuscunque $ACD$ puncto $A$ applicata fuerit potentia $AB$, eundem haec in figuram exercet effectum, ac si in puncto quolibet alio $M$, in $AB$ producta assumto, applicata fuerit secundum eandem directionem agens.

125. **Scholion.** Veritas hujus axiomatis cuique facile innotescet, hoc modo rem consideranti, ac si filum in $M$ fixum secundum directionem $MB$ traheretur; tum enim figurae usque in $A$ exacte adjacebit. Ponatur filum in $A$ usque agglutinari, effectus ejus non mutabitur; resecetur portio $AM$, effectus manebit; quare sive filum in $A$ sive in $M$ figatur, effectus idem erit.

126. **Coroll.** Fig. 71. Si ergo figurae $ACD$ duae potentiae $AB$, $ab$ applicatae sint, producantur directiones earum donec sese mutuo in $M$ intersecent; utraque earum eundem praestabit effectum, ac si in $M$ essent applicatae. Reducitur igitur hoc modo casus duarum potentiarum, duobus diversis punctis figurae applicatarum, ad casum jam expositum praecedenti sectione duarum potentiarum eidem puncto applicatarum.

127. **Scholion 1.** Manifestum est, hic intelligi debere potentias, cum figura in eodem plano constitutas; alioquin sese mutuo nusquam intersecarent.

128. **Scholion 2.** Ex hoc principio omnes casus potentiarum virgae rigidae non in eodem puncto applicatarum resolvuntur. Cum enim punctum illud, quo sese mutuo intersecant duae potentiae, nonnisi imagini opituletur, cuicunque figurae poterit affingi tantum planum, quantum sufficit ad punctum intersectionis excipiendum.

129. **Divisio.** Divido hanc Sectionem in duas partes, prout virga vel libera sit, ut omnibus potentiis aeque facile cedere valeat, vel ab obstaculo utcunque impedita. Utramque partem iterum subdividere convenit pro figura virgae, utrum ea recta sit an curva. Quos casus omnes in hac sectione evolvam, aut ad minimum principia praebebo, quibus singuli casus resolvi poterunt.

130. **Problema 15.** Fig. 72. Si virgae rectae $AB$ duae potentiae $AC$, $BD$ applicatae fuerint, in eodem plano positae, oportet applicare potentiam $OM$ duabus datis aequivalentem.

**Solutio.** Producantur $CA$ et $DB$ donec se mutuo in $a$ intersecent. Considerari ergo potentiae $AC$ et $BD$ possunt quasi puncto $a$ applicatae (128); fiat igitur $ac = AC$ et $ad = BD$, quae potentias datas tanquam in $a$ applicatas exhibent. Ducatur $cd$, eaque bisecta in $e$, ducatur $ae$, cujus duplum $am$ exhibet potentiam duabus $ac$, $ad$ aequivalentem (38). Transferatur haec in $ae$ producta in $OM$, quae adhuc aequipollet duabus $ac$ et $ad$ (128); aequivalet igitur quoque potentiis $AC$ et $BD$. Q. E. I.

131. **Coroll. 1.** Quia potentiae datae in eodem plano positae esse debent (127), patet, pro potentiis non in eodem plano sitis aequivalentem inveniri non posse. Ponatur enim dari potentiam aequivalentem duabus non in eodem plano sitis, resolvatur utraque in duas, quarum una in eodem plano cum aequivalente, altera in id normalis. Patet has normales ab assumta aequivalente non compensari posse, quare aequivalens non datur.

132. **Coroll 2.** Poterit quoque punctum $O$ ex hac proprietate inveniri: In $\triangle\, acd$, a recta $ae$ secto, est $\sin cae : \sin dae = ce.ad : de.ac = ad : ac$ (ob $ce = de$) $= BD : AC$ (per hyp.) Dein in $\triangle\, AaB$ ab $aO$ secto est $\sin cae : \sin dae = AO.aB : BO.aA$; unde conficitur $BD : AC = AO.aB : BO.aA$. Est vero $aB : aA = \sin BAa : \sin ABa = \sin CAB : \sin DBA$; ergo erit $BD : AC = AO \sin CAB : BO \sin DBA$; consequenter $AO : BO = BD \sin DBA : AC \sin CAB$; est ergo $AC.AO \sin CAO = BD.BO \sin DBO$: factum $AC$ in $AO$ et $\sin CAO$ vocatur momentum potentiae $AC$ respectu puncti $O$. Ergo momenta vis et ultra $O$ debent esse aequalia.

133. **Coroll. 3.** Fig. 73. Definito hoc modo puncto $O$, in quo potentia aequivalens applicari debet, magnitudo ejus et positio sequenti modo facilius invenietur: Ex $B$ ducatur $Bc$ parallela et aequalis ipsi $AC$; ducta $cD$ et bisecta in $e$, ducatur $Be$, cujus duplum erit $Bm$; huic ex $O$ aequalis et parallela ducatur $OM$, erit haec potentia aequivalens quaesita.

*Script. ad marg.* ad Fig. 74. Momentum potentiae $BA$ in $O$ aequatur $BA.OE$, demisso $OE$ perpendiculo in $BA$ productam.

134. **Coroll. 4.** Fig. 75. Si potentiarum applicatarum directiones $AC$, $BD$ fuerint inter se parallelae, erit $\sin CAB = \sin DBA$, adeoque erit $AO : BO = BD : AC$, seu est $AC.AO = BD.BO$. Dein, quia in hoc casu $Bc$ (Fig. 73) incidit in $BD$, incidet quoque $Bm$ in $BD$, eritque

$$Bm = AC + BD = OM.$$

Ducatur igitur (Fig. 75) $OM$ parallela ipsius $AC$ vel $BD$ accipiaturque aequalis $AC + BD$, exprimet haec $OM$ potentiam duabus datis aequivalentem.

*Script. ad marg.* Momentum potentiae aequatur momentis potentiarum aequivalentium.

135. **Coroll. 5.** Fig. 76. Inventa potentia aequivalente $OM$, obtinebitur potentia propositas $AC$ et $BD$ in aequilibrio servans. Producatur nimirum $MO$ in alteram partem in $N$ usque, ut sit $ON = OM$; exprimet $ON$ potentiam cum $OM$ in aequilibrio stantem. Cum autem $OM$ aequivaleat ambabus $AC$ et $BD$, patet et $ON$ in aequilibrio conservaturam potentias $AC$ et $BD$.

*Script. ad marg.* Momentum potentiae $AC$ in $O$ aequatur vi, quam virga in $O$ habere debet, ne frangatur.

136. **Coroll. 6.** Fig. 77. Si directiones potentiarum in eadem recta cum virga jaceant, ut $AC$ et $BD$, erit tum $AO:BO = BD \sin DBA : AC \sin BAC$ id est ut $0:0$. Quare cum hic 0 ad 0 rationem quamcunque habere queat, punctum $O$ ubicunque accipi poterit, et potentia aequivalens etiam in ipsam $AB$ incidet, et aequalis erit differentiae inter has potentias, inque plagam fortioris dirigetur.

137. **Scholion.** Veritas hujus corollarii immediate ex axiomate quinto patet, juxta quod eodem redit, in quo virgae $AB$ puncto potentiae applicentur, quia directiones earum in eam incidunt. Idem ad plures potentias eodem modo extenditur.

138. **Coroll. 7.** Fig. 78. Methodus tradita, duarum potentiarum aequivalentem vel contrariam inveniendi, facile ad plures potentias extendetur. Hoc modo sint virgae $AB$ applicatae potentiae $AC$, $JD$, $KE$, $LF$, $NG$ et $BH$; sumantur primo duae $AC$, $JD$, harumque quaeratur aequivalens, quae loco duarum $AC$, $JD$ substituatur; hujus et alius v. gr. $KE$ iterum quaeratur aequivalens, loco trium $AC$, $JD$, $KE$ substituenda, et hoc peragatur, donec omnium aequivalens $OM$ obtineatur.

139. **Theorema 15.** Fig. 79. Sint virgae rigidae $AB$ duae potentiae $AC$, $BD$ quaecunque applicatae, ductaque sit potentia $OM$ iis aequivalens. Tum si in $AB$ producta punctum quodcunque $Z$ accipiatur, erit $OM.OZ \sin MOZ = AC.AZ \sin CAZ + DB.BZ \sin DBZ$.

*Script. ad marg.* NB. Propositio haec valet, si $Z$ extra rectam $AB$ sumatur: generalius ergo proponatur demonstratio.

**Demonstratio.** Patet per § 132 esse $AC.AO \sin CAZ = BD.BO \sin DBZ$; ergo ob $AO = AZ - OZ$ et $BO = OZ - BZ$, erit $AC.AZ \sin CAZ - AC.OZ \sin CAZ = BD.OZ \sin DBZ - BD.BZ \sin DBZ$, sive $AC.AZ \sin CAZ + BD.BZ \sin DBZ = AC.OZ \sin CAZ + BD.OZ \sin DBZ = OZ(AC \sin CAZ + BD \sin DBZ)$. Nunc circa positionem lineae $OM$ consulatur § 133, juxta quem ducatur $Bc$ aequalis et parallela ipsi $AC$ et juncta $cD$, bifariamque secta in $e$, ducta est $Bm = 2Be$, quae aequalis est et parallela ipsi $OM$. Ducatur porro per $e$ recta $fg$ parallela virgae $AB$; erit $2Be \sin Beg = Bf \sin Bfe + Bg \sin Bge$, seu $OM \sin MOZ = Bf \sin CAZ + Bg \sin DBZ$. Dein in $\triangle Deg$ est

$$\sin Deg : \sin Dge \; (= \sin DBZ) = Dg : De,$$

et in $\triangle fec$ est

$$\sin cef : \sin cfe \; (= \sin CAZ) = cf : ce,$$

ergo ob $\sin Deg = \sin cef$ et $De = ce$ (hyp.), erit

$$Dg \sin DBZ = cf \sin CAZ, \quad \text{seu} \quad Dg \sin DBZ - cf \sin CAZ = 0.$$

Est igitur

$$OM \sin MOZ = Bf \sin CAZ + Bg \sin Bge + Dg \sin DBZ - cf \sin CAZ = Bc \sin CAZ + BD \sin Bge = AC \sin CAZ + BD \sin DBZ.$$

Consequenter substituto supra loco $AC \sin CAZ + BD \sin DBZ$ ejus aequali $OM \sin MOZ$ habebitur

$$AC.AZ \sin CAZ + BD.BZ \sin DBZ = OM.OZ \sin MOZ. \quad \text{Q. E. D.}$$

140. **Coroll. 1.** Si $Z$ incidat in $O$, erit $OZ = 0$, $AZ = AO$, $BZ = -BO$, ergo

$$AC.AO \sin CAZ = BD.BO \sin DBZ$$

ut jam constat.

141. **Coroll. 2.** Distet punctum $Z$ infinite, erunt $AZ$, $OZ$, $BZ$ inter se aequales, unde consequitur $AC \sin CAZ + BD \sin DBZ = OM \sin MOZ$, uti jam ex ipsa demonstratione elucet.

142. **Coroll. 3.** Fig. 80. Ex hisce, quae de duabus potentiis demonstrata sunt, facile colligitur, quid de pluribus potentiis $AE$, $BF$, $CG$, $DH$, virgae $AD$ applicatis respectu puncti $Z$, in $AD$ producta accepti, statuendum sit, designante $OM$ potentia omnibus aequivalente. Exprimat $om$ potentiam aequivalentem duabus $AE$ et $BF$, et $\omega\mu$ potentiam aequivalentem duabus $CG$ et $DH$; erit $OM$ potentia duabus $om$ et $\omega\mu$ aequivalens; ergo $OM.OZ \sin MOZ = om.oZ \sin moZ + \omega\mu.\omega Z \sin \mu\omega Z$. Est vero

$$om.oZ \sin moZ = AE.AZ \sin EAZ + FB.BZ \sin FBZ \quad \text{et}$$

$$\omega\mu.\omega Z \sin \mu\omega Z = GC.CZ \sin GCZ + HD.DZ \sin HDZ, \quad \text{ergo}$$

$$OM.OZ \sin MOZ = AE.AZ \sin EAZ + FB.BZ \sin FBZ + GC.CZ \sin GCZ + HD.DZ \sin HDZ$$

et haec proprietas valet, quantuscunque fuerit numerus potentiarum.

143. **Coroll. 4.** Si $Z$ incidat in $O$, abibunt $AZ$, $BZ$, $CZ$, $DZ$

in $AO$, $BO$, $-CO$, $-DO$

et $OZ$ evanescet. Ergo $AE.AO \sin EAO + FB.BO \sin FBO = GC.CO \sin GCO + HD.DO \sin HDO$. Ubi notandum est, ex una parte omnes potentias ex una parte puncti $O$ esse constitutas, et ex altera potentias ex altera parte puncti $O$ applicatas.

144. **Coroll. 5.** Cum in hac aequalitate neque ipsa $OM$ neque angulus $MOA$ in computum ingrediatur, poterit ex ea locus puncti $O$ inveniri.

145. **Coroll. 6.** Si punctum $Z$ infinite distet, erunt $AZ$, $BZ$, $CZ$, $DZ$ et $OZ$ inter se aequales, et ideo erit $AE \sin EAZ + BF. \sin FBZ + CG \sin GCZ + DH \sin HDZ = MO \sin MOZ$.

146. **Coroll. 7.** Ex hac aequalitate factum ipsius potentiae aequivalentis omnibus, $MO$, in sinum anguli, quem cum virga constituit, cognoscitur; si igitur alia insuper proprietas adjiciatur, potentia $OM$ penitus applicari poterit.

147. **Problema 16.** Fig. 81. Si virgae rigidae $AD$ potentiae quotcunque $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ inter se parallelae applicatae fuerint, invenire potentiam $OM$, omnibus aequivalentem.

*

**Solutio.** Patet ex § 134 potentiam duabus parallelis aequivalentem iisdem esse parallelam, quod quoque ad plures potentias extenditur. Ut ergo $OM$ sit parallela directioni potentiarum, erunt anguli $EAZ$, $FBZ$, $GCZ$, $HDZ$ et $MOZ$ omnes inter se aequales, ergo ex § 145 facta divisione per angulorum sinus, elicietur $MO = AE + BF + CG + DH$. Dein, assumto $Z$ ut ante, ex § 142 abjectis sinibus angulorum, nanciscimur

$$OM.OZ = AE.AZ + FB.BZ + GC.CZ + HD.DZ$$

quia vero $MO = AE + BF + CG + DH$, erit

$$OZ = \frac{AE.AZ + FB.BZ + GC.CZ + HD.DZ}{AE + BF + CG + DH}.$$

Unde invenietur punctum $O$, ex quo dein ducatur $OM$, parallela potentiis datis et omnibus simul sumtis aequalis: exprimet haec $OM$ potentiam omnibus aequivalentem. Q. E. I. Ergo momentum potentiae aequivalentis in $Z$ aequatur summae omnium momentorum in $Z$.

*Script. ad marg.* Problema generaliter concipiatur pro potentiis utcunque inclinatis, et invenietur $ZO =$ summae omnium momentorum divisae per summam potentiarum, in sinus inclinationum suarum ductarum, et problema ipsum, instar corollarii, inde derivetur.

148. **Coroll. 1.** Si potentiae $OM$ aequalis et directe contraria applicetur, erit ea in aequilibrio cum omnibus applicatis. Patet ergo hoc in casu potentiam, datas in aequilibrio servantem, eandem cum iis directionem habere et iis omnibus simul sumtis esse aequalem.

149. **Coroll. 2.** Fig. 82. Appendantur virgae rigidae $AB$ pondera $P$, $T$, $Q$ ex punctis $A$, $C$, $B$; determinetur $O$ ut doctum est, et, filo $OM$ verticaliter posito et supra trochleas $M$ et $N$ ducto appendetur pondus $R$, aequale ipsis $P$, $T$ et $Q$ simul; conservabit hoc pondus $R$ reliqua in aequilibrio, ut ex antecedentibus clarum est.

150. **Scholion.** Non immoror hic expositioni casuum, quibus directiones potentiarum ad alteram virgae partem cadunt, quibus in casibus valor ipsarum evadit negativus, id quod cuivis in Geometria versato, qualem hic lectorem suppono, nullam difficultatem facesset. Ne propterea corollaria nimium accumulentur.

151. **Definitio 9.** Si loco potentiarum pondera applicentur, punctum, in quo potentia, omnia applicata pondera in aequilibrio servans, applicari debet, vocatur *centrum gravitatis.*

*Coroll. marg. adscript.* Sequitur hinc centrum gravitatis non mutari, utcunque inclinationes potentiarum varientur, modo inter se semper parallelae maneant.

152. **Scholion.** Equidem non opus est, ut pondera reipsa sint applicata. Sed cum singula corporum naturalium elementa gravia sint, unumquodque tanquam pondus appensum habens considerari potest. Unde inventio centri gravitatis se ad omnia corpora gravia extendit.

153. **Problema 17.** Fig. 83. Si virgae rigidae $AB$ in singulis punctis $P$ appensa fuerint pondera, quae sint ut respondentes applicatae $PM$ curvae cujusvis $CMD$, invenire centrum gravitatis $O$ virgae $AB$.

**Solutio.** Cum singulae applicatae curvae $CMD$ exprimant potentias virgae $AB$ applicatas, accipiatur in $AB$ producta, ubi libuerit, punctum $Z$, ut distantia $OZ$ centri gravitatis $O$ ab hoc $Z$ inveniatur. Est autem (147) $OZ$ aequalis summae factorum ex singulis potentiis $PM$ in respectivas distantias $PZ$ a $Z$, divisae per summam omnium potentiarum. Puncto $P$ accipiatur proximum $p$, erunt singulis elementi $Pp$ punctis potentiae aequales $PM$ vel $pm$ applicatae, ut ergo summa potentiarum elemento $Pp$ applicatarum sit $PM.Pp$, et summa momentorum in elemento $Pp = PM.PZ.Pp$. Ergo summa omnium momentorum in $AB$ erit $\int PM.PZ.Pp$, summa vero omnium potentiarum in $AB$ erit $\int PM.Pp$. Ex quibus erit $OZ = \frac{\int PM.PZ.Pp}{\int PM.Pp}$; seu vocatis $ZP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$, ergo $OZ = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$. Q. E. I.

154. **Coroll. 1.** Si $CD$ fuerit recta parallela cum $AB$, erit $y$ constans $= b$, ergo

$$OZ = \frac{\int bxdx}{\int bdx} = \frac{xx}{2x} + C = \frac{x}{2} + C.$$

Si $x = BZ$, erit $OZ = BZ$, ergo $C = \frac{1}{2}BZ$; si $x = AZ$, habebitur $OZ = \frac{AZ + BZ}{2}$, et haec dat punctum $O$.

155. **Coroll. 2.** Fig. 84. Si curva, a potentiis virgae $AB$ applicatis formata, ejusmodi fuerit, ut versus $A$ et $B$ ramos similes et aequales protendat, seu ut verticalis $OM$, ex medio $O$ virgae $AB$ ducta, curvam in duas aequales partes secet, tum palam est, centrum gravitatis $AB$ in medium $O$ casurum.

156. **Coroll. 3.** Fig. 85. Generaliter invento puncto $O$, seu centro gravitatis, ut obtineatur potentia omnibus aequivalens, oportet in $O$ applicare potentiam $OR$, omnibus simul sumtis aequalem. Ita $OR$ erit aequalis $\int ydx$.

157. **Coroll. 4.** Sit curva $AD$ quadrans circuli, cujus centrum $B$. Incidat $Z$ in $B$; dicta $BP = x$, $PM = y$ et radio $BD = a$, erit $BO = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$, et ob $y = \sqrt{(aa - xx)}$, erit

$$BO = \frac{\int xdx\sqrt{(aa - xx)}}{\int dx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{A - \frac{1}{3}(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{\int dx\sqrt{(aa - xx)}}.$$

Si punctum $P$ incidit in $A$, erit $x = a$ et $\int dx\sqrt{(aa - xx)} =$ quadranti $= Q$. At, quia incidente $P$ in $B$, $BO$ evanescere debet, erit $A = \frac{1}{3}a^3$; fiat $x = a$, erit $BO = \frac{a^3}{3Q}$ et $OR = Q$; unde momentum hujus potentiae aequivalentis in $B$ erit $OR.Q = \frac{1}{3}a^3$, cui etiam aequatur summa singulorum momentorum in $AB$.

158. **Theorema 16.** Fig. 86. Si habeatur virga rigida $AB$ talium in quovis loco pondusculorum, ut applicata $PM$ curvae $AM$ exprimat summam omnium ponduscolorum portionis $AP$, seu quae exprimat pondus partis $AP$, erit centrum gravitatis partis $AP$ in $O$, ut sit

$$PO.PM = \text{areae } APM.$$

**Demonstratio.** Accipiatur ubivis punctum $Q$, ducaturque applicata $QN$, dein proximum ei $q$ et applicata $qn$; exprimet $QN$ pondus partis $AQ$, et $qn$ pondus ipsius $Aq$, ut igitur $nr$ exhibeat pon-

dusculum elementi $Qq$. Hujus in $P$ momentum erit $nr.QP$. Puncti $P$ accipiatur sequens $p$, erit momentum ponderis $Qq$ in $p = nr.Qp$; ergo differentia momentorum in $p$ et $P$ est $= nr.Pp$. Idem cum de omnibus valeat, erit differentia omnium momentorum a portione $AP$ in $p$ et in $P = PM.Pp$. Quanquam in $p$ etiam praeter caetera agat ponduscuIum elementi $Pp$, seu $ms$, tamen id respectu $PM.Pp$ negligitur. Sit jam summa momentorum virgae $AP$ in $P = M$, erit summa momentorum virgae $Ap$ in $p = M + dM$; erit igitur differentia $dM = PM.Pp = PpmM$. Consequenter sumendo integralia erit $M = APM =$ summae momentorum virgae $AP$ in $P$. Si fuerit $O$ centrum gravitatis virgae $AP$, erit pondus totius virgae $AP$, i. e. $PM$ in $OP$ aequale summae omnium momentorum virgae $AP$ in $P$. Erit igitur

$$PM.OP = APM. \quad \text{Q. E. D.}$$

159. **Coroll. 1.** Ex hoc ergo nascitur nova methodus centrum gravitatis inveniendi; est enim $OP = \frac{APM}{PM}$. Quae methodus interdum altera foecundior esse poterit, praecipue quando totum virgae pondus datur.

160. **Coroll. 2.** Est igitur $AO = AP - \frac{APM}{PM} = \frac{AP.PM}{PM} - \frac{APM}{PM}$; compleatur rectangulum $APMR$, erit id $= AP.PM$, unde $AO = \frac{ARM}{PM}$; hincque semper dabitur distantia centri gravitatis a puncto fixo $A$.

161. **Coroll. 3.** Fig. 87. Hinc inveniri potest centri gravitatis fluxus, si longitudo virgae aliquantulum augeatur. Sit $O$ centrum gravitatis virgae $AP$, et $o$ virgae $Ap$; $PM$ est pondus virgae $AP$, et $pm$ virgae $Ap$. Erit

$$AO = \frac{AQM}{PM} \text{ et } Ao = \frac{Aqm}{pm} = \frac{AQM + Qq.AP}{PM + Mr}$$

$$\text{ergo } Ao - AO = \frac{PM.AP.Qq - Mr.AQM}{PM^2} = \frac{Mr \cdot APM}{PM^2}.$$

Est ergo $Oo = \frac{Mr.APM}{PM^2}$. Sit $AP = x$ et ejus pondus $PM = y$, erit $Oo = \frac{dy\int ydx}{yy}$.

162. **Scholion.** Hae proprietates etiam valent, quamquam potentiae applicatae non sint normales in virgam, sed tantummodo parallelae inter se. Nusquam enim in computum ductum est, angulum $APM$ esse rectum, sed saltem constantem.

163. **Coroll. 4.** Si ergo in $O$ applicetur potentia omnibus aequalis et juxta earundem directionem, aequivalebit ea omnibus simul agentibus (151). Cum autem $PM$ exprimat summam omnium potentiarum virgae $AP$ applicatarum, ducatur $OS$ aequalis et parallela ipsi $PM$: exprimet haec potentiam omnibus aequivalentem.

164. **Coroll. 5.** Fig. 88. Si virgae $AP$ in singulis punctis potentiae secundum quascunque directiones fuerint applicatae, resolvantur eae singulae in laterales, quarum una in virgam sit normalis, altera trahat secundum directionem rectae $AP$. Quaeratur centrum gravitatis pro normalibus, quod sit $O$, et potentia iis aequivalens $OS$. Exprimat $OD$ summam reliquarum, quae cum non mutent centrum gravitatis (136), ducatur $OE$ aequivalens duabus $OS$, $OD$, aequivalebit ea omnibus.

165. **Coroll. 6.** Momentum omnium potentiarum in $P$, seu vis, qua virga in $P$ ruptioni resistit, aequatur $OS.OP$, seu $PM.OP$. At est $OP = \frac{APM}{PM}$; ergo summa momentorum omnium potentiarum est area $APM$. Ergo vis, qua virga in $P$ rumpi conatur, est ut area $APM$.

166. **Coroll. 7.** Fig. 87. Si ergo vis, qua virga rumpi conatur, sit ut ejus crassities in eo loco, seu ut pondus in eo loco applicatum, erit $APM$ ut $rm$. Dicatur $AP = x$, $PM = y$, erit $\int ydx$ ut $dy$, sumto $dx$ pro constante. Ergo fiat $\int ydx = \frac{aady}{dx}$, ut homogeneitas observetur, unde $ydx = \frac{aaddy}{dx}$, ergo $ydxdy = \frac{aadyddy}{dx}$, quare $\int ydx = \frac{aady^2}{dx} + abdx$, et idcirco $dx = \frac{ady}{\sqrt{(yy - ab)}}$. Sit crassities virgae $p$, erit ponderusculum in elemento $Pp$ ut $pdx$, ergo $dy = pdx$, consequenter

$$\sqrt{((\int pdx)^2 - ab)} = ap, \text{ unde } \int pdx = \sqrt{(aapp + ab)}, \text{ seu } dx = \frac{adp}{\sqrt{(pp + ac)}}, \text{ posito } b = aac.$$

Quae est aequatio pro catenaria, ut infra videbimus; abit haec in logarithmicam, si fiat $c = o$.

167. **Coroll. 8.** Si in singulis punctis potentiae quaecunque sint applicatae, ut $pdx$ in $P$, erit $\int pdx = y$. Sit porro vis, qua ruptioni resistit $z$, erit $z = \int dx \int pdx$ et $dz = dx \int pdx$. Sit $dx$ constans, erit $ddz = pdx^2$; si fuerit $p$ constans $= b$, erit

$$z = \int dx \int bdx = \int bxdx + \int cdx = \frac{bxx}{2} + cx + e \quad \text{seu} \quad xx + cx + ce = bz$$

quae est ad parabolam.

168. **Scholion.** His de virgis rigidis rectis explicatis, progredior ad virgas curvas, et in harum expositione ea penitus tractabo, quae insuper ad rectas pertinere possent. Etenim multa sunt ad rectas spectantia, quae eadem opera generalius ad curvas extenduntur. Et idcirco, ne in particularibus nimis sim prolixus, ad generaliora accedam.

169. **Problema 18.** Fig. 89. Si virgae rigidae curvae $ABCD$ quotcunque potentiae $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ applicatae fuerint in eodem plano, applicare potentiam $MN$ omnibus aequivalentem.

**Solutio.** Ducatur recta quaecunque $ad$, et directiones potentiarum prolongentur, si opus est, quoad ei occurrant in $a$, $b$, $c$, $d$. Patet (124) eas potentias eundem praestaturas effectum, sive in $ad$ sive in $AD$ sint applicatae. Habemus ergo casum virgae rectae, et applicetur potentia aequivalens $mn$, curvam in $M$ intersecans; transferatur ea in $MN$, et exprimet $MN$ potentiam omnibus aequivalentem. Q. E. I.

170. **Coroll. 1.** Si directiones potentiarum fuerint parallelae, erit iisdem et $MN$ parallela et omnibus simul sumtis aequalis.

171. **Coroll. 2.** Fig. 90. Transeat recta $ad$ per punctum $M$, et erit

$$AE.aM \sin a + BF.bM \sin b = CG.cM \sin c + DH.dM \sin d.$$

Est autem, ducta $AP$ in $AE$ normali et perpendiculo in eam $MP$, $AE.AP = AE.aM \sin a$; eodem modo ductis $BQ$, $CR$, $DS$ normalibus in directiones potentiarum, et in eas ex $M$ demissis perpendiculis, erit $FB.BQ = FB.bM \sin b$ et ita de reliquis. Ut ergo sit

$$AE.AP + BF.BQ = CG.CR + DH.DS,$$

seu summae momentorum ex utraque parte lineae $MN$ sunt aequales.

172. **Coroll. 3.** Fig. 91. Sint virgae $AOD$ potentiae parallelae $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ applicatae, erit $OM$ iis aequivalens, quae est iis parallela et simul sumtis aequalis, et quae est in $O$ applicata ita, ut ductis in $OM$ perpendiculis $AP$, $BQ$, $CR$, $DS$, sit

$$AE.AP + BF.BQ = CG.CR + DH.DS.$$

Oportet igitur ex hac proprietate determinare locum rectae $OM$.

173. **Coroll. 4.** Fig. 92. Simili modo si potentiae quotcunque et qualescunque $AE$, $BF$, $CG$ fuerint applicatae, resolvantur eae in verticales $Ae$, $Bf$, $Cg$ et horizontales $A\varepsilon$, $B\varphi$, $C\gamma$: quaeratur aequivalens verticalibus $OM$, ubi debet esse $Ae.AP + Bf.BQ - Cg.CR = 0$, et aequivalens horizontalibus $om$, ut sit $A\varepsilon.Ap + B\varphi.Bq - C\gamma.Cr = 0$. Quae duae lineae $om$ et $OM$ se mutuo in $\omega$ intersecant; quia autem per axioma 5 (§ 124) patet idem esse quocunque in loco potentia applicetur, modo in eadem directione applicentur ambae potentiae aequivalentes in $\omega$, quarum aequivalens $\omega\mu$ aequivalebit omnibus, quae in debito virgae puncto applicari poterit.

174. **Scholion.** Ut facilius quae dicta sunt applicentur, notandum est, summam omnium momentorum potentiarum verticalium in rectam $OM$ esse aequalem nihilo, ut et summam omnium momentorum horizontalium in $om$; at attentione habita, quae potentiae et quae lineae sint affirmativae, quaeque negativae. Ut si Fig. 93. summa momentorum potentiarum $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ in rectam $PS$ sit = nihilo, hoc modo concipi debet: Si $AE$ et $AP$ sumantur pro affirmativis, erunt $BF$, $BQ$, $CG$ et $DS$ negativae et $RC$ ac $DH$ affirmativae, ut igitur sit

$$AE.AP + BF.BQ - CG.CR - DH.DS = 0.$$

175. **Theorema 17.** Fig. 94. Si virgae rigidae $AOD$ potentiae quaecunque $AC$, $BF$, $CG$, $DH$ fuerint applicatae, quarum aequivalens sit $OM$. Erit, assumto pro lubitu puncto $Z$, ductisque rectis $AZ$, $BZ$, $CZ$, $DZ$ et $OZ$, summa momentorum omnium potentiarum $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ aequalis momento potentiae $OM$ in $Z$, seu demonstrari oportet esse

$$AE.AZ \sin EAZ + BF.BZ \sin FBZ + CG.CZ \sin GCZ + DH.DZ \sin HDZ = OM.OZ \sin MOZ.$$

**Demonstratio.** Ducatur recta quaecunque $ad$ secans directiones potentiarum in $a$, $b$, $c$, $d$ et $o$. Patet potentiam $OM$ in $o$ applicatam aequivalere reliquis $AE$, $BF$, $CG$ et $DH$ in $a$, $b$, $c$ et $d$ applicatis. Sed ductis $aZ$, $bZ$, $cZ$, $dZ$ et $oZ$, est

$$AE.aZ \sin EaZ + BF.bZ \sin FbZ + CG.cZ \sin GcZ + DH.dZ \sin HdZ = OM.oZ \sin MoZ \ (139).$$

Est vero

$$AE.aZ \sin EaZ = AE.AZ \sin EAZ \text{ et } BF.bZ \sin FbZ = BF.BZ \sin FBZ,$$

et ita de reliquis, ut adeo habeatur

$$AE.AZ \sin EAZ + BF.BZ \sin FBZ + CG.CZ \sin GCZ + DH.DZ \sin HDZ = OM.OZ \sin MOZ. \quad \text{Q.E.D.}$$

176. **Coroll. 1.** Fig. 95. Si directiones potentiarum producantur et ex $Z$ in eas perpendicula $Za$, $Zb$, $Zc$, $Zd$ et $Zo$ demittantur, erunt $AE.aZ$, $BF.bZ$, etc. momenta potentiarum in $Z$, et ideo erit $AE.aZ + BF.bZ + CG.cZ + DH.dZ = OM.oZ$.

177. **Coroll. 2.** Fig. 96. Si directiones potentiarum fuerint parallelae, lineae $Za$, $Zb$, $Zc$, $Zd$ et $Zo$ coincident, et propterea sequenti modo potentia aequivalens facile determinabitur. Ducatur ex $Z$ recta $Za$ in directiones potentiarum normalis (potest quidem recta quaecunque duci, cum nihilominus anguli ad $a$, $b$ etc. fiant aequales). Erit $AE.aZ + BF.bZ + CG.cZ + DH.dZ = OM.oZ$; sed est $OM = AE + BF + CG + DH$, unde erit

$$oZ = \frac{AE.aZ + BF.bZ + CG.cZ + DH.dZ}{AE + BF + CG + DH},$$

unde invenitur punctum $o$, et ex eo $O$, ubi potentiam aequivalentem applicari oportet.

178. **Coroll. 3.** Si potentiae quaecunque fuerint applicatae, resolvantur singulae in verticales et horizontales, quo facto quaeratur potentia verticalibus aequivalens, et etiam potentia horizontalibus aequivalens. Quibus habitis, facile invenietur iis ambabus aequivalens, quae proin omnibus quoque aequivalebit.

179. **Coroll. 4.** Fig. 97. Contemplemur rem iterum generaliter, et sint virgae $AOD$ potentiae quotcunque et qualescunque $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ applicatae, quibus aequivaleat potentia $OM$. Sit punctum $Z$ infinite distans, erunt lineae $AZ$, $BZ$, $CZ$, $DZ$ et $OZ$ inter se parallelae, et pro aequalibus haberi poterunt. Quapropter haec proprietas obtinebitur, ut sit

$$OM \sin MOZ = AE \sin EAZ + BF \sin FBZ + CG \sin GCZ + DH \sin HDZ.$$

180. **Coroll. 5.** Fig. 98. Si fuerint lineae $AZ$, $BZ$ etc. parallelae rectae $OM$, erit $\sin MOZ = 0$, adeoque $0 = AE \sin EAZ + BF \sin FBZ + CG \sin GCZ + DH \sin HDZ$; sed quia anguli $GCZ$ et $HDZ$ in alteram plagam rectarum $CZ$, $DZ$ cadunt, pro negativis haberi debent eritque

$$AE \sin EAZ + BF \sin FBZ = CG \sin GCZ + HD \sin HDZ.$$

181. **Theorema 18.** Fig. 99. Si curvae $AM$ in singulis punctis $\mu$ fuerint potentiae quaecunque verticales applicatae, ex curva $AN$ determinatae, ita ut $\pi\nu$ applicata repraesentet summam omnium potentiarum, in respondente arcu $A\mu$ applicatarum. Erit summa momentorum omnium potentiarum arcus $AM$ in $M$ ut area $APN$.

**Demonstratio.** Ducatur applicatae $\mu\nu$ proxima $\varkappa\iota$; exprimet $\lambda\iota$ summam potentiarum arcus $A\varkappa$, ergo $\varrho\iota$ exhibet potentiam in $\mu\varkappa$ applicatam. Ejus momentum in $M$ igitur erit $\varrho\iota.\lambda P$. Accipiatur puncto $M$ proximum $m$, ductaque verticali $mpn$, erit potentiae $\varrho\iota$ momentum in $m = \varrho\iota.\lambda p$; unde differentia horum momentorum erit $\varrho\iota.Pp$. Idem cum de singulis potentiis valeat, erit differentia momentorum potentiarum omnium arcus $AM$ in $m$ et $M = PN.Pp$. Sit summa momentorum omnium in $M = M$, erit summa omnium momentorum in $m = M + dM$, quarum differentia erit $dM$, et ideo $dM = PN.Pp$; ergo summando $M = \int PN.Pp =$ areae $APN$. Q. E. D.

*Script. ad marg.* Generalius potest applicari ad quascunque potentias; sed tum $\pi\nu$ denotare debet summam factorum omnium potentiarum arcus $A\mu$ in sinus angulorum, quos earum directiones cum axe $AP$ constituunt.

182. **Coroll. 1.** Fig. 100. Si curvae $AB$ hoc modo potentiae verticales fuerint applicatae juxta curvam $AD$, et quaeratur summa momentorum omnium in punctum $M$ ubilibet assumtum, ducatur applicata $MP$ et prolongetur in $N$, ut sit $PN = CD$, ducaturque recta $DN$. Exprimet quaevis applicata $\pi\nu$ summam omnium potentiarum arcus $AB\mu$; etenim cum in $B\mu$ nullae potentiae sint applicatae, summa omnium potentiarum $BD$ per totum spatium $BM$ non augetur neque minuitur. Ergo summa momentorum in $M$ est ut area $ACD + CDPN$ $(PC.CD)$.

183. **Coroll. 2.** Fig. 101. Dicatur $AP = x$, $PM = y$ et summa potentiarum arcus $AM$ sit $P$; erit summa omnium momentorum in $M = \int Pdx$. Ergo si arcui $AM$ in quolibet puncto potentiae aequales applicentur, erit $P$ ut arcus $AM$, qui si dicatur $s$, erit $P = s$, et summa momentorum omnium in $M$ erit $\int sdx$.

184. **Coroll. 3.** Si curvae $AM$ potentiae qualescunque fuerint applicatae, resolvantur singulae in laterales, unas verticales secundum $MP$ agentes, et alteras horizontales, juxta $MR$ trahentes. Dicatur summa horizontalium arcus $AM = Q$, erit summa momentorum potentiarum horizontalium $= \int Qdy$, existente summa verticalium $= \int Pdx$.

185. **Coroll. 4.** Cum momentum sit vis, punctum, in quod agit, circa se ipsum convertendi, videamus, num momenta potentiarum verticalium et horizontalium sint conspirantia, an vero minus? Potentiae verticales punctum $M$ conantur convertere secundum plagam $AM$; at vero potentiae horizontales $MR$ secundum plagam $AR$: sunt ergo contrariae ambarum actiones.

186. **Coroll. 5.** Sin autem potentiae horizontales $MR$ fiant negativae, ut trahant juxta $Mr$, erunt et momentorum vires contrariae, et propterea conspirantes cum verticalibus; omnes enim punctum $M$ conantur convertere secundum eandem plagam $AP$.

187. **Coroll. 6.** In illo igitur casu, quo horizontales agunt juxta $MR$, et summa omnium momentorum, punctum $M$ secundum $AP$ convertentium, $= \int Pdx - \int Qdy$; at in hoc casu potentiarum horizontalium, juxta $Mr$ trahentium, erit communis vis convertens punctum $M$ a dextro in sinistrum $= \int Pdx + \int Qdy$.

188. **Coroll. 7.** Fig. 102. Sint curvae $AM$ in quovis loco $\mu$ potentiae normales $\mu\omega$ applicatae; resolvantur eae in verticales $\mu o$ et horizontales $\omega o$. Sit $A\pi = x$, $\pi\mu = y$ et potentia $\mu\omega = dz$; erit $\mu o = \frac{dzdx}{ds}$, et $\omega o = \frac{dzdy}{ds}$, denotante $s$ curva $A\mu$. Erit summa omnium potentiarum verticalium $= \int \frac{dzdx}{ds}$, et summa omnium horizontalium $= \int \frac{dzdy}{ds}$. Si in integralibus loco $x$ substituatur $AP$, et loco $y$, $PM$, habebuntur summae potentiarum verticalium et horizontalium arcus $AM$; unde momentum omnium in $M$ erit $\int dx \int \frac{dzdx}{ds} + \int dy \int \frac{dzdy}{ds}$; sunt enim conspirantia momenta horizontalium et verticalium.

189. **Problema 19.** Fig. 103. Curvae $AC$ in singulis punctis potentiis verticalibus applicatis, determinare punctum $O$, in quo potentia $OR$ omnibus aequivalens applicari potest.

**Solutio.** Cum directiones omnium potentiarum supponuntur parallelae, erit potentia aequivalens omnibus simul sumtis aequalis. Designante autem $AD$ curva supra descripta, erit $BD$ aequalis

omnibus potentiis simul sumtis; sit ergo oportet $OR = BD$. Accipiatur punctum quodcunque $M$; erit summa momentorum omnium potentiarum in $M$ aequalis momento potentiae aequivalentis $OR$ in $M$, quod est $OR.QP$, seu $BD.QP$. Ducta autem $MP$, eaque producta in $T$, ut sit $PT = BD$, ducatur recta $DT$. Exprimetur summa omnium momentorum potentiarum arcus $AOC$ in $M$, per aream $APTDA$ (182), quae est aequalis $ABD + BP.BD$; oportet ergo ut sit

$$ABD + BP.BD = BD.QP = BP.BD + BQ.BD,$$

ergo $ABD = BQ.BD$, consequenter $BQ = \frac{ABD}{BD}$, unde invenietur punctum $Q$, et ex eo $O$. Q. E. I.

190. **Coroll. 1.** Sed distantia $AQ$ erit $AB - \frac{ABD}{BD} = \frac{AB.BD - ABD}{BD}$. Compleatur rectangulum $ABDE$; erit $ABDE = AB.BD$, quare $AQ = \frac{ABDE - ABD}{BD} = \frac{AED}{BD}$; unde denuo punctum $Q$ invenietur.

191. **Coroll. 2.** Dicatur $AB = x$, $BC = y$ et summa omnium potentiarum arcus $AC = P$; erit area $ABD = \int Pdx$, ergo $BQ = \frac{\int Pdx}{P}$, et hinc $AQ = x - \frac{\int Pdx}{P} = \frac{Px - \int Pdx}{P}$. Est vero

$$Px - \int Pdx = \int xdP, \text{ consequenter } AQ = \frac{\int xdP}{P};$$

denotat vero $dP$ potentiam ipsam in quovis loco $C$ applicatam.

192. **Coroll. 3.** Fig. 104. Existente $OR$ potentia aequivalente omnibus arcus $AM$; accedat arcui $AM$ insuper elementum $Mm$, cum sua potentia applicata, sitque $or$ potentia tum aequivalens, manentibus $AP = x$, $PM = y$, summa omnium potentiarum arcus $AM = P$, erit potentia arculi $Mm = dP$; consequenter $AQ = \frac{\int xdP}{P}$ et $Aq = \frac{\int (x + dx)\, dP}{P + dP} = \frac{\int xdP + \int dxdP}{P + dP}$. Quapropter

$$Qq = \frac{P\int dxdP - dP\int xdP}{PP};$$

sed quia $dP$ jam pro constanti erat acceptum, etenim oportuisset ponere $Aq = \frac{\int (x + dx)\,(dP + ddP)}{P + dP}$, erit $\int dxdP = xdP$, consequenter $Qq = \frac{PxdP - dP\int xdP}{PP}$. Est vero $\int xdP = P.AQ$, ergo posito $AQ = z$, erit $Qq = \frac{PxdP - PzdP}{PP} = (x - z)\frac{dP}{P} = PQ.\frac{dP}{P}$. Caeterum haec proprietas etiam invenitur ex inspectione superioris figurae, geometrice re considerata, nec non ex sola differentiatione aequationis $AQ = z = \frac{\int xdP}{P}$, seu $Pz = \int xdP$, quae dat $Pdz = (x - z)\, dP = PQ.dP$.

193. **Coroll. 4.** Fig. 105. Si curvae $AM$ in singulis punctis potentiae qualescunque applicentur, resolvantur singulae in verticales et horizontales, illas juxta $MP$ agentes, has juxta $MQ$. Sit summa omnium verticalium $P$, et summa horizontalium $Q$, manentibus $AP = x$ et $PM = y$; designet $OR$ potentiam aequivalentem verticalibus, et $VS$ aequivalentem horizontalibus, erit $AT = \frac{\int xdP}{P}$ et $AX = \frac{\int ydQ}{Q}$, unde $O$ et $V$ invenientur, cum vero sit $OR = P$ et $VS = Q$, poterit inveniri potentia aequivalens duabus $OR$ et $VS$, quae proin aequivalebit omnibus.

194. **Coroll. 5.** Fig. 106. Sit curva $AM$ catenaria, seu curva, quam format catena suspensa; erit ut infra videbimus $dx = \frac{ady}{\sqrt{(2ay + yy)}}$. Sint huic curvae in singulis punctis potentiae aequales

applicatae verticales; erit $P$ ut arcus $AM$; dicatur $AM = s$, erit $P$ ut $s$; est itaque $AT = \frac{\int x ds}{s}$. Est autem $ds = \frac{(a+y)\,dy}{\sqrt{(2ay+yy)}}$ et $s = \sqrt{(2ay+yy)}$. Quia porro est

$$\int x ds = sx - \int s dx, \text{ erit } \int x ds = x\sqrt{(2ay+yy)} - \int a dy = x\sqrt{(2ay+yy)} - ay,$$

$$\text{quare } AT = x - \frac{ay}{\sqrt{(2ay+yy)}}.$$

Sed cum sit $dx = \frac{a dy}{\sqrt{(2ay+yy)}}$, erit $x = \frac{ay}{\sqrt{(2ay+yy)}} + \int \frac{aydy\,(a+y)}{(2ay+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde $AT = -\int \frac{aydy\,(a+y)}{(2ay+yy)^{\frac{3}{2}}}$, id quod a logarithmis dependet. Erit autem

$$PT = \frac{ay}{\sqrt{(2ay+yy)}} = \frac{a.PM}{AOM}; \text{ ergo } OR.PT \text{ erit, ob } OR = s = \sqrt{(2ay+yy)}$$

aequale $ay$; consequenter summa momentorum in $M$ est ut $PM$. Alia exempla non in medium affero, facile enim ex praescriptis applicatio ad quosvis casus speciales absolvetur.

195. **Problema 20.** Fig. 107. Si curvae $AMB$ in singulis punctis potentiae quaecunque ad punctum idem $C$ tendentes fuerint applicatae, invenire potentiam iis aequivalentem.

**Solutio.** Cum omnes potentiae tendant ad punctum $C$, singulae tanquam puncto $C$ applicatae considerari possunt. Assumatur elementum $Mm$, sitque potentia in ejus singulis punctis applicata $= z$, erit potentia in elementum $Mm$ agens $= z.Mm = zds$ dicto $Mm = ds$. Applicetur igitur potentia $CN$ in directum cum $MC$, fiatque $CN = zds$. Oportet ergo omnium potentiarum $CN$ invenire aequivalentem (55.56) $CV$, seu punctum $H$, ita ut $CH$, ducta in numerum potentiarum, exprimat potentiam aequivalentem. Est vero numerus potentiarum aequalis numero punctorum curvae $AMB$, adeoque aequalis ipsi curvae $AMB$. Ducatur recta quaecunque $DP$, et ex $N$ demittantur in eam perpendicula $NP$, quorum summa dividatur per $AB$, quotoque aequalis accipiatur $DK$. Dein quoque accipiatur $DJ$, aequalis omnium $DP$ summae, divisae per $AB$, completoque rectangulo $DKHJ$, erit $H$ id punctum, et recta $CH$ ducta in $AB$ seu $CV$ exhibebit potentiam aequivalentem. Producatur $HC$ in $O$, et erit $O$ punctum, in quo potentia aequivalens modo inventa secundum directionem $OC$ applicari debet. Q. E. I.

196. **Coroll. 1.** Fig. 108. Quaeratur arcus $AOM$ punctum $O$, in quo media directio terminatur, seu in quo potentiam aequivalentem applicare oportet. Ducatur recta $AC$, eaque producatur, ut loco verticalis $DP$ haberi queat; ei in $C$ normaliter jungatur $CQ$, pro axe curvae habenda. Sit $CQ = x$, $MQ = y$, erit $CM = \sqrt{(xx+yy)} = t$; sit $AOM = s$, et potentia in $M$ applicata $CN = zds$, erit $CP = \frac{yzds}{t}$ et $PN = \frac{xzds}{t}$; accipi ergo debet $CJ = \int \frac{yzds}{t} : s$ et $CK = \int \frac{xyds}{t} : s$. Completo rectangulo $CJHK$, ducatur diagonalis $CH$, quae producta curvam in $O$ secat; erit $O$ punctum applicationis, $OC$ directio et $CH.s$ quantitas potentiae aequivalentis.

197. **Coroll. 2.** Potest quoque $CJ$ accipi aequalis $\int \frac{yzds}{t}$ et $CK = \int \frac{xzds}{t}$, eas non dividendo per $s$. Sed tum ipsa $CH$ erit potentia aequivalens, ut non opus sit eam in $s$ ducere. Hoc ergo modo facilius et brevius punctum $O$ obtinebitur.

198. **Coroll. 3.** Fig. 109. Si punctum $M$ ponatur variabile, et $O$ continuo mutabitur ut et punctum $H$. Invenientur igitur hoc modo omnia loca puncti $H$, seu curva $EH$, quam id percurrit. Habebitur autem aequatio pro curva $EH$ inter coordinatas, scilicet abscissa $CJ$ erit $=\int\frac{yzds}{t}$ et applicata $HJ=\int\frac{xzds}{t}$. Data igitur curva $AM$ et lege potentiarum, ei in singulis locis applicatarum, invenietur aequatio pro curva $EH$.

199. **Coroll. 4.** Ex solutione problematis et ejus collatione cum § 58 patet, eodem modo rem se habere, ac si punctum $C$ ad singula curvae $AM$ puncta traheretur eadem vi, qua ea ad $C$ trahi ponuntur. Et propterea exempla in medium afferre non necesse esse duxi, cum ibi jam nonnulla sint annexa.

200. **Scholion.** Hisce de aequilibrio potentiarum virgae rigidae liberae applicatarum sufficientibus judicatis, ad alterum virgarum rigidarum casum propero, quo eae quodammodo impeditae ponuntur, ut non libere cuivis potentiae cedere queant, et interdum in quiete perseverare possint, etsi potentia quaedam alia non destruatur.

201. **Divisio.** Hanc sectionem hoc modo partior, ut primo de virga, in quodam puncto prorsus firmata, agam; dein, de virga alicubi ita saltem firmata, ut tantum circa illud punctum motu circulari moveri queat. Tertio, de virga, cujus aliquod punctum perpetuo in data linea positum esse debet. Quarto, de virga, lineae cuivis firmae adjacente, ut eam semper tangat, nunquam transigere queat. Quinto, de virga, cujus duo puncta continuo in datis curvis ponuntur, et sexto, de virga, quae punctum quoddam in data curva mobile habet, et quae praeterea super alia data linea jacet, juxta quartum casum. Hoc modo penitus istam materiam exhausisse autumo, ut vix casus excogitari possit, qui in enumeratis non contineatur. Hoc igitur pertractato, tam in hypothesi virgae rectae, quam curvae cujusvis.

202. **Theorema 19.** Fig. 110. Si virgae $AB$ in $A$ prorsus firmae applicetur in $B$ potentia quaecunque $BC$, poterit ea duplicem habere effectum, unum, quo virgam $BA$ evellere, alterum, quo eam abrumpere conatur.

**Demonstratio.** Sit virgae $AB$ applicata potentia in directum jacens $BE$, conabitur haec virgam $AB$ directe evellere. Sed si potentia applicata $BF$ fuerit in $AB$ perpendicularis, ejus tota actio in abrumpenda virga consumetur. Quare cum potentia quaecunque, quae neque in directum $BE$, neque perpendiculariter secundum $BF$ trahit, in hujusmodi duas resolvi possit, ut potentia $BC$ in $BE$ et $BF$, duplici modo in virgam aget, uno, quo eam evellere, propter $BE$, et altero, quo eam abrumpere, propter $BF$, conatur. Q. E. I.

203. **Coroll. 1.** Quod ad quantitatem horum conatuum attinet, patet conatum evellendi virgam esse ut potentiam $BE$, neque hic locum applicationis $B$ in computum venire.

204. **Coroll. 2.** Ne ergo virga cedat, oportet ut retineatur, seu retrorsum trahatur vi aequali vel majori, quam est vis $BE$.

205. **Coroll. 3.** Quantitas conatus abrumpendi virgam $AB$ est aequivalens momento potentiae $BF$, seu facto ex $BF$ in $AB$.

206. **Coroll. 4.** Fig. 111. Ne igitur haec potentia effectum suum obtineat, oportet applicare contrarie agentem *GH*, cujus momentum $HG.AG$ aequale sit momento $BF.AB$; unde patet si ea potentia in puncto *A* applicari debeat, eam oportere esse infinitam.

207. **Coroll. 5.** Fig. 112. Si virga fuerit curva *AB* in *A* firmata et in *B* applicatam habens potentiam *BC*, ducatur tangens *Ab* ex *A* et producatur *CB* ut eam in *b* secet, potentia *BC* tanquam in *b* applicata considerari potest, quae, ut praeceptum est, resoluta, dabit effectus in punctum *A*, nempe unum, quo evellitur, alterum quo abrumpitur.

208. **Coroll. 6.** Si tali virgae, vel rectae vel curvae, plures una potentiae sint applicatae, quid eae in virgam possint, opus non est particulariter inquirere. Nam cum in praecedentibus methodus tradita sit, qua una potentia iis aequivalens inveniri potest: quaeratur ea, eritque casus plurium potentiarum ad casum unicae reductus, qui hic est expositus.

209. **Problema 21.** Fig. 113. Si virgae *ABC* in duobus punctis *A* et *B* firmatae potentia *CD* in puncto *C* applicetur, invenire vires, quas puncta *A* et *B* sustinent.

**Solutio.** Ponatur primo punctum *A* solum firmum, et quaeratur potentia in *B* applicanda, quae actionem potentiae *CD* destruat. Sit ea *Be*, et oportet, ut momenta potentiarum *CD*, *Be* in *A* sint aequalia et contraria. Producatur *eB* in alteram partem; ex punctis *A* et *C* in eam demittantur perpendicula *CG*, *AH*. Erit momentum potentiae *CD* in $A = CD\,(CG + AH)$ ( ), et momentum potentiae $Be = Be.AH$; ergo $CD\,(CG + AH) = Be.AH$, unde $Be = CD\,(CG + AH):AH$. Hanc ergo vim punctum *B* sustinet; adeoque ea sursum trahi debet. Simili modo punctum *A* sursum sollicitatur a potentia *CD* vi $= CD.CG:AH$ (posito *B* puncto fixo). Ergo tanta vi deorsum urgeri debet. Q. E. I.

210. **Coroll. 1.** Solutio problematis ex eo pendet, quomodo virgae *ABC* potentiae in punctis *A* et *B* applicari debeant, data potentia in *C* applicata, ut obtineatur aequilibrium. Cum hoc sit in priori parte hujus capitis pertractatum, quales potentiae virgae applicatae esse debeant, ut adsit aequilibrium, plures casus, ubi vires quaeruntur, quibus plura puncta virgae urgentur, praetermitto.

211. **Coroll. 2.** Fig. 114. Si virga fuerit recta *AC*, eique in *C* potentia *CD* normaliter applicata, erit vis, quam *B* sustinet $= CD.CA:AB$, et vis, quam *A* sustinet $= CD.CB:AB$. Cum autem sit $CD.CA:AB = CD.CB:AB + CD$, manifestum est vim, quam punctum *B* sustinet, aequalem esse summae potentiarum puncta *C* et *A* urgentium.

212. **Coroll. 3.** Fig. 115. Hinc igitur perspicuum est, quantam vim clavi *A* et *B* sustinere debeant a trabe *AC*, potentia *CD* sollicitato, utrumque enim de loco movere conatur.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# II.

## Vera vires existimandi ratio.

§ I. Jam dudum magna est disceptatio inter Mathematicos, acutissimo dum viveret Leibnitio adhaerentes et Cartesianos, cum hi vim corporis moti massae in celeritatem ductae proportionalem velint, illi vero istam corporum vim facto ex massa et celeritatis quadrato proportionari evincere conentur. Eorum, qui Leibnitium sequuntur, praecipue in demonstranda sua sententia operam suam impenderunt, Clariss. Joh. Bernoullius et Sgravezande, qui non solum sententiam suam rationibus sed et experimentis egregie confirmarunt.

§ II. Utut autem clare isti viri illustrissimi veritatem dogmatis sui ob oculos Cartesianorum posuerint, nihilominus semper hi in sua sententia pertinaciter perstant, et sese Leibnitio opponunt. Quos inter magnam adhibuit diligentiam ad Leibnitii sententiam refutandam professor quidam Hollandus Maclaurin nomine, in schediasmate egregio illo si diis placet, quo sententiam suam super communicationem motus corporum perfecte durorum exponit, qui non solum existimationem virium ex quadrato celeritatis refutare conatur, verum praeterea asseverat esse contradictorii quid, dicere vires corporum esse in duplicata ratione celeritatis, idque tali paralogismo, cujus vel tyronum in geometria pudeat.

§ III. Huc autem redit ejus egregium ratiocinium: Sint duo corpora massa aequalia $A$ et $B$, alterum $A$ celeritate ut 8, alterum $B$ ut 10 latum. Dicit ille, esse contradictionem quandam dicere, vim corporis $A$ esse ad vim corporis $B$ ut 64 ad 100, idque sic probat: Sit velocitas corporis $B$ primum quoque ut 8, erunt vires corporum $A$ et $B$ 64 et 64; jam autem celeritas corporis $B$ duobus gradibus augetur, ut nunc sit ut 10. Dicit, nescio quo fundamento, ejus vim juxta Leibnitium augeri 4 gradibus, et hinc vim corporis $A$ fore ad vim corporis $B$ ut 64 ad $64 + 4 = 68$, juxta ipsum Leibnitium, qui tamen quoque defendit esse hanc rationem ut 64 ad 100; unde concludit sententiam leibnitianam eo deducere, ut calculo rite subducto reperiatur $64 : 68 = 64 : 100$, seu $68 = 100$; quod cum sit absurdum, infert Leibnitii sententiam contradictionem involvere.

§ IV. Hoc ratiocinium quam legitimum et justum sit, nemo sane est qui vel tantillum Geometriam libaverit, cui non statim innotescat. Quis enim non videt bonum virum duplex rectangulum

addere oblitum fuisse? dum concludit vim ipsius *A* esse ad *B* ut 64 ad 64 + 4, seu 68, cum concludendum fuisset ut 64 ad 64 + 4 + 2.2.8, seu ut 64 ad 100. Si ita, uti decet, ratiocinatus fuisset, nullam contradictionem reperisset.

§ V. Praeterea istud quoque Maclaurini ratiocinium hoc laborat vitio, quod nimium probet; hoc enim modo et juxta ipsum contradictionem involverent pleraque in geometria certissima dogmata. Scilicet non amplius essent circuli et figurae similes in ratione duplicata diametrorum et laterum homologorum, sed essent in eorum ratione simplici, imo juxta Maclaurini principia contradictorium esset dicere 4 esse quadratum ipsius 2.

§ VI. Nolo autem diutius huic refutationi immorari, sed rem ipsam aggrediar, meamque de virium existimatione sententiam, quantum possum, luculenter exponam.*) Quod ut fiat, probe notandum est ante omnia impressionem motus cujusvis in corpus non fieri in instanti, sed pedetentim. Scilicet vim mortuam *A* (Fig. 116) in corpus *B* sese exerentem eique motum imprimentem per aliquantum spatium *Ba* corpus *B* concomitari et vim suam replicare, quantillum dein illud spatium sit. Si manu corpus moveo, oportet ut manu corpus aliquantisper concomiter, et ut manus cum corpore moveatur, quam subito quoque manum a corpore removeam. In ipso enim contactus initio corpus concipit motus partem infinitesimam, pergente autem manu protrudere, verus motus et celeritas considerabilis in corpore generari potest.

§ VII. Ut hoc accuratius prosequar, pono (Fig. 117) manum corpus *A* vi aequabili per spatium *AB* comitari et protrudere, seu si *AB* valde exiguum fuerit, nihil interest etsi vis manus aliquantulum immutetur, patet, erecta ex quolibet puncto *P* recta perpendiculari *PM* proportionali celeritati corporis in *P*, curvam in qua extat punctum *M* fore parabolam, et celeritatem corporis ultra *B* esse ut applicatam *BC* in puncto *B*, usque ad quod vis protrudens corpus *A* concomitatur.

§ VIII. Sit jam (Fig. 118) aliud corpus *a* aequale corpori *A*, et protrudatur ab alia vi, quae se habeat ad vim, qua corpus *A* propellitur, ut *v* ad *V*, et quae corpus *a* usque ad *b* prosequatur, erit curva *amc*, cujus applicatae *pm* corporis *a* in loco *p* celeritatem exponunt, quoque parabola, et ut hae duae parabolae invicem conferri quoque possint, oportet, ut parametri parabolarum *AMC*, *amc* se habeant inter se, ut vires propulsantes *V* et *v*. Hoc facto existimatio virium ex datis celeritatibus, seu aestimatio subsequentis celeritatis ex data vi corpus propellente, et spatio, per quod corpus *a* vi protruditur, in promtu erit. Hic primum de aestimatione posteriore agam.

§ IX. Existentibus ergo viribus corpora *A* et *a* protrudentibus, *V* et *v*, quibus proportionales sunt parametri parabolarum *AMC*, *amc*. Erunt celeritates effectae in corporibus *A* et *a* ut *BC* ad *bc*, i. e. ut $\sqrt{(V.AB)}$ ad $\sqrt{(v.ab)}$; id est, celeritates sunt in ratione subduplicata composita virium impellentium et spatiorum, per quae vires corpora concomitantur; si scilicet corpora fuerint aequalia; sin minus, modo descriptae rationi adjungi debet ratio inversa simplex massarum. Ex his jam de celeritatibus corporum datas vires sequentibus sic infero.

§ X. Sint spatia *AB*, *ab*, per quae vires corpora prosequuntur, aequalia, erunt celeritates ut $\sqrt{V}$ ad $\sqrt{v}$, unde Leibnitiani suum dogma deducere possunt. Sic, cum corpora impulsa tantam

*) Hic ad marginem manu auctoris adscriptum: NB. *Pono hic corpus suum motum accipere a vi mortua.*

habeant vim, qua fuerunt impulsa, erunt et corporum vires ut $V$ ad $v$. Quia autem sunt celeritates in subduplicata virium ratione, sequitur vires esse in duplicata celeritatum ratione, si corpora fuerint aequalia; sin vero inaequalia, erunt vires in composita ratione ex duplicata celeritatum et simplici massarum; quousque vero hoc ratiocinium valeat, ex ipso calculo facile patet, nempe eousque saltem si spatia $AB$ et $ab$ aequentur.

§ XI. Ut hanc materiam exemplo illustrem, protrudat (Fig. 119) homo $H$, pedibus in $F$ manentibus immotis, corpus $A$ ex totis suis viribus, donec ipse humi procidat. Si dein idem corpus, vel aliud huic aequale, quatuor homines eodem modo protrudant, acquiret hoc corpus saltem celeritatem duplam ejus, quam unus tantum homo effecit. Si alteri corpori novem homines vires suas imprimant eodem quoque modo, ut ille primus, acquiret hoc corpus velocitatem triplam saltem illius, et hoc modo argumenta pro Leibnitii sententia depromuntur ex nostra generali analogia.

§ XII. Quin etiam pro Cartesianorum sententia argumenta nostra analogia impertit. Etenim prosequantur vires $V$ et $v$ corpora $A$ et $a$ per aequalia tempora, erunt $AB$ ad $ab$ ut $V$ ad $v$; ergo celeritates productae in corporibus erunt ut $\sqrt{VV}$ ad $\sqrt{vv}$ i. e. ut $V$ ad $v$, seu celeritates sunt ut vires; unde pro Cartesianis inferri potest, vires corporum esse in simplici celeritatum ratione; et hinc sequitur, si duo homines tamdiu in corpus $B$ suas vires exerceant, quamdiu unus homo suam vim in corpus $A$, corpus $B$ duplo majorem acquisiturum celeritatem quam $A$.

§ XIII. Ex hisce ut quaedam consectaria deducam, sit (Fig. 120) tabula $\alpha\beta\gamma\delta$, super qua sint valvulae $cdfe$ plures, plane inter se aequales et similes, circa axes $cd$ mobiles et proprio pondere incumbentes in $ef$ super tabula. Sit jam corpus $A$ tali gradu celeritatis $c$ praeditum, qua exacte valvulam $cefd$ elevare, ut sibi subter illam via pateat, possit, et huic elevationi totam suam vim impendeat; sequitur ex nostra theoria, si corpus $A$ habeat celeritatem hujus duplam, nempe $2c$, tum posse illud 4 hujusmodi valvulas aperire; si celeritas ejus fuerit $3c$, 9 valvulas, et ita porro, fore scilicet numerum valvularum apertarum ut celeritatis quadratum. Quem effectum ipsi Cartesiani negare utique non poterunt, si saltem considerent corpus $A$ celerius latum valvulam citius aperire, et ad hoc non tantum temporis requiri et non tantum de sua vi amittere, ac si tardius incessisset. An hoc experientiae sit conforme, facile periculum fieri potest, et quo motus corporis non a resistentia retardetur, tabula quantum sufficit, inclinari potest.

§ XIV. Et hinc Leibnitii asseclae, qui vim corporis ex ejus effectibus metiuntur, secure deducere possunt vires corporum esse in duplicata velocitatum ratione. Contra quam sequelam nescio quid Cartesiani movere possint.

§ XV. Sin autem valvulae istae, quod quidem contra omnem esset rationem, ita comparatae essent, ut datum tempus requiratur ad unam aperiendam, sive corpus celerius sive tardius moveatur, tum Cartesianorum sententia locum haberet; corpus enim duplo celerius motum, duplo plures valvulas aperire posset; unde illi sententiam suam confirmare possent. Verum haec valvularum hypothesis impossibilis est et futilis.

§ XVI. Impellatur corpus $A$ (Fig. 116) vi aliqua $V$, quae illud comitetur usque in $B$. Qui jam dicunt corporis $A$ vim tum fore in ratione composita ex vi impellente $V$ et ex spatio $AB$, per quod protruditur corpus, ex Leibnitii parte stant; tum enim corporis $A$ vis est ut $V.AB$, celeritas vero

ut $\frac{\sqrt{(V.AB)}}{A}$; unde cum sit $V.AB$ ut celeritatis quadratum, erit corporis $A$ vis ut quadratum celeritatis ductum in corporis massam.

§ XVII. Qui vero volunt vim corporis $A$ fore ut factum ex vi impellente $V$ et tempore, quo vis $V$ corpus $A$ per spatium $AB$ comitatur, ex Cartesii stabunt parte. Siquidem tempus istud est ut $\frac{\sqrt{(V.AB)}}{V}$, et hinc vis juxta eos ut $\frac{V\sqrt{(V.AB)}}{V}$, id est ut $\sqrt{(V.AB)}$; celeritas vero est ut $\frac{\sqrt{(V.AB)}}{A}$; adeoque vis corporis $A$ esset ut factum ex massa in celeritatem. Verum haec vires aestimandi ratio omni caret fundamento et omni rationi repugnat, eodem fere modo, quo § XV valvularum ibi descriptarum suppositio impossibilis fuit ostensa.

§ XVIII. Ex hisce principiis, ex ipsa rerum natura petitis, satis clare et evidenter Leibnitii vires aestimandi ratio evinci et demonstrari potest hocce sillogismo, cujus major propositio haec est:

*Vis corporum aestimanda est ex eorum effectu;*

quae propositio tam clara est ac instar axiomatis, et qui hanc negaret, nescio quid per vim intelligeret. Omnes rationales homines unanimiter fatebuntur, eum qui duos homines simul prosternere valeat, duplo esse fortiorem eo, qui unum tantum prosternere potest, scilicet si homines prosternendi plane aequales fuerint et aequali rigore sese humi stabiliverint. Minorem propositionem ita formo:

*Sed corporum motorum effectus sunt in ratione composita ex simplici massarnm et duplicata celeritatum.*

Hujus propositionis veritas jam satis in antecedentibus in apricum posita est. In § XIII ostensum, corpus duplo celerius latum, quadruplo plures valvulas aperire valere. In § XI monstravimus, quatuor homines corpori nonnisi duplam celeritatem posse imprimere ejus, quam unus tantum homo corpori eidem imprimere valuit; unde ergo sequitur, si corpus tantam habeat celeritatem, ut possit hominem unum prosternere, idem corpus dupla celeritate 4 homines, tripla, 9 homines prostraturum, quae utique clare satis et evidentissime veritatem propositionis minoris evincunt ac demonstrant. Ex his nunc praemissis necessario conclusio vel a Cartesiano in favorem Leibnitii deduci debet hoc modo:

*Ergo vires corporum sunt in ratione composita ex simplici massarum et duplicata celeritatum.*

§ XIX. Hinc ergo patet veritas ejus, quod § XVI saltem per hypothesin posuimus. Nempe vim corporis $A$ esse ut factum ex vi impellente et spatio $AB$, per quod a vi protruditur, seu ut tempus comitatus in computum ducatur, vim corporis esse in ratione composita ex duplicata vis impellentis et duplicata temporis comitatus. Tempus enim hoc est ut $\frac{\sqrt{(V.AB)}}{V}$, denotante $V$ vim impellentem. Sit tempus illud $t$, erit $t = \frac{\sqrt{(V.AB)}}{V}$, ergo $AB = tt.V$, adeoque cum sit vis corporis ut $V.AB$, erit ea quoque ut $VVtt$.

§ XX. Hinc ergo patet ratio ejus, quod experientia edoctum est, quod nempe corpori undecim v. gr. gradibus celeritatis moto, insuper unum celeritatis gradum ad imprimendum multo major requiratur vis, quam ad unum celeritatis gradum corpori quiescenti imprimendum. Hujus experimenti ratio ex dictis facile patet; sit enim vis corporis uno celeritatis gradu moti $V$, requiretur vis $v$ ad eidem corpori quiescenti celeritatis gradum unum imprimendum, et ut celeritate ut 11 incedat, requiritur vis ut $121v$; ut 12 celeritatis gradibus feratur, opus est vi exposita per $144v$; requiritur ergo vis ut $23v$ ad id, ut corpus 11 celeritatis gradibus motum, celeritatis gradus 12 acquirat; cum tamen vis saltem $v$ efficere possit, ut corpus ante quiescens uno celeritatis gradu moveatur.

## III.

# De motu corporum circa punctum fixum mobilium.

---

1. Ardua omnino est quaestio in Mechanica de motu corporum, nisi vel solo motu progressivo ferantur, vel circa axem fixum revolvantur: haec enim duo motus genera fere sola ab auctoribus, qui theoriam Mechanicae excoluerunt, sunt pertractata. Quando autem corpus ita agitatur, ut ejus motus neque ad progressionem simplicem, neque ad gyrationem circa quempiam axem fixum revocari possit, regulae communes, quarum ope hi motus calculo subjici solent, nullum amplius praestant usum, talisque motus determinatio altius ex primis Mechanicae principiis repeti debet, quorum autem applicatio, ob summam motuum, qui in diversis corporis particulis inesse potest, differentiam, maxime difficilis redditur.

2. Ante Celeb. Dalembertum quidem nemo, quantum constet, hujusmodi motus evolutionem suscepit, isque adeo primus hoc argumentum attigisse est censendus in excellenti opere, quod de nutatione axis terrae conscripsit, in quo subtilissimam hujus generis quaestionem tam feliciter enodavit, ut ab eo istius profundissimae partis Mechanicae enucleatio potissimum sit expectanda. Cum enim terra, in aethere libere fluctuans et a viribus solis ac lunae sollicitata, non ita circa axem suum gyretur, ut is sibi perpetuo parallelus maneat, verus terrae motus per eas regulas, quae pro simplicioribus motus speciebus sunt erutae, minime expediri potest. Unde vir acutissimus multo sublimiores regulas in subsidium vocare est coactus, quae ita sunt comparatae, ut earum beneficio alii quicunque hujus generis motus, utcunque fuerint complicati, eodem successu definiri posse videantur.

3. Insignes hi profectus me etiam excitaverunt, ut vires meas in eadem quaestione tentarem, atque laboris mei specimen edidi in Comm. Academiae Regiae Berol. Tomo V. Quoniam autem in hac investigatione corpus terrae non solum tanquam rotundum, sed etiam a figura sphaerica minime aberrans spectari potest, hae circumstantiae in analysin ejusmodi determinationes ad calculum contrahendum inducunt, quae nullum locum essent habiturae, si terra figuram magis irregularem haberet. Ex quo methodus illa, qua pro motu terrae sum usus, parum utilitatis afferre poterit ad motum cujuscunque corporis in genere determinandum, atque nihilominus regulae adhuc generales desiderabantur, quibus corporum quorumcunque motus ad calculum redigi possent, et quae non ad certum corporum genus essent adstrictae.

4. Exposui ergo in Comm. Acad. Berol. Tomo VI novam regulam mechanicam, quae ad omnis generis motus, quorum corpus est capax, accommodari potest: praeterquam autem quod haec regula admodum prolixis calculi formulis est contenta, ea etiam ejusmodi elementa, quae a corporis figura pendent, requirit, ut ea pro quovis corporis situ peculiari calculo investigari debeant. Retuli enim ibi constanter situm corporis ad spatium absolutum, in quo sumtis pro lubitu ternis axibus fixis, ad quodvis temporis punctum, non solum corporis momenta inertiae respectu istorum axium colligi oportet, sed etiam alias quantitates, quae ob corporis figuram in calculum ingrediuntur. Quoties igitur situs corporis respectu horum ternorum axium mutatur, quod quidem singulis momentis fieri potest, valores illarum quantitatum semper de novo per computum erui debent, quo pacto motus determinatio plerumque molestissima redditur, atque adeo saepe ne suscipi quidem potest: propterea quod, si fuerint vires a situ corporis pendentes, Ipse situs inter quantitates incognitas est referendus.

5. Quo igitur huic tanto incommodo occurrerem, idem negotium nuper alia via confeci, et motum ex ejusmodi elementis definivi, quorum determinatio non a situ corporis respectu ternorum illorum axium in spatio absoluto sumtorum penderet, sed a tribus axibus in ipso corpore assumtis, et cum ipso mobilibus. Quoniam enim respectu istorum axium corpus perpetuo eundem situm conservat, elementa illa semel determinasse sufficit, sicque labor calculi continuo de novo instituendi evitatur. Hinc etiam regulae ad motum definiendum, quas ibi tradidi, multo facilius ad usum transferri, atque ad motus corporum a viribus quibuscunque sollicitatorum investigandos satis expedite accommodari possunt. Id solum incommodum etiamnunc restat, quod saepenumero ad calculos fere inextricabiles deducamur: verum, etsi in hoc non tam Mechanicae quam Analyseos defectus cernitur, tamen si istas regulas frequenti usu nobis magis familiares reddemus, dubium est nullum, quin calculus, per plura tentamina tandem tractabilior efficiatur. Quod idem de aliis difficilioribus investigationibus experientia luculenter testatur, quae nonnisi post plurimos conatus demum ad faciliorum usum sunt traductae.

6. Quae autem tum temporis de hoc argumento conscripsi, brevitati consulens fere nimis succincte proposui, neque cuncta momenta, quibus haec investigatio innititur, satis luculenter explicavi. Tum vero etiam hoc negotium per formulas valde prolixas et taediosas ad finem perduxi, quae cum tandem aliquanto simpliciores extiterint, nullum est dubium, quin eaedem per viam magis planam et facilem obtineri queant. Quoniam igitur tam ardui operis tractatio repetita semper nobis novum lumen largiri solet, ac tam insueta objecta, quae cum hac investigatione sunt connexa, nonnisi frequenti et assiduo usu nobis familiaria redduntur, hoc quidem idem argumentum denuo aggrediar, operamque dabo, ut id tam perspicue, quam quidem ob rei difficultatem fieri poterit, exponam. Quoniam vero ante ad motus tantum eos, qui circa centrum gravitatis fiunt, indagationem institui, nunc rem aliquanto generalius sum complexurus, motusque, qui circa quodcunque punctum fixum evenire possunt, ad examen revocabo.

7. Omne corpus ita moveri potest, ut duo quaevis ejus puncta in quiete permaneant, ac tum simul omnia puncta, quae inter haec duo in directum jacent, quiescunt, quo casu corpus circa hanc lineam rectam in gyrum agi dicitur, hicque motus ratione celeritatis in infinitum variare potest. Sin autem praeter ea duo puncta tertium quodpiam punctum, non inter ea situm, seu cum iis non in directum jacens, in quiete retineatur, tum evidens est nullum plane motum in corpus cadere posse.

Unde si tria puncta non in directum sita in quiete retineantur, corpus nullius plane motus erit capax, sed totum immotum manebit.

8. Cum igitur tribus punctis in quiete retinendis omnis mobilitas corporis tollatur, intelligimus tres dari in quovis corpore mobilitatis gradus. Primus scilicet et infimus mobilitatis gradus est, cum duo puncta quieta servantur, quo casu corpus circa lineam rectam per duo illa puncta transeuntem gyrabitur, unde illa linea recta axis gyrationis vocatur. Ratione directionis ergo duplex tantum motus locum habere potest, prouti gyratio vel in hanc, vel in contrariam plagam fit; ratione celeritatis autem infinita varietas in corporis motum cadit; quovis tamen momento ex motu unius puncti simul totius corporis motus innotescit, dum celeritas ubique rationem distantiae ab axe gyrationis sequitur.

9. Secundus porro mobilitatis gradus existit, cum non duo corporis puncta, sed unicum tantum in quiete fixum retinetur, sicque corpori multo major movendi libertas relinquitur. Jam enim non solum circa rectam quamcunque per istud punctum transeuntem, sed gyratio successive circa alias atque alias hujusmodi rectas fieri potest, ita tamen ut perpetuo punctum illud, quod centrum motus merito vocatur, immotum maneat. Hoc ergo casu infinities major motus multiplicitas in corpus cadit, quam praecedente.

10. Tertius denique ac summus mobilitatis gradus corpori erit tribuendus, quando ne punctum quidem corporis immotum retinetur, atque adeo corporis mobilitas nullo plane modo restringitur, quo casu corpus liberrime mobile dicitur. Cujusmodi motus investigatio, etiamsi ob summam mutabilitatem difficillima videatur, tamen ad gradum secundum facile revocatur, propterea quod quovis momento ejusmodi motum spatio absoluto inesse concipere licet, quo unum corporis punctum ad quietem redigatur. Quin etiam compertum est, omnem hujus generis motum resolvi posse in motum centri gravitatis, et motum, quo ipsum corpus circa centrum gravitatis, quasi in quiete maneret, agitatur.

11. Cum igitur motus primi generis pro omnibus corporibus rigidis, qualia hic contemplamur, jam ita sit investigatus, ut nihil amplius desiderari queat, atque motus tertii generis ad secundum feliciter sit perductus: omnis quaestio, quae adhuc in theoria motus corporum solidorum seu rigidorum enodanda restat, versatur in motu secundi generis, quo corpora circa punctum quasi centrum fixum mobilia statuantur. Hujusmodi motus cernitur, quando corpus cuspidi fixae impositum utcunque agitatur, ita tamen, ut semper idem corporis punctum cuspidi incumbat, quemadmodum acus magneticae tali cuspidi imponi solent. Quod si loco acus, orbis, seu discus, vel corpus alius cujuscunque figurae cuspidi imponatur, habebitur in hoc motus genere casus patens, qui ad summam universalitatem evehetur, quando insuper vires quascunque, quibus tale corpus urgeatur, introducemus.

12. Mirabilem usum hujusmodi motus Celeb. Bouguerus in eximio Tractatu de navigatione commemorat, ab artifice quodam Anglo inventum, quo contendit certae figurae corpus, operculo pyxidis simile, ita cuspidi imponi posse, ut eo in gyrum acto superficies suprema in planitiem efformata perpetuo ad horizontem se componat, talemque motum in navigatione commendat, quippe cujus beneficio verum planum horizontale obtineri queat, agitatione navis non obstante. Manifestum autem est motus determinationem talis corporis ad genus secundum pertinere, atque eo esse diffici-

liorem, cum ipsa cuspis, cui corpus impingit, agitationi subjecta assumatur: quae theoria cum nondum satis sit exposita, aeque est difficile istud phaenomenum explicare, atque conditiones necessarias assignare, sub quibus id sit successurum: ex quo intelligi potest, quanta adjumenta, in praxi mechanica universa, ex accurata hujusmodi motuum pertractatione, merito expectari queant.

13. Cum autem motus secundi generis in se complectatur motus primi generis, evidens est illud commode applicari non posse, nisi prius hoc diligenter fuerit exploratum. In quo etiamsi nulla amplius insit difficultas, idque jam in variis scriptis mechanicis uberrime sit expositum, tamen quatenus ei genus secundum innititur, ejus pertractatio de novo suscipienda atque ita instruenda videtur, ut ab eo via ad hoc alterum praeparetur, et connexio quae inter ambo intercedit, luculentius demonstretur. Quam ob causam ab indagatione motuum primi generis exordiar, quos equidem ex primis Mechanicae principiis ita sum derivaturus, ut pari ratione investigatio motuum secundi generis suscipi queat.

14. In omni autem motu, utcunque fuerit complicatus, sive corporum rigidorum, sive flexibilium, sive etiam fluidorum investigando, cum variae methodi in usum vocari soleant, equidem longa experientia edoctus sequentem methodum non solum commodissimam, sed etiam ita comparatam deprehendi, ut ad omnia motus genera aeque pateat, ac semper certo cum successu adhiberi possit. Primo scilicet generatim in corpore motum quemcunque inesse concipio, qui quidem generalissime omnes plane motus, quorum corpus est capax, in se complectatur. Secundo, pro singulis corporis particulis vires ad hunc motum prosequendum requisitas investigo, quae nimirum eatenus sunt necessariae, quatenus quaelibet particula vel non uniformiter, vel non in directum fertur. Tertio, has vires requisitas ad motum fictum prosequendum comparo cum viribus, a quibus corpus actu sollicitatur, easque his aequivalentes facio; quod quo facilius praestari possit, alteras vires in contrarias converto, quae proinde cum alteris in aequilibrio consistere debebunt. Cum igitur vires requisitae, contrarie vel negative sumtae, vires actu sollicitantes destruere, seu cum iis aequilibrium constituere debeant, theoria aequilibrii suppeditabit aequationes, quibus motus fictus et generaliter assumtus ad motum realem perducitur, unde verus corporis motus definietur.

15. Quodsi corpus non libere est mobile, sed ejus motus limitatur, veluti si circa axem vel centrum fixum movetur, vel fluidum per canales manat, tum plerumque haec ipsa motus obstacula vim quandam sustinent, cujus determinatio per vulgares methodos saepenumero admodum fit difficilis et lubrica. Hujus autem methodi ope, quam hic adumbravi, et haec determinatio redditur planissima. Denotet enim $R$ has vires, quas fulcrum aliave corporis obstacula sustinent; tum vero vires corpus actu sollicitantes designentur littera $P$, vires vero ad motum prosequendum requisitae, littera $Q$. Jam quoniam fulcrum pari vi in corpus reagit, ipsum corpus inde vi $= -R$ sollicitari censendum est, ita ut nunc universae vires in corpus agentes sint $= P - R$. Motus ergo ita comparatus erit, ut vires ad ejus conservationem requisitae $Q$ his viribus $P - R$ perfecte aequivaleant, haecque adeo aequalitas subsistat $Q = P - R$, ex qua actio seu pressio corporis in fulcrum erit $R = P - Q$, seu haec pressio aequalis erit viribus corpus actu sollicitantibus, demtis viribus ad motus conservationem requisitis.

16. En ergo regulam facillimam, cujus ope quovis casu pressio corporis in fulcrum definiri potest, eaque tam late patet, ut non solum ad omnia motuum non liberorum genera extendatur, sed etiam ad omnia corporum genera, sive sint solida, sive fluida, eodem successu accommodari possit. Reducitur ergo non solum haec de pressione corporum in fulcra seu sustentacula difficillima quaestio, sed etiam ipsa motus omnium corporum determinatio ad puram quaestionem staticam, propterea quod vel aequilibrium inter vires, vel aequivalentia virium exquiritur. Pro motu scilicet ipso definiendo aequilibrium adesse debet inter vires actu sollicitantes $P$, et inter vires ad motum requisitas negative sumtas, hoc est inter vires $P$ et $-Q$, quod quidem aequilibrium ex immobilitate fulcri deducitur: tum vero cogitatione remota fulcri immobilitate, differentia illarum virium $P-Q$ praebet vim a fulcro sustentam.

17. Apparet ergo fulcrum eatenus tantum premi, quatenus vires actu sollicitantes superant vires ad motum requisitas, ita ut si nullis opus sit viribus ad motum prosequendum, fulcrum omnes vires sollicitantes sustineat. Contra vero fulcrum nullas plane vires sustinebit, quando vires actu sollicitantes viribus requisitis omnino fuerint aequales, quo casu motus corporis perinde se habebit, ac si esset perfecte liberum, neque ejus motus ullo modo limitatus. Si enim axis vel fulcrum nullam vim sustinet, motus idem omnino erit, ac si axis vel fulcrum prorsus tolleretur, quo pacto corpus in perfectam libertatem se movendi vindicatur.

18. Principium autem mechanicum, ex quo vires ad quemvis motum prosequendum requisitae expeditissime definiri possunt, ita se habet: Considerato (Fig. 121) corporis elemento quocunque, cujus massa sit $dM$, motus ejus ita sit comparatus, ut elapso tempore $=t$, id elementum pervenerit in $Z$, cujus loci situs per ternas coordinatas, in datis directionibus fixis assumtas $AX=x$, $XY=y$ et $YZ=z$ definiatur, ita ut hae quantitates $x$, $y$, $z$ tanquam functiones temporis spectari possint, quarum differentialibus $dx$, $dy$ et $dz$, ad elementum temporis $dt$ relatis, verus particulae $Z$ motus continetur. Sumto jam differentiali temporis $dt$ constante, ad motum elementi $Z=dM$ prosequendum tribus opus est viribus motricibus, secundum directiones, illis coordinatis parallelas $AX$, $XY$ et $YZ$, sollicitantibus, quae sint $Zp$, $Zq$ et $Zr$, eruntque hae vires:

I. Vis secundum $Zp$ ipsi $AX$ parallele urgens $=\frac{2dMddx}{dt^2}$,

II. Vis secundum $Zq$ ipsi $XY$ parallele urgens $=\frac{2dMddy}{dt^2}$,

III. Vis secundum $Zr$ ipsi $YZ$ parallele urgens $=\frac{2dMddz}{dt^2}$.

Directiones autem harum ternarum virium ita sunt concipiendae, uti in figura repraesentantur, ita ut tendant ad singulas coordinatas $x$, $y$ et $z$ augendas, siquidem vires prodeant affirmativae; sin autem sint negativae, directiones in contrarium sunt mutandae.

19. Quod ad binarium attinet, quo hae formulae sunt affectae, is a mensura determinata, qua tempus cum reliquis quantitatibus in comparationem ducitur, pendet, quae si alia statueretur, quicunque alius numerus aeque adhiberi posset. Utor autem hic ea ratione, secundum quam tempus, quo grave ex altitudine quacunque $a$ libere delabitur, per $2\sqrt{a}$ exprimi solet, ita ut si $a$ denotet altitudinem lapsus uno minuto secundo facti, expressio temporis quaecunque $t$ per $2\sqrt{a}$ divisa in minuta secunda convertatur; hoc ergo modo tempus $t$ cum magnitudinibus $x$, $y$, $z$ comparabitur.

20. Porro exponenda est relatio inter vires motrices et massas, quae cum aeque per se non determinetur, sed a mensura arbitraria pendeat, equidem semper cujusque corporis massam per pondus, quod idem corpus in superficie terrae esset habiturum, exprimere soleo, quandoquidem massae ponderibus proportionales deprehenduntur, per pondera vero etiam quaevis vires motrices utpote quantitates homogeneae exprimi possunt. Hac ergo ratione recepta, primum massae et vires motrices ad homogeneitatem reducuntur, tum vero etiam quadrata temporum et lineae.

21. Temporum autem ratio deducta est ex notione velocitatis, quae in motu uniformi per spatium ad tempus applicatum indicari solet, velocitas autem ipsa per radicem quadratam altitudinis, ex qua grave labendo parem celeritatem acquirit: unde tam velocitatum quam temporum mensura absoluta obtinetur, quae ita est comparata, ut quadrata tam temporum quam celeritatum pro lineis sint reputandae.

22. Hoc igitur principio, cui omnium motuum judicium ita innititur, ut omnia principia mechanica, quaecunque vulgo proferri solent, in eo contineantur, exposito, methodoque, qua ad omnis generis motus investigandos, uti convenit, indicata, ad institutum exequendum pergo, ac primo quidem motum gyratorium corporum solidorum circa axem quemcunque fixum examini subjiciam. Sit igitur (Fig. 122) corpus quodcunque $EFGH$, quod circa axem fixum $Aa$ gyretur, quocum unum quasi corpus continuum constituere putetur, sive axis per ipsum transeat, sive extrinsecus cum eo firmiter sit connexus, ita ut singulae corporis particulae tam inter se quam respectu hujus axis perpetuo eundem situm conservent.

23. Hoc corpus primo consideretur in quiete, et quo singulorum ejus elementorum situs facilius in computum duci queat, praeter axem gyrationis $Aa$ statuantur in corpore insuper duo axes $OB$ et $OC$, cum inter se tum ad $Aa$ normales, qui se mutuo in puncto $O$ decussent, et corpori firmiter inhaereant. Situs horum duorum axium assumtorum, aeque ac punctum $O$, ab arbitrio nostro pendet, perindeque est quomodocunque constituantur. Respectu horum ternorum axium ergo quaevis particula corporis certum situm tenebit, qui commodissime per ternas coordinatas his axibus parallelas definietur. Scilicet a particula corporis quacunque $Z$ demittatur in planum $AOB$ perpendiculum $ZY$, quod axi $OC$ erit parallelum; tum ex $Y$ axi $OB$ parallela agatur $YX$, axi $OA$ in $X$ occurrens; atque situs particulae $Z$, respectu ternorum axium, per has ternas coordinatas $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinabitur.

24. Pro eadem ergo corporis particula $Z$ hae ternae coordinatae perpetuo eandem quantitatem retinebunt, etiamsi corpus utcunque moveatur, propterea quod hos axes quasi corpori infixos cum eoque simul motos assumimus. In statu enim motus hi ipsi axes cum corpore moventur, sed ipsorum respectu quaelibet corporis particula perpetuo eundem situm retinet, per coordinatas $x$, $y$ et $z$ determinatum; scilicet si corpus circa axem $AOa$ gyretur, hic quidem axis $OA$ quiescit, sed ambo reliqui $OB$ et $OC$ circa eum aequaliter convertentur. Sin autem motus ad genus secundum pertineat, ita ut corpus circa punctum fixum $O$ agitetur, tum fieri potest, ut omnes tres axes in continuo motu versentur, nihilo vero minus eorum respectu quaelibet corporis particula constanter eundem situm conservet.

25. Motus autem corporis, sive ad genus primum, sive secundum referatur, dummodo punctum $O$ quiescat, distinctissime cognoscetur si ad quodvis tempus situm ternorum axium respectu spatii absoluti assignare noverimus. Tum enim simul cujuslibet corporis particulae verum situm respectu spatii absoluti definire poterimus, quem si ad quodvis temporis instans colligamus, ex mutatione situs momentanea ipsum motum cujusque particulae facile concludemus; spatiolum enim a quavis particula descriptum ad elementum temporis applicatum praebebit ejus celeritatem, et duo motus ejusdem particulae duobus tempusculis successivis inter se collati ostendent cum celeritatis tum directionis mutationem, quibus rebus plane omnia, quae de motu corporis universo quaeri possunt, continentur. Hocque ergo modo perfectam motus cognitionem impetrabimus.

26. Dum autem corpus ad spatium absolutum referimus, in eo quoque tres axes assumi conveniet, quorum respectu situs corporis quovis momento definiri debet. Hi igitur tres axes spatii absoluti probe sunt distinguendi a tribus illis axibus, quos corpori infixos concipimus: illi enim revera sunt immobiles, hi vero cum corpore simul moventur, atque ex situ horum axium respectu illorum quovis momento tam situs corporis quam ejus motus cognoscitur. Quare dum corpus utcunque movetur, ita ut punctum $O$ immotum maneat, ejus motus perfecte describetur, si ad quodvis tempus situm axium corpori infixorum respectu axium spatii absoluti assignare poterimus.

27. Quo igitur cujuslibet elementi corporis $Z$ verum motum ad quodvis tempus definire queamus, primum ejus situm respectu axium ternorum ipsi corpori infixorum indagare debemus, qui quidem situs, uti vidimus, commodissime per ternas coordinatas his axibus parallelas determinatur; et quamdiu idem corporis elementum spectatur, hae ternae coordinatae nullam mutationem subeunt, utcunque corpus moveatur. Unde si hae coordinatae per $x$, $y$ et $z$ designentur, eae pro quantitatibus constantibus erunt habendae, quamdiu scilicet idem corporis elementum spectatur, propterea quod ejus situs respectu horum axium, qui corpori infixi simulque cum eo mobiles statuuntur, nulli mutationi est obnoxius.

28. Deinde vero ejusdem elementi situm quoque respectu ternorum axium absolutorum explorari oportet, quod pariter per alias ternas coordinatas his axibus parallelas commodissime praestabitur. Jam vero hae coordinatae etiam pro eodem corporis elemento labente tempore pro variabilibus sunt habendae, atque ex hac ipsa variatione ejus verus motus aptissime dijudicatur, siquidem ejus situs respectu horum axium continuo immutatur. Quodsi ergo hae coordinatae per litteras $X$, $Y$, $Z$ designentur, hae successu temporis mutationem perpeti censendae sunt, dum praecedentes $x$, $y$, $z$ pro constantibus haberi debent.

29. Quoniam ergo cujusque elementi motus ex coordinatis mobilibus $X$, $Y$, $Z$ peti debet, in id imprimis est incumbendum, ut has coordinatas ex coordinatis fixis $x$, $y$, $z$ derivemus, quem in finem ad quodvis tempus situm axium corporis, respectu axium spatii absoluti, explorari convenit. Principalis igitur quaestio tum huc redibit, ut cognito situ axium corporis respectu axium spatii absoluti, pro quocunque corporis elemento ternae coordinatae mobiles seu variabiles $X$, $Y$, $Z$ ex coordinatis immobilibus et fixis $x$, $y$, $z$ definiantur: quod igitur quemadmodum commodissime fieri possit, diligentius dispiciamus. Haec autem disquisitio tam ad motus secundi generis quam primi generis aeque patebit, quia unum saltem corporis punctum $O$ tanquam fixum assumimus.

30. Ante omnia autem observari conveniet, si ternae coordinatae axibus $OA$, $OB$ et $OC$ inter se normalibus parallelae fuerint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, atque distantia elementi $Z$ a centro $O$ ponatur $OZ = v$, ut sit $vv = xx + yy + zz$, tum $\frac{x}{v} = \frac{OX}{OZ}$ exprimere cosinum anguli $AOZ$, parique modo esse $\frac{y}{v} = \cos BOZ$ et $\frac{z}{v} = \cos COZ$. Hinc ergo ex angulis, quibus recta $OZ$ ad ternos axes $OA$, $OB$ et $OC$ inclinatur, coordinatae his axibus parallelae ita exprimuntur, ut sit

coordinata axi $OA$ parallela $x = v\cos AOZ$
« « $OB$ « $y = v\cos BOZ$
« « $OC$ « $z = v\cos COZ$.

31. Si autem situs ejusdem elementi ad alios ternos axes quoscunque inter se normales et se in eodem puncto $O$ decussantes referatur, per coordinatas $X$, $Y$, $Z$, quae his tribus axibus sint parallelae, hae coordinatae ad illas $x$, $y$, $z$ semper ita erunt comparatae, ut sit

$$X = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \quad Y = \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y + \mathfrak{F}z, \quad Z = \mathfrak{G}x + \mathfrak{H}y + \mathfrak{I}z,$$

ubi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$ sunt quantitates a situ posteriorum axium respectu priorum pendentes, uti ex elementis geometriae constat, ubi de permutatione coordinatarum respectu aliorum axium agitur.

32. Ex iisdem autem elementis constat hos coëfficientes ita a se invicem pendere, ut semper sit

$$XX + YY + ZZ = xx + yy + zz = vv.$$

Ex quo substituendis pro $X$, $Y$, $Z$ valoribus exhibitis necesse est sit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\mathfrak{G} = 1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\mathfrak{H} = 1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{I}\mathfrak{I} = 1,$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\mathfrak{I} = 0, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{E}\mathfrak{F} + \mathfrak{H}\mathfrak{I} = 0,$$

quarum aequationum ope sex harum quantitatum per reliquas tres definiri possunt.

33. Hinc autem vicissim obtinetur determinatio coordinatarum $x$, $y$, $z$ per alteras $X$, $Y$ et $Z$, hoc modo

$$x = \mathfrak{A}X + \mathfrak{D}Y + \mathfrak{G}Z, \quad y = \mathfrak{B}X + \mathfrak{E}Y + \mathfrak{H}Z, \quad z = \mathfrak{C}X + \mathfrak{F}Y + \mathfrak{I}Z,$$

unde porro sequentes horum coëfficientium relationes colliguntur, quae quidem jam in superioribus contentae esse debent:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} = 1, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} = 1, \quad \mathfrak{G}\mathfrak{G} + \mathfrak{H}\mathfrak{H} + \mathfrak{I}\mathfrak{I} = 1,$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{G} + \mathfrak{B}\mathfrak{H} + \mathfrak{C}\mathfrak{I} = 0, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{G} + \mathfrak{E}\mathfrak{H} + \mathfrak{F}\mathfrak{I} = 0.$$

34. His autem omnibus conditionibus per tres angulos satisfieri potest. Assumtis enim tribus angulis $p$, $q$, $r$, novem hi coëfficientes ita definiri possunt, ut sit:

$\mathfrak{A} = \cos p$, $\mathfrak{B} = \sin p \cos q$, $\mathfrak{C} = \sin p \sin q$,
$\mathfrak{D} = \sin p \cos r$, $\mathfrak{E} = -\sin q \sin r - \cos p \cos q \cos r$, $\mathfrak{F} = +\cos q \sin r - \cos p \sin q \cos r$,
$\mathfrak{G} = \sin p \sin r$, $\mathfrak{H} = +\sin q \cos r - \cos p \cos q \sin r$, $\mathfrak{I} = -\cos q \cos r - \cos p \sin q \sin r$,

cujusmodi autem anguli per has litteras $p$, $q$, $r$ quovis casu exprimantur, mox videbimus.

35. Repraesentet jam (Fig. 123) sphaera $O\alpha\beta\gamma$ spatium absolutum, respectu cujus situs corporis quovis momento definiri debeat: commodissimum autem est spatium absolutum instar sphaerae considerare, quo praecepta trigonometriae sphaericae in usum vocari possent. Existente ergo $O$ centro hujus sphaerae; sint $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ terni axes spatii absoluti, immobiles et inter se normales, eruntque arcus $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ in superficie sphaerae quadrantes, eorumque adeo cosinus $= 0$ et sinus $= 1$, posito radio sphaerae $= 1$. Corporis autem, cujus motus investigatur, centrumque in centro sphaerae $O$ immobile haeret, terni axes $OA$, $OB$ et $OC$ transeant per superficiei sphaericae puncta $A$, $B$, $C$, praesenti quidem temporis instanti, ita ut arcus in figura non expressi $AB$, $AC$ et $BC$ sint pariter quadrantes.

36. Pro corporis elemento quocunque $Z$, cujus a centro $O$ distantia est $OZ = v$, sint ternae coordinatae axibus in corpore infixis et cum corpore mobilibus $OA$, $OB$, $OC$ parallelae $x$, $y$ et $z$; ejusdem vero elementi ternae coordinatae axibus spatii absoluti et immobilibus $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ parallelae sint $X$, $Y$ et $Z$. Unde si recta $OZ$ superficiem sphaericam in $M$ trajiciat, indeque tam ad puncta $A$, $B$, $C$, quam $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ arcus circulorum maximorum ducantur, erit ut vidimus:

$$\cos MA = \frac{x}{v}, \quad \cos MB = \frac{y}{v}, \quad \cos MC = \frac{z}{v},$$
$$\cos M\alpha = \frac{X}{v}, \quad \cos M\beta = \frac{Y}{v}, \quad \cos M\gamma = \frac{Z}{v}.$$

Pendeant autem hae posteriores coordinatae ita a prioribus, ut sit

$$X = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \quad Y = \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y + \mathfrak{F}z, \quad Z = \mathfrak{G}x + \mathfrak{H}y + \mathfrak{J}z.$$

37. Substitutis autem pro $x$, $y$, $z$ et $X$, $Y$, $Z$ superioribus valoribus habebimus

$$\cos M\alpha = \mathfrak{A}\cos MA + \mathfrak{B}\cos MB + \mathfrak{C}\cos MC,$$
$$\cos M\beta = \mathfrak{D}\cos MA + \mathfrak{E}\cos MB + \mathfrak{F}\cos MC,$$
$$\cos M\gamma = \mathfrak{G}\cos MA + \mathfrak{H}\cos MB + \mathfrak{J}\cos MC,$$

unde facile valores coëfficientium per quantitates ad figuram pertinentes exhibere poterimus. Cum enim hae formulae debeant subsistere, ubicunque punctum $M$ assumatur, ponamus punctum $M$ sumi successive in ipsis punctis $A$, $B$, $C$.

38. Puncto $M$ autem primo in $A$ sumto, ut sit $MA = 0$, arcus $MB$ et $MC$ abibunt in quadrantes, eritque $\cos MB = 0$ et $\cos MC = 0$, unde nostrae aequationes praebebunt

$$\cos A\alpha = \mathfrak{A}, \quad \cos A\beta = \mathfrak{D}, \quad \cos A\gamma = \mathfrak{G}.$$

Deinde sumatur $M$ in $B$, ut fiat $MB = 0$ et $\cos MB = 1$, item $\cos MA = 0$ et $\cos MC = 0$, atque prodibit

$$\cos B\alpha = \mathfrak{B}, \quad \cos B\beta = \mathfrak{E}, \quad \cos B\gamma = \mathfrak{H}.$$

Denique sumto $M$ in $C$, ut fiat $MC = 0$, $\cos MC = 1$ et $\cos MA = 0$, $\cos MB = 0$, orietur

$$\cos C\alpha = \mathfrak{C}, \quad \cos C\beta = \mathfrak{F}, \quad \cos C\gamma = \mathfrak{J}.$$

39. Patet ergo litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ exprimere cosinus arcuum, quibus puncta mobilia $A$, $B$, $C$ a fixis $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ distant, seu denotare cosinus angulorum, quibus axes cor-

poris $OA$, $OB$, $OC$, ad axes spatii absoluti $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ inclinantur. Erit ergo $\cos A\alpha = \cos p$, seu angulus $p$ aequalis est arcui $A\alpha$: tum vero ob $\cos A\beta = \mathfrak{D} = \sin p \cos r$, patet $r$ designare angulum $A\alpha\beta$. Denique ob $\cos B\alpha = \mathfrak{B} = \sin p \cos q$, patet $q$ denotare angulum $\alpha AB$; manifestum autem est, si dentur primo angulus $\beta\alpha A = r$, secundo arcus $\alpha A = p$, et tertio angulus $\alpha AB = q$, tum positionem omnium trium punctorum $A$, $B$, $C$ in spatio absoluto determinari.

40. En ergo insigne theorema trigonometricum, quo idem punctum $M$ duplici modo ad terna sphaerae puncta quadrante a se invicem distantia refertur

$$\cos M\alpha = \cos A\alpha \cos MA + \cos B\alpha \cos MB + \cos C\alpha \cos MC,$$
$$\cos M\beta = \cos A\beta \cos MA + \cos B\beta \cos MB + \cos C\beta \cos MC,$$
$$\cos M\gamma = \cos A\gamma \cos MA + \cos B\gamma \cos MB + \cos C\gamma \cos MC,$$

cujus demonstratio more geometrico absolvenda non parum sagacitatis requirere videtur.

41. His igitur subsidiis cum ex analysi tum trigonometria sphaerica comparatis, ipsa problemata mechanica aggrediamur, siquidem etiam principia, ex quibus eorum solutio peti debet, sufficienter sunt exposita. Quae subsidia cum ad motus genus tam primum quam secundum pateant, a genere primo nostras investigationes incipiamus, quo corpus circa axem fixum gyrari assumitur. Quodsi ergo $OA$ fuerit iste axis fixus, quia is in spatio quoque absoluto situm suum constanter retinet, cum axe $O\alpha$ confundi poterit, ita ut sit $A\alpha = 0$, ideoque $\alpha B$ et $\alpha C$ arcus 90 graduum.

### De motu rotatorio corporis rigidi circa axem fixum.

42. Sumto $OA$ pro axe fixo, circa quem corpus utcunque gyretur, congruat is cum axe $O\alpha$ spatii absoluti, et ad tempus quodcunque $t$ bini reliqui corporis axes habeant in spatio absoluto situm $OB$ et $OC$, et puncta $B$ et $C$ erunt in circulo maximo $\beta\gamma\delta$, cujus polus est $\alpha$. Positis jam $x$, $y$, $z$ coordinatis elementi corporis $Z$ axibus $OA$, $OB$, $OC$ parallelis, et $X$, $Y$, $Z$ coordinatis ejusdem elementi axibus immobilibus parallelis, si adhibeamus supra inductam relationem in has duplices coordinatas, habebimus $A\alpha = 0$ et $\alpha B = \alpha C = 90°$.

43. Hinc ergo coëfficientes assumti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ita definientur, ut sit: $\cos A\alpha = \mathfrak{A} = 1$, $\cos B\alpha = \mathfrak{B} = 0$, $\cos C\alpha = \mathfrak{C} = 0$, $\cos A\beta = \mathfrak{D} = 0$ et $\cos A\gamma = \mathfrak{G} = 0$. Ac si ponatur $B\beta = s$, erit $\cos B\beta = \mathfrak{E} = \cos s$, $\cos B\gamma = \mathfrak{H} = \sin s$, $\cos C\beta = \mathfrak{F} = -\sin s$ et $\cos C\gamma = \mathfrak{J} = \cos s$. Quibus valoribus introductis habebimus $X = x$, $Y = y \cos s - z \sin s$, $Z = y \sin s + z \cos s$, ubi $s = B\beta$ denotat angulum $\beta\alpha B$, quem corpus jam tempore $t$ circa axem $O\alpha$ vel $OA$ motu angulari confecit; spectari ergo debet $s$ tanquam functio temporis $t$, dum coordinatae $x$, $y$, $z$ ratione temporis sunt quantitates constantes.

44. Quoniam nunc situs elementi $Z$ respectu spatii absoluti per ternas coordinatas $X$, $Y$, $Z$ exprimitur, quae cum tempore variantur, dum alterae $x$, $y$, $z$ constantes manent, si massa elementi $Z$ per $dM$ indicetur, et differentiale temporis $dt$ constans assumatur, ad motum hujus elementi prosequendum requiruntur tres vires motrices secundum directiones axium $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ sollicitantes, quae sunt

$$\text{vis secund. } O\alpha = \frac{2dMddX}{dt^2}, \quad \text{vis secund. } O\beta = \frac{2dMddY}{dt^2}, \quad \text{vis secund. } O\gamma = \frac{2dMddZ}{dt^2},$$

quarum virium directiones, his axibus parallelae, in ipso puncto $Z$ applicatae sunt concipiendae.

45. Innotescunt ergo vires ad elementum corporis $Z$ sollicitandum requisitae secundum axes spatii absoluti agentes, quae per notam virium compositionem vel ad duas, vel etiam ad unicam revocari possunt. Expediet autem eas reducere ad ternas alias, quae secundum axes corpori infixos $OA$, $OB$, $OC$ agant, ut calculus harum virium, etiam sine respectu ad motum habito, expediri possit, propterea quod elementum $Z$ ad hos axes constanti et immutabili ratione refertur.

46. Cum autem sit $X = x$ et $x$ constans, vis prima secundum $O\alpha$ evanescit, et reliquae duae secundum $O\beta$ et $O\gamma$ facile reducuntur ad directiones $OB$ et $OC$. Resolvitur enim vis secundum $O\beta$ in has duas

$$\text{vis sec. } OB = \text{vi sec. } O\beta \cos B\beta = \text{vi sec. } O\beta \cos s,$$
$$\text{vis sec. } OC = \text{vi sec. } O\beta \cos C\beta = -\text{vi sec. } O\beta \sin s$$

similique modo vis secundum $O\gamma$ in has duas

$$\text{vis sec. } OB = \text{vi sec. } O\gamma \cos B\gamma = \text{vi sec. } O\gamma \sin s,$$
$$\text{vis sec. } OC = \text{vi sec. } O\gamma \cos C\gamma = \text{vi sec. } O\gamma \cos s.$$

47. Hinc ergo pro motu particulae $Z$ requiruntur duae sequentes vires

$$\text{altera sec. } OB = \frac{2dM}{dt^2}(ddY \cos s + ddZ \sin s), \quad \text{altera sec. } OC = \frac{2dM}{dt^2}(-ddY \sin s + ddZ \cos s).$$

Cum autem hic variabilitas temporis spectetur, sola quantitas $s$ erit variabilis, eritque ergo

$$dY = -yds \sin s - zds \cos s, \quad ddY = -ydds \sin s - zdds \cos s - yds^2 \cos s + zds^2 \sin s,$$
$$dZ = \phantom{-}yds \cos s - zds \sin s, \quad ddZ = +ydds \cos s - zdds \sin s - yds^2 \sin s - zds^2 \cos s,$$

quibus valoribus substitutis binae istae vires prodibunt:

$$\text{vis sec. } OB = \frac{2dM}{dt^2}(-zdds - yds^2), \quad \text{vis sec. } OC = \frac{2dM}{dt^2}(ydds - zds^2).$$

48. Quoniam corpus est mobile circa axem $OA$ (Fig. 122) momenta harum virium respectu ejus sunt spectanda. At vis secundum $OC$ seu $YZ$ agens praebet momentum ad corpus in plagam $BC$ circa $OA$ convertendum $=$ vi sec. $OC.y$; vis autem secundum $OB$ seu $XY$ dat momentum ad motum in plagam oppositam $CB$ accelerandum $=$ vi sec. $OB.z$, unde utrinque nascitur momentum in plagam $BC$ tendens $= \frac{2dM}{dt^2}(yy + zz)\,dds = \frac{2dds}{dt^2}(yy + zz)\,dM$. Tantum scilicet momentum requiritur pro elemento corporis $Z = dM$ ad motum, quo corpus ferri assumimus, producendum.

49. Cum igitur ob singula corporis elementa talia momenta requirantur, haec omnia momenta in unam summam colligantur, quae quidem praesenti corporis instanti locum habeant. Jam ergo tempus constans statuendum, ideoque terminus $\frac{2dds}{dt^2}$ a solo tempore pendens, et variabilitas omnis in situm elementi $Z$ erit transferenda, ita ut nunc coordinatae $y$ et $z$ variabiles reddantur: ex quo summae omnium momentorum, seu momentum totale in plagam $BC$ tendens erit $= \frac{2dds}{dt^2}\int(y^2 + z^2)\,dM$. Conservatio nimirum motus, quem in corpore inesse ponimus, hoc virium momentum requirit.

50. Denotat autem $s$ angulum, quem corpus tempore $t$ jam motu suo circa axem $OA$ absolvit: unde $\frac{ds}{dt}$ exprimit ipsam celeritatem angularem in plagam $BC$ directam, et $\frac{2dds}{dt^2}$ accelerationem hujus motus in eandem plagam, quippe quae ex differentiali celeritatis angularis ad elementum temporis $dt$ applicato aestimatur. Unde videmus eatenus tantum virium momento ad hujus motus conservationem opus esse, quatenus motus angularis mutationem subit. Si enim esset uniformis, seu $\frac{dds}{dt^2} = 0$, nulla vi opus esset; pro eodem autem corpore momentum virium ipsi accelerationi est proportionale.

51. Quantum autem virium momentum quaevis acceleratio pro quolibet corpore requirat, ex formula $\int (yy + zz)\, dM$ judicari debet. Denotat autem $yy + zz$ quadratum lineae $XZ$, hoc est quadratum distantiae elementi $Z$ ab axe gyrationis $OA$: singula igitur corporis elementa in quadrata distantiarum suarum ab axe $OA$ multiplicari, haecque cuncta producta in unam summam colligi debent, quae summa si ponatur $= Mff$, quam voco momentum inertiae corporis respectu axis $OA$, erit momentum virium ad accelerationem $\frac{2dds}{dt^2}$ producendam requisitum $= Mff \cdot \frac{2dds}{dt^2}$.

52. Hinc igitur vicissim, si corpus a viribus quibuscunque sollicitetur, definire poterimus, quantum ab iis motus corporis afficiatur. Quaerantur enim ex viribus illis momenta respectu axis $OA$, quae in unam summam collecta praebeant momentum in plagam $BC$ tendens $= P$, et cum esse debeat $Mff \cdot \frac{2dds}{dt^2} = P$, habebitur hinc

$$\frac{2dds}{dt} = \frac{Pdt}{Mff}, \quad \frac{2ds}{dt} = \frac{\int Pdt}{Mff} \quad \text{et} \quad 2s = \frac{\int dt \int Pdt}{Mff},$$

unde si ad quodvis tempus $t$ virium sollicitantium momentum $P$ constet, ad quodvis tempus quoque non solum acceleratio, sed etiam ipsa celeritas angularis definiri poterit.

53. Cum ergo hoc modo motus gyratorius cujuscunque corporis circa axem fixum perfecte determinetur, quaecunque fuerint vires sollicitantes, investigemus etiam vires, quas ipse axis partim ob vires sollicitantes, partim ob motum corporis sustinet. Ac supra quidem vidimus axem sustinere primum vires, quibus corpus actu sollicitatur, deinde vero insuper vires, quae sint aequales et oppositae viribus ad motum conservandum requisitis. Cum igitur per se sit manifestum, quantam vim axis sustineat a viribus corpus actu sollicitantibus, indagandae tantum restant eae vires, quae ex viribus ad motum requisitis in axem redundant. Ob motum ergo particulae $Z$ (Fig. 124) considerandae sunt duae vires $Zq$ et $Zr$, axibus $OB$ et $OC$ parallelae et inventis oppositae, quae propterea erunt

$$\text{vis } Zq = \frac{2dM}{dt^2}(zdds + yds^2) \quad \text{et} \quad \text{vis } Zr = \frac{2dM}{dt^2}(-ydds + zds^2)$$

vim enim $Zp$, quae est axi $OA$ parallela, hoc casu in nihilum abire invenimus.

54. Omnes ergo has vires in summam colligere debemus, et quia vis $Zq$ in planum $AOC$ est normalis, dabitur vis quaedam $MQ$ in hoc planum itidem normalis et axi $OB$ parallela, quae omnibus viribus $Zq$ aequivaleat. Deinde quia vis $Zr$ in planum $AOB$ est normalis, vis iis omnibus aequivalens, quae sit $NR$, pariter in hoc planum erit normalis, seu axi $OC$ parallela, sicque omnes illae vires infinite parvae ad has duas vires finitas $MQ$ et $NR$ reducentur, quarum actionem propterea axis sentiet praeter vires, quibus corpus actu sollicitatur, ita ut, si corpus a nullis viribus sollicitaretur, axis has tantum duas vires $MQ$ et $NR$ esset sustenturus.

55. Ex doctrina autem compositionis virium constat, vim $MQ$ aequalem esse summae omnium virium $Zq$, ita ut sit

$$\text{vis } MQ = \frac{2dds}{dt^2} \int z dM + \frac{2ds^2}{dt^2} \int y dM.$$

Deinde pari modo vis $NR$ aequalis est summae omnium virium $Zr$, sicque erit

$$\text{vis } NR = -\frac{2dds}{dt^2} \int y dM + \frac{2ds^2}{dt^2} \int z dM;$$

ad has ergo vires inveniendas singula corporis elementa per binas coordinatas $y$ et $z$ multiplicari et integralia per totum corpus extendi debent, ut obtineantur valores totales formularum $\int y dM$ et $\int z dM$.

56. Quantitate harum virium inventa, earum loca applicationis $M$ et $N$ in planis $AOC$ et $AOB$ investigari debent, quem in finem ex $M$ in $OA$ et ex $N$ in $OB$ ducantur normales $MG$ et $NH$, ita ut quaeri oporteat intervallum $OG.GM$ et $OH.HN$. Constat autem esse

$$\text{vis } MQ.OG = \int \text{vir. } Zq.x \quad \text{et} \quad \text{vis } MQ.GM = \int \text{vir. } Zq.z,$$
$$\text{vis } NR.OH = \int \text{vir. } Zr.y \quad \text{et} \quad \text{vis } NR.HN = \int \text{vir. } Zr.x,$$

unde elicitur

$$OG = \frac{\frac{2dds}{dt^2} \int xz dM + \frac{2ds^2}{dt^2} \int xy dM}{\text{vis } MQ}, \qquad GM = \frac{\frac{2dds}{dt^2} \int zz dM + \frac{2ds^2}{dt^2} \int yz dM}{\text{vis } MQ},$$

$$OH = \frac{-\frac{2dds}{dt^2} \int yy dM + \frac{2ds^2}{dt^2} \int yz dM}{\text{vis } NR}, \qquad HN = \frac{-\frac{2dds}{dt^2} \int xy dM + \frac{2ds^2}{dt^2} \int xz dM}{\text{vis } NR} = Oh.$$

57. Quo igitur hinc facilius definiri possit, quales vires axis gyrationis sustineat, corpus, quasi esset in quiete, consideretur, cui praeter vires actu sollicitantes hae duae vires $MQ$ et $NR$ essent applicatae. Cum enim omnium harum virium momenta respectu axis $OA$ se destruant, ex earum conjunctione vires nascentur, quarum media directio per ipsum axem $OA$ transit, ita ut vis aequivalens immediate in axem agat; unde patebit quanta vi opus sit ad axem in situ suo retinendum, ne inclinetur. Cum autem ex viribus actu sollicitantibus nascatur respectu axis $OA$ momentum $P$, vidimus esse $P = \frac{2dds}{dt^2} \int (yy + zz) dM$, hinc eo expeditius compositio omnium virium in axem agentium instituetur.

58. Aequivalet autem vis $MQ$ vi sibi aequali in axis puncto $G$ applicata, una cum vi evanescente rectae $GM$ in infinitum productae applicata, cujus tamen momentum sit finitum respectu axis $OA$, et aequali momento vis $MQ$. Simili modo vis $NR$ aequivalet vi sibi aequali, axi in puncto $h$, ducta $Nh$ ipsi $BO$ parallela, applicata, et insuper vi infinite parvae, rectae $hN$ in distantia infinita applicatae. Quare cum harum virium infinite parvarum actiones a viribus actu sollicitantibus destruantur, ob vires ad motus conservationem requisitas axis sollicitabitur in punctis $G$ et $h$ viribus $MQ$ et $NR$ ante inventis. Similique modo vires actu corpus sollicitantes in directionibus sibi parallelis axi immediate sunt applicandae, ut obtineantur vires, quas axis inde sustinet.

**De motu corporis rigidi circa centrum fixum.**

59. Motum circa axem fixum ideo hic accuratius definire visum est, ut pari modo calculus pro motu circa punctum fixum suscipi possit. Sumtis ergo in spatio absoluto tribus axibus immobilibus (Fig. 123) $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, existente $O$ illo puncto fixo, circa quod corpus a viribus quibuscunque sollicitatum movetur, pervenerit corpus elapso tempore $t$ in eum statum, ut jam axes ipsi infixi in spatio absoluto situm teneant $OA$, $OB$, $OC$. Quem situm si ad quodvis tempus assignare potuerimus, motum corporis perfecte habebimus cognitum; sumimus autem utrosque hos ternos axes inter se normales.

60. Pro situ porro axium mobilium $OA$, $OB$, $OC$ respectu immobilium definiendo, statuamus ut supra: $\cos A\alpha = \mathfrak{A}$, $\cos B\alpha = \mathfrak{B}$, $\cos C\alpha = \mathfrak{C}$, $\cos A\beta = \mathfrak{D}$, $\cos B\beta = \mathfrak{E}$, $\cos C\beta = \mathfrak{F}$, $\cos A\gamma = \mathfrak{G}$, $\cos B\gamma = \mathfrak{H}$, $\cos C\gamma = \mathfrak{I}$, eruntque hae quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. functiones solius temporis $t$, quae, ut vidimus, ita a se invicem pendent, ut sit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} = 1, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\mathfrak{G} = 1,$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} = 1, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\mathfrak{H} = 1,$$
$$\mathfrak{G}\mathfrak{G} + \mathfrak{H}\mathfrak{H} + \mathfrak{I}\mathfrak{I} = 1, \qquad \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{I}\mathfrak{I} = 1,$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\mathfrak{F} = 0, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\mathfrak{H} = 0,$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{G} + \mathfrak{B}\mathfrak{H} + \mathfrak{C}\mathfrak{I} = 0, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\mathfrak{I} = 0,$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{G} + \mathfrak{E}\mathfrak{H} + \mathfrak{F}\mathfrak{I} = 0, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{E}\mathfrak{F} + \mathfrak{H}\mathfrak{I} = 0.$$

61. Si jam coordinatae cujusvis elementi $Z = dM$, axibus corpori infixis $OA$, $OB$, $OC$ parallelae sint $x$, $y$, $z$, quae ratione temporis sunt constantes; atque ejusdem elementi coordinatae axibus immobilibus $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ parallelae ponantur $X$, $Y$, $Z$, jam invenimus esse

$$X = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \qquad Y = \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y + \mathfrak{F}z, \qquad Z = \mathfrak{G}x + \mathfrak{H}y + \mathfrak{I}z.$$

62 His positis quaeramus vires ad motum particulae $Z$ requisitas, quae ex his coordinatis $X$, $Y$, $Z$, ita reperientur ut sint

$$\text{vis sec. } O\alpha = \frac{2dMddX}{dt^2} = \frac{2dM}{dt^2}(xdd\mathfrak{A} + ydd\mathfrak{B} + zdd\mathfrak{C}),$$

$$\text{vis sec. } O\beta = \frac{2dMddY}{dt^2} = \frac{2dM}{dt^2}(xdd\mathfrak{D} + ydd\mathfrak{E} + zdd\mathfrak{F}),$$

$$\text{vis sec. } O\gamma = \frac{2dMddZ}{dt^2} = \frac{2dM}{dt^2}(xdd\mathfrak{G} + ydd\mathfrak{H} + zdd\mathfrak{I}),$$

quia nempe hic de motu ejusdem elementi $Z$ est quaestio, coordinatae $x$, $y$, $z$ pro constantibus, functiones vero temporis tantum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. pro variabilibus sunt habendae.

63. Praestabit autem has vires ad alias directiones reducere, qui ipsis axibus corpori infixis sint parallelae, quae reductio facile instituetur hanc regulam observando. Si vis quaepiam $V$ secundum directionem $OM$ ageret, ea resolveretur in has vires

$$\text{vim sec. } OA = V\cos MA, \quad \text{vim sec. } OB = V\cos MB, \quad \text{vim sec. } OC = V\cos MC$$

| hinc vis | praebet per resolutionem: | | |
|---|---|---|---|
| | vim sec. $OA$ | vim sec. $OB$ | vim sec. $OC$ |
| sec. $O\alpha$ | $\frac{2dMddX}{dt^2}\cos A\alpha$ | $\frac{2dMddX}{dt^2}\cos B\alpha$ | $\frac{2dMddX}{dt^2}\cos C\alpha$ |
| sec. $O\beta$ | $\frac{2dMddY}{dt^2}\cos A\beta$ | $\frac{2dMddY}{dt^2}\cos B\beta$ | $\frac{2dMddY}{dt^2}\cos C\beta$ |
| sec. $O\gamma$ | $\frac{2dMddZ}{dt^2}\cos A\gamma$ | $\frac{2dMddZ}{dt^2}\cos B\gamma$ | $\frac{2dMddZ}{dt^2}\cos C\gamma$. |

64. His viribus colligendis orientur pro elemento in $Z = dM$

$$\text{I. Vis sec. } OA = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + x\mathfrak{A}dd\mathfrak{A} + y\mathfrak{A}dd\mathfrak{B} + z\mathfrak{A}dd\mathfrak{C} \\ + x\mathfrak{D}dd\mathfrak{D} + y\mathfrak{D}dd\mathfrak{E} + z\mathfrak{D}dd\mathfrak{F} \\ + x\mathfrak{G}dd\mathfrak{G} + y\mathfrak{G}dd\mathfrak{H} + z\mathfrak{G}dd\mathfrak{I} \end{Bmatrix} = \text{vi } Zp$$

$$\text{II. Vis sec. } OB = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + x\mathfrak{B}dd\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}dd\mathfrak{B} + z\mathfrak{B}dd\mathfrak{C} \\ + x\mathfrak{E}dd\mathfrak{D} + y\mathfrak{E}dd\mathfrak{E} + z\mathfrak{E}dd\mathfrak{F} \\ + x\mathfrak{H}dd\mathfrak{G} + y\mathfrak{H}dd\mathfrak{H} + z\mathfrak{H}dd\mathfrak{I} \end{Bmatrix} = \text{vi } Zq$$

$$\text{III. Vis sec. } OC = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + x\mathfrak{C}dd\mathfrak{A} + y\mathfrak{C}dd\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}dd\mathfrak{C} \\ + x\mathfrak{F}dd\mathfrak{D} + y\mathfrak{F}dd\mathfrak{E} + z\mathfrak{F}dd\mathfrak{F} \\ + x\mathfrak{I}dd\mathfrak{G} + y\mathfrak{I}dd\mathfrak{H} + z\mathfrak{I}dd\mathfrak{I} \end{Bmatrix} = \text{vi } Zr$$

ideoque ad motum elementi $Z = dM$ requiruntur hae tres vires $Zp$, $Zq$ et $Zr$ (Fig. 124).

65. Quia punctum corporis $O$ fixum retinetur, ratione motus non tam ipsae hae vires, quam earum momenta respectu ternorum axium $OA$, $OB$ et $OC$ spectari debent.

Praebet autem vis $Zp$ momenta circa $\begin{cases} OB = Zp.z \text{ in plagam } CA \\ OC = Zp.y \quad « \quad BA \end{cases}$

vis $Zq$ « « $\begin{cases} OC = Zq.x \quad « \quad AB \\ OA = Zq.z \quad « \quad CB \end{cases}$

vis $Zr$ « « $\begin{cases} OA = Zr.y \quad « \quad BC \\ OB = Zr.x \quad « \quad AC \end{cases}$

66. Hinc ergo resultant ex motu particulae in $Z = dM$ pro tribus axibus $OA$, $OB$, $OC$ sequentia tria momenta:

in plagam

$$\text{I. Mom. circa } OA = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + xy\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{G}) \\ - xz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{G}) \\ + yy\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{H}) \\ - zz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{I}) \\ + yz\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{I}) \\ - yz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{H}) \end{Bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots BC$$

in plagam

$$\text{II. Mom. circa } OB = \frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +\, yz\,(\mathfrak{A}\,dd\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\,dd\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\,dd\mathfrak{H}) \\ -\, xy\,(\mathfrak{C}\,dd\mathfrak{B} + \mathfrak{F}\,dd\mathfrak{E} + \mathfrak{I}\,dd\mathfrak{H}) \\ +\, zz\,(\mathfrak{A}\,dd\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\,dd\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\,dd\mathfrak{I}) \\ -\, xx\,(\mathfrak{C}\,dd\mathfrak{A} + \mathfrak{F}\,dd\mathfrak{D} + \mathfrak{I}\,dd\mathfrak{G}) \\ +\, xz\,(\mathfrak{A}\,dd\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\,dd\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\,dd\mathfrak{G}) \\ -\, xz\,(\mathfrak{C}\,dd\mathfrak{C} + \mathfrak{F}\,dd\mathfrak{F} + \mathfrak{I}\,dd\mathfrak{I}) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots CA$$

$$\text{III. Mom. circa } OC = \frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +\, xz\,(\mathfrak{B}\,dd\mathfrak{C} + \mathfrak{E}\,dd\mathfrak{F} + \mathfrak{H}\,dd\mathfrak{I}) \\ -\, yz\,(\mathfrak{A}\,dd\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\,dd\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\,dd\mathfrak{I}) \\ +\, xx\,(\mathfrak{B}\,dd\mathfrak{A} + \mathfrak{E}\,dd\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\,dd\mathfrak{G}) \\ -\, yy\,(\mathfrak{A}\,dd\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\,dd\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\,dd\mathfrak{H}) \\ +\, xy\,(\mathfrak{B}\,dd\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\,dd\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\,dd\mathfrak{H}) \\ -\, xy\,(\mathfrak{A}\,dd\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\,dd\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\,dd\mathfrak{G}) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots AB$$

67. Positio autem trium axium mobilium $OA$, $OB$, $OC$ in spatio absoluto commodissime cognoscitur ex his tribus angulis

$$\beta\alpha A = r, \quad \alpha A = p \quad \text{et} \quad \alpha AB = q,$$

ex quibus fit, ut supra vidimus,

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} = \cos p, & \mathfrak{B} = \sin p \cos q, & \mathfrak{C} = \sin p \sin q, \\ \mathfrak{D} = \sin p \cos r, & \mathfrak{E} = -\sin q \sin r - \cos p \cos q \cos r, & \mathfrak{F} = +\cos q \sin r - \cos p \sin q \cos r, \\ \mathfrak{G} = \sin p \sin r, & \mathfrak{H} = +\sin q \cos r - \cos p \cos q \sin r, & \mathfrak{I} = -\cos q \cos r - \cos p \sin q \sin r. \end{array}$$

Ex his ergo tribus angulis non solum ratio novem quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. sed etiam earum differentialium definiri conveniet.

68. Erit autem differentialibus sumendis

$$\begin{array}{lll} d\mathfrak{A} = -dp \sin p, & d\mathfrak{B} = dp \cos p \cos q - \mathfrak{C}dq, & d\mathfrak{C} = dp \cos p \sin q + \mathfrak{B}dq, \\ d\mathfrak{D} = dp \cos p \cos r - \mathfrak{G}dr, & d\mathfrak{E} = dp \sin p \cos q \cos r - \mathfrak{F}dq - \mathfrak{H}dr, & d\mathfrak{F} = +dp \sin p \sin q \cos r + \mathfrak{E}dq - \mathfrak{I}dr, \\ d\mathfrak{G} = dp \cos p \sin r + \mathfrak{D}dr, & d\mathfrak{H} = dp \sin p \cos q \sin r - \mathfrak{I}dq + \mathfrak{E}dr, & d\mathfrak{I} = +dp \sin p \sin q \sin r + \mathfrak{H}dq + \mathfrak{F}dr. \end{array}$$

69. Hinc autem porro eliciuntur istae formulae

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} = \mathfrak{E}\mathfrak{I} - \mathfrak{F}\mathfrak{H}, & \mathfrak{B} = \mathfrak{F}\mathfrak{G} - \mathfrak{D}\mathfrak{I}, & \mathfrak{C} = \mathfrak{D}\mathfrak{H} - \mathfrak{E}\mathfrak{G}, \\ \mathfrak{D} = \mathfrak{C}\mathfrak{H} - \mathfrak{B}\mathfrak{I}, & \mathfrak{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{I} - \mathfrak{C}\mathfrak{G}, & \mathfrak{F} = \mathfrak{B}\mathfrak{G} - \mathfrak{A}\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{G} = \mathfrak{B}\mathfrak{F} - \mathfrak{C}\mathfrak{E}, & \mathfrak{H} = \mathfrak{C}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{F}, & \mathfrak{I} = \mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{D}, \end{array}$$

harumque ope sequentes:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}d\mathfrak{C} + \mathfrak{D}d\mathfrak{F} + \mathfrak{G}d\mathfrak{I} = dp \sin q + dr \sin p \cos q, \\ \mathfrak{C}d\mathfrak{A} + \mathfrak{F}d\mathfrak{D} + \mathfrak{I}d\mathfrak{G} = -dp \sin q - dr \sin p \cos q, \\ d\mathfrak{A}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{I} = (dp \cos q - dr \sin p \sin q)(dr \cos p - dq), \\ \mathfrak{A}d\mathfrak{B} + \mathfrak{D}d\mathfrak{E} + \mathfrak{G}d\mathfrak{H} = dp \cos q - dr \sin p \sin q, \end{array}$$

$$\mathfrak{B}d\mathfrak{A} + \mathfrak{E}d\mathfrak{D} + \mathfrak{H}d\mathfrak{G} = -dp\cos q + dr\sin p\sin q,$$
$$d\mathfrak{A}d\mathfrak{B} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{E} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{H} = (dp\sin q + dr\sin p\cos q)(dq - dr\cos p),$$
$$\mathfrak{B}d\mathfrak{C} + \mathfrak{E}d\mathfrak{F} + \mathfrak{H}d\mathfrak{I} = dq - dr\cos p,$$
$$\mathfrak{C}d\mathfrak{B} + \mathfrak{F}d\mathfrak{E} + \mathfrak{I}d\mathfrak{H} = -dq + dr\cos p,$$
$$d\mathfrak{B}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{E}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{H}d\mathfrak{I} = (dp\sin q + dr\sin p\cos q)(dp\cos q - dr\sin p\sin q).$$

70. Tum vero etiam habebitur

$$\mathfrak{A}d\mathfrak{A} + \mathfrak{D}d\mathfrak{D} + \mathfrak{G}d\mathfrak{G} = 0,$$
$$\mathfrak{B}d\mathfrak{B} + \mathfrak{E}d\mathfrak{E} + \mathfrak{H}d\mathfrak{H} = 0,$$
$$\mathfrak{C}d\mathfrak{C} + \mathfrak{F}d\mathfrak{F} + \mathfrak{I}d\mathfrak{I} = 0,$$
$$d\mathfrak{A}^2 + d\mathfrak{D}^2 + d\mathfrak{G}^2 = dp^2 + dr^2\sin^2 p = (dp\cos q - dr\sin p\sin q)^2 + (dp\sin q + dr\sin p\cos q)^2,$$
$$d\mathfrak{B}^2 + d\mathfrak{E}^2 + d\mathfrak{H}^2 = (dp\cos q - dr\sin p\sin q)^2 + (dq - dr\cos p)^2,$$
$$d\mathfrak{C}^2 + d\mathfrak{F}^2 + d\mathfrak{I}^2 = (dq\sin q + dr\sin p\cos q)^2 + (dq - dr\cos p)^2.$$

71. Cum igitur omnia ad has tres formulas

$$dp\cos q - dr\sin p\sin q, \quad dp\sin q + dr\sin p\cos q \quad \text{et} \quad dq - dr\cos p$$

sint reducta, ponamus ad abbreviandum

$$-dp\cos q + dr\sin p\sin q = Pdt, \quad +dp\sin q + dr\sin p\cos q = Qdt, \quad -dq + dr\cos p = Rdt,$$

eruntque nostrae formulae

$$\mathfrak{A}d\mathfrak{B} + \mathfrak{D}d\mathfrak{E} + \mathfrak{G}d\mathfrak{H} = -Pdt, \quad \mathfrak{A}d\mathfrak{C} + \mathfrak{D}d\mathfrak{F} + \mathfrak{G}d\mathfrak{I} = +Qdt, \quad \mathfrak{B}d\mathfrak{C} + \mathfrak{E}d\mathfrak{F} + \mathfrak{H}d\mathfrak{I} = -Rdt$$
$$\mathfrak{B}d\mathfrak{A} + \mathfrak{E}d\mathfrak{D} + \mathfrak{H}d\mathfrak{G} = +Pdt, \quad \mathfrak{C}d\mathfrak{A} + \mathfrak{F}d\mathfrak{D} + \mathfrak{I}d\mathfrak{G} = -Qdt, \quad \mathfrak{C}d\mathfrak{B} + \mathfrak{F}d\mathfrak{E} + \mathfrak{I}d\mathfrak{H} = +Rdt$$
$$d\mathfrak{A}d\mathfrak{B} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{E} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{H} = -QRdt^2, \quad d\mathfrak{A}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{I} = -PRdt^2, \quad d\mathfrak{B}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{E}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{H}d\mathfrak{I} = -PQdt^2$$

$$d\mathfrak{A}^2 + d\mathfrak{D}^2 + d\mathfrak{G}^2 = dt^2(P^2 + Q^2)$$
$$d\mathfrak{B}^2 + d\mathfrak{E}^2 + d\mathfrak{H}^2 = dt^2(P^2 + R^2)$$
$$d\mathfrak{C}^2 + d\mathfrak{F}^2 + d\mathfrak{I}^2 = dt^2(Q^2 + R^2).$$

72. Quod si jam hinc ad differentialia secunda descendamus, ob elementum temporis $dt$ constans, reperiemus

$$\mathfrak{A}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{D}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{G}dd\mathfrak{H} = -dPdt + QRdt^2$$
$$\mathfrak{B}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{G} = +dPdt + QRdt^2$$
$$\mathfrak{C}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{G} = -dQdt + PRdt^2$$
$$\mathfrak{A}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{D}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{G}dd\mathfrak{I} = +dQdt + PRdt^2$$
$$\mathfrak{B}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{I} = -dRdt + PQdt^2$$
$$\mathfrak{C}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{H} = +dRdt + PQdt^2$$
$$\mathfrak{A}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{D}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{G}dd\mathfrak{G} = -dt^2(PP + QQ)$$
$$\mathfrak{B}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{H} = -dt^2(PP + RR)$$
$$\mathfrak{C}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{I} = -dt^2(QQ + RR).$$

73. Vires ergo ad conservationem motus particulae in $Z = dM$ circa axes corpori proprios $OA$, $OB$, $OC$ sequentia praebent momenta:

I. Momentum circa $OA$ in plagam $BC =$

$$2dM \left\{ \begin{array}{l} -xy\left(\frac{dQ}{dt} - PR\right) \\ -xz\left(\frac{dP}{dt} + QR\right) \\ +yy\left(\frac{dR}{dt} + PQ\right) \\ +zz\left(\frac{dR}{dt} - PQ\right) \\ +yz(PP - QQ) \end{array} \right.$$

II. Momentum circa $OB$ in plagam $CA =$

$$2dM \left\{ \begin{array}{l} -yz\left(\frac{dP}{dt} - QR\right) \\ -yx\left(\frac{dR}{dt} + PQ\right) \\ +zz\left(\frac{dQ}{dt} + PR\right) \\ +xx\left(\frac{dQ}{dt} - PR\right) \\ +xz(RR - PP) \end{array} \right.$$

III. Momentum circa $OC$ in plagam $AB =$

$$2dM \left\{ \begin{array}{l} -xz\left(\frac{dR}{dt} - PQ\right) \\ -yz\left(\frac{dQ}{dt} + PR\right) \\ +xx\left(\frac{dP}{dt} + QR\right) \\ +yy\left(\frac{dP}{dt} - QR\right) \\ +xy(QQ - RR) \end{array} \right.$$

74. Inventis his tribus momentis, quae ad motum particulae $dM$ requiruntur, integralia harum formularum nobis monstrabunt terna virium momenta, quae ad motum totius corporis requiruntur, praesenti temporis instante. Tempore autem manente, quantitates $P$, $Q$, $R$ pro constantibus sunt habendae, quia ab angulis $p$, $q$, $r$ pendent, indeque tantum cum tempore mutantur. Situs igitur elementi $dM$ jam variabilis erit, ideoque ternae coordinatae $x$, $y$, $z$, haeque integrationes per totam corporis massam extendi debebunt.

75. Ponamus igitur pro toto corpore, cujus massa sit $= M$, haec integralia esse

$$\int (yy + zz)\, dM = Mff = \text{momento inertiae respectu axis } OA$$
$$\int (xx + zz)\, dM = Mgg = \quad « \quad « \quad « \quad « \quad OB$$
$$\int (xx + yy)\, dM = Mhh = \quad « \quad « \quad « \quad « \quad OC.$$

Tum vero sit

$$\int yz dM = Mll, \quad \int xz dM = Mmm, \quad \int xy dM = Mnn$$

atque hi valores ex cognita corporis figura definientur.

76. Cum igitur sit

$$\int (yy - zz)\, dM = M(hh - gg), \quad \int (zz - xx)\, dM = M(ff - hh), \quad \int (xx - yy)\, dM = M(gg - ff),$$

pro totius corporis motu conservando requiruntur sequentia terna virium momenta:

I. Mom. circa axem $OA$ in plagam $BC =$

$$2M \left\{ \begin{array}{l} + ff\cdot\frac{dR}{dt} + (hh - gg)PQ \\ + ll(PP - QQ) \\ - mm\cdot\frac{dP}{dt} - mmQR \\ - nn\cdot\frac{dQ}{dt} + nnPR \end{array} \right.$$

II. Mom. circa axem $OB$ in plagam $CA =$

$$2M \left\{ \begin{array}{l} + gg\cdot\frac{dQ}{dt} + (ff - hh)PR \\ + mm(RR - PP) \\ - nn\cdot\frac{dR}{dt} - nnPQ \\ - ll\cdot\frac{dP}{dt} + llQR \end{array} \right.$$

III. Mom. circa axem $OC$ in plagam $AB =$

$$2M \left\{ \begin{array}{l} + hh\cdot\frac{dP}{dt} + (gg - ff)QR \\ + nn(QQ - RR) \\ - ll\cdot\frac{dQ}{dt} - llPR \\ - mm\cdot\frac{dR}{dt} + mmPQ. \end{array} \right.$$

---

### Problema generale.

Corporis circa punctum fixum $O$ mobilis et a viribus quibuscunque sollicitati definire motum.

**Solutio.** (Fig. 124.) Assumantur in corpore tres axes se mutuo in puncto fixo $O$ normaliter secantes, qui sint $OA$, $OB$ et $OC$, secundum quos cujusvis elementi $Z$ corporis situs definiatur ternis coordinatis $OX$, $XY$ et $YZ$ illis axibus parallelis. Sit massa elementi corporis in $Z$ siti $= dM$, ejusque ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Tum ex figura et indole corporis colligantur per integrationem pro toto corpore valores sequentium formularum, ubi $M$ denotat massam totius corporis:

$$\int(yy + zz)\,dM = Mff, \quad \int yz\,dM = Mll,$$
$$\int(xx + zz)\,dM = Mgg, \quad \int xz\,dM = Mmm,$$
$$\int(xx + yy)\,dM = Mhh, \quad \int xy\,dM = Mnn.$$

His valoribus inventis ponamus (Fig. 125) elapso tempore ternos axes corporis in spatio absoluto tenere situm $OA$, $OB$ et $OC$, qui ita respectu poli fixi $\alpha$ et quasi meridiani fixi $\alpha\beta$ sit comparatus, ut sit

$$\beta\alpha A = r, \quad \alpha A = p \quad \text{et} \quad \alpha AB = q$$

nuncque considerentur vires, quibus corpus sollicitatur, indeque momenta respectu ternorum axium corporis colligantur. Sit igitur

Momentum circa axem $OA$ in plagam $BC = F$
« « « $OB$ « $CA = G$
« « « $OC$ « $AB = H$,

quae virium momenta plerumque ab angulis $p$, $q$, $r$ seu situ corporis in spatio absoluto pendent, neque idcirco pro cognitis accipi possunt. Porro vero aliae tres quantitates $P$, $Q$, $R$ in computum duci debent, quae ab istis angulis $p$, $q$, $r$ ita pendent, ut sit

$$Pdt = dr \sin p \sin q - dp \cos q, \quad Qdt = dr \sin p \cos q + dp \sin q, \quad Rdt = dr \cos p - dq.$$

Denique vero inter virium sollicitantium momenta $F$, $G$, $H$ et has quantitates sequentes intercedunt relationes

$$\frac{F}{2M} = \begin{cases} ff \cdot \frac{dR}{dt} + (hh - gg)\,PQ + ll\,(PP - QQ) \\ - mm \cdot \frac{dP}{dt} - mmQR - nn \cdot \frac{dQ}{dt} + nnPR \end{cases}$$

$$\frac{G}{2M} = \begin{cases} gg \cdot \frac{dQ}{dt} + (ff - hh)\,PR + mm\,(RR - PP) \\ - nn \cdot \frac{dR}{dt} - nnPQ - ll \cdot \frac{dP}{dt} + llQR \end{cases}$$

$$\frac{H}{2M} = \begin{cases} hh \cdot \frac{dP}{dt} + (gg - ff)\,QR + nn\,(QQ - RR) \\ - ll \cdot \frac{dQ}{dt} - llPR - mm \cdot \frac{dR}{dt} + mmPQ. \end{cases}$$

Quoniam igitur tam $P$, $Q$, $R$ quam $F$, $G$, $H$ per ternos angulos $p$, $q$, $r$ dantur, ex his aequationibus ad quodvis tempus elapsum $t$ definiri poterunt hi ipsi anguli $p$, $q$ et $r$, unde ad hoc instans positio ternorum corporis axium $OA$, $OB$ et $OC$ innotescit, hincque etiam verus corporis motus cognoscitur. Q. E. I.

**Coroll. 1.** Circa has ternas postremas aequationes notari meretur, si prima per $Rdt$, secunda per $Qdt$ et tertia per $Pdt$ multiplicetur, summae integrale fore

$$\frac{1}{M}(\int FRdt + \int GQdt + \int HPdt) = ffRR + ggQQ + hhPP - 2llPQ - 2mmPR - 2nnQR,$$

quod integrale conservationem virium vivarum involvit.

**Coroll. 2.** Deinde ex iisdem tribus postremis aequationibus aliud integrale obtineri potest, multipllcando

$$\begin{aligned} &\text{primam} &&\text{per } (ffR - nnQ - mmP)dt \\ &\text{secundam} &&\text{per } (ggQ - llP - nnR)\,dt \\ &\text{tertiam} &&\text{per } (hhP - mmR - llQ)\,dt \end{aligned}$$

tum enim aggregati integrale erit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M}(ff\int FRdt + gg\int GQdt + hh\int HPdt) - \frac{1}{M}(nn\int(FQ + GR)dt + ll\int(GP + HQ)dt + mm\int(HR + FP)dt) = \\ &(f^4 + n^4 + m^4)RR + (g^4 + l^4 + n^4)QQ + (h^4 + m^4 + l^4)PP + 2mmnn\,PQ + 2llnn\,PR + 2llmmQR \\ &\qquad - 2l^2(g^2 + h^2)PQ - 2m^2(f^2 + h^2)PR - 2n^2(f^2 + g^2)QR. \end{aligned}$$

**Coroll. 3.** Quodsi ergo corpus a nullis viribus sollicitetur, habentur statim hae duae aequationes integrales

$$ffRR + ggQQ + hhPP - 2llPQ - 2mmPR - 2nnQR = C$$

et

$$\begin{aligned} &(f^4 + n^4 + m^4)\,RR + (g^4 + l^4 + n^4)\,QQ + (h^4 + m^4 + l^4)\,PP \\ &\quad + 2(m^2n^2 - l^2(g^2 + h^2))\,PQ + 2(l^2n^2 - m^2(f^2 + h^2))\,PR + 2(l^2m^2 - n^2(f^2 + g^2))\,QR = D, \end{aligned}$$

quas constantes ex conditionibus motus definiri oportet.

# IV.

## De motu corporum super superficiebus mobilibus.

1. **Lemma 1.** (Fig. 126) Interea, dum corpus motu uniformi cum celeritate debita altitudini $c$ percurrit spatium $AB$, idem corpus ex quiete a vi acceleratrice $g$, protrahetur motu uniformiter accelerato per spatium $ab = g.\frac{AB^2}{4c}$.

**Demonstratio.** Si more solito tempora exprimantur per spatia, quae motu aequabili percurruntur, divisa per celeritates, celeritates autem indicentur per radices quadratas ex altitudinibus, ipsis celeritatibus debitis, erit corporis, spatium $AB$ motu aequabili percurrentis, celeritas $= \sqrt{c}$, et tempus, quo hoc spatium absolvitur, $= \frac{AB}{\sqrt{c}}$. At si corpus, quod ante in $a$ quieverat, protrahatur a vi acceleratrice $= g$ per spatium $ab$, habebit in $b$ celeritatem debitam altitudini $g.ab$, ipsa celeritas erit $= \sqrt{g.ab}$. Hac vero celeritate corpus aequabiliter motum eodem tempore absolvere valet spatium duplum $ab$. Quare eodem tempore, quo corpus motum aequabiliter celeritate $\sqrt{c}$ percurrit spatium $AB$, spatium $2ab$ pariter uniformi motu absolvetur a celeritate $\sqrt{g.ab}$. Quoniam vero spatia aequalibus temporibus motu uniformi percursa sunt ut celeritates, erit $AB:2ab = \sqrt{c}:\sqrt{g.ab}$, ideoque $2ab\sqrt{c} = AB\sqrt{g.ab}$ et $4ab^2c = AB^2g.ab$, unde fit $ab = \frac{g.AB^2}{4c}$ Q. E. D.

2. **Coroll. 1.** Hinc itaque definiri poterit vis acceleratrix $g$, qua corpus protrahatur per spatium $ab$ eodem tempore, quo aliud corpus, motu uniformi latum, cum celeritate debita altitudini $c$, percurrit spatium datum $AB$: erit nempe $g = \frac{4c.ab}{AB^2}$, seu erit $AB^2$ ad $4c.ab$ ut vis gravitatis acceleratrix 1 ad vim acceleratricem quaesitam $g$.

3. **Coroll 2.** Si igitur spatium $AB$ fuerit infinite parvum, seu differentiale primi gradus, ob $ab = \frac{g.AB^2}{4c}$, erit spatium $ab$ infinities minus, seu differentiale secundi gradus; siquidem altitudo celeritati debita $c$ fuerit finita, atque $g$ ad 1 habuerit rationem finitam.

4. **Lemma 2.** (Fig. 127) Si corpus in $A$ habeat celeritatem altitudini $c$ debitam, qua dato tempore aequabiliter motum, percurreret spatium $AB$; simul vero secundum directionem $AB$ sollicitetur a vi acceleratrice $g$, eodem tempore ab $A$ ultra $B$ in $b$ progredietur, ut sit $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$.

**Demonstratio.** Eodem tempore, quo corpus uniformiter motum celeritate debita altitudini $c$ conficit spatium $AB$, aliud corpus ex quiete a vi acceleratrice $g$ perduceretur per spatium $= \frac{g.AB^2}{4c}$. Quodsi ergo ab eadem vi acceleratrice sollicitetur illud corpus in directione $AB$, quod in $A$ jam habet celeritatem debitam altitudini $c$, praeter spatium $AB$ eodem tempore percurret spatium $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$. Motu igitur tam jam insito, celeritate nempe debita altitudini $c$, quam vi acceleratrice $g$, corpus progredietur per spatium

$$Ab = AB + \frac{g.AB^2}{4c}$$

eodem tempore, quo solo motu insito latum absolveret spatium $AB$. Q. E. D.

5. **Coroll. 1.** Celeritas igitur, quam corpus in $b$ acquiret, erit aggregatum celeritatis insitae $\sqrt{c}$ et celeritatis, quam ex quiete per spatium $Bb$ a vi acceleratrice $g$ sollicitatum adipisceretur, quae est $= \sqrt{g.Bb}$. Erit ergo corporis ad $b$ appellentis celeritas $= \sqrt{c} + \sqrt{g.Bb}$.

6. **Coroll. 2.** Quoniam est $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$, erit celeritas, quam corpus in $b$ acquiret,

$$= \sqrt{c} + \frac{g.AB}{2\sqrt{c}} = \frac{2c + g.AB}{2\sqrt{c}}:$$

eo scilicet tempore, quo solo motu insito spatium $AB$ conficeret, a vi $g$ sollicitatum adipiscetur celeritatem $= \sqrt{c} + \frac{g.AB}{2\sqrt{c}}$; et tempus, quo, cum hanc celeritatem acquiret, tum in $b$ progredietur, erit $= \frac{AB}{\sqrt{c}}$.

7. **Coroll. 3.** (Fig. 128) Si corpus, quod in $A$ celeritatem altitudini $c$ debitam habere ponitur, secundum directionem contrariam a vi acceleratrice $g$ urgeretur, tum eo tempore, quo motu insito in $B$ perveniret, tantum ad $b$ usque pertinget, ita ut sit $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$, et in hoc puncto $b$ habebit celeritatem $= \sqrt{c} - \frac{g.AB}{2\sqrt{c}}$.

8. **Coroll. 4.** (Fig. 127). Cum igitur initio in $A$ fuisset celeritas corporis debita altitudini $c$, in $b$ celeritas corporis debita erit altitudini

$$= c + g.AB + \frac{gg.AB^2}{4c} = c + g.AB + g.Bb = c + g.Ab$$

casu priori, posteriori vero, quo vis $g$ motui est contraria, celeritas in $b$ residua debebitur altitudini $c - g.Ab$.

9. **Coroll. 5.** Si igitur corpus, antequam ad $A$ celeritate debita altitudini $c$ appulerit, tempore $t$ confecerit spatium $= s$, nunc tempusculo infinite parvo $dt$ absolvet elementum spatii $Ab = ds$, et acquiret celeritatem debitam altitudini $c + dc$; erit autem ob $AB = dt\sqrt{c}$,

$$Bb = \frac{gdt^2}{4} \text{ et } ds = dt\sqrt{c} + \frac{gdt^2}{4} \text{ atque } dc = g.Ab = gdt\sqrt{c} + \frac{ggdt^2}{4} = gds.$$

10. **Lemma 3.** (Fig. 129.) Si corpus in $A$ habeat celeritatem debitam altitudini $c$, qua dato tempore uniformiter motum, percurrere possit spatium $AB$; nunc autem continuo in directione $Aa$ ad $AB$ normali sollicitetur a vi acceleratrice $g$, corpus in arcu parabolico $Ab$ progredietur, atque eodem tempore perveniet in punctum $b$ existente recta $Bb$ normali ad $AB$, et $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$.

**Demonstratio.** Tollatur cogitatione omnis motus corpori insitus, atque manifestum est corpus in $A$ quiescens et vi acceleratrice $g$ sollicitatum eodem illo tempore, quo uniformiter motum, cum celeritate debita altitudini $c$, spatium $AB$ absolveret, perventurum esse in $a$, ita ut sit $Aa = \frac{g.AB^2}{4c}$. Jam accedente motu insito, seu celeritate $\sqrt{c}$ secundum directionem $ab$, perducetur eodem tempore in $b$, ut sit $ab = AB$. Corpus ergo tam motu insito quam vi acceleratrice $g$ sollicitatum eodem tempore perveniet in $b$, ut sit $Bb = Aa$ et normalis ad $AB$; et quia est

$$Aa = \frac{g.AB^2}{4c} = \frac{g.ab^2}{4c},$$

haec relatio puncti $b$ ad $a$ indicat corpus in arcu parabolico $Ab$ motum iri. Q. E. D.

11. **Coroll. 1.** Si ponatur hujus parabolae $Ab$ abscissa $Aa = x$, applicata $ab = y$, erit $x = \frac{gyy}{4c}$ et $yy = \frac{4c}{g}x$. Erit ergo $A$ vertex parabolae, $AB$ ejus tangens in vertice, et $Aa$ axis. Insuper autem parameter hujus parabolae erit $= \frac{4c}{g}$, et radius osculi in vertice $A = \frac{2c}{g}$.

12. **Coroll. 2.** Celeritas, quam corpus in puncto $b$ habebit, debita erit altitudini

$$c + g\, Aa = c + \frac{gg\, AB^2}{4c}.$$

Quemadmodum facilius colligetur ex iis, quae de motu projectorum in hypothesi gravitatis uniformis sunt demonstrata.

13. **Coroll. 3.** Si igitur spatium $AB$ sit infinite parvum, seu tempusculum, quo corpus ex $A$ in $b$ pervenire ponitur, infinite parvum $= dt$, erit $AB = dt\sqrt{c}$, et si corpus, antequam ad $A$ pervenerit, tempore $t$ absolverit spatium $s$, nunc tempusculo $dt$ progredietur per arcum circuli $Ab$, cujus radius erit $= \frac{2c}{g}$ et sinus $= AB = dt\sqrt{c}$; fiet ergo $Ab = ds = dt\sqrt{c}$ et

$$dc = \frac{gg\, AB^2}{4c} = \frac{gg\, dt^2}{4}, \quad \text{seu} \quad dc = \frac{gg\, ds^2}{4c}.$$

14. **Lemma 4.** (Fig. 130.) Si corpus in $A$ habeat celeritatem debitam altitudini $c$, qua dato tempore uniformiter latum percurrat spatium $AB$; nunc autem in directione quacunque obliqua $Aa$ sollicitetur a vi acceleratrice $g$, perveniet hoc corpus eodem tempore in locum $b$; ita ut ducta $Bb$ ipsi $Aa$ parallela, sit $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$, intereaque movebitur in arcu parabolico $Ab$, cujus tangens est recta $AB$, et $Aa$ diameter obliquangula, ordinatas tangenti $AB$ parallelas bisecans.

**Demonstratio.** Si vis sollicitans $g$ abesset, corpus tempore proposito utique perveniret in $B$; sin autem auferatur motus corpori insitus omnis, atque corpus in $A$ quiescens a vi acceleratrice $g$ secundum directionem $Aa$ sollicitaretur, perveniret in $a$, ut esset $Aa = \frac{g.AB^2}{4c}$. Hinc per motus compositionem patet, si compleatur parallelogrammum $ABba$, corpus utroque motu simul latum perventurum esse in punctum $b$, ex quo si ad $B$ ducatur recta $Bb$, ea futura sit parallela directioni potentiae sollicitantis $Aa$ atque $= Aa$. Cum vero sit $Aa = \frac{g.AB^2}{4c} = \frac{g.ab^2}{4c}$, manifestum est curvam $Ab$, in qua corpus movebitur ab $A$ ad $b$, fore parabolam, cujus tangens sit $AB$, et $Aa$ diameter obliquangula. Q. E. D.

15. **Coroll. 1.** Si hujus parabolae $Ab$ ponatur abscissa $Aa = x$ et applicata $ab = y$, erit

$$x = \frac{gyy}{4c} \quad \text{et} \quad yy = \frac{4cx}{g};$$

hinc parameter erit $= \frac{4c}{g}$. Sit autem anguli $BAa$ sinus $= n$, et cosinus $= m$; erit completo rectangulo $Aman$, recta $Am = an = m.Aa$ et $An = am = n.Aa$; hincque ex natura parabolae erit curvae in $A$ radius osculi $= \frac{2c}{ng}$.

16. **Coroll. 2.** Quo autem pateat quantam celeritatem corpus, cum in $b$ pervenerit, sit habiturum, ad $Aa$ productam ex $b$ ducatur normalis $bd$, atque ex motu projectorum palam est, celeritatem in $b$ debitam fore altitudini $c + g.Ad$. At est $ab:ad = Aa:Am = 1:m$, unde $ad = m.ab$ et $Ad = Aa + m.ab$. Ex quo corporis in $b$ celeritas debita erit altitudini

$$c + g.Aa + mg.ab = c + \frac{g^2 AB^2}{4c} + mg.AB = \frac{4cc + 4mgc.AB + gg.AB^2}{4c}.$$

17. **Coroll. 3.** Sit tempus, quo $Ab$ percurritur, infinite parvum $= dt$, fiet curva $Ab$ arcus circuli, cujus radius $= \frac{2c}{ng}$, eritque ob $Aa$ differentiale secundi gradus, $ds = Ab = ab = dt\sqrt{c}$ et posita altitudine celeritati corporis in $b$ debita $= c + dc$, fiet $dc = mgdt\sqrt{c} + \frac{ggdt^2}{4}$, et ob $dt^2 = 0$, erit $dc = mgdt\sqrt{c}$.

18. **Coroll. 4.** Si ergo vis sollicitans $g$ resolvatur in tangentialem $Am = mg$ et normalem $An = ng$, utraque vis seorsim effectum suum producet. Vis tangentialis nimirum $mg$ celeritatem corporis afficiet, eritque $dc = mgdt\sqrt{c} = mgds$, ob $ds = dt\sqrt{c}$; altera vero vis normalis in viae $Ab$ inflexione consumetur, reddetque $Ab$ arcum circuli, cujus radius $= \frac{2c}{ng}$.

19. **Scholion.** Praemissis his lemmatis alias quidem notissimis, sed tamen hic ad usum praesentem magis accommodatis, tractationem, quam suscepi, ipsam aggrediar. Institui autem hic investigare motum corporum super superficiebus utcunque mobilibus, pari modo, quo motus corporum super superficie quiescente determinari solet. Occurrunt itaque hic duo corpora, quorum motum assignari oportebit, primo scilicet superficies mobilis, ac deinde corpus ipsum, quod super ea movetur. Hoc corpus quasi punctum hic considerabo, seu quasi tota ejus moles in unicum punctum sit collecta, ita ut alium motum praeter progressivum recipere nequeat. Nisi enim haec hypothesis praemissa fuerit, nullo modo corporum, magnitudine finita praeditorum, motus definiri poterit; et vicissim, si motus corporum in unico puncto collectorum fuerit definitus, non amplius difficile erit theoriam ad corpora finita extendere. Cum igitur hic motus puncti in superficie quacunque debeat examinari, primum ipsius superficiei figura, tum via a puncto super ea descripta, ac denique ipsius superficiei motus erit perpendendus. Si haec in latissima significatione pertractare vellem, opus foret summopere diffusum, neque tamen aeque arduum; quare conveniet quaestionem intra arctiores limites restringere, ita tamen, ut inde modus perspici queat quaestionem in latissimo sensu acceptam solvendi. Superficiem igitur, super qua punctum ingreditur, statuam planam, ita ut via a puncto confecta sit vel recta vel curva in plano sita, neque ideo duplici curvedine praedita. Et

quoniam punctum mobile perpetuo superficiei inhaerere pono, tanquam in tubo movebitur. Ex quo tota quaestio huc reducetur, ut determinetur motus puncti in tubo sive recto sive curvo, utcunque moto. Ac primo quidem hunc tubum, in quo corpus instar puncti consideratum moveatur, immobilem assumam, quo facilius hinc solutio ad tubum mobilem derivari queat.

20. **Problema 1.** (Fig. 131.) Invenire motum corporis $P$ super superficie immobili $AB$, si corpus $P$ a nullis viribus sollicitetur.

**Solutio.** Ponatur corpus in $P$ habere celeritatem altitudini $v$ debitam, qua celeritate nisi superficiei $AB$ inhaerere cogeretur, moveri pergeret in directione tangentis $P\pi$, atque tempusculo $dt$ absolveret spatium $P\pi = dt\sqrt{v}$. Impenetrabilitas autem superficiei impedit, quominus corpus $P$ semitam $Pp$ deserat, atque perinde in corpus aget, quasi id continuo a vi, cujus directio ad $Pp$ sit normalis, sollicitaretur. Sit haec vis acceleratrix $=q$, qua corpus secundum $P\pi$ progressurum continuo normaliter ad $Pp$ sollicitetur, haecque vis tanta esse debebit, ut tempusculo $dt$ non spatium $P\pi$ sed arculum $Pp$, qui ipse sit particula viae praescriptae $AB$, absolvat. At per (13) vis acceleratrix $q$, cujus directio ad $Pp$ vel $P\pi$ est normalis, corpus cogetur in arcu circuli progredi, cujus radius est $=\frac{2v}{q}$, qui arcus, ut cum elemento curvae $Pp$ congruat, necesse est ut $\frac{2v}{q}$ aequalis sit radio osculi curvae $AB$ in $P$. Sit igitur radius osculi curvae in puncto $P = r$, eritque $\frac{2v}{q} = r$ et $q = \frac{2v}{r}$. Tum vero si celeritas in $p$ debita ponatur altitudini $v + dv$, erit $dv = \frac{qq\,dt^2}{4}$, ideoque ob $dt^2$ differentiale secundi gradus erit $dv = 0$; atque corpus motu aequabili super superficie $AB$ incedet. Q. E. I.

21. **Coroll. 1.** Quoniam igitur corpus super superficie $AB$ motu aequabili incedit, si ponamus corporis initio in $A$ celeritatem fuisse debitam altitudini $c$, hanc eandem celeritatem continuo conservabit, eritque in $P$ altitudo celeritati debita $v = c$.

22. **Coroll. 2.** Si ponatur arcus $AP = s$, et ejus elementum $Pp = ds$, quod tempusculo $dt$ celeritate $\sqrt{c}$ percurritur, erit $ds = dt\sqrt{c}$, hincque $dt = \frac{ds}{\sqrt{c}}$, ex quo fit tempus $t = \frac{s}{\sqrt{c}} = \frac{AP}{\sqrt{c}}$. Quare spatia percursa erunt temporibus proportionalia, omnino ut motus aequabilis postulat.

23. **Coroll. 3.** Quoniam vero ipsa curva ad corpus in superficie $Pp$ continendum normaliter in corpus agit vi acceleratrice $q = \frac{2v}{r} = \frac{2c}{r}$, tanta vi corpus vicissim curvam in $P$ secundum directionem normalem $PQ$ premet, haecque pressio aequalis erit vi motrici in corpore $P$ ex vi acceleratrice $q$ orta. Quare si massa corporis $P$ ponatur $= A$, erit pressio, quam superficies a corpore in directione $PQ$ sustinet, $= Aq = \frac{2Ac}{r}$, ubi $A$ simul denotat pondus, quod corpus $P$ esset habiturum, si esset grave.

24. **Coroll. 4.** Quamvis ergo corpus $P$ ponatur gravitatis expers, tamen dum in superficie $AB$ incedit, pressionem exerit normalem $PQ$, quae erit ad pondus corporis $P$, quod esset habiturum, si gravitate gauderet, uti se habet altitudo celeritati debita $c$ ad semissem radii osculi curvae in $P$.

25. **Problema 2.** (Fig. 132.) Invenire motum corporis $P$ super superficie immobili $AB$, si corpus $P$ interea a viribus quibuscunque sollicitetur.

**Solutio.** Habeat corpus $P$ cum in $P$ venerit, celeritatem debitam altitudini $v$, qua ergo si sibi esset relictum, secundum tangentem $P\pi$ progrederetur, atque tempusculo $dt$ conficeret spatium

$P\pi = dt\sqrt{v}$. Cum autem corpus in $P$ a vi quacunque sollicitetur, revocetur haec vis ad binas, alteram normalem $PN$, alteram tangentialem $PT$. Sit vis acceleratrix normalis $= N$, et vis acceleratrix tangentialis $= T$; atque haec posterior tantum celeritatem corporis afficiet, idque ultra $\pi$ in $T$ perducet, existente $T\pi = \frac{T.P\pi^2}{4v}$: ipsam autem celeritatem ita augebit, ut si post tempusculum $dt$ celeritas corporis debita sit altitudini $v + dv$, futurum sit $dv = Tdt\sqrt{v}$. Vis autem normalis $N$ corpus eo magis a via praescripta $Pp$ abducet, si quidem fuerit affirmativa, uti figura repraesentat. Quamobrem ut corpus in semita $Pp$ retineatur, necesse est ut a multo majori vi continuo normaliter versus $Pp$ urgeatur. Ponamus ergo corpus a superficie in directione normali $PQ$ urgeri vi acceleratrice $PQ = q$; ideoque cum vis normalis $N$ sit contraria, corpus actu ad $Pp$ normaliter reducetur vi acceleratrice $q - N$. Hac autem vi ex $T$ in $p$ perducetur, ut sit $Tp = \frac{(q-N)P\pi^2}{4v}$. Sit curvae radius osculi in $P = r$, erit $r = \frac{PT^2}{2Tp} = \frac{P\pi^2}{2Tp}$, eo quod $PT$ a $P\pi$ tantum differentiali secundi gradus discrepat. Fit ergo $r = \frac{2v}{q-N}$, et ob $qr - Nr = 2v$ habebitur vis acceleratrix corpus ad superficiem apprimens $q = N + \frac{2v}{r}$. Q. E. I.

26. **Coroll. 1.** Si ponatur spatium $AP = s$: erit ejus elementum $Pp = ds$, quod cum tempusculo $dt$ celeritate $\sqrt{v}$ percurratur, erit $ds = dt\sqrt{v}$, ideoque $dv = Tds$ et $v = \int Tds$. In singulis ergo punctis definiri poterit celeritas corporis $P$ per formulam integralem.

27. **Coroll. 2.** Si corporis $P$ massa ponatur $= A$, quae simul exprimat pondus, quod corpus $P$ esset habiturum si esset grave, erit vis motrix, qua corpus ad superficiem apprimetur $= (N + \frac{2v}{r})A$ Primo scilicet apprimitur vi normali $NA$, ac praeterea vi centrifuga $\frac{2Av}{r}$.

28. **Scholion.** Ex motu corporis super superficie immobili statim colligetur motus corporis super superficie uniformiter in directum mota, erit namque motus relativus corporis respectu superficiei idem plane, qui est absolutus super superficie quiescente. Si enim in casu modo tractato tam superficiei $AB$ quam corpori $P$ imprimatur motus idem secundum directionem quamcunque, ipsa superficies uniformiter in directum progredietur, corpus autem $P$ perinde super ea moveri perget, ac si superficies mansisset immobilis. Hic enim pressioni corporis $P$ in superficiem nullum tribuo effectum, quo motus ejus uniformis in directum turbari posset, id quod revera eveniet, si vel massa corporis $P$ statuatur infinite parva, vel superficiei inertia infinite magna. Hanc ob rem quaestionem, qua motus corporis super superficie uniformiter in directum progrediente definiatur, praetermitto, cum ejus solutio in praecedentibus problematis jam contineatur. Superficiei itaque tribuam statim motum indirectum quidem, at utcunque inaequabilem; super qua, cujusmodi futurus sit motus corporis sive a nullis viribus, sive a viribus quibuscunque sollicitati, in duobus sequentibus problematis investigabo.

29. **Problema 3.** (Fig. 133.) Progrediatur superficies $ABC$ motu quocunque difformi super recta $EF$ tanquam basi, determinare motum corporis $P$ a nullis potentiis sollicitati super hac superficie incedentis.

**Solutio.** Cum superficies venerit in situm $AB$, ubi ejus celeritas debita sit altitudini $u$, versetur corpus in $P$, habeatque celeritatem relativam respectu superficiei debitam altitudini $v$. Hoc

igitur instanti corpori $P$ actu duplex inerit motus, alter secundum directionem tangentis $PR$ cum celeritate $\sqrt{v}$, et alter secundum directionem $PS$, ipsi $EF$ parallelam, cum celeritate superficiei $\sqrt{u}$. Si igitur capiatur $PR = dt\sqrt{v}$ et $PS = dt\sqrt{u}$, tempusculo $dt$ corpus $P$ sibi relictum perveniret in punctum $\pi$ completo parallelogrammo $PR\pi S$. Eodem autem tempusculo superficies celeritate sua $\sqrt{u}$ conficeret pariter spatium $PS$, nisi interea acceleraretur. Capiat vero altitudo, celeritati superficiei in $AB$ versantis debita $u$, tempusculo $dt$, incrementum $du$, atque ob hanc accelerationem tempusculo $dt$ ultra $S$ in $s$ progredietur, existente

$$Ss = \frac{PS.du}{4u} = \frac{dt\,du}{4\sqrt{u}} \quad \text{ob} \quad PS = dt\sqrt{u},$$

et hanc ob rem superficies elapso tempusculo $dt$ in situ $ab$ versabitur, qui si transiret per punctum $\pi$, corpus $P$ etiam in superficie ibidem reperiretur. Cum autem $\pi$ extra viam $ab$ reperiatur, ex $\pi$ in $ab$ normalis ducatur $\pi p$, ad quam definiendam ad $s$ ducatur tangens $sr$ aequalis ipsi $PR = dt\sqrt{v}$; atque ex $r$ ad curvam ducatur normalis $rq$; erit posito curvae in $P$ vel $s$ radio osculi $= r$, hoc perpendiculum $rq = \frac{sr^2}{2r}$. Sit anguli $PR\pi$, quem tangens curvae cum recta $EF$ constituit, sinus $= m$, et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$, erit

$$\pi r = Ss = \frac{dt\,du}{4\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad qr - p\pi = \pi r.m,$$

ideoque
$$p\pi = qr - \frac{mdt\,du}{4\sqrt{u}} = \frac{vdt^2}{2r} - \frac{mdt\,du}{4\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad pq = n.\pi r = \frac{ndt\,du}{4\sqrt{u}}.$$

Erit itaque $p$ punctum, in quo corpus $P$ elapso tempusculo $dt$ reperietur. Quodsi reperiretur in puncto $q$, propter $sq = sr = PR$, corpus $P$ interea elementum $sq$ motu uniformi descripsisse esset censendum; nunc autem tempusculo $dt$ ex $P$ vel $s$ in $p$ pertingere nequit sine acceleratione. Ponatur ergo corporis in $p$ pervenientis celeritas, qua in superficie progreditur, debita altitudini $v + dv$, erit

$$dv = \frac{4v.pq}{PR} = \frac{4v.ndt\,du}{4PR.\sqrt{u}} = \frac{n\,du\sqrt{v}}{\sqrt{u}}; \quad \text{ideoque} \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{n\,du}{\sqrt{u}}.$$

Tanta autem vi corpus ad superficiem apprimetur, qua eodem tempusculo $dt$ spatiolum $\pi p$ conficitur; unde haec vis erit $= \frac{4v.p\pi}{PR^2} = \frac{4p\pi}{dt^2} = \frac{2v}{r} - \frac{m\,du}{dt\sqrt{u}}$. Quocirca si corporis $P$ ponatur massa $= A$, erit pressio, quam superficies a corpore $P$ in directione $p\pi$ sustinet $= A\left(\frac{2v}{r} - \frac{m\,du}{dt\sqrt{u}}\right)$. Q. E. I.

30. **Coroll. 1.** Si ergo superficies $AB$ secundum directionem rectae $EF$ uniformiter progrediatur, ita ut sit $du = 0$, tum corpus $P$ super ea motu uniformi incederet, foretque pressio, quam superficies a corpore sustinet, $= \frac{2Av}{r}$, prorsus ac si superficies quiesceret.

31. **Coroll. 2.** Cum sit $\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{n\,du}{\sqrt{u}}$, erit corporis in superficie a $P$ ad $Q$ progredientis incrementum celeritatis $\frac{dv}{\sqrt{v}}$ ad superficiei interea a $B$ ad $b$ procedentis incrementum celeritatis $\frac{du}{\sqrt{u}}$, uti se habet cosinus anguli $PR\pi$ seu anguli $APS$ ad sinum totum.

32. **Coroll. 3.** Pressio autem corporis in superficiem, quae si superficies vel quiesceret vel uniformiter in directum promoveretur, foret $= \frac{2Av}{r}$, nunc diminuetur parte $\frac{mA\,du}{dt\sqrt{u}}$. Quia vero est $dt\sqrt{u} = PS$ et $Ss = \frac{dt\,du}{4\sqrt{u}}$, diminuetur pressio $\frac{2Av}{r}$ parte $mA\cdot\frac{4u.Ss}{PS^2}$.

33. **Coroll. 4.** Quoniam motus superficiei $AB$ ita acceleratur, ut tempusculo $dt$ praeter spatium $PS$, quod motu uniformi cum celeritate $\sqrt{u}$ percurreret, conficit spatiolum $Ss$, haec acceleratio proficiscitur a vi acceleratrice $= \frac{4u.Ss}{PS^2}$. Si vis acceleratrix superficiei ponatur $= S$, erit $S = \frac{4u.Ss}{PS^2}$; ideoque pressio corporis in superficiem erit $= \frac{2Av}{r} - mAS$.

34. **Coroll. 5.** Ad accelerationem $dv$ in corpore $P$ tempusculo $dt$ producendum requiritur vis acceleratrix $P$, ut sit $dv = P.PR = Pdt\sqrt{v}$, ideoque $\frac{dv}{\sqrt{v}} = Pdt$. At si vis acceleratrix superficiei sit $S$, erit $\frac{du}{\sqrt{u}} = Sdt$. Quare cum sit $\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{ndu}{\sqrt{u}}$, erit $P = nS$. Corpus $P$ ergo perinde super superficie incedet, ac si sollicitaretur a vi tangentiali $= nS$.

35. **Coroll. 6.** Quia porro pressio corporis in superficiem est $= \frac{2Av}{r} - mAS$, perinde in superficie incedit, ac si praeter vim tangentialem $mS$ sollicitaretur a vi normali $nS$ in directione $PN$. Simili modo ergo corpus super superficie mota movebitur, quo super quiescente moveretur, si sollicitaretur vi acceleratrice $S$ in directione $PV$, parallela directioni $FE$.

36. **Coroll. 7.** Si igitur superficies $AB$ secundum directionem $EF$ sollicitetur vi acceleratrice $S$, corpus $P$ a nulla vi sollicitatum super ea perinde movebitur, ac si superficies quiesceret, et corpus $P$ sollicitaretur vi acceleratrice $S$ in directione contraria $PV$.

37. **Scholion.** Hinc problema propositum facilius hoc modo solvi potuisset. Si superficies $AB$ uniformiter progrederetur in directum, tum motus corporis $P$ super ea idem prorsus erit ac si quiesceret; hincque motus corporis relativus idem foret, ac si corpus a nulla vi sollicitaretur. Deinde pariter manifestum est, quia superficies secundum directionem $EF$ a vi $S$ acceleratur, si corpus $P$ eadem vi acceleratrice sollicitaretur secundum eandem directionem, tum adhuc eundem futurum esse motum corporis, ac si superficies quiesceret. Quare cum sola superficies urgeatur a vi acceleratrice $S$ in directione $EF$, corpus $P$ super ea perinde movebitur, ac si sollicitaretur in directione contraria $PV$ ab aequali vi acceleratrice $S$, ipsa autem superficies quiesceret. Reducitur ergo hic casus ad problema 2. ex quo cum resultet ex vi hac $S$ vis tangentialis $T = nS$ et normalis $N = -mS$, ob anguli $VPT = PR\pi$ sinum $= m$ et cosinum $= n$, prodibit acceleratio corporis $dv = nSdt\sqrt{v} = nSds$, posito elemento spatii $PQ = ds$; et pressio in superficiem erit $= A\left(\frac{2v}{r} - mS\right)$, plane ut solutio inventa habet. Per hanc autem considerationem problema sequens facilius et succinctius resolvetur.

38. **Problema 4.** (Fig. 134.) Si superficies $ABC$ secundum directionem rectae $EF$ progrediatur sollicitata vi acceleratrice $S$, invenire motum corporis $P$ super ea incedentis et sollicitati a viribus quibuscunque.

**Solutio.** Si superficies promoveretur uniformiter in directum, seu si a nulla vi sollicitaretur, tum corpus $P$ super ea perinde incessurum esset, ac si superficies quiesceret: Acceleratio autem superficiei tantum immutabit motum corporis, similiterque motus corporis erit comparatus, ac si corpus praeter vires actu ipsum sollicitantes urgeretur a vi acceleratrice $S$ in directione contraria $PV$. Corpus igitur super hac superficie promota perinde movebitur, ac si superficies quiesceret, et corpus praeter vires id actu sollicitantes incitaretur vi $S$ in directione $PV$. Quare si anguli $VPT$ dicatur

sinus $= m$ et cosinus $= n$, ab hac vi orietur vis normalis $PN = mS$ et tangentialis $PT = nS$. Vires autem, quibus corpus $P$ actu sollicitatur, aequivaleant vi normali $Pn = N$ et vi tangentiali $Pt = T$. Omnino ergo corpus $P$ super superficie quiescente sollicitari censendum est a vi tangentiali $= T + nS$ et a vi normali $= N - mS$. Quodsi igitur corporis in $P$ celeritas ponatur debita altitudini $v$, qua tempusculo $dt$ conficiat spatiolum $ds$, sitque corporis $P$ massa $= A$ et radius osculi in $P$ ponatur $= r$; fiet $dv = (T + nS)\,ds$, et superficies a corpore premetur secundum directionem normalis $Pn$ vi $= A(\frac{2v}{r} + N - mS)$. Q. E. I.

39. **Scholion.** In his quaestionibus hactenus posuimus superficiem a pressione corporis omnino non affici, neque ejus motum perturbari, sed eo motu perfecte progredi, quem ipsi potentiae sollicitantes immediate imprimant. Qui casus locum habet, si massa corporis $P$ sit quasi infinite parva respectu massae superficiei. Quodsi vero massa corporis finitam habeat rationem ad massam superficiei, tum utique pressio corporis in superficie effectum exeret, ejus motum vel accelerando vel retardando, hincque nova variatio in ipso corporis motu resultabit. Ad hunc ergo effectum determinandum, sequens problema praemitti oportebit.

40. **Problema 5.** (Fig. 135.) Sit superficies $ABC$ mobilis super basi $BC$, atque extra lineam $AQB$ existat corpus $P$, quaeritur vis motrix superficiem et corpus in directione $PQ$ ad $AB$ normali sollicitans, quae superficiem et corpus dato tempore congreget in puncto $p$.

**Solutio.** Sit massa corporis $P$ ejusve inertia $= A$, et massa superficiei $ABC = M$, tempus autem, quo inter se coire debeant, sit $= dt$. Ponatur vis motrix ad hoc requisita $= P$, quae eadem vis instar elastri $PQ$ sese contrahentis et perpetuo ad superficiem normalis tempusculo $dt$ corpus $P$ transferat in $p$, et superficiem in situm $apb$. Erit ergo vis acceleratrix corpus $P$ in directione $Pp$ sollicitans $= \frac{P}{A}$, et vis superficiem in directione $Qp$ sollicitans $= \frac{P}{M}$. Tempusculo ergo $dt$ corpus $P$ transferetur per spatiolum $Pp = \frac{P}{A} \cdot \frac{dt^2}{4}$ (§ 9). Quia autem superficies alium motum nisi in directione $BC$ recipere nequit, pars tantum vis $\frac{P}{M}$ ad eam movendam impendetur, cujus directio ipsi $BC$ est parallela. Sit ergo anguli, quem tangens curvae in $Q$ cum recta $BC$ constituit, sinus $= m$, cosinus $= n$; erit ducta $Qq$ parallela ipsi $BC$ anguli $PQq$ sinus $= n$ et cosinus $= m$. Hinc ex vi $\frac{P}{M}$ in directione $QP$ urgente resultat vis secundum directionem $Qq = \frac{mP}{M}$, qua ergo superficies tempusculo $dt$ promovebitur per spatiolum $Qq = Bb = \frac{mP}{M} \cdot \frac{dt^2}{4}$. Cum igitur $PQ$ sit normalis ad $pq$, erit

$$Qp = \frac{mmP}{M} \cdot \frac{dt^2}{4}, \quad \text{ideoque} \quad PQ = \frac{Pdt^2}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{mm}{M}\right);$$

quod spatium $PQ$ quia est datum, reperitur $P = \frac{4AM.PQ}{dt^2(M + Amm)}$. Q. E. I.

41. **Coroll. 1.** Haec igitur congregatio superficiei mobilis et corporis $P$ tempore $dt$ perficitur, superficies secundum directionem $BC$ sollicitari concipiatur a vi acceleratrice

$$= \frac{mP}{M} = \frac{4mA.PQ}{(M + mmA)\,dt^2}.$$

42. **Coroll. 2.** Corpus autem $P$, quod ante conjunctionem referebatur ad punctum superficiei $Q$ per normalem $PQ$, ad quod punctum etiam a vi $P$ esset reductum, si superficies immobilis extitisset, nunc non in $q$ sed in $p$ cum superficie coit, ita ut propter hanc conjunctionem spatiolum $qp$ confecisse sit censendum; quod spatiolum est $pq = \frac{mnA.PQ}{M + mmA}$.

43. **Coroll. 3.** Si ergo ad locum corporis $P$ ad superficiem relatum respiciamus, durante congregatione hoc corpus censendum est percurrisse spatium $pq$, ideoque corpus $P$ censendum erit sollicitari secundum directionem tangentis vi acceleratrice $= \frac{4pq}{dt^2} = \frac{4mnA.PQ}{(M+mmA)\,dt^2}$. Secundum directionem normalem autem $PQ$ corpus $P$ sollicitatur vi acceleratrice $= \frac{P}{A} = \frac{4M.PQ}{dt^2(M+mmA)}$.

44. **Problema 6.** (Fig. 136.) Sit superficies $ABC$ liberrime mobilis super basi $EF$, cujus massa sit $= M$, quae autem ipsa a nullis viribus sollicitetur: Super ea vero moveatur corpus $P$, cujus massa sit $= A$, a viribus quibuscunque sollicitatum, unde non solum in ipso corpore $P$, sed etiam in superficie motus generetur: determinare ad quodvis tempus motum cum corporis $P$ tum etiam superficiei $AB$.

**Solutio.** Pervenerit post tempus quodcunque $t$ superficies in situm $AB$, ubi habeat motum secundum $BC$ progrediendi cum celeritate debita altitudini $u$. Corpus vero hoc tempore versetur in $P$, ubi sit ejus celeritas relativa secundum directionem tangentis $PQ$ debita altitudini $v$. Praeterea autem habet motum cum superficie communem secundum directionem $Pp$ celeritate $= \sqrt{u}$, quibus duobus motibus conjunctim verus corporis motus constituitur. Sollicitetur autem corpus in $P$ a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali $= T$, altera normali $= N$. His positis investigemus, cujusmodi motum corpus $P$ tempusculo $dt$ sequi debeat, si esset liberum et a superficie sejunctum. Primum igitur ob motum relativum in directione $PQ$ et vim tangentialem perveniet tempusculo $dt$ in $Q$, ut sit $PQ = dt\sqrt{v} + \frac{T.dt^2}{4}$. Hinc vero ob motum secundum $Pp$, perducetur in $q$, ut sit $Qq$ parallela ipsi $Pp$, et $= dt\sqrt{u}$. Denique ob vim normalem ex $q$ in $r$ traducetur, existente $qr = \frac{Ndt^2}{4}$ et normali ad $PQ$; existetque adeo corpus $P$ post tempusculum $dt$ in puncto $r$, si a superficie esset solutum. Quoniam vero superficies a nullis viribus sollicitatur, motu insito perveniet in situm $apb$, ut sit $Bb = Pp = dt\sqrt{u}$, eritque recta $pq$ tangens curvae in hoc situ. Versabitur ergo corpus in $r$ extra curvam $apb$, in qua tamen revera ponitur inclusum. Cum igitur tubus $apb$ in se corpus contineat firmitate sua per vim normalem, quam a corpore sustinet, per similem vim normalem corpus ex $r$ tempusculo $dt$ in curvam reduci debet. Sit anguli $PQq$, quem tangens curvae in $P$ cum basi $EF$ constituit, sinus $= m$, cosinus $= n$, et curvae in $P$ radius osculi $= r$, erit $q\pi = \frac{pq^2}{2r} = \frac{PQ^2}{2r}$, ideoque distantia corporis a curva $r\pi = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{PQ^2}{2r} = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{v\,dt^2}{2r}$. Quamobrem per praecedentem propositionem restitutione corporis in curvam primum superficies $AB$ secundum directionem $BC$ sollicitabitur vi acceleratrice, quae erit $= \frac{4mA}{(M+mmA)} \cdot \frac{r\pi}{dt^2} = \frac{mA}{M+mmA}\left(N + \frac{2v}{r}\right)$. Deinde ipsum corpus secundum curvae tangentem $PQ$ praeter vim tangentialem $T$ sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{mnA}{M+mmA}\left(N + \frac{2v}{r}\right)$. Denique vero corpus in $P$ superficiem premet normaliter vi, quae est productum ex ejus massa $A$ in vim acceleratricem, quae requiritur ad corpus ex $r$ in curvam reducendum,

quae est $=\frac{M}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$; unde erit pressio, quam superficies in $P$ a corpore sustinet, $=\frac{AM}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$. Hanc ob rem motus corporis relativus super superficie perinde erit comparatus, quasi superficies quiesceret, atque corpus in $P$ acceleraretur a vi acceleratrice $=T+\frac{mnA}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$ hinc si spatiolum, quod corpus tempusculo $dt$ super superficie describit, ponatur $=ds$, erit

$$dv = Tds + \frac{mnAds}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r});$$

et pressio, quam corpus in curvam exerit, erit $=\frac{AM}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$. Sicque determinatus est motus corporis in superficie; quod autem ad motum ipsius superficiei attinet, is accelerabitur vi acceleratrice $=\frac{mA}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$; quare si superficies tempusculo $dt$ per spatiolum $Bb = d\sigma$ progredi ponatur, erit $du = \frac{mAd\sigma}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$, et quia spatia $ds$ et $d\sigma$ eodem tempusculo $dt$ confici ponuntur, erit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{u}} = dt$. Ex data ergo curva $APB$ et viribus $N$ et $T$, corpus sollicitantibus, per quatuor istas aequationes inventas quatuor incognitae $v$, $u$, $s$ et $\sigma$ ad datum quodvis tempus $t$ poterunt assignari. Q. E. I.

# V.

# De motu corporum in tubo rectilineo mobili circa axem fixum, per ipsum tubum transeuntem. *)

1. Corpora, quae hic in tubis moveri pono, infinite parva assumo, ita ut alium motum praeter progressivum simplicem accipere nequeant: tubi ergo hujusmodi corpuscula continentes erunt quoque infinite angusti, perque eos corpuscula sine ulla frictione moveri statuo. Erunt igitur hi tubi revera lineae, in quibus corpuscula illa ita motu suo feruntur, ut ab illis recedere nequeant. Haec est consideratio geometrica, quae autem non impedit, quominus corpuscula illa finitae magnitudinis statui queant, dummodo in tubis et sine frictione et sine motu rotatorio moveantur. Quominus autem casus actu existens ab hypothesi differet, eo propius eventus cum calculo conspirabit.

2. (Fig. 137.) Sit $OF$ tubus rectus mobilis circa punctum fixum $O$, circa quod in eodem plano libere gyrari queat. Quod si ergo hic tubus moveatur, ejus motus cognoscetur, si data fuerit celeritas cujusvis ejus puncti $F$ rotatoria circa $O$. Sit enim celeritas, qua punctum $F$ circa $O$ arculum $Ff$ percurrit, debita altitudini $u$, ex ea cognoscetur celeritas cujusvis alius tubi puncti $P$. Cum enim tubus $OF$ puncto temporis in situm $Of$ perveniat, punctum $P$ in $p$ perveniet, unde ejus celeritas erit ad celeritatem puncti $F$ ut $Pp$ ad $Ff$, hoc est ut $OP$ ad $OF$. Quare cum celeritas puncti $F$ sit $=\sqrt{u}$, erit celeritas puncti $P=\frac{OP}{OF}\sqrt{u}$, ideoque altitudo huic celeritati debita $=\frac{OP^2}{OF^2}u$.

3. Deinde etiam si tubus, dum per angulum infinite parvum $FOf$ rotatur, sollicitetur a viribus quibuscunque, acceleratio seu retardatio motus rotatorii definiri poterit. Colligantur enim singularum virium sollicitantium momenta respectu axis $O$ sumta, quarum summa sit $=Pf$, quae tendat ad motum tubi accelerandum: retardatio enim per signum negativum indicabitur. Tum quaeratur momentum inertiae tubi respectu ejusdem axis $O$, quod oritur, si singulae tubi particulae per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur, atque omnia hae producta in unam summam colligantur;

*) Haec commentatio, manu cel. Auctoris inscripta: Caput I, majoris cujusdam operis pars fuisse videtur.

sit autem hoc momentum inertiae $= Mkk$, quo invento erit acceleratio puncti $F = \frac{Pf}{Mkk} \cdot OF$, atque acceleratio puncti $P = \frac{Pf}{Mkk} \cdot OP$. Hinc ergo fiet $du = \frac{Pf}{Mkk} \cdot OF \,.\, Ff$.

4. Ob hanc accelerationem tubus superiori temporis elemento ultra angulum $FOf$ insuper describet angulum $fO\varphi$, ideoque in situm $O\varphi$ perveniet. Angulus autem $fO\varphi$ seu spatiolum $f\varphi$ tantum erit, quantum ab acceleratione $\frac{Pf}{Mkk} \cdot OF$ generari potest, interea dum spatiolum $Ff$ celeritate altitudini $u$ debita conficitur. Dum autem generatim spatiolum $ds$ percurritur celeritate altitudini $c$ debita, eodem tempusculo corpus quiescens ab acceleratione $g$ protrahetur per spatiolum $= g \cdot \frac{ds^2}{4c}$. Hinc ergo erit $f\varphi = \frac{Pf}{Mkk} \,.\, OF \,.\, \frac{Ff^2}{4u}$, et angulus $fO\varphi = \frac{f\varphi}{OF} = \frac{Pf}{Mkk} \cdot \frac{Ff^2}{4u}$. Vicissim igitur si spatiolum $f\varphi$ datum fuerit, per quod tubus per accelerationem promoveatur, ex eo innotescet ipsa acceleratio $\frac{Pf}{Mkk} \cdot OF = \frac{4u \,.\, f\varphi}{Ff^2}$, ideoque momentum virium accelerantium $Pf = \frac{4Mkku \,.\, f\varphi}{OF \,.\, Ff^2}$.

5. Quiescat nunc tubus $OF$, in eo autem versetur corpus $P$ motum in directione $PF$ celeritate quacunque debita altitudini $v$, atque manifestum est hoc corpus ista celeritate per tubum uniformiter esse progressurum, neque tubum ad motum esse sollicitaturum. Neque etiam tubus ullam vim sentiet, si corpus secundum directionem $PF$ a vi quacunqne sive acceleretur, sive retardetur. Sollicitetur corpus a vi $P$ secundum directionem $PF$, atque dum spatium $PQ = dx$ percurrit, ejus motus accelerabitur, fietque $dv = \frac{Pdx}{A}$ denotante $A$ massam corporis $P$. Hinc ultra $Q$ in $q$ progredietur, ut sit

$$Qq = \frac{P}{A} \cdot \frac{dx^2}{4v} = \frac{Pdx^2}{4Av},$$

prouti modo ostendimus.

6. Moveatur nunc tubus motu rotatorio circa $O$, atque corpusculum $P$, nisi sit in $O$, quiescere non potest. Duplici autem modo motus corporis in tubo inclusi spectari potest, primo scilicet, quatenus in ipso tubo progreditur, tum vero motum cum tubo habebit communem. Quare si cognoscatur motus corporis in tubo, una cum tubi motu rotatorio, simul verus corporis motus innotescet. Habeat (Fig. 138) corpus $A$ in tubo $OF$ celeritatem altitudini $p$ debitam, qua secundum tubi longitudinem ab $O$ recedat, simul vero ipse tubus rotetur ita, ut puncti $F$ celeritas per $Ff$ sit debita altitudini $u$. Verus ergo corporis $A$ motus erit compositus ex motu, quem habet in tubo cum celeritate $\sqrt{p}$, et ex motu tubi rotatorio in $A$, cujus celeritas erit $= \frac{OA\sqrt{u}}{OF}$, et directio secundum $A\alpha$ normalem ad $OA$. Hinc corpus $A$ primo instanti revera movebitur in directione $Ap$, ita ut sit

$$AP : Pp = \sqrt{p} : \frac{OA\sqrt{u}}{OF}$$

ejusque celeritas vera seu absoluta erit $= \frac{Ap\sqrt{p}}{AP}$, unde altitudo huic celeritati debita fit

$$= \frac{Ap^2}{AP^2} \cdot p = p + \frac{Pp^2}{AP^2} \cdot p = p + \frac{OA^2 \,.\, u}{OF^2}.$$

7. Ponamus celeritatem corporis $A$, qua secundum tubi longitudinem progrediatur, esse nullam; ita ut tantum habeat motum cum tubo communem secundum directionem $A\alpha$, celeritate

*

$=\frac{OA\sqrt{u}}{OF}$. Hac igitur celeritate, dum tubus puncto temporis in situm $Of$ procedit, conficiet spatiolum $A\alpha$; punctum tubi $A$ vero, in quo corpus haeserat, perveniet in $a$, descripto arculo circulari $Aa$, cujus tangens erit recta $A\alpha$. Cum igitur nunc corpus non amplius sit in $a$ sed in $\alpha$, in tubo interea spatiolum $a\alpha$ confecisse censendum est. At est

$$a\alpha = O\alpha - OA = \sqrt{(OA^2 + A\alpha^2)} - OA = \frac{A\alpha^2}{2OA}$$

ob $A\alpha$ prae $OA$ infinite parvo. Dum igitur spatium $Ff$ celeritate altitudini $u$ debita absolvitur, corpus in tubo progreditur per spatiolum

$$a\alpha = \frac{A\alpha^2}{2OA} = \frac{Ff \cdot A\alpha}{2OF} = \frac{OA \cdot Ff^2}{2OF^2},$$

ob $OA : A\alpha = OF : Ff$. Ad hoc autem spatium conficiendum requiritur vis movens $g$, ita ut sit

$$\frac{OA \cdot Ff^2}{2OF^2} = \frac{g \cdot Ff^2}{4Au}, \text{ unde fit } \frac{g}{A} = \frac{2OA \cdot u}{OF^2}.$$

Corpus ergo $A$ in tubo perinde movebitur, ac si sollicitaretur a vi movente $g = \frac{2A \cdot OA \cdot u}{OF^2}$ secundum tubi directionem $AP$.

8. Ponamus autem corpus in $A$ jam in tubo moveri celeritate debita altitudini $p$, qua puncto temporis, si tubus quiesceret, conficeret spatiolum $AP = dx$, posita distantia $OA = x$. Moveatur autem tubus interea motu rotatorio, ita ut ejus punctum $F$ conficiat arculum $Ff = ds$, celeritate debita altitudini $u$, eritque primo $\frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. Tum vero corpus $A$ praeter motum in tubo habebit motum in directione $A\alpha$ normali ad $OA$, cum celeritate $= \frac{x\sqrt{u}}{OF} = \frac{x\sqrt{u}}{f}$ posita $OF = f$. Duplici hoc motu corpus, si sibi esset relictum, describeret diagonalem $Ap$ parallelogrammi $A\alpha pP$ rectanguli celeritate debita altitudini $p + \frac{xxu}{ff}$, perveniretque in $p$, existente

$$AP = dx \text{ et } Pp = A\alpha = \frac{xds}{f} = \frac{xdx\sqrt{u}}{f\sqrt{p}}.$$

Tubus autem interea perveniet in situm $Of$, existente $Ff = ds$.

9. Nisi ergo corpus tubo esset inclusum elapso tempusculi elemento, corpus teneret situm $p$, et tubus situm $Of$; ideoque extra tubum versaretur. Cum igitur tubus perpetuo corpus in se retineat, vim quandam reverá exeret, qua corpus in se conservet, haecque vis nil aliud erit, nisi pressio, qua corpus et tubus ad se invicem apprimuntur, cujus pressionis directio erit normalis ad tubi directionem. Sit ista pressio $= P$, qua corpus in $A$ secundum directionem $A\alpha$ normalem ad tubum, ipse vero tubus secundum directionem contrariam urgeatur. Haec itaque pressio $P$ efficiet, ut corpus non in $p$, sed in $\pi$ perveniat, existente spatiolo

$$p\pi = \frac{P}{A} \cdot \frac{Ff^2}{4u} = \frac{Pds^2}{4Au}.$$

Eadem autem pressio $P$ porro, tubum ex situ $Of$ repellet in situm $O\varphi$, ad quem inveniendum sit momentum inertiae tubi respectu puncti $O = Mkk$, et cum momentum vis sollicitantis sit $= Px$, erit acceleratio puncti $f = \frac{Px}{Mkk}f$; unde fit spatiolum

$$f\varphi = \frac{Pfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}.$$

10. Producatur recta $Pp$ per $\pi$ in $q$, quae cum ad $Of$ sit normalis, erit $q\pi : f\varphi = OP : OF$, seu

$$q\pi = \frac{(x + dx)f\varphi}{f} = \frac{Pxxds^2}{4Mkku}.$$

Jam vero pressio $P$ tanta esse debet, ut corpus ex $p$ et tubus ex situ $Of$ ad se invicem in situm $O\pi\varphi$ adducantur; quamobrem esse debebit

$$pq = \frac{Pds^2}{4Au} + \frac{Pxxds^2}{4Mkku} = \frac{(Axx + Mkk)Pds^2}{4AMkku}.$$

Verum ob triangula $OA\alpha$, $\alpha pq$ similia erit $OA : A\alpha = f : ds = dx : pq$, ideoque

$$pq = \frac{dxds}{f} = \frac{ds^2 \sqrt{p}}{f\sqrt{u}}.$$

Hincque fit $P = \frac{4AMkk\sqrt{pu}}{f(Axx + Mkk)}$, quae est pressio, qua corpus in $A$ ad tubum apprimitur, cui sustinendae firmitas tubi sufficiens esse debet. Hac ergo vi primum motus tubi rotatorius retardatur, fietque

$$\frac{du}{ds} = -\frac{Pfx}{Mkk} = -\frac{4Ax\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}.$$

11. Si tubus motu rotatorio careret, corpus in punctum $P$ perveniret, nunc autem pervenit in punctum $\pi$ magis remotum ab $O$ intervallo

$$O\pi - OP = \frac{P\pi^2}{2OP} = \frac{A\alpha^2}{2OA} = \frac{xds^2}{2ff}.$$

Ejus ergo celeritas $\sqrt{p}$, qua in tubo progreditur, increvisse censenda est, perinde ac si interea corpus secundum tubi directionem sollicitatum fuisset vi quadam $g$, ita ut sit $\frac{xds^2}{2ff} = \frac{g}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, unde fit acceleratio $\frac{g}{A} = \frac{2xu}{ff}$. Ex qua dum corpus spatiolum $AP = dx$ in tubo percurrit, fiet $dp = \frac{2uxdx}{ff}$; deinde vero est $du = -\frac{4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}$, ex quibus aequationibus cum $\frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}$ conjunctis totus motus tam tubi, quam corporis in tubo definiri debet.

12. Hinc vero etiam acceleratio corporis $A$ vera colligi potest: cum enim corpus $A$ actu progrediatur motu insito per diagonalem

$$Ap = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{xxds^2}{ff}\right)},$$

celeritate debita altitudini $= p + \frac{xxu}{ff}$, quae altitudo ponatur $= v$, erit $\frac{Ap}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. Quia autem interea corpus $A$ sollicitatur vi $P$ in directione $A\alpha$, accelerabitur a vi

$$\frac{P \cdot A\alpha}{Ap} = \frac{Pxds}{f \cdot Ap}, \text{ erit ergo } \frac{dv}{Ap} = \frac{Pxds}{Af \cdot Ap},$$

seu

$$dv = \frac{Pxds}{Af} = \frac{4Mkkxds\sqrt{pu}}{ff(Axx + Mkk)} = \frac{4Mkkuxdx}{ff(Axx + Mkk)},$$

quae eadem aequatio ex praecedentibus invenitur; cum enim sit

$$du = -\frac{4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk} = -\frac{4Auxdx}{Axx + Mkk} \text{ et } dp = \frac{2uxdx}{ff} \text{ ob } v = p + \frac{xxu}{ff}, \text{ erit}$$

$$dv = dp + \frac{xxdu}{ff} + \frac{2uxdx}{ff} = \frac{4uxdx}{ff} - \frac{4Aux^3dx}{ff(Axx + Mkk)} = \frac{4Mkkuxdx}{ff(Axx + Mkk)}, \text{ ut ante.}$$

13. Ex his aequationibus pro $du$ et $dv$ inventis duplex valor pro $\frac{4uxdx}{Axx+Mkk}$ reperitur, nempe $\frac{ffdv}{Mkk}$ et $-\frac{du}{A}$; unde fit $\frac{ffdv}{Mkk}+\frac{du}{A}=0$, atque integrando $Av+\frac{Mkku}{ff}=\text{Const.}$ At est $Av$ vis viva corporis $A$, et $\frac{Mkku}{ff}$ vis viva tubi gyrantis, unde intelligitur, summam virium vivarum tubi et corporis perpetuo conservari eandem. Cum vero sit $v=p+\frac{xxu}{ff}$, erit quoque

$$Ap+\frac{(Axx+Mkk)u}{ff}=\text{Const.}$$

14. Praeterea ex aequatione $du=-\frac{4Auxdx}{Axx+Mkk}$ deducitur haec integrabilis

$$\frac{du}{u}+\frac{4Axdx}{Axx+Mkk}=0,$$

quae praebet $u(Axx+Mkk)^2=\text{Const.}=GG$, unde fit $u=\frac{GG}{(Axx+Mkk)^2}$; qui valor in praecedente substitutus dat

$$Ap+\frac{GG}{ff(Axx+Mkk)}=H \quad \text{et} \quad p=\frac{H}{A}-\frac{GG}{Aff(Axx+Mkk)}.$$

Inventis $p$ et $u$, cum sit $\frac{dx}{\sqrt{p}}=\frac{ds}{\sqrt{u}}$, fiet

$$ds=\frac{Gdx}{Axx+Mkk}:\sqrt{\left(\frac{H}{A}-\frac{GG}{Aff(Axx+Mkk)}\right)}, \quad \text{seu}$$

$$ds=\frac{Gfdx\sqrt{A}}{\sqrt{(Axx+Mkk)(Hff(Axx+Mkk)-GG)}},$$

ex qua aequatione pro quovis corporis in tubi situ ipsa tubi positio determinatur.

15. (Fig. 139.) Quo motus corporis in tubo hoc circa $O$ mobili clarius perspiciatur, ponamus initio tubum fuisse in situ $OF$, motumque rotatorium habuisse tantum, ut in distantia $OF=f$ punctum $F$ celeritatem habuerit debitam altitudini $c$. Corpus autem initio versatum sit in $A$, existente $OA=a$, habueritque celeritatem in tubo secundum $AF$ debitam altitudini $=b$; sitque, ut ante assumsimus, massa corporis $=A$, et momentum inertiae tubi $=Mkk$. Post aliquod tempus pervenerit tubus in situm $OS$, confecto arcu $FS=s$, in quo situ puncti $S$ celeritas rotatoria per elementum $Ss=ds$ debita sit altitudini $u$, corpus autem nunc versetur in $P$, existente $OP=x$, cujus celeritas, qua in tubo progreditur, debita sit altitudini $p$.

16. His positis, cum inventa sit $u=\frac{GG}{(Axx+Mkk)^2}$, facto $x=OA=a$, fieri debet $u=c$, unde determinatur constans $GG=c(Aaa+Mkk)^2$, fietque $u=\frac{c(Aaa+Mkk)^2}{(Axx+Mkk)^2}$. Deinde erit

$$p=\frac{H}{A}-\frac{c(Aaa+Mkk)^2}{Aff(Axx+Mkk)},$$

facto autem $x=a$, quia fit $p=b$, erit

$$b=\frac{H}{A}-\frac{c(Aaa+Mkk)}{Aff},$$

unde definitur constans $\frac{H}{A}=b+\frac{c(Aaa+Mkk)}{Aff}$, ita ut sit

$$p=b+\frac{c(Aaa+Mkk)(xx-aa)}{ff(Axx+Mkk)}.$$

Hi valores ipsarum $u$ et $p$, in aequatione $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}}$ substituti, dabunt aequationem

$$ds = \frac{(Aaa + Mkk)\,dx\sqrt{c}}{Axx + Mkk} : \sqrt{\left(b + \frac{c\,(Aaa + Mkk)\,(xx - aa)}{ff(Axx + Mkk)}\right)},$$

qua natura curvae $AP$, quam corpus revera describit, determinatur.

**17.** Ponamus corpus initio in $A$ nullam habuisse celeritatem in tubo progressivam, seu esse $b = 0$, erit $ds = \frac{fdx\sqrt{(Aaa + Mkk)}}{\sqrt{(xx - aa)\,(Axx + Mkk)}}$. Hinc centro $O$ ducto arculo $Pl$, erit

$$Pl = \frac{xds}{f} = \frac{xdx\sqrt{(Aaa + Mkk)}}{\sqrt{(xx - aa)\,(Axx + Mkk)}}$$

et $pl = dx$, unde fit elementum curvae

$$Pp = dx\sqrt{\left(1 + \frac{xx(Aaa + Mkk)}{(xx - aa)\,(Axx + Mkk)}\right)} = dx\sqrt{\frac{Ax^4 + Mkk(2xx - aa)}{(xx - aa)\,(Axx + Mkk)}}, \text{ ergo}$$

$$Pp : Pl = \sqrt{(Ax^4 + (2xx - aa)\,Mkk)} : x\sqrt{(Aaa + Mkk)}.$$

Ipso ergo initio in $A$, erat $Pp = Pl$, ideoque tangens curvae $AP$ in $A$ erat normalis ad tubum $OF$. In $P$ autem est $\cos APO = \frac{pl}{Pp} = \sqrt{\frac{(xx - aa)\,(Axx + Mkk)}{Ax^4 + (2xx - aa)Mkk}}$, unde fit

$$\cos 2APO = \frac{Ax^4 - 2Aaaxx - Mkkaa}{Ax^4 + (2xx - aa)Mkk} = 1 - \frac{2Mkkxx - 2Aaaxx}{Ax^4 + (2xx - aa)Mkk}.$$

**18.** Ponamus tubum omni inertia destitutum, ita ut sit $Mkk = 0$, eritque

$$u = \frac{a^4c}{x^4}, \text{ seu } \sqrt{u} = \frac{aa}{xx}\sqrt{c},$$

unde celeritas tubi in $F$ erit ad celeritatem tubi in $S$ ut $QP^2$ ad $OA^2$. Deinde autem fiet

$$p = b + \frac{aac(xx - aa)}{ffxx}, \text{ unde erit } ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}} = \frac{aafdx\sqrt{c}}{x\sqrt{(bffxx + aacxx - a^4c)}},$$

quae aequatio integrata dat

$$\frac{s}{f} = \text{arc. cos}\,\frac{aa\sqrt{c}}{x\sqrt{(aac + bff)}} - \text{arc. cos}\,\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(aac + bff)}} = \text{ang. } FOS.$$

At est $\text{arc. cos}\,\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(aac + bff)}} = \text{arc. tang}\,\frac{f\sqrt{b}}{a\sqrt{c}} = 90° - FAP$, unde

$$\text{arc. cos}\,\frac{aa\sqrt{c}}{x\sqrt{(aac + bff)}} = 90° - FAP + FOS \text{ et}$$

$$\frac{aa\sqrt{c}}{x\sqrt{(aac + bff)}} = \cos(90° - FAP + FOS) = \sin(FAP - FOS) = \frac{a}{x}\sin FAP,$$

$$\text{ob } \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(aac + bff)}} = \cos(90° - FAP) = \sin FAP.$$

Hinc erit $x : a = OP : OA = \sin FAP : \sin(FAP - FOS)$, quo constat viam a corpore descriptam $AP$ esse lineam rectam; tum enim erit

$$FAP - FOS = APO \text{ et } OP : OA = \sin FAP : \sin APO.$$

Ex ipsa autem status natura perspicuum est, corpus perinde motum iri, ac si tubus penitus abesset, quia inertia carens motum corporis alterare nequit.

19. Evanescat jam massa corporis $A$ prae inertia tubi, atque manifestum est a corpore motum tubi perturbari non posse, ex quo tubus motu uniformi rotabitur, fiet autem utique ex aequatione $u = c$. Tum vero pro motu corporis in tubo erit $p = b + \frac{c(xx - aa)}{ff}$, unde fit

$$ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}} = \frac{fdx\sqrt{c}}{\sqrt{(bff - aac + cxx)}},$$

quae aequatio integrata dat

$$\frac{s}{f} = \text{ang.} FOS = \int \frac{dx\sqrt{c}}{\sqrt{(bff - aac + cxx)}} = l \frac{x\sqrt{c} + \sqrt{(bff - aac + cxx)}}{a\sqrt{c} + f\sqrt{b}}.$$

Quare sumto $e$ numero cujus logarithmus $= 1$, erit

$$e^{FOS} = \frac{x\sqrt{c} + \sqrt{(bff - aac + cxx)}}{a\sqrt{c} + f\sqrt{b}}, \text{ hincque } x = \frac{a\sqrt{c} + f\sqrt{b}}{2\sqrt{c}} e^{\frac{s}{f}} + \frac{a\sqrt{c} - f\sqrt{b}}{2\sqrt{c}} e^{\frac{-s}{f}}.$$

Ad quodvis ergo tempus, primum facile situs tubi $OS$, quippe cujus motus est uniformis, definitur, tum vero ex angulo $\frac{s}{f}$ locus $P$ in tubo, quem corpus occupat, ex hac aequatione invenitur.

20. (Fig. 140.) Hactenus motum corporis in tubo recto circa alterum terminum $O$ in eodem plano mobili determinavimus, si neque tubus neque corpus ab ulla vi externa sollicitentur; nunc igitur effectum virium tam corpus in tubo quam ipsum tubum sollicitantium investigemus. Pervenerit autem tubus in situm $OF$, ubi puncti $F$ celeritas rotatoria debita sit altitudini $u$, qua puncto temporis $dt$ describere valet arculum $= ds$. Corpus autem versetur in $A$, existente $OA = x$, ubi ejus celeritas, qua in tubo progreditur, debita sit altitudini $p$, qua eodem tempusculo $dt$ spatiolum $= dx$ absolvere queat. Urgeatur autem primo tubus a momento virium $= Sf$, secundum plagam $Ff$; quo fiet ut tempusculo $dt$ spatium absolvat

$$Ff = ds + \frac{Sff}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u},$$

si quidem a corpore incluso esset liberatus, ideoque perventurus esset in situm $Of$.

21. Corpus autem $A$ sollicitetur a duabus viribus, altera $= T$ secundum directionem tubi $AP$, altera $= V$ secundum directionem $A\alpha$ ad tubum normalem. Quodsi ergo corpus extra tubum esset liberum, primum motu secundum $AP$, cujus celeritas est $= \sqrt{p}$, a vi $T$ sollicitatum conficeret spatiolum $AP = dx + \frac{T}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$; deinde autem motu in directione $A\alpha$, cujus celeritas est $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, a vi $V$ sollicitatum, conficeret spatiolum $A\alpha = \frac{xds}{f} + \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$. Completo ergo parallelogrammo rectangulo $Al$, corpus, si liberum esset, perventurum esset in punctum $l$; tubus vero, si corpore careret, eodem momento situm teneret $Of$; ideoque corpus extra tubum foret situm, ab eoque distaret intervallo $lp$. Erit autem ad hanc distantiam inveniendam,

$$OF : Ff = OP : Pp, \quad \text{unde} \quad Pp = \frac{Ff \cdot OP}{OF}, \quad \text{et}$$

$$pl = \frac{Ff \cdot OP}{OF} - \frac{OA \cdot ds}{OF} - \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} = \frac{AP \cdot ds}{f} - \frac{V}{A} \cdot \frac{Ff^2}{4u} = \frac{dxds}{f} - \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} + \frac{Sfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}.$$

22. Si hoc intervallum $pl$ esset $= 0$, corpus sponte in tubo maneret, neque igitur ulla existeret pressio corporis in tubum; nunc ergo cum corpus extra tubum egressurum esset, pressio aderit, qua corpus in tubo retinebitur. Sit ista pressio $= P$, quae corpus in directione ad tubum normali

$A\alpha$, ipsum vero tubum in directione contraria sollicitet. Hujus vis $P$ momentum ad tubum versus corpus $l$ reducendum erit $= Px$, hinc tubus removebitur per spatiolum $f\varphi = \frac{Pfx}{Mkk}\cdot\frac{ds^2}{4u}$, ex quo prodit spatiolum $p\pi = \frac{Pxx}{Mkk}\cdot\frac{ds^2}{4u}$. Deinde eadem pressio $P$ corpus, quod est in $l$, perducere debet in $\pi$, eritque $l\pi = \frac{P}{A}\cdot\frac{ds^2}{4u}$. Ex his resultat

$$\frac{P(Axx + Mkk)ds^2}{4AMkku} = lp = \frac{dxds}{f} - \frac{V}{A}\cdot\frac{ds^2}{4u} = \frac{ds^2\sqrt{p}}{f\sqrt{u}} - \frac{V}{A}\cdot\frac{ds^2}{4u} + \frac{Sfx}{Mkk}\cdot\frac{ds^2}{4u},$$

eritque ergo pressio quaesita

$$P = \frac{AMkk}{Axx + Mkk}\left(\frac{4\sqrt{pu}}{f} - \frac{V}{A} + \frac{Sfx}{Mkk}\right).$$

23. Tubus ergo nunc sollicitabitur a virium momento $Sf - Px$, ex quo oritur acceleratio motus rotatorii

$$\frac{du}{ds} = \frac{Sff}{Mkk} - \frac{Pfx}{Mkk} = \frac{Sff}{Mkk} - \frac{Afx}{Axx + Mkk}\left(\frac{4\sqrt{pu}}{f} - \frac{V}{A} + \frac{Sfx}{Mkk}\right), \quad \text{seu}$$

$$du = \frac{Sffds}{Axx + Mkk} - \frac{4Auxdx}{Axx + Mkk} + \frac{Vfxds}{Axx + Mkk}.$$

Corpus autem, quod in tubo descripturum fuisset motu insito spatiolum $dx$, nunc ex $A$ in punctum tubi $\pi$ pervenit, descripsit ergo spatium

$$= AP + (O\pi - OP) = AP + \frac{P\pi^2}{2OP} = AP + \frac{A\alpha^2}{2OA} = dx + \frac{T}{A}\cdot\frac{ds^2}{4u} + \frac{xds^2}{2ff},$$

hinc accelerationem accepit $= \frac{T}{A} + \frac{2xu}{ff} = \frac{dp}{dx}$, ex quo erit $dp = \frac{Tdx}{A} + \frac{2uxdx}{ff}$. Quod si celeritas corporis vera ponatur debita altitudini $v$, ob $v = p + \frac{xxu}{ff}$, erit

$$dv = dp + \frac{xxdu}{ff} + \frac{2uxdx}{ff} = \frac{Tdx}{A} + \frac{Sxxds}{Axx + Mkk} + \frac{Vx^3ds}{f(Axx + Mkk)} + \frac{4Mkkuxdx}{ff(Axx + Mkk)}.$$

24. Ex priori aequatione oritur

$$du + \frac{4Auxdx}{Axx + Mkk} = \frac{Sffds}{Axx + Mkk} + \frac{Vfxds}{Axx + Mkk},$$

cujus prius membrum fit integrabile si multiplicetur per $(Axx + Mkk)^2$; erit enim ejus integrale $(Axx + Mkk)^2 u$, quod ponatur $= Q$. Hinc erit

$$dQ = Sffds\,(Axx + Mkk) + Vfxds\,(Axx + Mkk);$$

dividatur haec aequatio per $2\sqrt{Q}$ erit

$$\frac{dQ}{2\sqrt{Q}} = \frac{Sffds}{2\sqrt{u}} + \frac{Vfxds}{2\sqrt{u}}, \quad \text{unde} \quad (Axx + Mkk)\sqrt{u} = \int\frac{Sffds}{2\sqrt{u}} + \int\frac{Vfxds}{2\sqrt{u}}.$$

Quare si vires sollicitantes $S$ et $V$ evanescant, erit $(Axx + Mkk)\sqrt{u}$ quantitas constans.

25. Ex prima et ultima aequatione si eliminentur termini, in quibus nulla vis sollicitans occurrit, prodibit $Adv + \frac{Mkkdu}{ff} = Tdx + Sds + \frac{Vxds}{f}$. Hinc ergo integrando obtinebitur

$$Av + \frac{Mkku}{ff} = \int Tdx + \int\frac{Vxds}{f} + \int Sds = Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff}.$$

Si ergo vires sollicitantes $T$, $V$, et $S$ evanescant, erit

$$Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff} = Av + \frac{Mkku}{ff}$$

quantitas constans; exprimit autem $Av$ vim vivam corporis $A$ et $\frac{Mkku}{ff}$ vim vivam tubi rotantis. Unde vis viva totalis nullum accipit incrementum vel decrementum, nisi a viribus sollicitantibus, absque quibus vis viva perpetuo eadem conservaretur.

26. Praeter vim vivam autem, si nullae vires sollicitantes adsint, quoque conservatur valor hujus expressionis $(Axx + Mkk)\sqrt{u}$ perpetuo idem; qui valor quomodo verbis commode exprimi queat, videamus. Est autem $\sqrt{u}$ celeritas rotatoria puncti tubi $F$, unde fit corporis $A$ celeritas rotatoria $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, ejusque adeo motus rotatorius $= \frac{Ax\sqrt{u}}{f}$, qui si denuo in distantiam a centro rotationis $O$, quae est $= x$, multiplicetur, productum $\frac{Axx\sqrt{u}}{f}$ convenit appellari momentum rotatorium corporis $A$. Simili modo si tubi quaecunque molecula, ab $O$ intervallo $z$ distans, ponatur $= d\omega$, erit ejus momentum rotatorium $= \frac{zzd\omega\sqrt{u}}{f}$, unde totius tubi momentum rotatorium erit

$$= \frac{\sqrt{u}}{f}\int zzd\omega = \frac{Mkk\sqrt{u}}{f},$$

quia $Mkk$ exponit summam omnium $zzd\omega$. Erit ergo $\frac{(Axx + Mkk)\sqrt{u}}{f}$ momentum rotatorium totale tubi et corporis conjunctim, quod propterea perinde ac vis viva conservatur; nisi quatenus a viribus sollicitantibus vel augetur vel diminuitur.

27. (Fig. 141.) Ponamus tubum cum corpore a gravitate naturali ad motum animari, tubumque jam pervenisse ex situ horizontali $OF$ in situm $OS$, ubi celeritas puncti $S$ rotatoria sit $= \sqrt{u}$, qua puncto temporis percurrat spatiolum $Ss = ds$. Sit pondus tubi $= M$, ejusque centri gravitatis ab $Q$ distantia $= g$, erit momentum gravitatis tubi $= Mg . \cos FOS = Mg \cos \frac{s}{f}$; denotat enim $\frac{s}{f}$ angulum $FOS$ ob arcum $FS = s$ et radium $OF = f$. Momentum ergo supra positum $Sf$ erit $= Mg \cos \frac{s}{f}$. Sit praeterea nunc corpus in $P$ existente $OP = x$, ubi ejus celeritas in tubo debita sit altitudini $p$, ut sit $\frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}}$. Ob gravitatem ergo corpus $A$ in $P$ sollicitabitur in directione verticali $PG$ vi $= A$, unde oritur vis $T = A \sin \frac{s}{f}$ et $V = A \cos \frac{s}{f}$.

28. His virium determinationibus in calculum introductis erit primo

$$(Axx + Mkk)\sqrt{u} = \int \frac{Mgfds + Afxds}{2\sqrt{u}} \cos \frac{s}{f} = \frac{f}{2}\int (Mg + Ax) \frac{dx}{\sqrt{p}} \cos \frac{s}{f}; \quad \text{et}$$

$$Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff} = A\int dx \sin \frac{s}{f} + A\int \frac{xds}{f} \cos \frac{s}{f} + Mg\int \frac{ds}{f} \cos \frac{s}{f} = Ax \sin \frac{s}{f} + Mg \sin \frac{s}{f} + \text{Const.},$$

quae ex statu initiali debet definiri. Ponamus tubum initio in $OF$ quievisse, et corpus in $A$ pariter quievisse, ita ut fuerit $OA = a$, ergo posito $s = 0$, fieri debet $x = a$, $p = 0$ et $u = 0$, unde constantis additione non est opus. Erit ergo pro hoc casu

$$Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff} = (Ax + Mg) \sin \frac{s}{f},$$

quae conjuncta cum aequationibus

$$(Axx + Mkk)\sqrt{u} = \frac{1}{2} f\int (Ax + Mg) \frac{dx}{\sqrt{p}} \cos \frac{s}{f} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}},$$

determinabit motum quaesitum.

29. Resumantur aequationes differentiales quae sunt

$$\text{I.}\quad Adp + \frac{2Auxdx}{ff} + \frac{(Axx+Mkk)du}{ff} = Adx\sin\frac{s}{f} + \frac{ds}{f}(Ax+Mg)\cos\frac{s}{f},$$

$$\text{II.}\quad \frac{(Axx+Mkk)du}{ff} + \frac{4Auxdx}{ff} = (Ax+Mg)\frac{ds}{f}\cos\frac{s}{f},$$

$$\text{III.}\quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}.$$

Ponatur angulus $\frac{s}{f}=\varphi$ et $u=\frac{Arff}{Axx+Mkk}$, et habebuntur hae aequationes

$$\text{I.}\quad Adp + Adr = Adx\sin\varphi + (Ax+Mg)d\varphi\cos\varphi,$$

$$\text{II.}\quad Adr + \frac{2AArxdx}{Axx+Mkk} = (Ax+Mg)d\varphi\cos\varphi,$$

$$\text{III.}\quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{d\varphi\sqrt{(Axx+Mkk)}}{\sqrt{Ar}},$$

quarum trium aequationum ope relatio inter quatuor variabiles $p$, $r$, $x$ et $\varphi$ debet definiri.

30. Resolutio harum aequationum multo videtur difficilior quam fortasse est, si enim casum contemplemur, quo tubus omni inertia carere ponitur, manifestum est corpus perinde moveri debere, ac si penitus esset liberum, ideoque vel in recta verticali descendet, vel parabolam describet. Verumtamen hic ipse motus ex aequationibus inventis nonnisi summa molestia erui potest. Facto enim $M=0$ aequationes tres inventae abibunt facto $u=\frac{ffr}{xx}$ in has:

$$dp + dr = dx\sin\varphi + xd\varphi\cos\varphi,$$

$$dr + \frac{2rdx}{x} = xd\varphi\cos\varphi \quad\text{et}\quad \frac{dx}{x} = \frac{d\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{r}},$$

ex quibus quomodo verus corporis motus cognosci queat, investigemus; quae quidem investigatio ita erit comparata ut, nisi motus jam ante esset cognitus, vix suscipi potuisset.

31. Ob variabilium multitudinem ante omnia unam eliminari oportet, conveniet autem eliminari $x$ una cum $dx$. Tertia autem aequatio dat $dx=\frac{xd\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{r}}$, qui valor in reliquis substitutus dat

$$dp + dr = \frac{xd\varphi\sin\varphi\,.\sqrt{p} + xd\varphi\cos\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{r}} \quad\text{et}\quad dr + 2d\varphi\sqrt{pr} = xd\varphi\cos\varphi,$$

ex posteriori fit $xd\varphi = \frac{dr}{\cos\varphi} + \frac{2d\varphi\sqrt{pr}}{\cos\varphi}$, qui in priori substitutus producet hanc aequationem

$$dp\sqrt{r} + dr\sqrt{r} = \frac{dr\sin\varphi\,.\sqrt{p}}{\cos\varphi} + dr\sqrt{r} + \frac{2pd\varphi\sin\varphi\,.\sqrt{r}}{\cos\varphi} + 2rd\varphi\sqrt{p},$$

seu per $\frac{\cos\varphi}{2\sqrt{pr}}$ multiplicando hanc

$$\frac{dp\cos\varphi}{2\sqrt{p}} - \frac{dr\sin\varphi}{2\sqrt{r}} - d\varphi\sin\varphi\sqrt{p} - d\varphi\cos\varphi\sqrt{r} = 0,$$

quam evenit esse integrabilem, integrata enim dat: $\cos\varphi\sqrt{p} - \sin\varphi\sqrt{r} = \sqrt{c}$.

32. Deinde aequatio prima, quae sponte est integrabilis, dat $p+r=x\sin\varphi+b$; ab hac subtrahatur quadratum prioris $p\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi\,.\sqrt{pr} + r\sin^2\varphi = c$, atque remanebit

$$(\sin\varphi\sqrt{p} + \cos\varphi\sqrt{r})^2 = x\sin\varphi + b - c.$$

*

At ex prius integrata est $\sqrt{p} = \frac{\sqrt{c} + \sin\varphi\sqrt{r}}{\cos\varphi}$, unde illa aequatio abibit in hanc

$$\frac{(\sin\varphi\,.\,\sqrt{c} + \sqrt{r})^2}{\cos^2\varphi} = x\sin\varphi + b - c, \quad \text{ergo} \quad x = \frac{c-b}{\sin\varphi} + \frac{(\sin\varphi\,.\,\sqrt{c} + \sqrt{r})^2}{\sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

Hi valores pro $\sqrt{p}$ et $x$ inventi surrogentur in aequatione $dr + 2d\varphi\sqrt{pr} = xd\varphi\cos\varphi$, atque orietur:

$$dr + \frac{2d\varphi\sqrt{cr}}{\cos\varphi} + \frac{2rd\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(c-b)d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{d\varphi(\sin\varphi\,.\sqrt{c} + \sqrt{r})^2}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

quae reducta praebet hanc:

$$dr + \frac{rd\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{cd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{bd\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

33. Sic itaque pervenimus ad aequationem duas tantum variabiles $r$ et $\varphi$ continentem, quae divisa per $\sin\varphi\,.\cos\varphi$ fit integrabilis; erit enim

$$\frac{r}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{c\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{c\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{b\cos\varphi}{\sin\varphi} + a, \quad \text{ideoque}$$

$$r = c\sin^2\varphi + (b-c)\cos^2\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ponatur $b - c = h$, atque per angulum $\varphi$ omnes quantitates ita determinabuntur, ut sit

$$\sqrt{r} = \cos\varphi\sqrt{(c\,\mathrm{tang}^2\varphi + a\,\mathrm{tang}\,\varphi + h)},$$

$$\sqrt{p} = \frac{\sqrt{c}}{\cos\varphi} + \sin\varphi\sqrt{(c\,\mathrm{tang}^2\varphi + a\,\mathrm{tang}\,\varphi + h)} \quad \text{et}$$

$$x = \frac{2c\,\mathrm{tang}\,\varphi + a + 2\sqrt{(cc\,\mathrm{tang}^2\varphi + ac\,\mathrm{tang}\,\varphi + ch)}}{\cos\varphi}.$$

Ex his colligetur, (Fig. 142.) curvam a corpore descriptam esse parabolam $DAP$, cujus vertex sit in $D$, ex quo si ad horizontem $OF$ perpendiculum $DC$ demittatur, erit $OC = a$, $DC = h$, et distantia foci a vertice $DE = c$. Irrationalitas evanescit, si fuerit $ch = \frac{1}{4}aa$, quo casu parabola per ipsum punctum $O$ transibit.



# VI.

## Dissertation sur le mouvement des corps enfermés dans un tube droit, mobile autour d'un axe fixe.

(Praecedentis commentationis redactio altera et omnino posterior.)

---

§ 1. La matière que je me suis proposé d'éclaircir ici, appartient à une partie de la Mécanique qui est encore presque tout-à-fait inconnue; car il n'y a qu'environ dix ou douze ans, que MM. Bernoulli ont commencé à traiter quelques problèmes de cette nature, et je crois qu'après eux, M. Clairaut et moi, nous sommes encore les seuls qui aient travaillé sur cette matière. Mais, pour donner une idée plus nette tant de la nouveauté que des difficultés de cette nouvelle partie de la Mécanique, on n'aura qu'à faire attention au mouvement des corps sur des plans inclinés ou sur d'autres surfaces qui déterminent le chemin que les corps doivent prendre, quoique la direction des forces mouvantes eût demandé une route tout-à-fait différente. Un corps poussé par la seule pesanteur, étant libre, doit tomber dans une ligne perpendiculaire à l'horizon; un tel corps ne manquera pas de suivre la direction d'un plan incliné sur lequel il serait posé, l'impénétrabilité de ce plan empêchant sa chûte perpendiculaire. Mais ce même corps agit à son tour sur le plan, en le poussant perpendiculairement avec d'autant plus de force, que la direction qu'il doit suivre est différente de celle de la pesanteur; de là vient, qu'à mesure que le plan s'élève au dessus de l'horizon, la pression du corps diminue, et qu'elle s'évanouit tout-à-fait, quand le plan est devenu vertical, parce qu'en ce cas, rien ne résiste plus à l'action de la gravité.

§ 2. Cette pression que le corps exerce sur le plan incliné, se détermine sans aucune difficulté, car elle est toujours au poids entier du corps comme le sinus de l'inclinaison est au sinus total; et quand même le corps serait poussé par plusieurs forces quelconques, il est toujours aisé de déterminer la pression que le plan, ou la surface sur laquelle le corps s'appuie, en souffre, la direction de cette pression étant constamment perpendiculaire à la surface. Mais dans cette question, si aisée à résoudre, on a toujours supposé le plan incliné, ou la surface sur laquelle le corps se meut, fixe et tout-à-fait immobile. Or, supposant le plan incliné mobile, la question changera bientôt de face, et deviendra une des plus difficiles questions de Mécanique, qu'on ait traitées jusqu' ici. C'est de là que le célèbre M. Bernoulli a tiré son premier problème sur cette matière, problème où il demande le mouvement d'un corps qui descend sur un plan incliné mobile, ou qui

peut glisser sur une surface horizontale. Car, parce que le corps presse continuellement le plan incliné, on comprend d'abord, que le plan étant mobile, il doit obéir à cette pression, et glisser selon l'horizon. Mais aussitôt que le plan incliné commence à se mouvoir, la pression du corps diminuera, et par là le mouvement du corps même doit changer. De ce changement résultera une pression diverse sur le plan, laquelle produira tant dans le plan incliné, que dans le corps même continuellement de nouvelles variations qu'on ne saurait déterminer à moins qu'on ne fasse réflexion aux changements qui arrivent à chaque instant et dans la situation et dans la vitesse tant du corps que du plan incliné.

§ 3. M. Bernoulli, le père, à donné de ce problème quelques solutions aussi belles que profondes dans les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg et dans le recueil de tous ses ouvrages, solutions où il s'est servi principalement de deux méthodes différentes, l'une, tirée des premiers principes de la Mécanique, par le moyen desquels on trouve, à chaque instant, le changement tant de la vitesse que de la direction, causé par les forces sollicitantes. L'autre méthode était fondée sur des principes *dérivatifs*, comme la conservation des forces vives et le mouvement uniforme du centre de gravité selon l'horizon; ces principes étant déjà un résultat des principes primitifs appliqués au cas proposé, ne laissent pas de rendre la solution bien plus courte et moins embarassée. Mais la première méthode, bien qu'elle soit beaucoup plus difficile que l'autre, semble pourtant être plus naturelle, parce qu'elle montre à chaque instant, non seulement l'état du mouvement, mais encore les véritables causes de tous les changements qui arrivent successivement. De plus, la première méthode est toujours suffisante pour résoudre toutes les questions, et quoique l'exécution surpasse souvent les forces du calcul, elle fournit pourtant toujours autant d'équations que la solution exige; au lieu que l'autre méthode, qui se fonde sur les deux principes dérivatifs mentionnés ci-dessus, comme elle ne donne que deux équations, elle ne peut aussi être employée que lorsque deux équations suffisent pour la résolution. Par ces raisons, la première méthode, quoique souvent très embarassante, l'emporte beaucoup sur l'autre.

§ 4. Pour résoudre la question de M. Bernoulli, dans laquelle deux choses se trouvent à déterminer, savoir le mouvement du corps et ensuite, le mouvement du plan incliné, la méthode fondée sur les deux principes allégués peut être employée avec beaucoup de succès, et le parfait accord qui se trouve entre cette solution et celle que fournit la première, peut servir à démontrer la justesse de chacune. Mais la considération de ce problème a bientôt produit d'autres questions, bien plus difficiles, lorsqu'on change le mouvement horizontal en un mouvement qui se fait autour d'un axe fixe. Dans ce cas, le principe de la conservation des forces vives retient son mérite; mais celui du mouvement uniforme du centre de gravité devient tout-à-fait inutile; et quoique j'aie découvert un autre principe qu'on peut substituer à celui-là, et que je nomme la conservation du *moment* du mouvement rotatoire, malgré cela, on n'en peut venir à bout que lorsqu'il n'y a que deux mouvements à déterminer. C'est donc pour faire voir la nécessité de remonter aux premiers principes généraux de la Mécanique, que nous nous sommes proposé des questions où il faut déterminer le mouvement de trois ou de plusieurs corps, avant qu'on puisse donner une solution parfaite. Cette recherche étant par elle-même extrêmement difficile, il était convenable d'en séparer toutes les

autres circonstances qui pourraient embrouiller le calcul, afin que, par ce moyen, l'application des principes de la Mécanique devînt plus aisée et plus propre à éclairer une nouvelle partie de cette science.

§ 5. Dans ce nouveau problème, dont j'entreprends ici la solution, on considère un tube droit dans lequel un ou plusieurs corps puissent se mouvoir sans aucune résistance, de sorte que ces corps, demeurant enfermés dans le tube, en suivent partout le mouvement, pendant qu'ils se meuvent le long du tube, selon que les forces sollicitantes l'exigent. Ce tube sera supposé mobile autour d'un axe fixe, perpendiculaire à l'horizon, et passant par l'un de ses bouts; d'où il est clair que le mouvement de ce tube se fera toujours dans un plan horizontal. Nous avons choisi cette situation, pour écarter les effets de la gravité, et partant, tout changement qui arrivera dans le mouvement du tube et des corps y enfermés, viendra uniquement et des pressions que les corps exercent sur le tube, et de celles qu'ils en souffrent réciproquement. Mais avant que de déterminer les mouvements de plusieurs corps enfermés dans un tel tube, je donnerai la solution du problème, où il n'y a qu'un seul corps; cela servira à se former une idée plus claire de la méthode que j'emploirai, et à mieux connaître l'état de la question dont il s'agit, et des difficultés qu'il faudra surmonter.

**Problème I.** *Déterminer le mouvement d'un corps enfermé dans un tube mobile autour d'un axe fixe vertical, après avoir donné un mouvement quelconque tant au tube qu'au corps enfermé.*

§ 6. (Fig. 143.) Que la droite $OF$ représente la position du tube au commencement du mouvement, et que $A$ soit le point où le corps se trouve alors. Dans cet état, le mouvement tant du corps que du tube étant supposé donné, nommons la distance $OA = a$, la longueur du tube $OF = f$, et comme le mouvement du tube est rotatoire autour du point fixe $O$, les vitesses des parties du tube seront entre elles comme leurs distances au point $O$; de sorte que, connaissant la vitesse rotatoire du bout $F$, on connaîtra en même temps la vitesse de tous les autres points. Soit donc la vitesse que le point $F$ a eue au commencement $= \sqrt{g}$, où $g$ signifie la hauteur par laquelle un corps tombant acquiert la même vitesse que nous donnons au point $F$. De là, on tirera la vitesse du point $A = \frac{a\sqrt{g}}{f}$ qui doit être commune au corps enfermé que nous supposons avoir été alors en $A$. Mais le corps peut avoir reçu, outre ce mouvement commun avec le tube, un mouvement particulier selon la direction du tube. Soit donc $\sqrt{\alpha}$ la vitesse que le corps a reçue, au commencement, dans la direction $AF$, outre la vitesse $\frac{a\sqrt{g}}{f}$ qui lui est commune avec le tube. Composant maintenant ces deux mouvements comme à l'ordinaire, on aura le mouvement vrai du corps; donc la vitesse sera $= \sqrt{(\alpha + \frac{aag}{ff})}$, et la direction fera avec $AF$ un angle dont la tangente sera $= \frac{a\sqrt{g}}{f\sqrt{\alpha}}$, supposant, ce que je fais toujours, le sinus total égal à l'unité.

§ 7. Cela posé, on voit aisément que ces deux mouvements doivent être bientôt troublés, car le corps enfermé, s'éloignant du point $O$, acquerra un plus grand mouvement rotatoire, et cette augmentation ne se pourra faire qu'aux dépens du mouvement du tube, de sorte qu'un changement continuel devra nésessairement arriver. Supposons qu'après quelque temps, le tube soit parvenu dans

la situation $OS$, le point $F$ ayant parcouru, dans ce laps de temps, l'arc $FS$ que je nommerai $= s$. A présent, pour résoudre la question, il faut déterminer trois choses: d'abord, la vitesse rotatoire du point $S$, laquelle soit désignée par $\sqrt{u}$; en second lieu, le point $P$ dans le tube, où le corps se trouvera à présent, soit donc $OP = x$; en troisième lieu, on doit assigner la vitesse propre du corps en $P$, vitesse qui le fait avancer ou reculer par rapport au point $O$. Soit cette vitesse du corps, dans la direction du tube $PS$, $= \sqrt{p}$. Il est évident, que quand nous aurons déterminé ces trois inconnues $u$, $x$ et $p$, le problème sera parfaitement résolu.

§ 8. Pour résoudre ce problème, il faut principalement avoir égard à la liaison qui subsiste entre le tube et le corps, parce que le changement qui s'opère dans l'un, est causé par l'autre. Mais d'abord il est clair, que si le tube venait à manquer, le corps, selon la première loi du mouvement, continuerait son cours uniformément dans la même direction; ensuite, si l'on ôtait le corps, le tube devrait conserver pour toujours le même mouvement rotatoire qui lui a été imprimé au commencement. De là on conçoit aisément, que si ces deux mouvements n'étaient point contraires à la liaison entre les deux corps, chacun serait continué à l'infini, sans se troubler l'un l'autre, et partant, qu'il n'arrivera aucun changement, qu'en tant que ces deux mouvements ne sont pas d'accord avec la liaison qui règne entre eux. Car, dans ce cas, l'un ne pouvant continuer sans troubler l'autre, il en résultera une pression par laquelle chacun tendra à entraîner l'autre avec lui, et cette pression, agissant sur l'un et l'autre également, causera un changement dans chacun, jusqu'à ce que les deux mouvements puissent subsister avec la liaison, par laquelle le corps doit toujours rester enfermé dans le tube. C'est donc la pression, qui produit les changements tant dans le tube que dans le corps, et si cette pression était connue, on en pourrait déterminer les changements mêmes par les lois de la Mécanique. Ainsi, tout revient à trouver la grandeur de cette pression qui sera déterminée par son effet même; or, l'effet doit remettre un parfait accord entre l'union de ces deux corps, c'est à dire, que si le corps, en poursuivant son mouvement, venait à s'écarter du tube, l'effet de la pression consistera à les réduire ensemble. Tel sera donc le plan de la méthode dont je me servirai pour résoudre tant ce problème, que l'autre que j'ai principalement en vue.

§ 9. Ayant fait voir que tous les changements sont produits tant par la pression que le corps exerce sur le tube, que par la pression réciproque du tube sur le corps, il faut remarquer, que cette pression est toujours perpendiculaire au tube, ceci étant la seule direction qui retienne le corps. Ensuite, comme l'action est toujours égale et contraire à la réaction, le corps sera poussé du tube par une force égale, mais selon la direction opposée. Soit donc $P$ la force, par laquelle le corps étant en $P$, presse le tube dans la direction perpendiculaire $PM$, et le corps sera repoussé dans la direction opposée $PN$ par la même force $P$. Mais pour déterminer les effets de cette pression, il faut principalement regarder la masse ou l'inertie des corps, par laquelle se détermine l'effet de toutes les forces mouvantes. Ces deux choses étant connues, je nommerai la masse ou la force d'inertie du corps enfermé dans le tube $= A$, et celle du tube $= M$; mais, parce qu'il s'agit de déterminer le mouvement rotatoire du tube, il ne suffit pas d'en savoir la masse, il faut en connaître encore le moment d'inertie que l'on trouve, ainsi que je l'ai expliqué ailleurs, en multipliant chaque particule du corps tournoyant par le carré de sa distance à l'axe de rotation, et en rassem-

blant tous ces produits dans une somme qui pourra être exprimée par la masse entière, multipliée par le carré d'une certaine ligne. Soit donc le moment d'inertie du tube $OF$, par rapport à l'axe $O$, $= Mkk$, où $k$ marque une ligne qui dépend tant de la longueur du tube que de son épaisseur et de sa pesanteur spécifique par toute son étendue.

§ 10. Un corps, dont la masse $= A$, étant poussé par une force $P$, l'accélération ou la retardation qui en est produite, s'exprime par la fraction $\frac{P}{A}$ dont la valeur est toujours un nombre absolu, si l'on mesure la force $P$ par un poids, et pareillement la masse $A$ par le poids qu'une masse égale aurait, étant mise à la surface de la terre. Or, l'effet de cette accélération se manifeste par l'augmentation de la vitesse du corps; de sorte que, si la vitesse du corps est $= \sqrt{v}$, pendant que le corps parcourt l'espace $ds$, on aura toujours $\frac{dv}{ds} = \frac{P}{A}$, pourvu que la direction du mouvement et de la force soit la même. Une telle force accélératrice ferait donc que le corps parcourt un plus grand espace qu'il n'aurait parcouru dans le même temps. Pour déterminer ce surcroît de l'espace parcouru, dans un temps donné que je suppose infiniment petit, on n'a qu'à réfléchir au mouvement également accéléré, et l'on verra aisément que, pendant qu'un espace $ds$ est parcouru d'une vitesse uniforme $\sqrt{c}$, l'accélération $\frac{P}{A}$ fera parcourir au corps l'espace infiniment petit $\frac{Pds^2}{4Ac} = \frac{P}{A} \cdot \frac{ds^2}{4c}$, outre l'espace qu'il devrait achever, dans le même temps, en vertu de son mouvement actuel. De là il est clair que, réciproquement aussi, si ce surcroît de l'espace qu'un corps parcourt dans un temps donné, est $= \frac{P}{A} \cdot \frac{ds^2}{4c}$, alors son accélération sera $= \frac{P}{A}$; d'où l'on tirera $\frac{dv}{ds} = \frac{P}{A}$, pour déterminer le mouvement accéléré de ce corps. Dans ces calculs, il faut bien remarquer que j'exprime toujours les vitesses par les racines carrées des hauteurs desquelles un corps tombant acquiert les mêmes vitesses.

§ 11. Considérons maintenant, de combien le mouvement rotatoire du tube $OS$ doit être accéléré par la pression $P$ qui le pousse selon la direction $PM$. Comme la vitesse du point $S$ est $= \sqrt{u}$, et l'arc $FS$ déjà parcouru $= s$, ce point $S$ décrira, dans un temps infiniment petit $dt$, l'espace $ds$, de sorte qu'on aura $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. Mais l'accélération qui résulte de la pression $P$, fera que le point $S$ parcourra un plus grand espace que $ds$, soit $= Ss$. Pour déterminer cette accélération, il faut prendre le moment de la pression $P$ qui sera $= Px$, lequel multiplié par la distance $OS = f$ et divisé par le moment d'inertie du tube $= Mkk$, donnera l'accélération du point $S$, qui sera par conséquent $= \frac{Pfx}{Mkk}$. Voilà pourquoi, dans ce même temps $dt$ dans lequel le point $S$ décrirait d'un mouvement uniforme l'espace $ds$ avec la vitesse $\sqrt{u}$, il en parcourra un plus grand, surpassant celui-là de la quantité $\frac{Pfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, de sorte que nous aurons $Ss = ds + \frac{Pfxds^2}{4Mkku}$; et comme l'accélération du point $S$ est $= \frac{Pfx}{Mkk}$, nous aurons aussi, pour déterminer le mouvement du tube, cette équation

$$\frac{du}{ds} = \frac{Pfx}{Mkk}, \text{ ou bien } du = \frac{Pfxds}{Mkk};$$

or ni la valeur de $P$ ni celle de $x$ n'étant connues, cette équation ne nous donne encore aucun résultat.

§ 12. Considérons à présent le corps $A$ qui se trouve en $P$, et dans lequel nous concevons un double mouvement, l'un, dans la direction $PS$ avec la vitesse $= \sqrt{p}$, et l'autre qui lui est commun avec le tube et dont la vitesse sera, par conséquent, $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, selon la direction $PM$. Comme ce corps n'est sollicité que par la pression $P$ dans la direction $PN$, il s'en suit que par là le dernier mouvement seul sera troublé et retardé. Par cette raison, le même temps $dt$, dans lequel l'espace $ds$ est parcouru avec la vitesse $\sqrt{u}$, est nécessaire pour que le corps, en vertu de son premier mouvement, achève l'espace $P\pi = \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}}$, lequel étant $= dx$, nous aurons cette équation

$$\frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}} = dt.$$

Le corps étant donc parvenu en $\pi$, l'autre mouvement, s'il n'était pas retardé par la pression $P$, lui ferait parcourir l'espace $\frac{xds}{f}$, dans la direction $\pi p$ perpendiculaire à $OS$; mais la retardation de cette force $P$ étant $= \frac{P}{A}$, l'espace $\frac{xds}{f}$ sera diminué de la particule $\frac{P}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, de sorte que l'espace parcouru sera $\pi p = \frac{xds}{f} - \frac{Pds^2}{4Au}$, et par conséquent, dans l'instant $dt$ le corps sera transporté de $P$ en $p$, et ce point $p$ doit être situé dans le tube $Os$; d'où nous pourrons tirer une équation qui fera connaître la quantité de la pression $P$. Car les triangles semblables $OSs$, $O\pi p$ fournissent cette proportion

$$OS : Ss = O\pi : \pi p$$

c'est à dire:

$$f : ds + \frac{Pfxds^2}{4Mkku} = x + \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}} : \frac{xds}{f} - \frac{Pds^2}{4Au}$$

d'où résulte, en rejetant les termes qui par rapport aux autres s'évanouissent, l'équation suivante:

$$\frac{Pfxxds^2}{4Mkku} + \frac{ds^2\sqrt{p}}{\sqrt{u}} = -\frac{Pfds^2}{4Au}$$

et celle-ci donnera $P = \frac{-4AMkk\sqrt{pu}}{f(Axx + Mkk)}$; ce qui marque que la pression est négative, ou que le corps presse le tube dans la direction $PN$, et qu'il en est repoussé dans la direction $PM$.

§ 13. Le corps étant parvenu en $p$, sera éloigné du point fixe $O$ de l'intervalle $Op$, au lieu que, sans le mouvement rotatoire, sa distance serait $= O\pi$. Mais il est clair que $Op$ étant l'hypoténuse du triangle $O\pi p$, rectangle en $\pi$, elle sera plus grande que $O\pi$, et il y aura

$$Op = \sqrt{(O\pi^2 + \pi p^2)},$$

et parce que $\pi p$ est infiniment petit par rapport à $O\pi$, nous aurons $Op = O\pi + \frac{\pi p^2}{2O\pi}$, ou bien

$$Op - O\pi = \frac{\pi p^2}{2O\pi} = \frac{xds^2}{2ff},$$

ce qui nous marque l'espace que le corps parcourt dans le tube, outre l'espace $P\pi = \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}}$ qu'il parcourrait en vertu de son mouvement. Divisons donc cet espace $\frac{xds^2}{2ff}$ par $\frac{ds^2}{4u}$, et nous obtiendrons l'accélération requise pour ce surcroît de l'espace parcouru, laquelle sera $= \frac{2xu}{ff}$. D'où il suit que, pendant que le corps parcourt dans le tube l'espace $P\pi = dx$ avec sa vitesse $\sqrt{p}$, son mouvement sera accéléré en sorte, qu'il y aura $\frac{dp}{dx} = \frac{2xu}{ff}$. Mais ayant déterminé la pression $P$, nous aurons aussi pour l'accélération du tube, ou plutôt pour sa retardation, cette équation

$$du = \frac{-4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}.$$

§ 14. En rassemblant tout ce que nous venons de trouver, nous obtiendrons les trois équations suivantes

$$\text{I.}\quad \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}},$$

$$\text{II.}\quad dp = \frac{2uxdx}{ff},$$

$$\text{III.}\quad du = \frac{-4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}.$$

Or, comme nous n'avons que quatre quantités inconnues ou variables: $p$, $u$, $x$ et $s$, ces trois équations trouvées suffiront pour déterminer le rapport entre ces quatre quantités, et par conséquent, on en pourra, pour chaque valeur de l'une, assigner les trois autres, ce que demande la solution du problème proposé. Si nous voulons introduire la cinquième inconnue $t$, pour marquer le temps écoulé, pendant que le tube est parvenu de sa première place $OF$ en $OS$, nous aurons aussi une quatrième équation $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, ou $dt = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, et nous pourrons, par la résolution de ces quatre équations, à chaque instant déterminer 1. la situation du tube, ou l'arc $FS = s$; 2. sa vitesse rotatoire $= \sqrt{u}$; 3. le point du tube où se trouvera le corps enfermé, ou l'espace $OP = x$, et 4. enfin, la vitesse du corps le long du tube, qui est $= \sqrt{p}$. Outre cela, ayant trouvé ces quatre choses, nous en pourrons aussi déterminer la pression entre le corps et le tube, qui sera $= \frac{4AMkk\sqrt{pu}}{f(Axx + Mkk)}$, et partant le problème sera parfaitement résolu.

§ 15. Tout revient donc à la résolution des trois équations différentielles que nous venons de trouver. Mais il se trouve dans chacune plusieurs variables; il faut donc tâcher d'en réduire le nombre à deux seulement, ou d'en former une équation qui soit intégrable. Or, dans le cas proposé, l'un et l'autre peut se faire; car la première équation donnant $ds\sqrt{p} = dx\sqrt{u}$, si nous substituons cette valeur dans la troisième équation, nous aurons

$$du = \frac{-4Auxdx}{Axx + Mkk}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{du}{u} + \frac{4Axdx}{Axx + Mkk} = 0,$$

dont l'intégrale est: $lu + 2l(Axx + Mkk) = l\,\text{Const.}$, ou $u(Axx + Mkk)^2 = \text{Const.}$ Mais $u$ devenant dès le commencement $= g$ et $x = a$, cette constante sera $= g(Aaa + Mkk)^2$, et par conséquent, nous aurons cette équation qui exprime le rapport entre $u$ et $x$:

$$u = \frac{g(Aaa + Mkk)^2}{(Axx + Mkk)^2},$$

qui donne cette proportion $\sqrt{u} : \sqrt{g} = Aaa + Mkk : Axx + Mkk.$

§ 16. L'équation différentielle $du = -\frac{4Auxdx}{Axx + Mkk}$ délivrée des fractions, donnera

$$Axxdu + Mkkdu + 4Auxdx = 0.$$

Mais la seconde équation $dp = \frac{2uxdx}{ff}$ se change en celle-ci $Affdp - 2Auxdx = 0$, laquelle étant ajoutée à la précédente donnera

$$Affdp + Mkkdu + Axxdu + 2Auxdx = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$Affp + Mkku + Axxu = \text{Const.}$$

*

Or cette équation rapportée à l'état que nous avons supposé au commencement, où l'on avait $p = \alpha$, $x = a$ et $u = g$, donnera la valeur de la constante $= Aff\alpha + Mkkg + Aaag$, de sorte que nous aurons

$$Affp + (Mkk + Axx)u = Aff\alpha + (Mkk + Aaa)g.$$

Mais ayant trouvé $u = \frac{g(Aaa + Mkk)^2}{(Axx + Mkk)^2}$, nous obtiendrons

$$p = \alpha + \frac{(Aaa + Mkk)g}{Aff} - \frac{(Aaa + Mkk)^2 g}{Aff(Axx + Mkk)}, \text{ ou bien } p = \alpha + \frac{g(Aaa + Mkk)(xx - aa)}{ff(Axx + Mkk)};$$

de sorte que nous avons déjà exprimé les deux vitesses $\sqrt{u}$ et $\sqrt{p}$ par la seule variable $OP = x$.

§ 17. Maintenant il sera aisé de déterminer aussi les autres variables $s$ et $t$ par la même $x$. Car, ayant par la première équation $\frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, ou $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}}$, en mettant pour $\sqrt{u}$ et $\sqrt{p}$ les valeurs trouvées, nous aurons l'équation suivante

$$ds = \frac{(Aaa + Mkk)fdx\sqrt{g}}{\sqrt{(Axx + Mkk)(aff(Axx + Mkk) + g(xx - aa)(Aaa + Mkk))}},$$

d'où l'arc $FS = s$ pourra être déterminé par $x$, moyennant la quadrature d'une courbe, et de cette construction on pourra réciproquement tirer la valeur de $x$, celle de $s$ étant connue. Pour ce qui concerne le temps $t$, pendant lequel le tube est parvenu de $OF$ en $OS$, on le déduira de l'équation $dt = \frac{dx}{\sqrt{p}}$, ou $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, qui donne

$$dt = \frac{fdx\sqrt{(Axx + Mkk)}}{\sqrt{(aff(Axx + Mkk) + g(xx - aa)(Aaa + Mkk))}}.$$

Si l'on demande la nature de la courbe $AP$ que le corps décrit par son mouvement vrai, elle est exprimée par l'équation trouvée entre $x$ et $s$ qui est

$$\frac{ds}{f} = \frac{(Aaa + Mkk)dx\sqrt{g}}{\sqrt{(Axx + Mkk)(aff(Axx + Mkk) + g(xx - aa)(Aaa + Mkk))}};$$

car $\frac{ds}{f}$ est l'élément de l'angle $AOP$, de sorte que nous avons une équation entre la distance $OP = x$ et l'angle $AOP = \frac{s}{f}$.

§ 18. Avant que de passer outre, remarquons dans cette solution les deux principes dont nous avons fait mention au commencement, savoir, la conservation des forces vives et celle du moment du mouvement rotatoire. Ces deux principes sont contenus dans les deux équations intégrales, trouvées aux §§ 15 et 16; car la première $u(Axx + Mkk)^2 = \text{Const.}$ montre que cette expression $\frac{Axx\sqrt{u}}{f} + \frac{Mkk\sqrt{u}}{f}$ demeure toujours la même. Mais $\frac{x\sqrt{u}}{f}$ marque la vitesse rotatoire du corps en $P$, d'où il s'ensuit que $\frac{Ax\sqrt{u}}{f}$ sera son mouvement rotatoire qui, multiplié par $x$ à la manière dont on prend les moments, donnera le moment du mouvement rotatoire du corps $= \frac{Axx\sqrt{u}}{f}$. Par un semblable raisonnement, on verra que $\frac{Mkk\sqrt{u}}{f}$ est le moment du mouvement rotatoire du tube, et par conséquent, on doit accorder que la somme de ces deux moments demeure toujours la même. Pareillement, l'autre équation intégrale trouvée, étant réduite à cette forme

$$Ap + \frac{Axxu}{ff} + \frac{Mkku}{ff} = \text{Const.}$$

marque la conservation des forces vives. Car le corps $A$ ayant en $P$ un double mouvement dont les directions sont perpendiculaires entre elles, la vitesse de l'un étant $=\sqrt{p}$, et de l'autre $=\frac{x\sqrt{u}}{f}$, la véritable vitesse du corps sera $=\sqrt{(p+\frac{xxu}{ff})}$, et partant le carré de sa vitesse $=p+\frac{xxu}{ff}$ qui, multiplié par la masse du corps $A$, donnera sa force vive $=Ap+\frac{Axxu}{ff}$. Ensuite, $\frac{Mkhu}{ff}$ exprime la force vive du tube, d'où il suit que, pour la somme des forces vives, il revient toujours la même quantité.

§ 19. La vérité de ces deux principes étant démontrée, au moins dans le cas dont il s'agit ici, on verra aisément, que la solution du problème proposé aurait été abrégée de beaucoup, si nous nous étions servis de ces deux principes dès le commencement, car c'est ordinairement le choix et l'emploi de pareils principes *dérivatifs*, qui rend les solutions des problèmes, d'ailleurs les plus difficiles, si courtes et si élégantes. Mais ce même choix demande aussi une très grande adresse et une profonde connaissance de la matière en question, afin qu'on ne se précipite pas en se servant de principes qui ne peuvent pas avoir lieu dans le cas proposé. Mais supposons, qu'on ait eu des raisons assez convaincantes pour s'assurer de la vérité des deux principes mentionnés, il est évident qu'on aurait pu se passer de tous les raisonnements et calculs qui ont précédé les deux intégrations faites aux §§ 15 et 16, car ces deux principes auraient immédiatement fourni les mêmes équations déjà intégrées, savoir:

$$\frac{Axx\sqrt{u}}{f}+\frac{Mkk\sqrt{u}}{f}=\text{Const.}=\frac{Aaa\sqrt{g}}{f}+\frac{Mkk\sqrt{g}}{f}$$

$$Ap+\frac{Axxu}{ff}+\frac{Mkku}{ff}=\text{Const.}=A\alpha+\frac{Aaag}{ff}+\frac{Mkkg}{ff},$$

lesquelles étant combinées avec l'équation $dt=\frac{ds}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{\sqrt{p}}$, qui suit immédiatement de la considération même du mouvement, auraient d'abord donné la solution trouvée avec assez d'embarras.

§ 20. Pour mieux éclaircir la solution que nous avons trouvée, et pour en prouver la justesse, nous l'appliquerons à deux cas particuliers. Dans l'un de ces cas, nous supposerons la masse du corps enfermé nulle, et dans l'autre, celle du tube. Soit donc, pour développer le premier cas, $A=0$, et l'équation trouvée au § 15 se changera en celle-ci: $u=g$, qui fait voir, que le mouvement rotatoire du tube sera uniforme; ce qu'on aurait pu d'abord prévoir sans aucun calcul; car la masse du corps enfermé s'évanouissant, le tube se mouvra comme s'il n'y avait pas du tout de corps enfermé, et partant, par la première loi du mouvement, il continuera à se tourner autour de l'axe $O$ avec un mouvement uniforme. Mais le mouvement du corps $A$, quoique évanouissant, n'est pas si aisé à prévoir. L'équation du § 16 donnera pour ce cas $p=\alpha+\frac{g(xx-aa)}{ff}$; ensuite on aura

$$ds=\frac{fdx\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ff+g(xx-aa))}}=\frac{fdx\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ff-gaa+gxx)}}.$$

Soit $\frac{\alpha}{g}ff-aa=\pm hh$, selon que $\frac{\alpha}{g}ff$ surpasse $aa$, ou qu'il en soit surpassé, et nous aurons cette équation

$$\frac{ds}{f} = \frac{dx}{\sqrt{(xx \pm hh)}}$$

dont l'intégrale prise par le moyen des logarithmes sera

$$\frac{s}{f} = l \cdot \frac{x + \sqrt{(xx \pm hh)}}{a + f\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

en ajoutant une constante qui rende $x = a$, lorsque $s = 0$.

§ 21. On pourra donc, à l'aide des logarithmes, trouver $s$ par $x$; mais comme l'arc $s$ se décrit d'un mouvement uniforme, il conviendra mieux de déterminer $x$ par $s$. A cet effet, soit $e$ le nombre qui ait l'unité pour son logarithme hyperbolique, et l'on aura en passant aux nombres: $x + \sqrt{(xx \pm hh)} = (a + f\sqrt{\frac{a}{g}})e^{s:f}$, ce qui donne $x = \frac{1}{2}(a + f\sqrt{\frac{a}{g}})e^{s:f} + \frac{1}{2}(a - f\sqrt{\frac{a}{g}})e^{-s:f}$ après avoir restitué à la place de $\pm hh$ sa valeur $\frac{a}{g}ff - aa$. Cette expression se construit aisément par une spirale logarithmique, décrite autour du pôle $O$ et coupée par les rayons sous l'angle demi-droit. Cette construction donnera en même temps le chemin $AP$ que le corps parcourt de son vrai mouvement, dont voici la construction: Soit (Fig. 144) $VFW$ une telle spirale semi-rectangulaire passant par le point $F$, et désignant, comme par le passé, l'arc circulaire $FS = s$, soit $OV = z$, et ayant tiré le rayon infiniment proche $Osv$, nous aurons $Vu = vu = dz$ et $ds:f = dz:z$, ce qui donne

$$\frac{dz}{z} = \frac{ds}{f}, \quad lz = \frac{s}{f} \quad \text{et enfin} \quad z = fe^{s:f} = OV.$$

Si de l'autre côté du point $F$, nous prenons $FT = FS$, nous aurons $OW = fe^{-s:f}$; puis, portant $OW$ sur $OX$ et coupant $VX$ en deux parties égales au point $Y$, il y aura

$$VY = XY = \frac{1}{2}f(e^{s:f} - e^{-s:f}) \quad \text{et} \quad OX + XY = OY = \frac{1}{2}f(e^{s:f} + e^{-s:f}).$$

Or nous avons trouvé pour $x$ la valeur suivante

$$x = \frac{1}{2}a(e^{s:f} + e^{-s:f}) + \frac{1}{2}f\sqrt{\frac{a}{g}}(e^{s:f} - e^{-s:f})$$

d'où nous tirons cette expression $\quad x = \frac{a}{f} \cdot OY + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot VY.$

Prenant donc $OP = \frac{a}{f} \cdot OY + \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot VY$, le point $P$ sera dans la courbe cherchée $AP$. Si la vitesse $\sqrt{a}$ était $= 0$, la courbe serait perpendiculaire à $OF$ au point $A$, et sa construction deviendrait plus simple, car on n'aurait qu'à tirer par $A$ une droite parallèle à $FY$, et elle couperait le rayon $OS$ au point cherché $P$.

§ 22. Passons à présent à l'autre cas, et supposons que la masse du tube s'évanouisse, de sorte que $Mkk$ soit $= 0$. Dans ce cas, il est d'abord clair que, parce que le tube n'a aucune force à opposer au mouvement du corps enfermé, il lui obéira sans la moindre résistance, et par conséquent, le corps se mouvra, tout comme s'il était libre, c'est à dire, il marchera dans une ligne droite gardant toujours sa première vitesse. Cette conséquence, quoique d'elle-même très claire, ne se déduit point pourtant si aisément des équations que nous avons trouvées. Car, premièrement posant $M = 0$, nous aurons

$$u = \frac{a^4 g}{x^4}, \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{g}} = \frac{aa}{xx}, \quad \text{et} \quad p = \alpha + \frac{aag(xx - aa)}{ffxx},$$

$$\text{et ensuite} \quad ds = \frac{aa f dx \sqrt{g}}{x\sqrt{(\alpha ffxx + aag(xx - aa))}} = Ss \text{ (Fig. 143.)}$$

de là s'ensuit

$$p\pi = \frac{xds}{f} = \frac{aadx\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ffxx + aag(xx - aa))}} \quad \text{et partant} \quad \frac{p\pi}{P\pi} = \frac{aa\sqrt{g}}{\sqrt{(xx(\alpha ff + aag) - a^4 g)}} = \text{tang}\, pP\pi$$

d'où le sinus de l'angle $pP\pi$ ou $OPA$ sera $= \frac{aa\sqrt{g}}{x\sqrt{(\alpha ff + aag)}}$, et si l'on tire une tangente au point $P$, la perpendiculaire abaissée du point $O$ sur cette tangente sera $= \frac{aa\sqrt{g}}{\sqrt{(\alpha ff + aag)}}$ laquelle ayant une valeur constante, marque que la ligne $AP$ est droite. De plus, la vitesse réelle du corps étant $= \sqrt{(p + \frac{xxu}{ff})}$, elle deviendra, dans ce cas ci, $= \sqrt{(\alpha + \frac{aag}{ff})}$, et par conséquent aussi constante, comme nous venons d'avancer.

§ 23. J'ai développé tout au long la solution de ce problème, pour mettre dans son plein jour les principes dont je me suis servi et que j'emploirai dans la résolution du problème suivant. Ce problème ne différera du premier qu'en ce que je supposerai plusieurs corps enfermés dans le tube. Or comme le problème précédent demandait deux équations à résoudre, sans compter celles que la considération du mouvement fournit immédiatement; ainsi deux corps enfermés dans le tube demanderont trois équations; trois corps, quatre équations, et ainsi de suite. De là il est clair que, quoiqu'on puisse ici également employer les deux principes décrits ci-dessus, pourtant ils ne seront pas suffisants pour résoudre la question, par la raison qu'ils ne fournissent que deux équations. C'est pourquoi nous serons obligés de nous servir d'une méthode tout à fait différente, pour tirer des équations que nous obtiendrons, une solution parfaite, laquelle étant presque en tout nouvelle, pourra apporter un grand avantage dans d'autres questions semblables, et même étendre les forces de l'analyse. Je bornerai le problème à trois corps; mais on verra d'abord que la même méthode réussira pour tout nombre plus grand quelconque.

**Problème II.** *Déterminer le mouvement de trois corps enfermés dans un tube mobile autour d'un axe fixe vertical, après avoir imprimé des mouvements quelconques tant au tube qu'aux corps enfermés en dedans.*

§ 24. (Fig. 145.) Pour nous représenter l'état du commencement, supposons que le tube fut alors en $OF$, et les trois corps enfermés en $A$, $B$, $C$, et que ces mêmes lettres $A$, $B$, $C$ expriment les masses ou inerties de ces trois corps. Soit la masse du tube, comme auparavant, $= M$, et son moment d'inertie $= Mkk$, pris par rapport à l'axe $O$ autour duquel ce tube est mobile. Ensuite, je nommerai les distances $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$ et la longueur du tube $OF = f$. Soit la vitesse rotatoire du point $F = \sqrt{g}$, et celle du point $A$ sera $= \frac{a\sqrt{g}}{f}$, du point $B = \frac{b\sqrt{g}}{f}$, et du point $C = \frac{c\sqrt{g}}{f}$. Outre ces vitesses qui sont communes aux corps ainsi qu'au tube, chacun a reçu un mouvement particulier dans la direction du tube $OF$. Soit donc la vitesse du corps $A = \sqrt{\alpha}$, celle du corps $B = \sqrt{\beta}$, et celle du corps $C = \sqrt{\gamma}$. Toutes ces quantités sont connues, parce qu'elles

déterminent l'état où le tube avec les trois corps s'est trouvé au commencement du mouvement, et pour résoudre parfaitement la question, il faudra, au moyen de ces données, déterminer, pour chaque moment voulu, tant la situation du tube avec les corps, que leurs mouvements.

§ 25. Supposons qu'après un temps écoulé quelconque $t$, le tube soit parvenu en $OS$, ayant décrit par son bout $F$ l'arc $FS = s$, et soit maintenant la vitesse du point $S = \sqrt{u}$, de sorte que l'élément du temps $dt$ soit exprimé par $\frac{ds}{\sqrt{u}}$. Que les trois corps enfermés se trouvent à présent aux points $P$, $Q$, $R$, et désignons les distances $OP$ par $x$, $OQ$ par $y$ et $OR$ par $z$; nous en tirerons d'abord les vitesses rotatoires, car celle du corps en $P$ sera $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, en $Q = \frac{y\sqrt{u}}{f}$, et en $R = \frac{z\sqrt{u}}{f}$. Enfin, soient les vitesses propres à chaque corps dans le tube

celle du premier corps en $P = \sqrt{p}$
du second en $Q = \sqrt{q}$
du troisième en $R = \sqrt{r}$.

La considération du mouvement nous fournit à présent d'abord les équations suivantes

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{p}}, \quad dt = \frac{dy}{\sqrt{q}}, \quad dt = \frac{dz}{\sqrt{r}}.$$

Or, ci-dessus nous avons trouvé $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, de sorte que nous avons déjà quatre équations. Cependant le nombre des quantités inconnues ou variables: $t$, $s$, $u$, $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$ se monte à neuf; il nous faut, en conséquence, encore quatre équations pour la solution du problème.

§ 26. Comme tout changement qui s'opère dans ces mouvements, vient uniquement des pressions avec lesquelles les corps poussent le tube, et en sont également repoussés, il faut avant toutes choses, déterminer ces pressions. Désignons les par les mêmes lettres qui, dans la figure marquent leurs lieux respectifs, c'est à dire, soit

la pression du corps en $P = P$
celle du corps en $Q = Q$
et celle du corps en $R = R$

et concevons que, par l'effet de ces pressions, le tube est repoussé ou retardé, et que partant le mouvement rotatoire de chaque corps est accéléré. En tant que ces pressions agissent sur le tube, il en faut considérer le moment qui sera $= Px + Qy + Rz$, d'où résulte la retardation du tube au point $S = \frac{(Px + Qy + Rz)f}{Mkk}$, et par conséquent, pendant que le point $S$ parcourt l'espace $ds$, sa retardation sera exprimée par cette équation

$$du = -\frac{(Px + Qy + Rz)f ds}{Mkk}.$$

Or, le point $S$ qui, sans cette retardation, aurait parcouru, de son mouvement uniforme $\sqrt{u}$, l'espace $ds$, parcourra à présent un espace moindre

$$Ss = ds - \frac{f(Px + Qy + Rz)}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u},$$

et dans cet instant $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$, le tube parviendra de $OS$ en $Os$. Par cette raison, les trois corps aussi devront se trouver, au même instant, dans la ligne $Os$, et cette considération nous conduira à la détermination de la quantité des pressions $P$, $Q$, $R$.

§ 27. Les pressions ne changeant point les mouvements des corps dans la direction du tube, le corps $A$ parcourra dans le tube l'espace $P\pi = \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}}$, le corps $B$ l'espace $Q\xi = \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{u}}$, et le corps $C$ l'espace $R\varrho = \frac{ds\sqrt{r}}{\sqrt{u}}$, tous dans le temps infiniment petit $dt = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. C'est donc le mouvement des corps qui se fait dans la direction perpendiculaire à celle du tube $OS$, qui sera accéléré par les pressions. Ainsi, le corps $A$ en $P$, qui devrait, selon cette direction, faire l'espace $= \frac{xds}{f}$, en fera un plus grand $\pi p = \frac{xds}{f} + \frac{P}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, ainsi que nous l'avons vu dans la solution précédente. Pareillement, le corps $B$ sera transporté de $\xi$ en $q$, de sorte que $\xi q = \frac{yds}{f} + \frac{Q}{B} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, et le corps $C$ parcourra l'espace $\varrho r = \frac{zds}{f} + \frac{R}{C} \cdot \frac{ds^2}{4u}$. Maintenant les points $p$, $q$, $r$, où les trois corps sont transportés, devant se trouver dans la droite $Os$, les triangles semblables $OSs$, $O\pi p$, $O\xi q$, $O\varrho r$ donneront les proportions suivantes:

$$f : ds - \frac{fds^2(Px + Qy + Rz)}{4Mkku} = x + \frac{ds\sqrt{p}}{\sqrt{u}} : \frac{xds}{f} + \frac{Pds^2}{4Au}$$

$$f : ds - \frac{fds^2(Px + Qy + Rz)}{4Mkku} = y + \frac{ds\sqrt{q}}{\sqrt{u}} : \frac{yds}{f} + \frac{Qds^2}{4Bu}$$

$$f : ds - \frac{fds^2(Px + Qy + Rz)}{4Mkku} = z + \frac{ds\sqrt{r}}{\sqrt{u}} : \frac{zds}{f} + \frac{Rds^2}{4Cu}.$$

Supposons, pour abréger, $\frac{f(Px + Qy + Rz)}{Mkk} = V$, et nous obtiendrons les équations suivantes

$$\frac{Pf}{4Au} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{u}} - \frac{Vx}{4u}$$

$$\frac{Qf}{4Bu} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{u}} - \frac{Vy}{4u}$$

$$\frac{Rf}{4Cu} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{u}} - \frac{Vz}{4u}.$$

§ 28. Par le moyen de ces équations, nous aurons les expressions suivantes pour les valeurs de $P$, $Q$, $R$:

$$P = \frac{4A\sqrt{pu}}{f} - \frac{AVx}{f},\quad Q = \frac{4B\sqrt{qu}}{f} - \frac{BVy}{f},\quad R = \frac{4C\sqrt{ru}}{f} - \frac{CVz}{f}.$$

Mais ayant supposé $V = f\frac{(Px + Qy + Rz)}{Mkk}$, nous aurons $Px + Qy + Rz = \frac{MkkV}{f}$, équation qui, si nous y substituons pour $P$, $Q$, $R$, les valeurs trouvées, nous donne

$$\frac{4Ax\sqrt{pu}}{f} + \frac{4By\sqrt{qu}}{f} + \frac{4Cz\sqrt{ru}}{f} - \frac{V}{f}(Axx + Byy + Czz) = \frac{V}{f} \cdot Mkk$$

d'où l'on tire $$V = \frac{4(Ax\sqrt{p} + By\sqrt{q} + Cz\sqrt{r})\sqrt{u}}{Axx + Byy + Czz + Mkk}.$$

Cette valeur substituée dans les équations trouvées ci-dessus, nous fournira les valeurs des véritables pressions $P$, $Q$ et $R$. Reprenons donc l'équation trouvée là-haut

$$du = -\frac{f(Px + Qy + Rz)\,ds}{Mkk}, \text{ ou bien celle-ci } du = -Vds;$$

en remettant pour $V$ sa valeur trouvée, nous aurons cette équation

$$du = -\frac{4(Ax\sqrt{p} + By\sqrt{q} + Cz\sqrt{r})\,ds\sqrt{u}}{Axx + Byy + Czz + Mkk}.$$

Or les équations trouvées au § 25 donnent

$$ds\sqrt{p} = dx\sqrt{u}, \quad ds\sqrt{q} = dy\sqrt{u}, \quad ds\sqrt{r} = dz\sqrt{u},$$

par le moyen desquelles la valeur de $du$ s'exprimera ainsi qu'il suit

$$du = -\frac{4u(Ax\,dx + By\,dy + Cz\,dz)}{Axx + Byy + Czz + Mkk}$$

dont l'intégrale sera: $u(Axx + Byy + Czz + Mkk)^2 = \text{Const.}$

Or cette constante doit être déterminée par l'état du commencement où $u$ se change en $g$, $x$ en $a$, $y$ en $b$, et $z$ en $c$, de sorte que nous aurons cette équation

$$u(Axx + Byy + Czz + Mkk)^2 = g(Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)^2$$

qui renferme la conservation du moment du mouvement rotatoire, ainsi que nous l'avons fait voir ci-dessus (§ 18).

§ 29. S'il n'y avait pas de mouvement rotatoire, les corps $A$, $B$, $C$ parviendraient, dans l'instant $dt$, aux points $\pi$, $\xi$ et $\varrho$; mais à présent, à cause du mouvement rotatoire, ils se trouvent aux points $p$, $q$ et $r$ qui sont plus éloignés d'$O$ que les autres, et par cette raison, le mouvement des corps dans le tube recevra quelque accroissement. Ainsi, le surcroît de l'espace que le corps $A$ parcourt dans le tube, sera $= Op - O\pi = \frac{p\pi^2}{2O\pi}$, ce qui donne $\frac{x\,ds^2}{2ff}$. Mais ce surcroît divisé par $\frac{ds^2}{4u}$ donnera l'accélération du corps $A$ dans la direction du tube, qui sera $= \frac{2ux}{ff}$. La vitesse $\sqrt{p}$ sera donc augmentée, de sorte qu'on aura $dp = \frac{2ux\,dx}{ff}$. De la même manière on trouvera, pour les deux autres corps, les accélérations suivantes $dq = \frac{2uy\,dy}{ff}$ et $dr = \frac{2uz\,dz}{ff}$. Rassemblons maintenant toutes les équations que nous venons de trouver, et nous aurons les sept équations suivantes:

$$\text{I. } \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}, \quad \text{II. } \frac{dy}{\sqrt{q}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}, \quad \text{III. } \frac{dz}{\sqrt{r}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}, \quad \text{IV. } dp = \frac{2ux\,dx}{ff}, \quad \text{V. } dq = \frac{2uy\,dy}{ff}, \quad \text{VI. } dr = \frac{2uz\,dz}{ff},$$

$$\text{VII. } (Axx + Byy + Czz + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g},$$

qui seront suffisantes pour déterminer le rapport entre les huit quantités variables $s$, $u$, $x$, $p$, $y$, $q$, $z$, $r$ qui y entrent.

§ 30. Comme toutes ces équations, excepté la dernière, sont différentielles, on comprendra aisément, qu'il doit être extrêmement difficile de parvenir à une équation qui ne contienne que deux

variables. Et quand même on pourrait surmonter toutes les difficultés, qu'on rencontre dans ce cas de trois corps, en suivant les règles ordinaires de l'élimination, on sera pourtant obligé d'avouer qu'une pareille opération doit devenir tout à fait impossible, si le nombre des corps était plus grand. Il est vrai cependant, qu'on peut trouver encore une équation intégrale qui comprenne la conservation des forces vives et qu'on obtiendra de la manière suivante. L'équation différentielle, d'où nous avons tiré la valeur de $u$, se réduit à cette forme

$$Axxdu + Byydu + Czzdu + Mkkdu + 4Auxdx + 4Buydy + 4Cuzdz = 0;$$

mais les équations IV, V et VI donnent

$$Affdp - 2Auxdx = 0, \quad Bffdq - 2Buydy = 0, \quad Cffdr - 2Cuzdz = 0,$$

équations qui, étant ajoutées à celle là, produiront cette somme

$$Affdp + Bffdq + Cffdr + Axxdu + Byydu + Czzdu + Mkkdu + 2Auxdx + 2Buydy + 2Cuzdz = 0$$

dont l'intégrale appliquée au cas proposé sera

$$Affp + Bffq + Cffr + Axxu + Byyu + Czzu + Mkku = Aff\alpha + Bff\beta + Cff\gamma + Aaag + Bbbg + Cccg + Mkkg$$

laquelle, étant divisée par $ff$, montre évidemment la conservation des forces vives. Mais de cette équation, quoique intégrale, nous ne tirerons presque aucun avantage; car quand même nous voudrions, par le moyen de ces deux équations intégrales, éliminer deux variables, le calcul deviendrait si embrouillé et si pénible que personne ne pourrait le développer ni le subir.

§ 31. Il nous faudra donc chercher un chemin qui ne soit troublé ni par d'inextricables calculs, ni même par un plus grand nombre de corps contenus dans le tube. A cet effet, des six équations premières je joindrai ensemble deux à deux, savoir la I et IV, la II et V, la III et VI, et par cette combinaison, je pourrai éliminer les quantités $p$, $q$, $r$. La première équation donne $p = \frac{udx^2}{ds^2}$, d'où, en supposant l'élément $ds$ constant, nous tirerons

$$dp = \frac{dx^2du}{ds^2} + \frac{2udxddx}{ds^2};$$

or la quatrième équation donne $dp = \frac{2uxdx}{ff}$; par conséquent, nous en obtiendrons l'équation suivante

$$\frac{2ux}{ff} = \frac{dudx}{ds^2} + \frac{2uddx}{ds^2}, \quad \text{ou bien celle-ci} \quad \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2}.$$

Par la même méthode, nous réduirons les équations II et V, en éliminant la lettre $q$, à celle-ci

$$\frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2},$$

et les deux équations III et VI donneront

$$\frac{z}{ff} = \frac{ddz}{ds^2} + \frac{dudz}{2uds^2}.$$

Voilà donc les six équations réduites à trois qui, conjointement avec la septième, renferment la

*

solution du problème proposé: car à présent nous n'avons plus que cinq quantités inconnues: $x$, $y$, $z$, $u$, $s$ à déterminer.

§ 32. Quoique ces trois équations que nous venons de trouver, soient différentielles du second degré, pourtant chacune ne contient que trois variables, et ce qui est principalement à remarquer, elles sont tout-à-fait semblables entre elles, et cette même ressemblance nous ouvrira un chemin pour parvenir à la solution que nous cherchons. En considérant les trois équations différentielles du second degré qui sont:

$$\text{I. } \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2}, \quad \text{II. } \frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2}, \quad \text{III. } \frac{z}{ff} = \frac{ddz}{ds^2} + \frac{dudz}{2uds^2},$$

il est d'abord clair, que si nous avions la résolution de l'une, nous ne manquerions pas de connaître les deux autres. Car supposons que la valeur de $x$ nous soit connue, et l'on verra sans aucune difficulté, qu'on satisfera aux deux autres équations en prenant $y$ et $z$ ou égales à $x$, ou en une raison constante à la même $x$. Car posant $y = mx$ et $z = nx$, la seconde et la troisième équations se réduiront à la première.

§ 33. Supposons donc $y = mx$ et $z = nx$, et nous aurons

$$p = \frac{udx^2}{ds^2}, \quad q = \frac{mmudx^2}{ds^2} = mmp \quad \text{et} \quad r = \frac{nnudx^2}{ds^2} = nnp;$$

ce qui nous donne la solution d'un cas particulier du problème proposé. Car ces relations devant subsister toujours, nous aurons, pour le commencement du mouvement,

$$b = ma, \quad c = na, \quad \beta = mm\alpha \quad \text{et} \quad \gamma = nn\alpha.$$

Or, parce que $\sqrt{\beta} = m\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\gamma} = n\sqrt{\alpha}$, cette solution se rapportera au cas où les vitesses propres des corps enfermés dans le tube, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ et $\sqrt{\gamma}$, sont proportionelles aux distances $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$, c'est à dire, où les chemins $AP$, $BQ$, $CR$ que les corps décrivent, sont également inclinés à la direction du tube $OF$. Si donc dès le commencement, de pareils mouvements ont été imprimés aux corps, le même rapport subsistera toujours, et par conséquent, les lignes $AP$, $BQ$, $CR$ seront semblables entr'elles. Mais dans ce cas, l'équation VII se changera en celle-ci

$$(Axx + mmBxx + nnCxx + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + mmBaa + nnCaa + Mkk)\sqrt{g},$$

d'où l'on tire $$\sqrt{u} = \frac{Mkk\sqrt{g} + aa(A + mmB + nnC)\sqrt{g}}{Mkk + xx(A + mmB + nnC)},$$

et différentiant les logarithmes $$\frac{du}{2u} = \frac{-2xdx(A + mmB + nnC)}{Mkk + xx(A + mmB + nnC)}.$$

Soit, pour abréger, $A + mmB + nnC = D$, et la valeur

$$\frac{du}{2u} = \frac{-2Dxdx}{Mkk + Dxx} \quad \text{substituée dans l'équation} \quad \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2},$$

donnera $$\frac{xds^2}{ff} = ddx - \frac{2Dxdx^2}{Mkk + Dxx}.$$

§ 34. Pour résoudre cette équation, dans laquelle l'élément $ds$ est supposé constant, mettons $ds = v dx$, et nous aurons $dds = v ddx + dv dx = 0$, et partant $ddx = \frac{-dv dx}{v}$. Ces valeurs pour $ds$ et $ddx$ substituées, fourniront cette équation différentielle du premier degré

$$\frac{xv^2 dx}{ff} + \frac{dv}{v} + \frac{2 Dx dx}{Mkk + Dxx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v^3} + \frac{2 Dx dx}{(Mkk + Dxx) v^2} - \frac{x dx}{ff} = 0,$$

qui étant divisée par $(Mkk + Dxx)^2$, deviendra intégrable

$$\frac{dv}{v^3 (Mkk + Dxx)^2} + \frac{2 Dx dx}{(Mkk + Dxx)^3 v^2} = \frac{-x dx}{ff (Mkk + Dxx)^2};$$

car l'intégrale sera $\quad \text{Const.} - \frac{1}{2 v^2 (Mkk + Dxx)^2} = \frac{1}{2 Dff (Mkk + Dxx)}$.

Or $v$ étant $= \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{p}}$, sa valeur au commencement sera $= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\alpha}}$; nous aurons donc pour la

$$\text{Const.} = \frac{\alpha}{2 g (Mkk + Daa)^2} + \frac{1}{2 Dff (Mkk + Daa)},$$

et substituant pour $v$ sa valeur $\frac{ds}{dx}$, nous obtenons

$$\frac{\alpha}{g (Mkk + Daa)^2} + \frac{1}{Dff (Mkk + Daa)} = \frac{dx^2}{ds^2 (Mkk + Dxx)^2} + \frac{1}{Dff (Mkk + Dxx)};$$

d'où nous pourrons aisément déterminer $ds$ par la seule variable $x$, et par conséquent, pour chaque valeur de $s$ assigner celle de $x$, laquelle étant connue, nous aurons d'abord

$$y = mx, \quad z = nx, \quad p = \frac{u dx^2}{ds^2} = \frac{u}{v^2},$$

c'est à dire $\quad p = \frac{\alpha u (Mkk + Dxx)^2}{g (Mkk + Daa)^2} + \frac{u (Mkk + Dxx)^2}{Dff (Mkk + Daa)} - \frac{u (Mkk + Dxx)}{Dff}$.

Mais $u = \frac{g (Mkk + Daa)^2}{(Mkk + Dxx)^2}$, et puis, nous avons $q = mmp$ et $r = nnp$; de sorte que ce cas du problème est parfaitement résolu.

§ 35. Un cas du problème que nous traitons étant ainsi résolu, nous pourrons déterminer le mouvement d'autant de corps enfermés dans le tube que l'on voudra, pourvu qu'au commencement les vitesses imprimées aux corps eussent été proportionelles à leurs distances au point $O$. La solution de ce cas ne diffère guère du problème premier où il n'y avait qu'un seul corps dans le tube; car ayant trouvé

$$u = \frac{g (Mkk + Daa)^2}{(Mkk + Dxx)^2},$$

la valeur de $p$ sera exprimée ainsi qu'il suit

$$p = \alpha + \frac{g (xx - aa)(Mkk + Daa)}{ff (Mkk + Dxx)}, \quad \text{et partant} \quad ds = \frac{dx \sqrt{u}}{\sqrt{p}}.$$

Il est donc évident que le mouvement du tube renfermant trois ou plusieurs corps, auxquels on a imprimé, au commencement, des vitesses proportionelles à leurs distances du point $O$, que ce mouvement,

dis-je, sera le même que s'il n'y avait d'enfermé dans le tube qu'un seul corps à la distance $OA = a$, et dont la masse fût

$$D = A + mmB + nnC, \quad \text{c'est à dire} \quad D = A + \frac{Bbb}{aa} + \frac{Ccc}{aa}.$$

Mais il s'ensuit encore de ce que nous venons de dire, que la solution sera bien différente et plus difficile, lorsque les vitesses $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, imprimées aux corps dès le commencement, ne suivent pas la proportion des distances $a$, $b$, $c$; car alors, remontant aux trois équations différentio-différentielles du § 32, nous ne pourrons plus supposer que les valeurs de $y$ et $z$ soient proportionelles à celle de $x$. Car, quoique cette supposition satisfasse à ces équations, elle ne renferme pourtant qu'un cas particulier de la solution, et il est aisé de comprendre, de la nature des équations différentielles du second degré, qu'il y a encore d'autres rapports entre les variables $x$, $y$ et $z$, qui peuvent convenir aux équations trouvées.

§ 36. Pour trouver une solution générale, je suppose, comme auparavant, que la valeur de $x$ qu'il tient de l'équation

$$\frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2},$$

nous soit déjà connue, et je dis qu'on pourra déduire de là les valeurs de $y$ et $z$, dans toute leur étendue sans aucune restriction. A cet effet, je pose $y = Tx$, et l'on aura

$$dy = Tdx + xdT \quad \text{et}$$

$$ddy = Tddx + 2dTdx + xddT;$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$\frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2}$$

produiront celle-ci

$$\frac{Tx}{ff} = \frac{Tddx}{ds^2} + \frac{2dTdx}{ds^2} + \frac{xddT}{ds^2} + \frac{Tdxdu}{2uds^2} + \frac{xdTdu}{2uds^2}.$$

Mais la première équation étant multipliée par $T$ donne

$$\frac{Tx}{ff} = \frac{Tddx}{ds^2} + \frac{Tdudx}{2uds^2},$$

laquelle retranchée de celle-là laissera

$$0 = \frac{2dTdx}{ds^2} + \frac{xddT}{ds^2} + \frac{xdTdu}{2uds^2}, \quad \text{ou bien} \quad 0 = 4udTdx + 2uxddT + xdTdu;$$

de sorte que nous aurons

$$0 = \frac{ddT}{dT} + \frac{2dx}{x} + \frac{du}{2u}$$

dont l'intégrale est $\Delta ds = xxdT\sqrt{u}$,

où $\varDelta$ marque une quantité constante que les conditions du problème détermineront. Ainsi nous aurons

$$dT = \frac{\varDelta ds}{xx\sqrt{u}},$$

et par conséquent

$$T = m + \varDelta \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}};$$

où je suppose que l'intégrale $\int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}$ est prise en sorte, qu'elle s'évanouisse en posant $s = 0$, c'est à dire au commencement du mouvement.

§ 37. Ayant ainsi trouvé $T$, nous aurons $y = mx + \varDelta x \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}$; mais au commencement du mouvement, où $x = a$, $y = b$ et $\int \frac{ds}{xx\sqrt{u}} = 0$, il doit y avoir $m = \frac{b}{a}$, et partant en mettant $\mu$ pour $\varDelta$, nous aurons

$$y = \frac{bx}{a} + \mu x \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}.$$

De la même manière nous trouvons

$$z = \frac{cx}{a} + \nu x \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}.$$

Mais pour déterminer les constantes $\mu$ et $\nu$, considérons les vitesses

$$\sqrt{p} = \frac{dx\sqrt{u}}{ds}, \quad \sqrt{q} = \frac{dy\sqrt{u}}{ds} \quad \text{et} \quad \sqrt{r} = \frac{dz\sqrt{u}}{ds},$$

et nous aurons

$$\sqrt{q} = \frac{bdx\sqrt{u}}{ads} + \frac{\mu}{x} + \frac{\mu dx\sqrt{u}}{ds} \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{r} = \frac{cdx\sqrt{u}}{ads} + \frac{\nu}{x} + \frac{\nu dx\sqrt{u}}{ds} \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}}.$$

Or, au commencement du mouvement nous avons

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}}, \quad \sqrt{u} = \sqrt{g}, \quad \sqrt{p} = \sqrt{\alpha}, \quad \sqrt{q} = \sqrt{\beta}, \quad \sqrt{r} = \sqrt{\gamma} \quad \text{et} \quad \int \frac{ds}{xx\sqrt{u}} = 0,$$

d'où nous tirons les déterminations suivantes

$$\sqrt{\beta} = \frac{b\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\mu}{a} \quad \text{et} \quad \mu = a\sqrt{\beta} - b\sqrt{\alpha},$$

$$\sqrt{\gamma} = \frac{c\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\nu}{a} \quad \text{et} \quad \nu = a\sqrt{\gamma} - c\sqrt{\alpha},$$

et par conséquent les constantes $\mu$ et $\nu$ nous sont connues.

§ 38. Supposons, pour nous débarasser du signe intégral, $\int \frac{ds}{xx\sqrt{u}} = S$, et nous aurons

$$\frac{ds}{xx\sqrt{u}} = dS, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \sqrt{u} = \frac{ds}{xxdS},$$

et par conséquent

$$\frac{du}{2u} = \frac{-2dx}{x} - \frac{ddS}{dS},$$

parce que nous avons supposé l'élément $ds$ constant. Mettons cette valeur à la place de $\frac{du}{2u}$ dans l'équation $\frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2}$, et nous aurons

$$\frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} - \frac{2dx^2}{xds^2} - \frac{dxddS}{dSds^2}, \text{ ou bien } \frac{xds}{ff} = d.\frac{dx}{ds} - \frac{2dx^2}{xds} - \frac{dx}{dS}d.\frac{dS}{ds},$$

équation où il n'est plus question de savoir s'il y a, ou non, quelque différentielle supposée constante. Par cette raison, changeant d'hypothèse, mettons à présent la différentielle $dS$ constante, ce qui nous donnera

$$\frac{xds}{ff} = \frac{ddx}{ds} - \frac{dxdds}{ds^2} - \frac{2dx^2}{xds} + \frac{dxdds}{ds^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{xds}{ff} = \frac{ddx}{ds} - \frac{2dx^2}{xds},$$

équation qui, bien qu'il ne s'y trouve que deux variables $x$ et $ds$, en renferme pourtant trois, parce que la différentielle d'une troisième $dS$ est supposée constante, ce qu'il faut bien remarquer, car sans cela, la dernière équation serait déjà propre à nous fournir une solution parfaite, et nous n'aurions qu'à nous y arrêter et à en chercher l'intégrale.

§ 39. Mais n'ayant pas encore pris en considération la septième équation

$$(Axx + Byy + Czz + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g},$$

nous ne devons point nous étonner de ce que nous ne soyons pas encore arrivés à notre but. Substituons donc dans cette équation les valeurs trouvées de $y$ et $z$ et $\sqrt{u} = \frac{ds}{xxdS}$, et nous aurons

$$\frac{Ads}{dS} + \frac{Bds}{dS}\left(\frac{b}{a} + \mu S\right)^2 + \frac{Cds}{dS}\left(\frac{c}{a} + \nu S\right)^2 + \frac{Mkkds}{xxdS} = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g},$$

d'où nous tirerons la valeur de $ds$

$$\frac{ds}{dS} = \frac{(Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g}}{\frac{Mkk}{xx} + A + \frac{Bbb}{aa} + \frac{Ccc}{aa} + 2\left(\frac{Bb\mu}{a} + \frac{Cc\nu}{a}\right)S + (B\mu^2 + C\nu^2)SS}.$$

Soit pour abréger

$$Aa\sqrt{\alpha} + Bb\sqrt{\beta} + Cc\sqrt{\gamma} = Ef\sqrt{g},$$
$$Aaa + Bbb + Ccc = Dff,$$
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = Fg,$$

nous aurons $A + \frac{Bbb}{aa} + \frac{Ccc}{aa} = \frac{Dff}{aa}$, et puis

$$\frac{Bb\mu + Cc\nu}{a} = Bb\sqrt{\beta} + Cc\sqrt{\gamma} - \frac{Bbb\sqrt{a} - Ccc\sqrt{a}}{a} = Ef\sqrt{g} - \frac{Dff\sqrt{a}}{a} \quad \text{et}$$

$$B\mu^2 + C\nu^2 = Faag - 2Eaf\sqrt{\alpha g} + Dff\alpha.$$

Substituant ces valeurs, nous obtiendrons

$$\frac{ds}{dS} = \frac{Dff\sqrt{g}}{\frac{Mkk}{xx} + \frac{Dff}{aa} + \frac{2f}{a}(Ea\sqrt{g} - Df\sqrt{\alpha})S + (Dff\alpha - 2Eaf\sqrt{\alpha g} + Faag)SS}.$$

Ayant ainsi exprimé la valeur de $ds$ en $x$ et $S$, substituons la dans l'équation

$$ddx - \frac{2dx^2}{x} = \frac{xds^2}{ff},$$

et il en résultera l'équation suivante

$$\frac{ddx}{x} - \frac{2dx^2}{xx} = \frac{DDffg\,dS^2}{\left(\frac{Mkk}{xx} + \frac{Dff}{aa} + \frac{2f}{a}(Ea\sqrt{g} - Df\sqrt{a})\,S + (Dffa - 2Eaf\sqrt{ag} + Faag)\,SS\right)^2},$$

laquelle, ne renfermant que deux variables $x$ et $S$ ($dS$ étant supposé constant), exprime le rapport entre $x$ et $S$. Ceci étant trouvé, on aura $ds$, et par conséquent $s$. De là on déduira la vitesse $\sqrt{u}$, et enfin les valeurs de $y$, $z$, $p$, $q$ et $r$, ainsi que la solution du problème l'exige.

§ 40. La même solution se trouvera plus aisément de la manière suivante. Recommençons par les trois équations différentielles du troisième degré

$$\text{I. } \frac{x}{ff} = \frac{ddx}{ds^2} + \frac{dudx}{2uds^2}, \quad \text{II. } \frac{y}{ff} = \frac{ddy}{ds^2} + \frac{dudy}{2uds^2}, \quad \text{III. } \frac{z}{ff} = \frac{ddz}{ds^2} + \frac{dudz}{2uds^2},$$

et supposons que la résolution de cette quatrième équation nous soit déjà connue

$$\frac{v}{ff} = \frac{ddv}{ds^2} + \frac{dudv}{2uds^2}.$$

Mettons maintenant $x = Tv$, et nous parviendrons à cette équation

$$0 = \frac{ddT}{dT} + \frac{2dv}{v} + \frac{du}{2u}$$

dont l'intégrale est $\varDelta ds = vvdT\sqrt{u}$, et partant

$$dT = \frac{\varDelta ds}{vv\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad T = \text{Const.} + \varDelta \int \frac{ds}{vv\sqrt{u}}, \quad \text{d'où nous tirons } x = iv + \lambda v \int \frac{ds}{vv\sqrt{u}};$$

et en suivant pour $y$ et $z$ la même méthode, nous aurons

$$y = mv + \mu v \int \frac{ds}{vv\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad z = nv + \nu v \int \frac{ds}{vv\sqrt{u}},$$

où l'intégrale $\int \frac{ds}{vv\sqrt{u}}$ doit être prise de la sorte qu'elle s'évanouisse dans le cas $s = 0$, et supposons que, dans ce même cas $s = 0$, c'est à dire au commencement, il soit $v = f$, nous aurons $a = if$, $b = mf$, $c = nf$, d'où nous tirerons les valeurs des constantes $i$, $m$, $n$, savoir

$$i = \frac{a}{f}, \quad m = \frac{b}{f}, \quad n = \frac{c}{f}.$$

§ 41. Pour déterminer les autres constantes $\lambda$, $\mu$ et $\nu$, considérons les vitesses

$$\sqrt{p} = \frac{dx\sqrt{u}}{ds}, \quad \sqrt{q} = \frac{dy\sqrt{u}}{ds}, \quad \sqrt{r} = \frac{dz\sqrt{u}}{ds}, \quad \text{et parce que } dx = idv + \lambda dv \int \frac{ds}{vv\sqrt{u}} + \frac{\lambda ds}{v\sqrt{u}},$$

nous aurons

$$\sqrt{p} = \frac{idv\sqrt{u}}{ds} + \frac{\lambda}{v} + \frac{\lambda dv\sqrt{u}}{ds} \int \frac{ds}{vv\sqrt{u}}.$$

Supposons maintenant, que dans le cas de $s=0$, il soit $\frac{dv}{ds}=0$, comme nous avons supposé antérieurement que, dans le même cas $v$ soit $=f$, car l'équation differentio-différentielle

$$\frac{v}{ff}=\frac{ddv}{ds^2}+\frac{du\,dv}{2u\,ds^2}$$

requiert une double détermination pour être déterminée. Appliquons cette détermination au commencement où $s=0$, et nous aurons

$$\sqrt{\alpha}=\frac{\lambda}{f}, \quad \text{et partant} \quad \lambda=f\sqrt{\alpha};$$

et pareillement on trouvera $\mu=f\sqrt{\beta}$ et $\nu=f\sqrt{\gamma}$, et par conséquent, les trois quantités $x$, $y$, $z$ seront exprimées ainsi qu'il suit

$$x=\frac{av}{f}+fv\sqrt{\alpha}\,.\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}, \quad y=\frac{bv}{f}+fv\sqrt{\beta}\,.\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}, \quad z=\frac{cv}{f}+fv\sqrt{\gamma}\,.\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}},$$

où $v$ doit être déterminé à l'aide de cette équation

$$\frac{v}{ff}=\frac{ddv}{ds^2}+\frac{du\,dv}{2u\,ds^2}$$

en sorte que supposant $s=0$, il devienne $\frac{dv}{ds}=0$ et $v=f$.

§ 42. Supposons à présent $\int\frac{ds}{vv\sqrt{u}}=\frac{t}{ff\sqrt{g}}$, et nous aurons

$$\frac{ds}{vv\sqrt{u}}=\frac{dt}{ff\sqrt{g}} \quad \text{et} \quad \sqrt{u}=\frac{ff\,ds\sqrt{g}}{vv\,dt};$$

or, $ds$ étant constant, il s'en suit

$$\frac{du}{2u}=-\frac{2dv}{v}-\frac{ddt}{dt};$$

cette valeur substituée ci-dessus donnera

$$\frac{v}{ff}=\frac{ddv}{ds^2}-\frac{2dv^2}{v\,ds^2}-\frac{dv\,ddt}{dt\,ds^2}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{v\,ds}{ff}=d\cdot\frac{dv}{ds}-\frac{2dv^2}{v\,ds}-\frac{dv}{dt}\,d\cdot\frac{dt}{ds}.$$

Changeons à présent de constante, et supposons que l'élément $dt$ soit constant, et nous aurons

$$\frac{v\,ds}{ff}=\frac{ddv}{ds}-\frac{2dv^2}{v\,ds},$$

équation qui contient trois variables: $v$, $s$ et $t$. Les distances $x$, $y$, $z$ seront exprimées ainsi qu'il suit:

$$x=\frac{av}{f}+\frac{tv\sqrt{\alpha}}{f\sqrt{g}}, \quad y=\frac{bv}{f}+\frac{tv\sqrt{\beta}}{f\sqrt{g}}, \quad z=\frac{cv}{f}+\frac{tv\sqrt{\gamma}}{f\sqrt{g}};$$

les vitesses $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ et $\sqrt{r}$ obtiendront à leur tour les valeurs suivantes

$$\sqrt{p}=\frac{f\sqrt{\alpha}}{v}+\frac{f\,dv\,(a\sqrt{g}+t\sqrt{\alpha})}{vv\,dt}, \quad \sqrt{q}=\frac{f\sqrt{\beta}}{v}+\frac{f\,dv\,(b\sqrt{g}+t\sqrt{\beta})}{vv\,dt}, \quad \sqrt{r}=\frac{f\sqrt{\gamma}}{v}+\frac{f\,dv\,(c\sqrt{g}+t\sqrt{\gamma})}{vv\,dt}.$$

§ 43. Considérons enfin la septième équation du § 29 qui est

$$(Axx + Byy + Czz + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g}$$

et qui, à cause de $\sqrt{u} = \frac{ffds\sqrt{g}}{vvdt}$, se change en celle-ci

$$Axx + Byy + Czz + Mkk = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\frac{vvdt}{ffds}$$

ou, en substituant pour $x$, $y$, $z$ leurs valeurs respectives,

$$Mkk + \frac{vv}{ff}\left(Aaa + \frac{2Aat\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}} + \frac{A\alpha tt}{g}\right)$$
$$+ \frac{vv}{ff}\left(Bbb + \frac{2Bbt\sqrt{\beta}}{\sqrt{g}} + \frac{B\beta tt}{g}\right)$$
$$+ \frac{vv}{ff}\left(Ccc + \frac{2Cct\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}} + \frac{C\gamma tt}{g}\right) = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\frac{vvdt}{ffds}.$$

Soit, pour abréger comme auparavant

$$Aaa + Bbb + Ccc = Dff$$
$$Aa\sqrt{\alpha} + Bb\sqrt{\beta} + Cc\sqrt{\gamma} = Ef\sqrt{g}$$
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = Fg$$

et la dernière équation prendra la forme suivante

$$Mkk + Dvv + \frac{2Etvv}{f} + \frac{Fttvv}{ff} = \frac{Dvvdt}{ds} + \frac{Mkkvvdt}{ffds}$$

d'où il suit
$$ds = \frac{(Dff + Mkk)\,vvdt}{Mkkff + vv\,(Dff + 2Eft + Ftt)}.$$

Soit, pour rendre cette équation plus commode, $v = \frac{f}{\varphi}$, et nous aurons

$$ds = \frac{(Dff + Mkk)\,dt}{Mkk\varphi\varphi + Dff + 2Eft + Ftt}.$$

Mais on aura
$$dv = \frac{-fd\varphi}{\varphi^2} \quad \text{et} \quad ddv = \frac{-fdd\varphi}{\varphi^2} + \frac{2fd\varphi^2}{\varphi^3},$$

et partant
$$\frac{ddv}{v} = \frac{-dd\varphi}{\varphi} + \frac{2d\varphi^2}{\varphi^2} \quad \text{et} \quad \frac{2dv^2}{v^2} = \frac{2d\varphi^2}{\varphi^2}.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\frac{ds^2}{ff} = \frac{ddv}{v} - \frac{2dv^2}{v^2} = \frac{-dd\varphi}{\varphi},$$

d'où résultera cette équation finale

$$\frac{ffdd\varphi}{\varphi} + \frac{(Dff + Mkk)^2\,dt^2}{(Mkk\varphi\varphi + Dff + 2Eft + Ftt)^2} = 0$$

laquelle, ne contenant que deux variables $\varphi$ et $t$, et l'un des éléments, $dt$, étant supposé constant,

exprime le rapport entre $\varphi$ et $t$. Mais ayant déterminé $\varphi$, et par conséquent $v=\frac{f}{\varphi}$ par $t$, $ds$ sera aussi donné par $t$, et finalement, on aura les valeurs de $x$, $y$, $z$, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ ainsi que $\sqrt{u}=\frac{ffds\sqrt{g}}{vvdt}$, toutes déterminées par la seule variable $t$. Le problème proposé sera, par conséquent, résolu.

§ 44. Ne voyant pas encore, comment l'équation dernièrement trouvée puisse être résolue, j'appliquerai la solution à un cas digne de considération, en supposant l'inertie du tube évanouissante. Soit donc $M=0$, et nous aurons

$$\frac{dd\varphi}{\varphi}+\frac{DDffdt^2}{(Dff+2Eft+Ftt)^2}=0.$$

Pour trouver l'intégrale de cette équation, supposons $\varphi=e^{\int\psi dt}$, et nous aurons

$$\frac{dd\varphi}{\varphi dt}=d\psi+\psi\psi dt,$$

et partant nous obtiendrons cette équation différentielle

$$d\psi+\psi\psi dt+\frac{DDffdt}{(Dff+2Eft+Ftt)^2}=0,$$

d'où il est clair que, si cette équation admet l'intégration, la valeur de $\psi$ aura la forme suivante:

$$\psi=\frac{\zeta+\eta t}{Dff+2Eft+Ftt}.$$

Supposant donc cette forme, nous aurons

$$d\psi=\frac{Dff\eta dt-2Ef\zeta dt-2F\zeta tdt-F\eta ttdt}{(Dff+2Eft+Ftt)^2},\quad \psi\psi dt=\frac{\zeta\zeta dt+2\zeta\eta tdt+\eta\eta ttdt}{(Dff+2Eft+Ftt)^2},$$

et partant il doit y avoir

$$\zeta\zeta+Dff\eta-2Ef\zeta+DDff=0,\quad \zeta\eta-F\zeta=0,\quad \eta\eta-F\eta=0;$$

d'où nous tirons, pour satisfaire aux deux dernières égalités, $\eta=F$, et de la première

$$\zeta=Ef\pm f\sqrt{(EE-DF-DD)}$$

ce qui nous donne pour $\psi dt$ cette expression

$$\psi dt=\frac{\pm fdt\sqrt{(EE-DF-DD)}+Efdt+Ftdt}{Dff+2Eft+Ftt}$$

donc

$$\int\psi dt=l.\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}\pm\int\frac{fdt\sqrt{(EE-DF-DD)}}{Dff+2Eft+Ftt}.$$

§ 45. Mais l'équation qui exprime la valeur de $ds$ nous donne

$$ds=\frac{Dffdt}{Dff+2Eft+Ftt}$$

où $DF$ étant $>EE$, comme il est bien facile de se convaincre, l'intégrale sera

$$s=\frac{Df}{\sqrt{(DF-EE)}}\text{ Arc tang }\frac{t\sqrt{(DF-EE)}}{Df+Et}.$$

Soit $\sqrt{(DF-EE)}=G$, et nous aurons

$$\frac{Gt}{Df+Et}=\tang\frac{Gs}{Df},\quad \frac{Gt}{\sqrt{D(Dff+2Eft+Ftt)}}=\sin\frac{Gs}{Df}\quad\text{et}\quad\frac{Df+Et}{\sqrt{D(Dff+2Eft+Ftt)}}=\cos\frac{Gs}{Df}$$

et enfin

$$t=\frac{Df\tang\frac{Gs}{Df}}{G-E\tang\frac{Gs}{Df}}=\frac{Df\sin\frac{Gs}{Df}}{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}\quad\text{et}\quad\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}=\frac{Gf\sqrt{D}}{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}.$$

§ 46. Parce que $DF>EE$, il est clair que $\sqrt{(EE-DF-DD)}$ est une quantité imaginaire, c'est pourquoi il faut chercher l'intégrale de $\frac{fdt\sqrt{(EE-DF-DD)}}{Dff+2Eft+Ftt}$ par les logarithmes imaginaires, laquelle sera

$$\frac{\sqrt{(DD+GG)}}{2G}\,l.\frac{Ft+Ef-Gf\sqrt{-1}}{Ft+Ef+Gf\sqrt{-1}}.$$

Ayant trouvé la valeur de $\int\psi dt$ par des logarithmes, nous aurons en nombres

$$\varphi=e^{\int\psi dt}=J\left(\frac{Ft+Ef-Gf\sqrt{-1}}{Ft+Ef+Gf\sqrt{-1}}\right)^{\frac{\sqrt{(DD+GG)}}{2G}}\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}.$$

Mais cette valeur étant encore imaginaire, parce que

$$\frac{fdt\sqrt{(EE-DF-DD)}}{Dff+2Eft+Ftt}=\frac{ds\sqrt{(EE-DF-DD)}}{Df}$$

supposant $\sqrt{(DF-EE+DD)}=\sqrt{(GG+DD)}=H$, nous aurons

$$\int\psi dt=l.\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}+\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df},\quad\text{et partant}\quad\varphi=e^{\int\psi dt}=Je^{\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}}\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)};$$

toutes ces valeurs étant imaginaires, elles nous prouvent que le cas particulier de l'intégrale de l'équation

$$\frac{dd\varphi}{\varphi}+\frac{DDffdt^2}{(Dff+2Eft+Ftt)^2}=0$$

ne convient pas à notre dessein: Nous sommes donc obligés d'en chercher une intégrale plus générale.

§ 47. L'exposant $\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}$ pouvant aussi être pris négativement, nous avons encore une autre intégrale particulière, savoir

$$\varphi=Ke^{\frac{-Hs\sqrt{-1}}{Df}}\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}$$

et de ces deux intégrales particulières, en les ajoutant ensemble, nous obtiendrons l'intégrale complète

$$\varphi=\left(Je^{\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}}+Ke^{\frac{-Hs\sqrt{-1}}{Df}}\right)\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}$$

laquelle, quoique les exposants soient imaginaires, ne manque pas de renfermer des quantités réelles,

pourvu que l'on donne aux constantes $J$ et $K$ des valeurs propres pour cela. Soit $J=\zeta+\eta\sqrt{-1}$ et $K=\zeta-\eta\sqrt{-1}$, et l'expression

$$Je^{\frac{Hs\sqrt{-1}}{Df}}+Ke^{\frac{-Hs\sqrt{-1}}{Df}} \text{ se changera en celle-ci } 2\zeta\cos\frac{Hs}{Df}+2\eta\sin\frac{Hs}{Df}.$$

Substituons maintenant aussi à la place de $\sqrt{(Dff+2Eft+Ftt)}$ sa valeur trouvée en $s$, et nous aurons, en changeant la forme des constantes encore arbitraires

$$\varphi=\frac{\mu\cos\frac{Hs}{Df}+\nu\sin\frac{Hs}{Df}}{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}, \text{ et par conséquent } v=\frac{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}{\mu\cos\frac{Hs}{Df}+\nu\sin\frac{Hs}{Df}}f.$$

Les constantes $\mu$ et $\nu$ se détermineront par les conditions requises au § 41, en vertu desquelles posant $s=0$, il doit être $v=f$ et $\frac{dv}{ds}=0$. Supposant donc $s=0$, nous aurons $f=\frac{Gf}{\mu}$, et partant $\mu=G$. Ensuite, en prenant les différentielles et omettant les sinus qui, pour $s=0$ s'évanouissent, on aura

$$\frac{dv}{ds}=\frac{-(\mu EG+\nu GH)\cos\frac{Gs}{Df}\cos\frac{Hs}{Df}}{D\left(\mu\cos\frac{Hs}{Df}+\nu\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2}$$

dont la valeur devant être $=0$, pour $s=0$, nous aurons $\mu EG+\nu GH=0$, ou $\nu=\frac{-\mu E}{H}=\frac{-EG}{H}$, et par conséquent il y aura

$$v=\frac{GH\cos\frac{Gs}{Df}-EH\sin\frac{Gs}{Df}}{GH\cos\frac{Hs}{Df}-EG\sin\frac{Hs}{Df}}f.$$

§ 48. Ayant ainsi trouvé la valeur de $v$, nous aurons

$$\frac{v}{f}=\frac{G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}}\cdot\frac{H}{G}, \quad \frac{tv}{f}=\frac{Df\sin\frac{Gs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}}\cdot\frac{H}{G},$$

et ces expressions serviront à déterminer $x$, $y$ et $z$. Pour trouver d'abord la valeur de $\sqrt{u}$, nous aurons

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\left(G\cos\frac{Gs}{Df}-E\sin\frac{Gs}{Df}\right)^2}{GG} \quad \text{et} \quad \frac{ffds}{vvdt}=\frac{\left(H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2}{HH},$$

et de là nous trouvons

$$\sqrt{u}=\frac{ffds\sqrt{g}}{vvdt}=\frac{\left(H\cos\frac{Hs}{Df}-E\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2\sqrt{g}}{HH}$$

et ensuite

$$x = \frac{H}{G} \cdot \frac{Ga \cos \frac{Gs}{Df} - Ea \sin \frac{Gs}{Df} + \frac{Df\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}} \sin \frac{Gs}{Df}}{H \cos \frac{Hs}{Df} - E \sin \frac{Hs}{Df}},$$

$$y = \frac{H}{G} \cdot \frac{Gb \cos \frac{Gs}{Df} - Eb \sin \frac{Gs}{Df} + \frac{Df\sqrt{\beta}}{\sqrt{g}} \sin \frac{Gs}{Df}}{H \cos \frac{Hs}{Df} - E \sin \frac{Hs}{Df}},$$

$$z = \frac{H}{G} \cdot \frac{Gc \cos \frac{Gs}{Df} - Ec \sin \frac{Gs}{Df} + \frac{Df\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}} \sin \frac{Gs}{Df}}{H \cos \frac{Hs}{Df} - E \sin \frac{Hs}{Df}}.$$

Enfin, puisque $\sqrt{p} = \frac{dx\sqrt{u}}{ds}$, nous aurons

$$\sqrt{p} = \sqrt{\alpha} \cos \frac{Gs}{Df} \cos \frac{Hs}{Df} + \left(\frac{H\sqrt{\alpha}}{G} - \frac{DEa\sqrt{g}}{GHf}\right) \sin \frac{Gs}{Df} \sin \frac{Hs}{Df} +$$
$$\left(\frac{E\sqrt{\alpha}}{G} - \frac{(GG+EE)\,a\sqrt{g}}{DGf}\right) \sin \frac{Gs}{Df} \cos \frac{Hs}{Df} - \left(\frac{E\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{(EE+HH)\,a\sqrt{g}}{DHf}\right) \cos \frac{Gs}{Df} \sin \frac{Hs}{Df}$$

et pareillement

$$\sqrt{q} = \sqrt{\beta} \cos \frac{Gs}{Df} \cos \frac{Hs}{Df} + \left(\frac{H\sqrt{\beta}}{G} - \frac{DEb\sqrt{g}}{GHf}\right) \sin \frac{Gs}{Df} \sin \frac{Hs}{Df} +$$
$$\left(\frac{E\sqrt{\beta}}{G} - \frac{(GG+EE)\,b\sqrt{g}}{DGf}\right) \sin \frac{Gs}{Df} \cos \frac{Hs}{Df} - \left(\frac{E\sqrt{\beta}}{H} - \frac{(EE+HH)\,b\sqrt{g}}{DHf}\right) \cos \frac{Gs}{Df} \sin \frac{Hs}{Df}$$

et enfin

$$\sqrt{r} = \sqrt{\gamma} \cos \frac{Gs}{Df} \cos \frac{Hs}{Df} + \left(\frac{H\sqrt{\gamma}}{G} - \frac{DEc\sqrt{g}}{GHf}\right) \sin \frac{Gs}{Df} \sin \frac{Hs}{Df} +$$
$$\left(\frac{E\sqrt{\gamma}}{G} - \frac{(GG+EE)\,c\sqrt{g}}{DGf}\right) \sin \frac{Gs}{Df} \cos \frac{Hs}{Df} - \left(\frac{E\sqrt{\gamma}}{H} - \frac{(EE+HH)\,c\sqrt{g}}{DHf}\right) \cos \frac{Gs}{Df} \sin \frac{Hs}{Df}.$$

§ 49. Voici donc la solution entière du problème proposé pour le cas où l'inertie du tube s'évanouit; car pour chaque situation du tube, où l'angle $FOS = \frac{s}{f}$, j'ai déterminé les places des corps renfermés dans le tube, $x$, $y$, $z$, de même que leurs vitesses $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, avec celle du tube $\sqrt{u}$. Outre cela, il sera aisé de déterminer le temps dans lequel le tube parcourt l'angle $FOS$, car l'élément de ce temps étant

$$= \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{HHds}{\left(H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}\right)^2 \sqrt{g}},$$

son intégrale, qui est

$$\frac{\frac{Df}{\sqrt{g}} \sin \frac{Hs}{Df}}{H\cos\frac{Hs}{Df} - E\sin\frac{Hs}{Df}}$$

exprimera le temps dans lequel le tube, depuis le commencement, est parvenu en $OS$, et par conséquent, rien ne manque à la solution complète que je viens de donner.

## Supplément.

La solution du second problème peut s'opérer encore plus aisément de la manière suivante. Ayant trouvé dans le § 29 les équations que voici

$$\text{I. } \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}, \qquad \text{II. } \frac{dy}{\sqrt{q}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}, \qquad \text{III. } \frac{dz}{\sqrt{r}} = \frac{ds}{\sqrt{u}},$$

$$\text{IV. } ffdp = 2uxdx, \qquad \text{V. } ffdq = 2uydy, \qquad \text{VI. } ffdr = 2uzdz,$$

$$\text{VII. } (Axx + Byy + Czz + Mkk)\sqrt{u} = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\sqrt{g}$$

supposons l'élément du temps $= dt$, nous aurons

$$\frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{dy}{\sqrt{q}} = \frac{dz}{\sqrt{r}} = dt \quad \text{et partant}$$

$$u = \frac{ds^2}{dt^2}, \quad p = \frac{dx^2}{dt^2}, \quad q = \frac{dy^2}{dt^2} \quad \text{et} \quad r = \frac{dz^2}{dt^2}.$$

Supposons maintenant $dt$ constant, et nous obtiendrons

$$ffddx = xds^2, \quad ffddy = yds^2, \quad ffddz = zds^2$$

et pour la septième équation nous aurons celle-ci

$$(Axx + Byy + Czz + Mkk)\,ds = (Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)\,dt\sqrt{g}.$$

Mais la conservation des forces vives a donné au § 30

$$ff(Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2) + ds^2(Axx + Byy + Czz + Mkk) =$$
$$ffdt^2(A\alpha + B\beta + C\gamma) + gdt^2(Aaa + Bbb + Ccc + Mkk)$$

laquelle, en y substituant pour $ds^2$ ses valeurs données ci-dessus, se change en celle-ci

$$ff(Adx^2 + Axddx + Bdy^2 + Byddy + Cdz^2 + Czddz) + Mkkds^2 = Fgffdt^2 + Dgffdt^2 + Mgkkdt^2$$

mais $Adx^2 + Axddx + Bdy^2 + Byddy + Cdz^2 + Czddz$ étant la moitié de la différentio-différentielle de $Axx + Byy + Czz + Mkk = \frac{Dffdt\sqrt{g}}{ds}$, nous aurons

$$\frac{Dff\sqrt{g}}{2}dd\cdot\frac{dt}{ds} + \frac{Mkkds^2}{ff} = \left(Dg + Fg + \frac{Mkkg}{ff}\right)dt^2.$$

Soit $ds = \frac{dt}{v}$, pour avoir

$$Dffddv + \frac{2Mkkdt^2}{ffvv\sqrt{g}} = 2\left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right)dt^2\sqrt{g}.$$

Soit $dt = \varphi dv$, et l'on aura $ddv = -\frac{d\varphi dv}{\varphi}$, et par conséquent nous obtiendrons cette équation:

$$\frac{-Dffd\varphi}{\varphi} + \frac{2Mkk\varphi\varphi dv}{ffvv\sqrt{g}} = 2\left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right)\varphi\varphi dv\sqrt{g}, \quad \text{ou bien}$$

$$\frac{-Dffd\varphi}{2\varphi^3} + \frac{Mkkdv}{ffvv\sqrt{g}} = \left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right)dv\sqrt{g},$$

laquelle étant intégrable, donnera

$$\frac{Dff}{\varphi\varphi} - \frac{Mkk}{ffv\sqrt{g}} = \left(D + F + \frac{Mkk}{ff}\right)v\sqrt{g} + \Delta$$

ou
$$\frac{Dff}{\varphi\varphi} = \frac{Mkk + (Dff + Fff + Mkk)gvv + \Delta ffv\sqrt{g}}{ffv\sqrt{g}}$$

par conséquent

$$\varphi = \frac{ff\sqrt{(Dv\sqrt{g})}}{\sqrt{(Mkk + \Delta ffv\sqrt{g} + (Mkk + Dff + Fff)gvv)}}$$

et
$$t = \int\frac{ffdv\sqrt{(Dv\sqrt{g})}}{\sqrt{(Mkk + \Delta ffv\sqrt{g} + (Mkk + Dff + Fff)gvv)}}$$

et
$$s = \int\frac{ffdv\sqrt{(Dv\sqrt{g})}}{v\sqrt{(Mkk + \Delta ffv\sqrt{g} + (Mkk + Dff + Fff)gvv)}}.$$

Or, nous avions au commencement du mouvement $dt = \frac{ds}{\sqrt{g}}$ et $t = 0$, partant $v = \frac{1}{\sqrt{g}}$, mais

$$v = \frac{Axx + Byy + Czz + Mkk}{Dff\sqrt{g}}, \quad \text{donc} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{2Axdx + 2Bydy + 2Czdz}{Dffdt\sqrt{g}}.$$

Mais au commencement il y a $x = a$, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\alpha}$ etc. donc $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2E}{Df}$, et par conséquent

$$\Delta = \frac{4EE}{D} + \frac{2Mkk}{ff} - D - F.$$

Mais lorsque $v = \frac{1}{\sqrt{g}}$, il doit y avoir $t = 0$ et $s = 0$, par quoi les intégrations étant définies, on pourra, pour chaque moment $t$, déterminer la situation du tube $s$. Ensuite, les places des corps se trouveront par ces équations:

$$ffd\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{xds^2}{dt} = \frac{xdt}{vv}.$$

# VII.

# De motu corporum in tubis circa punctum fixum mobilibus.

---

**Problema I.** (Fig. 146.)

1. Moveatur tubus rectus $AB$ uniformiter circa punctum fixum $O$, in quo versetur corpus $M$ a nullis viribus sollicitatum, invenire hujus corporis motum in tubo.

**Solutio.** Quia tubus $AB$ motu uniformi circa punctum fixum $O$ gyratur, sit ejus celeritas in data a polo $O$ distantia $f$, debita altitudini $c$; tum ex $O$ in tubum demittatur perpendiculum $OA$, quod cum maneat perpetuo ejusdem longitudinis, ponatur $OA = a$. Pervenerit post aliquod tempus $t$ tubus in situm $AB$, tumque versetur corpus, cujus massa $= A$, in puncto $M$, ubi sit ejus celeritas debita altitudini $v$, quam habet secundum tubi longitudinem. Ducatur $OM$, et sit $OM = z$, $AM = x$; ut sit $zz = aa + xx$; erit ergo celeritas angularis tubi in puncto $M$ debita altitudini $\frac{czz}{ff}$, qua punctum $M$ tempusculo $dt$ convertetur per arculum $Mn = \frac{zdt}{f}\sqrt{c}$. Corpus ergo $A$ in $M$ duplicem habet motum, alterum secundum directionem tubi $ML$ cum celeritate $\sqrt{v}$, alterum secundum tangentem $MN$ arculi $Mn$ cum celeritate $= \frac{z\sqrt{c}}{f}$. Si igitur corpus sibi esset relictum, priori motu perveniret tempusculo $dt$ in $L$, existente $ML = dt\sqrt{v}$; altero motu ex $L$ in $J$ perducetur, existente $LJ = \frac{zdt\sqrt{c}}{f}$, eritque $LJ$ ipsi $MN$ parallela et aequalis; quia est $MN = Mn$. Existet ergo corpus post tempusculum $dt$ in puncto $J$, unde a vi restituente in tubum reduci debet per spatiolum $Jm$ ad tubum normale. Cum autem sit $Nn = \frac{MN^2}{2OM} = \frac{czdt^2}{2ff}$; concipiatur ex $N$ in directionem tubi $ab$, quam ob motum proprium post tempusculum $dt$ habebit, ductum perpendiculum $No$, erit ob triangula similia $Nno$ et $Ona$ seu $OMA$,

$$No = \frac{a}{z}\cdot\frac{czdt^2}{2ff} = \frac{acdt^2}{2ff} \quad \text{et} \quad no = \frac{x}{z}\cdot\frac{czdt^2}{2ff} = \frac{cxdt^2}{2ff}.$$

Tum vero quia angulus, quem $NJ$ cum directione tubi $ab$ facit, est infinite parvus, erit $mo = NJ$.

Quare corpus in tubo tempusculo $dt$ ultra spatium $ML = om = dt\sqrt{v}$, quod ejus celeritati convenit, confecit spatiolum $no = \frac{cx\,dt^2}{2ff}$; ex quo in tubo perinde movetur, ac si acceleraretur a vi acceleratrice $= \frac{2cx}{ff}$. Deinde quia angulus, quem $NJ$ cum $ab$ constituit, est aequalis angulo

$$MOn = \frac{Mn}{OM} = \frac{dt}{f}\sqrt{c},$$

erit $$Jm + No = NJ \cdot \frac{dt}{f}\sqrt{c} = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f}, \quad \text{ideoque} \quad Jm = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f} - \frac{acdt^2}{2ff};$$

hinc ad spatiolum $Jm$ tempusculo $dt$ absolvendum opus est vi acceleratrice $= \frac{4\sqrt{cv}}{f} - \frac{2ac}{ff}$, a qua pressio, quam tubus a corpore sustinet, proficiscitur; eritque adeo haec pressio $= A\left(\frac{4\sqrt{cv}}{f} - \frac{2ac}{ff}\right)$. Quia ergo corpus in tubo acceleratur vi $= \frac{2cx}{ff}$, dum spatiolum in tubo $ML = ds = dx$ absolvit, erit $dv = \frac{2cx\,dx}{ff}$; hincque integrando $v = \frac{cxx}{ff} + b$, siquidem ponamus corpus in $A$, ubi $x = 0$, celeritatem in tubo habuisse debitam altitudini $b$. Q. E. I.

2. **Coroll. 1.** Dum igitur tubus motu aequabili circa polum $O$ rotatur, corpus in eo motu accelerato promovetur, ita ut habeat in puncto $A$ celeritatem minimam $\sqrt{b}$, quae deinde sit eo major, quo magis ab hoc puncto $A$ recedat.

3. **Coroll. 2.** Si valor ipsius $v$ inventus in pressione, quam tubus sustinet a corpore in directione $MP$ ad tubum normali, substituatur, reperietur pressio $= \frac{A}{ff}(4\sqrt{(bcff + ccxx)} - 2ac)$. Quando ergo corpus in $A$ versatur, erit pressio $= \frac{2A}{ff}(2f\sqrt{bc} - ac)$, quae erit nulla si $2f\sqrt{b} = a\sqrt{c}$, seu $\sqrt{b} = \frac{a\sqrt{c}}{2f}$, et negativa si $\sqrt{b} < \frac{a\sqrt{c}}{2f}$.

4. **Coroll. 3.** Tempus autem, quo corpus spatium $AM = x$ absolvit, erit $= \int \frac{f\,dx}{\sqrt{(bff + cxx)}}$, ideoque per logarithmos exprimitur. Hinc autem patet, si corpus in $A$ celeritatem habuerit nullam, ut sit $b = o$, tum corpus nunquam ex $A$ esse exiturum, sed perpetuo ibidem esse mansurum.

5. **Coroll. 4.** Si tubus in plagam oppositam rotetur, tum solutio praesens ad hunc casum accommodabitur si loco $\sqrt{c}$ scribatur $-\sqrt{c}$, hocque casu pressio tendet in plagam oppositam, eritque $= A\left(\frac{4\sqrt{cv}}{f} + \frac{2ac}{ff}\right)$.

**Problema 2.** (Fig. 147.)

6. Moveatur tubus curvilineus $AMB$ motu uniformi circa punctum fixum $O$, in eoque versetur corpus massam habens $= A$, quod a viribus quibuscunque sollicitetur, invenire ejus motum in tubo.

**Solutio.** Pervenerit post tempus $t$, tubus in situm $AMB$ motu rotatorio, cujus in distantia a polo $= f$ celeritas debita sit altitudini $c$, atque hoc tempore corpus versetur in $M$, ubi habeat celeritatem secundum directionem tubi debitam altitudini $v$. Ducatur ad $M$ tangens $TML$, in quam ex polo $O$ demittatur perpendiculum $OT$, et vocetur $OM = z$, $MT = x$ et $OT = y$, ut sit

$zz = xx + yy$. Sollicitetur corpus in $M$ a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali secundum $ML = T$, et altera normali secundum $MP = N$; sitque radius osculi curvae in $M$ nempe $MR = r = \frac{zdz}{dy}$. Concipiatur nunc corpus intervallo tempusculi $dt$ liberum, atque ob motum, qui ipsi in tubo inerat, una cum vi tangentiali $T$ transferetur in $L$, ut sit $ML = dt\sqrt{v} + \frac{Tdt^2}{4}$, ob motum vero cum tubo communem, secundum directionem $LJ$ parallelam ipsi $MN$, quae est ad $OM$ normalis, transferetur per $LJ = \frac{zdt\sqrt{c}}{f}$; est enim celeritas rotatoria puncti $M = \frac{z\sqrt{c}}{f}$. Denique ob vim normalem ex $J$ pertrahetur in $r$, existente $Jr$ normali $MP$ parallela, ut sit $Jr = \frac{Ndt^2}{4}$; reperietur ergo corpus tempusculo $dt$ elapso in $r$, si esset liberum. Tubus vero interea circa polum $O$ gyrabitur per angulum $MOn$, et punctum $M$ absolvet arculum $Mn = \frac{zdt\sqrt{c}}{f} = MN$, sicque tubus habebit situm $anmb$. Producatur $rJ$ donec tubo occurrat in $m$, erit $mq = \frac{nq^2}{2r} = \frac{ML^2}{2r} = \frac{vdt^2}{2r}$, ob differentiam inter $dt\sqrt{v}$ et $nq$ infinite parvam. Ducatur ad $n$ tangens curvae $tnq$, in eamque ex $O$ demittatur perpendiculum $Ot$, erit utique $On = OM = z$; $tn = TM = x$ et $Ot = OT = y$. Deinde erit $Nn = \frac{MN^2}{2OM} = \frac{czdt^2}{2ff}$; et si ex $N$ ad $nq$ demittatur perpendiculum $No$, ob triangula $Nno$ et $Ont$ similia habebitur $no = \frac{cxdt^2}{2ff}$ et $No = \frac{cydt^2}{2ff}$, verum $NJ$ et ipse arcus $om$ aequalis erit spatio $ML$. Jam opus erit vi restituente, quae corpus ex $r$ transferat in tubi punctum $m$, quae erit $= \frac{4A.rm}{dt^2}$. Quia ergo corpus in tubi punctum $m$ pervenit, interea in tubo confecisse censendum est spatium $nm$, quod spatium $ML = dt\sqrt{v}$ superat particula $no = \frac{cxdt^2}{2ff}$; ideoque praeter vim tangentialem $T$ in tubo acceleratur vi $= \frac{2cx}{ff}$. Postea quia inclinatio rectae $NJ$ ad $nq$ aequalis est angulo $MOn = \frac{dt\sqrt{c}}{f}$, erit

$$qJ + No = NJ \cdot \frac{dt\sqrt{c}}{f} = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f}, \quad \text{ideoque} \quad qJ = \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f} - \frac{cydt^2}{2ff}.$$

Quare cum sit $qm = \frac{vdt^2}{2r}$, erit

$$Jm = \frac{vdt^2}{2r} + \frac{cydt^2}{2ff} - \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f}, \quad \text{atque} \quad rm = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{vdt^2}{2r} + \frac{cydt^2}{2ff} - \frac{dt^2\sqrt{cv}}{f};$$

unde erit pressio corporis in latera tubi secundum directionem normalem

$$MP = A\left(N + \frac{2v}{r} + \frac{2cy}{ff} - \frac{4\sqrt{cv}}{f}\right).$$

Tota autem vis accelerans in tubo erit $= T + \frac{2cx}{ff}$; quare si corpus tempusculo $dt$ in tubo spatiolum $ds$ absolvere ponatur, erit $dv = Tds + \frac{2cxds}{ff}$, eritque $ds = \frac{zdz}{x}$; ita ut habeatur $dv = Tds + \frac{2czdz}{ff}$. Inventa autem celeritate corporis in tubo $\sqrt{v}$, habebitur ejus pressio in latera tubi. Q. E. I.

### Problema 3. (Fig. 148.)

7. Circumferatur tubus curvilineus $AMB$ circa polum $O$ motu quocunque inaequabili, sollicitatus scilicet ad motum a vi quacunque acceleratrice, atque in hoc tubo versetur corpus massam habens $= A$, quod pariter a viribus quibuscunque sit sollicitatum, invenire motum hujus corporis in tubo.

**Solutio.** Pervenerit post aliquod tempus tubus in situm $AMB$, ubi ejus motus rotatorius sit tantus, ut distantiae $f$ a polo $O$ respondeat celeritas debita altitudini $u$, in hac autem distantia $f$ motus rotatorius capiat accelerationem momentaneam a vi acceleratrice $S$ oriundam. Versetur hoc tempore corpus in tubi loco $M$, ad quem ducta tangente $TL$, in eamque ex $O$ perpendiculari $OT$, itemque radio $OM$, vocetur $OM = z$, $OT = y$, et $MT = x$, erit utique $zz = xx + yy$, atque si curvae in $M$ ponatur radius osculi $MR = r$, erit $r = \frac{zdz}{dy}$. Sit autem celeritas, quam corpus habet in tubo secundum directionem tangentis $ML$ debita altitudini $v$, simul vero sollicitetur a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali secundum $ML$ quae sit $= T$, altera normali secundum $MP$ quae sit $= N$; ad hujusmodi enim duas vires cunctas vires reduci posse constat. Concipiatur jam corpus $A$ per punctum temporis $dt$ a tubo sejunctum, ut libere sollicitationes sequi possit, ac primo ob motum cum tubo communem absolvet in normali $MN$ ad $OM$ spatium $MN = \frac{zdt\sqrt{u}}{f}$. Deinde ob motum insitum $\sqrt{v}$ et vim tangentialem $T$ conjunctim ex $N$ secundum $NJ$ parallelam tangenti $ML$, perducetur per spatium $NJ = dt\sqrt{v} + \frac{Tdt^2}{4}$. Denique ob vim normalem $N$ ex $J$ deducetur per spatium $Jr = \frac{Ndt^2}{4}$, existente $Jr$ normali $MP$ parallela; ideoque si corpus sibi esset relictum, elapso tempusculo $dt$ reperiretur in puncto $r$. Ipse autem tubus interea ob motum insitum circa polum $O$ ita convertetur, ut ejus punctum $M$ transferatur per arculum radio $OM$ descriptum $Mn = \frac{zdt\sqrt{u}}{f}$, ob vim ejus acceleratricem vero $S$ ultra $n$ in $v$ traducetur, ut sit $nv = \frac{Szdt^2}{4f}$; quare tubus perveniet in situm $a\nu b$, ejusque punctum $M$ in punctum $\nu$, ita ut si ducatur ad $\nu$ tangens $t\nu q$, in eamque demittatur ex $O$ perpendiculum $Ot$, futurum sit ut ante $O\nu = z$, $Ot = y$ et $t\nu = x$. Producatur radius $On$, ut secet normalem $MN$ in $N$ et tangentem $t\nu q$ in $\mu$, erit ut ante vidimus

$$Nn = \frac{MN^2}{2OM} = \frac{zudt^2}{2ff};$$

tum vero ob triangula $\mu\nu n$ et $\nu Ot$ similia erit

$$\mu\nu = \frac{z}{y}\cdot n\nu = \frac{Szzdt^2}{4fy} \quad \text{et} \quad n\mu = \frac{x}{y}\cdot n\nu = \frac{Sxzdt^2}{4fy},$$

hinc erit
$$N\mu = \frac{Sxzdt^2}{4fy} - \frac{zudt^2}{2ff}.$$

Ex $N$ ad $\nu q$ demittatur perpendiculum $No$, erunt triangula $\mu No$ et $\nu Ot$ similia, ac propterea

$$No = \frac{y}{z}\cdot N\mu = \frac{Sxdt^2}{4f} - \frac{yudt^2}{2ff}, \quad \text{et} \quad o\mu = \frac{x}{z}\cdot N\mu = \frac{Sxxdt^2}{4fy} - \frac{xudt^2}{2ff},$$

hincque
$$\nu o = \frac{Sydt^2}{4f} + \frac{xudt^2}{2ff},$$

ob $zz - xx = yy$; erit vero $oq = NJ = ML$, inclinantur enim $NJ$ et $oq$ ad se invicem angulo infinite parvo

$$= MO\nu = \frac{M\nu}{MO} = \frac{dt\sqrt{u}}{f} + \frac{Sdt^2}{4f},$$

cujus sinus cum sit ipsi angulo aequalis, erit

$$Jq - No = \frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}$$

omissis ipsius $dt$ potestatibus altioribus, utpote infinities minoribus. Hinc erit

$$Jq = \frac{Sxdt^2}{4f} - \frac{yudt^2}{2ff} + \frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}.$$

Secet perpendicularis $Jr$ curvam in puncto $m$, erit

$$qm = \frac{vq^2}{2r} = \frac{vdt^2}{2r},$$

ideoque
$$mr = rJ - Jq + qm = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{vdt^2}{2r} - \frac{Sxdt^2}{4f} + \frac{yudt^2}{2ff} - \frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}.$$

Cum igitur corpus ex $r$ in $m$ tempusculo $dt$ reduci debeat, requiritur ad hoc vis motrix

$$= A\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2yu}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right),$$

tantam ergo pressionem corpus in tubum exeret secundum directionem normalis $MP$. Quoniam vero post tempusculum $dt$ corpus in $m$ pervenit ultra spatium $om$, quod ejus motui et vi tangentiali convenit, confecisse censendum est spatium $vo = \frac{Sydt^2}{4f} + \frac{xudt^2}{2ff}$, quare praeter vim tangentialem $T$ sollicitari putandum est in tubo vi acceleratrice $\frac{Sy}{f} + \frac{2xu}{ff}$. Hanc ob rem si spatium, quod corpus in tubo tempusculo $dt$ absolvit, ponatur $= ds = \frac{zdz}{x}$, erit

$$dv = Tds + \frac{Syds}{f} + \frac{2xuds}{ff} = Tds + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Syds}{f}.$$

Tum vero ob accelerationem tubi a vi $S$, si ponatur punctum tubi, quod a polo $O$ intervallo $= f$ distat, tempusculo $dt$ percurrere arculum $= d\sigma$, erit $du = Sd\sigma$, unde primum $u$ seu tubi celeritas in quovis situ determinabitur. Deinde ob $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{u}} = dt$ definietur celeritas tubi $\sqrt{v} = \frac{ds\sqrt{u}}{d\sigma}$, qui valor in superiore aequatione $dv = Tds + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Syds}{f}$ substitutus, dabit relationem inter $s$ et $\sigma$, sicque ad quodvis tempus situs tubi, locus corporis in eo et utriusque celeritas innotescet. Q. E. I.

8. **Scholion.** Assumsimus in his propositionibus motum tubi a pressione corporis in illo moti omnino non affici, sicque in duabus prioribus tubo motum tribuimus uniformem, in hac posteriori autem motum talem, qualis a vi $S$ tubum sollicitante oriri debet. Scilicet hactenus massam seu vim inertiae tubi tanquam infinitam prae massa corporis $A$ spectavimus, nunc autem rationem finitam statuamus inter massam tubi et massam corporis $A$, quo fiet, ut non solum motus tubi a pressione corporis perturbetur, sed etiam ipsius corporis motus in tubo alius proveniat, atque hic est determinatus.

### **Problema 4.** (Fig. 148.)

9. Gyretur tubus curvilineus $AMB$, circa polum fixum $O$ sollicitatus, a viribus quibuscunque, cujus massa seu inertia sit $= M$, in eo autem versetur corpus massam habens $= A$, pariter a vi quacunque sollicitatum; determinare motum tam tubi, quam corporis in eo inclusi.

**Solutio.** Sit, ut ante, tubi in situ $AMB$ versantis celeritas rotatoria in distantia $f$ a polo $O$ debita altitudini $u$, atque in hac eadem distantia acceleretur a vi acceleratrice $=S$. Versetur corpus in hoc tubi situ in $M$, ubi habeat motum in tubo cum celeritate debita altitudini $v$, secundum directionem tangentis $ML$; praeterea autem sollicitetur a duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali secundum $ML$, quae sit $=T$, altera normali secundum $MP$, quae sit $=N$. Demittatur ex $O$ in tangentem perpendiculum $OT$, sitque $OM=z$, $OT=y$ et $MT=x$. Corpus igitur habebit duplicem motum, alterum proprium in tubo in directione $ML$ cum celeritate $=\sqrt{v}$, alterum cum tubo communem in directione $MN$ ad radium $OM$ normali, cum celeritate, quae se habeat ad celeritatem angularem $\sqrt{u}$ in distantia $f$ uti $OM=z$ ad $f$, erit ergo corporis celeritas secundum directionem $MN=\frac{z}{f}\sqrt{u}$. Concipiatur nunc primum corpus a tubo non contineri, sed perinde ac si tubus abesset moveri posse, atque id tempusculo $dt$ primum ob motum secundum $MN$ deducetur per spatium $MN=\frac{zdt\sqrt{u}}{f}$, tum ex $N$ ob motum secundum $ML$ et vim tangentialem $T$ traducetur in $J$, ut sit $NJ=dt\sqrt{v}+\frac{Tdt^2}{4}$, et $NJ$ parallela ipsi $ML$. Denique ob vim normalem $N$ corpus ex $J$ in $r$ deferetur, ut sit $Jr=\frac{Ndt^2}{4}$, eritque adeo tempusculo $dt$ praeterlapso locus corporis in $r$. Ipse autem tubus interea ob motum insitum gyrabitur per angulum $MOn$, ut sit arculus $Mn=\frac{zdt\sqrt{u}}{f}$, praeterea vero ob accelerationem a vi $S$ oriundam conficiet particulam $n\nu=\frac{Szdt^2}{4f}$; ita ut nunc tubus teneat situm $a\nu b$, et punctum $M$ in $\nu$ pervenerit. Ducatur in $\nu$ tangens $t\nu q$, quae rectam $J\nu$ secet in $q$, curva autem $a\nu b$ hanc rectam secet in $m$. Ex $N$ in $\nu q$ demittatur perpendiculum $No$, erit ut ante ostendimus

$$No=\frac{Sxdt^2}{4f}-\frac{uydt^2}{2ff} \quad \text{et} \quad \nu o=\frac{Sydt^2}{4f}+\frac{uxdt^2}{2ff};$$

ideoque

$$\text{arcus } \nu m=dt\sqrt{v}+\frac{Tdt^2}{4}+\frac{Sydt^2}{4f}+\frac{uxdt^2}{2ff},$$

et si curvae in $M$ ponatur radius osculi $MR=r$, erit recta

$$rm=\frac{Ndt^2}{4}+\frac{vdt^2}{2r}-\frac{Sxdt^2}{4f}+\frac{uydt^2}{2ff}-\frac{dt^2\sqrt{vu}}{f}.$$

Si igitur corpus non esset in tubo inclusum post tempusculum $dt$, tubus teneret situm $a\nu b$ et corpus foret in $r$; quamobrem vis erit concipienda in tubum normaliter agens, quae tempusculo $dt$ tubum et corpus ad se mutuo adducat. Ponatur haec vis tantisper $=P$, quae corpus in directione $rm$ urgendo tempusculo $dt$ promoveat in $\omega$, (Fig. 149) tubum vero in directione $mr$ sollicitando perducat in situm $\alpha\pi\beta$, ita ut corpus in punctum tubi $\omega$ reducatur. Cum igitur vis acceleratrix corporis $A$ in $r$ sit $=\frac{P}{A}$, erit spatiolum $r\omega=\frac{Pdt^2}{4A}$. Ad motum autem tubi hinc oriundum definiendum multiplicentur singulae tubi partes per quadrata distantiarum ab axe $O$, circa quem mobiles existunt, sit horum productorum omnium summa $=Mkk$, vis autem $P$, quae etiam in puncto $\nu$ applicata concipi potest, momentum respectu axis $O$ erit $=Px$, unde oritur vis acceleratrix tubi in puncto $\nu=\frac{Pxz}{Mkk}$, a qua punctum $\nu$ traducetur in $\pi$, ut sit $\nu\pi=\frac{Pxzdt^2}{4Mkk}$; ex $\nu$ in tangentem

$\vartheta\pi\varphi$ demittatur perpendiculum $\nu\varrho$, erit $\pi\varrho = \frac{Pxydt^2}{4Mkk}$ et $\nu\varrho = \frac{Pxxdt^2}{4Mkk}$. Ipsi $\nu\varrho$ autem aequalis erit $m\omega$, unde cum sit $m\omega + r\omega = rm$, fiet

$$\frac{Pxxdt^2}{4Mkk} + \frac{Pdt^2}{4A} = mr, \quad \text{ideoque} \quad P = \frac{4AMkk}{(Axx+Mkk)dt^2}\cdot mr = \frac{AMkk}{Axx+Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right);$$

quae vis praebet pressionem, quam corpus in tubum secundum directionem normalis $MP$ exerit. Ab hac igitur restitutione tubus magis acceleratur, dum ultra $a\nu b$ in situm $\alpha\pi\beta$ perducitur; atque haec acceleratio tanta est, quanta proficisceretur a vi acceleratrice in distantia $f$ a polo $O$ urgente

$$= \frac{Pfx}{Mkk} = \frac{Afx}{Axx+Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right).$$

Quare si tubi punctum intervallo $f$ a polo $O$ distans tempusculo $dt$ circa $O$ conficiat arculum $= d\sigma$, erit

$$du = Sd\sigma + \frac{Afxd\sigma}{Axx+Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right).$$

Deinde quia corpus post tempusculum $dt$ in puncto tubi $\omega$ reperitur, spatium adhuc majus quam $\nu m$ interea in tubo conficiat necesse est, spatium scilicet $\pi\varrho\omega$, quod illud superat particula

$$\pi\varrho = \frac{Pxydt^2}{4Mkk},$$

quae producitur a vi acceleratrice

$$= \frac{Pxy}{Mkk} = \frac{Axy}{Axx+Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right).$$

Jam ante autem accelerationem est passum, eo quod spatium $\nu m$ majus erat quam $ML$ particula

$$\frac{Sydt^2}{4f} + \frac{uxdt^2}{2ff}, \text{ quae nascitur a vi acceleratrice } \frac{Sy}{f} + \frac{2ux}{ff}.$$

Consequenter si corpus tempusculo $dt$ in tubo percurrat spatiolum $ds$, erit

$$dv = Tds + \frac{Syds}{f} + \frac{2uxds}{ff} + \frac{Axyds}{Axx+Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right),$$

unde ob $ds = \frac{zdz}{x}$ evenit

$$dv = \frac{Tzdz}{x} + \frac{Syzdz}{fx} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Ayzdz}{Axx+Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right),$$

et quia spatiola $ds$ et $d\sigma$ eodem tempusculo $dt$ percurruntur, erit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{u}}$. Quare cum ex duabus aequationibus inventis definiantur $v$ et $u$, motus tam tubi quam corporis in eo inclusi cognoscetur. Q. E. I.

10. **Coroll. 1.** Vis viva tubi in hoc situ est $= \frac{Mkk}{ff}u$; altitudo autem celeritati corporis in $M$ verae debita reperitur $= v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff}$, unde vis viva corporis in tubo insiti erit

$$= A\left(v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff}\right);$$

hinc vis viva totalis tubi et corporis est $= \frac{Mkku}{ff} + Av - \frac{2Ay\sqrt{vu}}{f} + \frac{Azzu}{ff}$

11. **Coroll. 2.** Ponatur altitudo debita celeritati corporis verae $= w$, erit

$$w = v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff};$$

seu ob $zz = xx + yy$ erit

$$w - \frac{xxu}{ff} = v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{yyu}{ff} = \left(\sqrt{v} - \frac{y\sqrt{u}}{f}\right)^2,$$

unde fit $\sqrt{v} = \frac{y\sqrt{u}}{f} + \sqrt{\left(w - \frac{xxu}{ff}\right)}$.

12. **Coroll. 3.** Cum sit $w = v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff}$, erit

$$dw = dv - \frac{2dy\sqrt{vu}}{f} - \frac{ydv\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} - \frac{ydu\sqrt{v}}{f\sqrt{u}} + \frac{2zudz}{ff} + \frac{zzdu}{ff}.$$

At est $r = \frac{zdz}{dy}$; unde erit $dy = \frac{zdz}{r}$, ex quo habetur

$$dw = dv - \frac{2zdz\sqrt{vu}}{fr} - \frac{ydv\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} - \frac{ydu\sqrt{v}}{f\sqrt{u}} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{zzdu}{ff}.$$

13. **Coroll. 4.** Quia est $ds = \frac{zdz}{x}$ et $d\sigma = \frac{ds\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, erit $d\sigma = \frac{zdz\sqrt{u}}{x\sqrt{v}}$. Ponatur brevitatis gratia

$$Q = \frac{Aff}{Axx + Mkk}\left(N + \frac{2v}{r} - \frac{Sx}{f} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f}\right); \text{ erit}$$

$$dv = \frac{Tzdz}{x} + \frac{Syzdz}{fx} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Qyzdz}{ff};$$

$$\text{et} \quad du = \frac{Szdz\sqrt{u}}{x\sqrt{v}} + \frac{Qzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}}.$$

Pressio vero, quam tubus sustinet in directione normali $MP$, erit $= \frac{Mkk}{ff}Q$.

14. **Coroll. 5.** Si isti valores in expressione differentialis $dw$ substituantur, obtinebitur sequens expressio

$$dw = \frac{Tzdz}{x} + \frac{Syzdz}{fx} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Qyzdz}{ff} - \frac{2zdz\sqrt{vu}}{fr} - \frac{Tyzdz\sqrt{u}}{fx\sqrt{v}} - \frac{Syyzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}} - \frac{2uyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} - \frac{Qyyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}}$$
$$- \frac{Syzdz}{fx} - \frac{Qyzdz}{ff} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{Sz^3dz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}} + \frac{Qz^3dz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}}.$$

Qua reducta obtinebitur

$$dw = \frac{Tzdz}{x}\left(1 - \frac{y\sqrt{u}}{f\sqrt{v}}\right) + \frac{4uzdz}{ff} - \frac{2uyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} + \frac{Sxzdz\sqrt{u}}{ff\sqrt{v}} - \frac{2zdz\sqrt{vu}}{fr} + \frac{Qxxzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}}.$$

15. **Coroll. 6.** Quia est vis viva totalis $= \frac{Mkku}{ff} + Aw$, erit incrementum vis vivae

$$Adw + \frac{Mkkdu}{ff} = \frac{ATzdz}{x}\left(1 - \frac{y\sqrt{u}}{f\sqrt{v}}\right) + \frac{4Auzdz}{ff} - \frac{2Auyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} - \frac{2Azdz\sqrt{vu}}{fr} + \frac{ASxzdz\sqrt{u}}{ff\sqrt{v}} + \frac{AQxxzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}}$$
$$+ \frac{MSkkzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}} + \frac{MQkkzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}}.$$

Est vero $\frac{AQxxzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} + \frac{MQkkzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} = (Axx + Mkk)Q\frac{zdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} = \frac{ANzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} + \frac{2Azdz\sqrt{vu}}{fr} - \frac{ASx'zdz\sqrt{u}}{ff\sqrt{v}}$

$$+ \frac{2Auyzdz\sqrt{u}}{f^3\sqrt{v}} - \frac{4Auzdz}{ff}.$$

Quamobrem erit incrementum vis vivae

$$Adw + \frac{Mkkdu}{ff} = \frac{ATzdz}{x} - \frac{ATyzdz\sqrt{u}}{fx\sqrt{v}} + \frac{ANzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} + \frac{MSkkzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}}.$$

16. **Coroll. 7.** Si ex aequationibus elementa $dv$ et $du$ exprimentibus eliminetur $Q$, erit

$$dv = \frac{Tzdz}{x} + \frac{2uzdz}{ff} + \frac{ydu\sqrt{v}}{f\sqrt{u}}.$$

17. **Coroll. 8.** Sit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = t$ erit

$$dt = \frac{du}{2\sqrt{uv}} - \frac{dv\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} = \frac{Szdz}{2xv} + \frac{Qzdz}{2fv} - \frac{Tzdz\sqrt{u}}{2xv\sqrt{v}} - \frac{Syzdz\sqrt{u}}{2fxv\sqrt{v}} - \frac{uzdz\sqrt{u}}{ffv\sqrt{v}} - \frac{Qyzdz\sqrt{u}}{2ffv\sqrt{v}}.$$

18. **Exemplum.** Evanescant omnes vires sollicitantes $T$, $N$ et $S$, erit

$$Adw + \frac{Mkkdu}{ff} = 0; \quad \text{et} \quad Aw + \frac{Mkku}{ff} = C = Ac,$$

unde fit

$$w = v - \frac{2y\sqrt{vu}}{f} + \frac{zzu}{ff} = c - \frac{Mkku}{Aff},$$

ergo $\quad \sqrt{v} = \frac{y\sqrt{u}}{f} + \sqrt{\left(c - \frac{xxu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)} \quad$ et $\quad \frac{1}{\sqrt{u}} = \dfrac{\frac{y\sqrt{u}}{f} - \sqrt{\left(c - \frac{xxu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)}}{\frac{zzu}{ff} - c + \frac{Mkku}{Aff}}.$

Ex his fit

$$\frac{du\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = \frac{ydu}{f} + \frac{du}{\sqrt{u}}\sqrt{\left(c - \frac{xxu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)} = \frac{Qzdz}{f},$$

at est

$$Q = \frac{2v}{r} + \frac{2uy}{ff} - \frac{4\sqrt{vu}}{f} = \frac{2(yy-xx)u}{ffr} + \frac{2c}{r} - \frac{2Mkku}{Affr} + \frac{4y}{fr}\sqrt{\left(cu - \frac{xxuu}{ff} - \frac{Mkkuu}{Aff}\right)} - \frac{2uy}{ff}$$

$$- \frac{4}{f}\sqrt{\left(cu - \frac{xxuu}{ff} - \frac{Mkkuu}{Aff}\right)}.$$

Cum igitur sit $OM = O\mu = z$; $OT = y$; $\mu T = x$; sit $OS = Os = f$; $Cs = q$, erit $Ss = dq$; at $S\sigma = d\sigma$ et $m\mu = ds$; erit $\mu n = \frac{yds}{z}$, et $s\sigma = d\sigma - dq$; unde

$$f : z = d\sigma - dq : \frac{yds}{z} \quad \text{et} \quad \frac{fyds}{zz} = d\sigma - dq,$$

ergo $\quad dq = d\sigma - \frac{fyds}{zz} = \frac{zdz\sqrt{u}}{x\sqrt{v}} - \frac{fydz}{xz}, \quad$ ob $\quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}},$

ergo $\frac{v}{u} = \frac{ds^2}{d\sigma^2}$; hinc $v = \frac{uds^2}{d\sigma^2}$ et $C = u\left(\frac{Ads^2}{d\sigma^2} - \frac{2Ayds}{fd\sigma} + \frac{Azz}{ff} + \frac{Mkk}{ff}\right)$ at $ds = \frac{zdz}{x}$;

sit $a\sigma = p$, erit $z : y = ds : \frac{z}{f}dp$, ergo $yds = \frac{yzdz}{x} = \frac{zzdp}{f}$, et $\frac{y}{x} = \frac{zdp}{fdz}$: hinc $d\sigma = dq + dp$.

At ex superiori aequatione est

$$\frac{ydu}{f} + \frac{du}{\sqrt{u}}\sqrt{\left(c - \frac{zzu}{ff} + \frac{yyu}{ff} - \frac{Mkku}{Aff}\right)} =$$

$$\frac{2(2yy - zz)udy}{f^3} + \frac{2cdy}{f} - \frac{2uyzdz}{f^3} - \frac{2Mkkudy}{Af^3} + \frac{4(ydy - zdz)}{ff}\sqrt{\left(cu - \frac{zzu}{ff} + \frac{yyu}{ff} - \frac{Mkkuu}{Aff}\right)}.$$

Porro erit $\frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v} = Af\sqrt{b}$.

19. **Coroll. 9.** Si quantitas motus rotatorii ubique per distantiam a polo multiplicetur, et summa omnium productorum vocetur momentum motus rotatorii: erit casu generaliter pertractato momentum motus rotatorii

$$= \frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v}.$$

20. **Coroll. 10.** Differentiale autem hujus momenti motus rotatorii erit

$$d\left(\frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v}\right) = \frac{MSkkzdz}{2fx\sqrt{v}} - \frac{ATyzdz}{2x\sqrt{v}} + \frac{ANzdz}{2\sqrt{v}}.$$

21. **Coroll. 11.** Sit $\frac{Mkku}{ff} + Av - \frac{2Ay\sqrt{vu}}{f} + \frac{Azzu}{ff} = V$ et $\frac{Mkk\sqrt{u}}{f} + \frac{Azz\sqrt{u}}{f} - Ay\sqrt{v} = R$, erit

$$dV = \frac{ATzdz}{x} - \frac{ATyzdz\sqrt{u}}{fx\sqrt{v}} + \frac{ANzdz\sqrt{u}}{f\sqrt{v}} + \frac{MSkkzdz\sqrt{u}}{ffx\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad dR = \frac{ANzdz}{2\sqrt{v}} - \frac{ATyzdz}{2x\sqrt{v}} + \frac{MSkkzdz}{2fx\sqrt{v}}.$$

Ex illis autem aequationibus definiuntur $u$ et $v$.

22. **Coroll. 12.** (Fig. 150.) Sin autem sit $CS = q$, $Ss = dq$, $OM = z$, quia ob curvam $AM$ cognitam dantur $y$ et $x$ per $z$; erit

$$dq = \frac{zdz\sqrt{u}}{x\sqrt{v}} - \frac{fydz}{xz},$$

in qua si substituantur loco $v$ et $u$ valores inventi, reperietur aequatio pro curva $DM$, quam corpus describit.

23. **Coroll. 13.** Erit autem $\frac{V}{RR} = \frac{Mkku + Affv - 2Afy\sqrt{vu} + Azzu}{(Mkk + Azz)^2u - 2Afy(Mkk + Azz)\sqrt{vu} + A^2ffyyv}$,

sit $E = Mkk + Azz$, $s = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ et $\frac{V}{RR} = F$, erit

$$FE^2 ss - 2AFEfys + AFffyy = Ess - 2Afys + Aff,$$

ergo
$$ss = \frac{2AFEfys - 2Afys - AFffyy + Aff}{FE^2 - E}$$

et
$$s = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{AFEfy - Afy \pm \sqrt{(A^2 FEffyy + A^2 ffyy + AFE^2 ff - AEff)}}{FE^2 - E}.$$

24. **Coroll. 14.** Restitutis ergo valoribus loco $E$ et $F$ reperietur

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{Afy + Rf\sqrt{\dfrac{A(Mkk + Axx)}{V(Mkk + Azz) - RR}}}{Mkk + Azz}.$$

Posito vero $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = s$ erit $(Mkk + Azz)s\sqrt{v} - Afy\sqrt{v} = R$

$$\text{et} \quad \sqrt{v} = \frac{R}{(Mkk + Azz)s - Afy} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{V(Mkk + Azz) - RR}{A(Mkk + Axx)}},$$

ergo
$$\sqrt{u} = \frac{R + Ay\sqrt{\dfrac{V(Mkk + Azz) - RR}{A(Mkk + Axx)}}}{Mkk + Azz}.$$

# VIII.

## Recensio litterarum a Cl. D. Bernoullio Basilea die 26 Oct. 1735 ad me datarum, una cum annotationibus meis.

---

Omnes sane Geometrae, sicut nos, ex ea re luctum percepere, quod gravissimi epistolarum commercii, quas per triginta annos Eulerum et Danielem Bernoullium sibi mutuas misisse constat, non nisi pars altera a nobis edi potuit, frustra enixis, ut ipsius Euleri epistolas ad celeberrimum urbis Basileae Mathematicum missas detegeremus. Persuasum vero nobis est, lectores eo laetius commentatiunculam Eulerianam accepturos esse, de re saepius utrinque examinata, i. e. de laminarum elasticarum oscillationibus tractantem, cujus elaborandae epistola Bernoulliana, die 26 Oct. A. 1735 scripta, Eulero occasionem praebuerat. Meditationes, quas commentatio exhibet, etiam responsi Euleriani materiem fuisse, conjicimus. Sed commentatio, quam damus, ut lectores videbunt, non est epistola, sed inscriptionem offert ipsius Euleri manu appositam, qualem citavimus. Epistola Bernoulliana in collectionis nostrae (*Correspondance*) Vol. II pp. 427 ad 430 typis expressa legitur, cujus vero eas partes, quas Recensio Euleriana spectat, hoc loco iterum typis describere idoneum duximus:

— — «Ich schreite nun zu den Mathematicis. Ew. Observationen *de vibrationibus laminae elasticae* «kommen mit meinen überein. Das Notabelste, so dabei auszurechnen, ist dieses: (Fig. 151) *Data* «*longitudine laminae elasticae* AD *vel* AB, *dato ejus pondere*, *dataque distantia* DB *appenso ponderi debita*, «*cujus ope elasticitas habetur*, *invenire numerum absolutum vibrationum pro dato tempore*. Ich erwarte «Ew. mathematischen Brief mit grossem Verlangen. Occasione des Hn. König's problematum, habe «ich die leges motuum a percussione, quando directio impulsus non per centrum gravitatis transit, «generalissime solviret. Mein Vater ist über diesen Punkt nicht meiner Meinung, und hat eine «andere Solution: ich glaube aber, dass er die Sach nur obiter betrachtet, denn ich bin in meiner «Solution gewiss. Ew. sagen mir von den oscillationibus einer Wiege; ich habe solche auch aus«gerechnet, nämlich deren Durationen, quando sunt infinite parvae. Meine Solution ist diese: «(Fig. 151) Sit $ACB$ pavimentum horizontale, cui se applicat arcus $DCE$, utcunque gravis et one«ratus; sit centrum gravitatis totius systematis in $R$, ducatur verticalis $CRF$; sit $F$ centrum oscil-

«lationis pro puncto suspensionis $C$; sit radius osculi in $C = R$, $CR = b$, $CF = \beta$: erit longitudo «penduli isochroni cum vibrationibus arcus $DCE = \frac{\beta b}{R-b}$.

«Neulich hat mich ein fremder Gelehrter gebeten zu untersuchen, wie viel Wasser ungefähr «in einer Secunde den Rhein hinunterlaufe; da ich gefunden, dass eins ins andere gerechnet, man «15000 cubische Schuh rechnen könne.

«Es ist wieder ein tomus von den Pariser Mémoires herausgekommen, aber von mathematicis, «physicis und mechanicis wenig darin; wenn Sie belieben, kann ich Ihnen eine kleine Recension «davon schicken. Der Hr. Bouguer und der Hr. Maupertius haben einige Sachen darin von courbes «de poursuite, welche nämlich ein Schiff beschreibt, wenn es allezeit grad los läuft auf ein ander «Schiff, so in einer geraden Linie geht velocitatibus utrobique constantibus. Man könnte über diese «Materie viel problemata erdenken. — — —

*Editores.*

---

Jam pridem D. Bernoullius mihi proposuit problema de oscillationibus laminae elasticae, altero termino muro infixae determinandis; cujus problematis solutionem quoque nuper in dissertatione de minimis oscillationibus cujusque generis corporum fuse sum persecutus (*). Perscripsi etiam jam ante aliquot menses solutionem meam Cl. D. Bernoullio, qui in his litteris mihi significat meam solutionem cum sua egregie convenire. Proponit mihi autem de eadem materia hanc novam quaestionem, ut ipse oscillationum numerus, quas data lamina dato tempore sit editura, definiatur. Pendet vero, uti ego etiam in citata dissertatione ostendi, celeritas oscillationum tum a longitudine laminae, tum a quantitate elasticitatis. Quamobrem ad hanc quaestionem resolvendam requiritur, ut certo quodam experimento quantitas elasticitatis determinetur. Ipse igitur D. Bernoulli mecum communicat eandem, qua ipse utitur, elasticitates metiendi rationem, quo eo facilius de consensu nostrarum solutionum constet. Eandem laminam (Fig. 151) $Ba$ muro in $B$ infixam, cujus oscillationum numerus desideratur, ope ponderis $Q$ ex situ naturali $Ba$ in statum $BA$ deduci jubet, et tum observari distantiam $Aa$. Datis enim pondere $Q$ et distantia $Aa$ una cum longitudine laminae $BA$, quantitas elasticitatis inde determinatur. Assumsi ego vero in dissertatione mea litteram $A$ ad absolutam elasticitatis quantitatem exprimendam, et laminae incurvatae vim elasticam in singulis punctis posui aequalem ipsi $\frac{A}{r}$, denotante $r$ radium osculi in quovis loco. Posita vero longitudine laminae $= a$, inveni in cit. loco laminae hujus oscillationes minimas isochronas fore cum oscillationibus penduli simplicis, cujus longitudo sit $= \frac{2a^4}{25A}$. Quocirca quo ista longitudo absolute determinetur, oportet quantitatem $A$ ex supra posito experimento per $Aa$ et pondus $Q$ determinare.

Quia lamina nostra $Ba$ a pondere $Q$ in statum aequilibrii est deducta, curva $BMA$ erit elastica, cujus naturam per eadem data investigari oportet. Ducta applicata $PM = y$, sit abscissa $Pa = x$ et curva $AM = s$, itemque radius osculi in $M = r$, qui est $= -\frac{ds\,dy}{ddx}$ vel $\frac{ds\,dx}{ddy}$, posito $ds$ constante. Erit ergo vis elastica in $M$ meo exprimendi modo, quo in ipso problemate sum usus, $= \frac{A}{r} = \frac{Addy}{dx\,ds}$, quae per generale meum theorema aequalis esse debet $Qx$, unde prodit ista aequatio $\frac{Ady}{ds} = \frac{Qx^2}{2} + C$.

(*) Commentarii Acad. Petrop. T. VII. p. 99.

Incidente $M$ in $B$, quia lamina ibi est muro infixa, erit ibi $dx = ds$. Ponatur ergo $Ba = h$, erit $C = \frac{-Qh^2}{2}$, ipsa vero curva $AMB$ sit $= a$ longitudini laminae oscillantis. Habetur ergo ista aequatio $\frac{2A\,dy}{ds} = Qx^2 - Qh^2$. Sit distantia $Aa$, quae est data $= b$, debebit ista aequatio ita integrari, ut facto $x$ vel $s = 0$, fiat $y = b$. Deinde posito $y = 0$, seu $x = h$, fieri debet $s = a$, unde quantitas $A$ determinabitur, quae formula inventa substituta dabit veram penduli simplicis isochroni longitudinem. Prodibunt autem sequentes aequationes

$$dy = \frac{-dx\,(h^2 - x^2)}{\sqrt{\left(\frac{4A^2}{Q^2} - (h^2 - x^2)^2\right)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{\frac{2A}{Q}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{4A^2}{Q^2} - (h^2 - x^2)^2\right)}}.$$

Posito $\frac{h^2 Q}{2A} = C$, si hae aequationes differentiales integrentur praescripto modo et post integrationem ponatur $x = h$, habebuntur per series sequentes aequationes

$$\frac{b}{h} = \frac{2}{1.3}C + \frac{4.6}{3.5.7}C^3 + \frac{6.8.10}{5.7.9.11}C^5 + \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad \frac{a}{h} = 1 + \frac{4}{3.5}C^2 + \frac{6.8}{5.7.9}C^4 + \text{etc.}$$

Cum vero $h$ ex observatione aeque pro quantitate cognita haberi possit ac $a$ et $b$, ponamus eam datam, eritque proxime

$$C = \frac{h^2 Q}{2A} = \frac{3b}{2h} - \frac{81b^3}{70h^3} = \frac{105bh^2 - 81b^3}{70h^3}$$

ideoque $A = \frac{35h^5 Q}{105bh^2 - 81b^3}$. Sumsi autem in expressione penduli simplicis isochroni $\frac{2a^4}{25A}$ quantitatem $a$ tam pro pondere laminae oscillantis, quam pro longitudine laminae. Quo igitur pondus $Q$ cum pondere laminae comparari queat, pono pondus laminae $= P$, eritque longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{2a^3 P}{25A}$. Quamobrem quaesita longitudo penduli simplicis isochroni erit

$$= \frac{6a^3 bP(35h^2 - 27b^2)}{875h^5 Q}$$

quamproxime. Cum autem longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis sit $3166\,{}^1/_4$ scrupulorum pedis Rhenani, si longitudo laminae $a$ in hujusmodi scrupulis exhibeatur, dabit

$$\frac{667h^2\sqrt{hQ}}{a\sqrt{abP(35h^2 - 27b^2)}}$$

numerum oscillationum, quas ista lamina uno minuto secundo absolvet. Si ergo unico experimento investigetur, quousque laminam datum pondus $Q$ de situ verticali deducere valeat, ope hujus formulae cognoscetur statim numerus oscillationum, quas ista lamina oscillans uno minuto secundo absolvet. Haec quidem expressio, quam dedi, tantum est verae proxima; nihilo tamen minus ista solutio veram oscillationum determinationem continet, cum hinc simul intelligatur, a quibusnam quadraturis vera oscillationum duratio pendeat. Problema ergo isthoc Bernoullianum huc redit, ut experimento quopiam valor litterae $A$, qua elasticitatem absolutam designavi, definiatur, id, quod

ipsi per curvaturam laminae a dato pondere genitam explorare placuit. Mihi quidem loco hujusmodi experimenti commodius videtur valorem litterae $A$ per ipsum oscillationum numerum, qui observatione facile innotescere potest, determinare.

In litteris praeterea iisdem, in quibus Cl. Bernoullio solutionem meam problematis de vibrationibus laminae elasticae perscripsi, mentionem simul feci de oscillationibus corporum super plano vacillantium, cujusmodi est motus cunarum, cujus problematis solutionem quoque dedi in ante citata dissertatione mea. Ipse ergo Bernoullius in his litteris quoque suam hujus problematis solutionem exponit, et longitudinem penduli simplicis isochroni determinat ex radio osculi corporis in puncto contactus, quem ponit $= R$, distantia centri gravitatis totius corporis a puncto contactus, quam ponit $= b$, et praeterea ex distantia centri oscillationis corporis, si ex puncto contactus suspensum oscillationes perageret a puncto contactus, quam ponit $= \beta$, ex hisque invenit longitudinem penduli simplicis isochroni $= \frac{b\beta}{R-b}$. Haec expressio egregie congruit cum mea formula, quam § 27 dissertationis meae pro longitudine penduli simplicis isochroni dedi, ubi iisdem quantitatibus ad hanc determinationem sum usus.

Praeter haec mihi quoque Bernoullius nunciat, se rogatu cujusdam viri docti investigasse quantum aquae singulis minutis secundis a Rheno Basileae devehatur, seque invenisse hanc aquae copiam circiter 15000 pedes cubicos adaequare.

Novum etiam scribit prodiisse tomum commentariorum Academiae Parisinae, in quo autem perparum circa mathesin et physicam contineatur. Duarum tantum solutionum a Cll. Bouguero et Maupertuisio datarum mentionem facit ejusdem problematis, in quo via requiritur navis aequabiliter motae et cursum suum perpetuo versus aliam navim, in recta aequabiliter progredientem, dirigentis. Problema quidem hoc est mere geometricum, et facillime ad aequationem differentialem pro curva quaesita pervenitur, quae etiam nisi in casu, quo celeritates utriusque navis ponuntur aequales, semper integrationem admittit. Equidem memini me in idem hoc problema jam ante complures annos, cum Basileae adhuc degissem, incidere, hoc tantum discrimine, quod loco navium duos viatores consideraverim, et illo tempore solvere.



# IX.

## De oscillationibus annulorum elasticorum.

§ 1. (Fig. 154.) Si habeatur annulus $ADBEA$ elasticus, eique alicubi impetus imprimatur, mutabit is formam circularem, sed rursus, ob elasticitatem, se restituet, verum nimis, et ita oscillationes peraget. Hac dissertatione constitui oscillationes hasce persequi, et tempora earum ex legibus mechanicis determinare; quo facto, fundamenta quasi erunt jacta ad oscillationes campanarum pulsarum aliorumque corporum definiendas.

§ 2. Annulo hoc alicubi pulso, curvatura ibi minuetur, in alio loco augebitur, et ita figuram induet quamproxime ovalem. Sit (Fig. 155.) annulus $ADBE$, quem nunc tantum peripheria circuli indigito; is si in $A$ pulsetur, punctum $A$ abibit in $a$, et $B$ in $b$; puncta vero $D$ et $E$ in $d$ et $e$, eritque annuli figura tum $adbea$, quam habebo pro elliptica. Talis autem debet esse haec ellipsis, ut ejus peripheria circuli peripheriae aequetur; id quod fiet, si ejus axis transversus tantum superet diametrum circuli, quantum haec diameter superat axem conjugatum, in excursionibus nimirum quamminimis, ut $Aa$, $Bb$ pro infinite parvis haberi queant.

§ 3. Annulus hoc in situ constitutus, sicut chorda pulsa, se conabitur restituere, et quemadmodum ibi quaevis particula vi tendit in statum naturalem, quae est ut distantia ab eodem; simili modo in nostro casu res se habebit, ut, quo una particula longius distat a circulo, eo fortius ea tendat ad eundem. Sed prosequor haec accuratius, ut pateat, quanta vi singulae particulae sollicitentur.

§ 4. (Fig. 156.) Sit $AabB$ portio infinite parva annuli; consideretur ea bipartita linea $Ee$. Dum annulus pulsatur, acquirat haec portio majorem curvaturam, ut $AaebB$, sitque arcus $aeb$ aequalis in sup. fig. arcui $aeb$; tum ergo arcus $AB$ major erit sup. $AB$; quapropter particulae $AaeE$ et $BbeE$, quae erunt contiguae, nunc abibunt in $AaeE$ et $Bbe\varepsilon$, dehiscentes angulo $Ee\varepsilon$, qui hoc modo invenietur: Sit radius circuli $Ca = a$, in inferiore figura $ac = b$, sitque $Aa = c$ et $ab = ds$, erit in superiore figura $AEB = \frac{(a+c)ds}{a}$, in inferiore $AE\varepsilon B = \frac{(b+c)ds}{b}$, unde $E\varepsilon = \frac{(a-b)cds}{ab}$, ergo ang. $Ee\varepsilon = \frac{(a-b)ds}{ab}$.

§ 5. Ut conetur se restituere majoremque curvaturam induere, porro particulas $AaeE$ et $Bb\epsilon\varepsilon$ conjunctas esse filamentis elasticis, quae quo magis dilatentur, eo majorem habeant vim se contrahendi. Angulus ergo $Ee\varepsilon$ plenus est hujusmodi filamentis transversaliter dispositis, quae conantur latera $Ee$ et $\varepsilon e$ conjungere, et a vi horum filorum dependet cohaesio partium materiae, ex qua annulus est fabricatus. Sit haec cohaesio partium seu filamentorum vis tanta, ut (Fig. 157) series $FG=f$ et extensa ad $FJ=g$ possit pondus $P$ sustentare.

§ 6. (Fig. 157.) Sit ergo angulus $Ee\varepsilon$, in quo $Ee=c$ et $E\varepsilon=\frac{(a-b)cds}{ab}=dt$. Accipiatur $eM=x$ et $Mm=dx$, erit spatiolum $MmnN$ plenum filamentorum. Quaeritur ergo quanta vi $Mm$ ad $Nn$ trahatur. Hoc modo infero: Series filorum longitudinis $f$ sustentat pondus $P$; ergo longitudinis $dx$ sustentat pondus $\frac{Pdx}{f}$. Dein filamenta haec ad $g$ extensa sustentant pondus $\frac{Pdx}{f}$; ergo ad $Mn$ $(\frac{xdt}{c})$ extensa, pondus $\frac{Pxdxdt}{cfg}$. Ergo pondus in $E$ et $\varepsilon$ applicandum eadem vi coërcens latera $Ee$ et $\varepsilon e$, erit $\frac{Pxxdxdt}{ccfg}$. Consequenter pondus in $E$ et $\varepsilon$ applicandum, aequali vi coërcens latera $Ee$ et $\varepsilon e$ ac omnia filamenta simul, est

$$=\text{pond.}\ \frac{Pcdt}{3fg}=\frac{Pcc(a-b)ds}{3abfg}.$$

§ 7. Sit (Fig. 158) $M$ punctum ellipseos, in quam abit circulus in quo maxima curvatura, erit $CM$ semiaxis transversus, dicatur is $a+\omega$; erit semiaxis conjugatus $=a-\omega$, ergo radius osculi in $M=\frac{aa-2a\omega+\omega\omega}{a+\omega}$. Descendat $M$ in $m$, ut sit $Mm=dz$; erit tum $Cm=a+\omega-dz$, et radius osculi in $m=\frac{(a-\omega+dz)^2}{a+\omega-dz}$. Quod ergo ante erat $E\varepsilon=\frac{(a-b)cds}{ab}$, nunc habetur, si loco $b$ substituatur $\frac{(a-\omega)^2}{a+\omega}$, pro $M$; sed pro $m$, si fiat $b=\frac{(a-\omega+dz)^2}{a+\omega-dz}$. Quaeratur ergo differentia inter $E\varepsilon$ ad $M$ et $E\varepsilon$ ad $m$ pertinens, et ea invenitur $=\frac{(a+3\omega)cdzds}{(a-\omega)^3}$. Inveniatur jam vis, $M$ directe ad $C$ trahens et aequipollens vi, qua elementa coarctantur; sit illa $=Q$; oportet ut sit $Qdz=$ illi vi ductae in $\frac{(a+3\omega)cdzds}{(a-\omega)^3}$. Est autem illa vis $=\frac{Pcc(a-b)ds}{3abfg}$, et $b=\frac{(a-\omega)^2}{a+\omega}$, ergo

$$a-b=\frac{3a\omega-\omega\omega}{a+\omega}.$$

Cum autem $\omega$ sit infinite parvum respectu $a$, erit $b=a$ et $a-b=3\omega$, ut ergo sit

$$Qdz=\frac{Pcc\omega ds}{aafg}\cdot\frac{cdzds}{aa},\quad\text{consequenter}\quad Q=\frac{Pc^3\omega ds^2}{a^4fg}.$$

§ 8. Haec autem vis se exerit in elementum annuli $AabB$ (vid. fig. § 4), quod est $cds$, et istud elementum oscillationes efficiet, dum reliqua elementa, a similibus potentiis, quae semper sunt ut distantia a statu aequilibrii sollicitata, oscillationes eodem tempore peragunt. Requiritur vero pondus elementi $cds$. Cum autem mera superficies nullum pondus habere queat, et crassities nondum in computum sit ducta, pono crassitiem tam annuli, quam (§ 5) fasciculi filorum $FJHG$ esse $=1$, id quod calculum hucusque institutum non mutabit. Sit ergo materia annuli talis, ut moles $e^3$ ponderet $A$, erit pondus elementi $cds=\frac{Acds}{e^3}$.

§ 9. Incipiat ergo hoc elementum oscillationem (Fig. 159) a puncto $C$, sitque status aequilibrii in $A$, pervenerit illud in $M$, sitque ibi velocitas tanta, quanta ex altitudine $v$ acquiri potest. Sit $MA = \omega$, et $Mm = -d\omega$. Altitudo ea, velocitatem in $m$ producere valens $v + dv$ fiat ut $\frac{Aeds}{e^3} : -d\omega = \frac{Pc^3\omega ds^2}{a^4 fg} : dv$, erit ergo

$$dv = \frac{-Pc^2e^3\omega\, d\omega\, ds}{Aa^4 fg}.$$

Quamobrem longitudo penduli isochroni erit $= \frac{Aa^4 fg}{Pc^2e^3 ds}$. Unde sequitur, ob $ds$ in denominatore, has oscillationes fore infinitae durationis. Quod etiam revera ita se haberet, si tenacitas talis esset, ut pondus $P$ posset dictum § 5 fasciculum filamentorum ad distantiam $g$ finitam extendere. Sit ergo haec distantia $g$ infinite parva et $= ds$; erit longitudo penduli isochroni $= \frac{Aa^4 f}{Pcce^3}$. Ne autem fasciculus filorum eandem habeat crassitiem cum annulo, pono illius crassitiem esse $= h$, posseque dein sustentare pondus $B$; erit $P = \frac{B}{h}$; unde longitudo penduli isochroni $= \frac{Aa^4 fh}{Bcce^3}$.

§ 10. Cum in hac penduli expressione, quia est homogenea, amplius non contineatur unitas exprimens crassitiem annuli, unde conficitur, oscillationes non a crassitie dependere, sed omnes annulos ejusdem materiae et ejusdem diametri $a$, et in quibus $e$ idem est, quantumvis ii sint crassi, easdem edere oscillationes. Quanquam autem id in tubis longioribus et angustis minus apparet, attribui id oportet ei, quod tum sonos edant, seu oscillationes conficiant non quatenus sunt ex annulis compositi, sed ut omnia fere corpora pulsa sonos edunt, ita et ii sonos edent, non a dictis circumstantiis dependentes, sed quatenus fere sint cylindri, in quibus ad soni productionem longitudo aliquid facit; sonus autem horum plane diversus est a sono eo, quo expositum est modo producto.

§ 11. Tempora ergo oscillationum sunt ut $\sqrt{\frac{Aa^4 fg}{Bcce^3}}$, seu ut $\frac{aa}{c}\sqrt{\frac{Afg}{Be^3}}$, et soni ut $\frac{c}{aa}\sqrt{\frac{Be^3}{Afg}}$. In annulis ergo ejusdem materiae, ubi $A$, $B$, $f$, $e$ et $g$ eaedem manent, soni sunt ut $\frac{c}{aa}$, nempe in ratione simplici distantiae peripheriae exterioris ab interiore, et reciproca duplicata radii peripheriae interioris. Unde in annulis similibus, in quibus $c$ est ut $a$, soni sunt reciproce ut diametri annulorum, seu in ratione subtriplicata ponderum. Hinc excipio casum, quo $a$ valde est parvum, vel plane evanescit, et proin annulus abit in discum, qui sonum infinite acutum edere deberet; sed tum sonum non edit, quatenus est annulus, sed ut corpus quodlibet aliud. Sonus vero hic, ut facile patet, valde discrepat a sono, ab annulo exposito modo oscillante edito.

*Scriptura ad marginem cum fig.* 160. Ergo quo campana tota eundem sonum edat, debet esse $Mm$ ut $PM^2$.



## X.

# Von der Kraft der Rammen, Pfähle einzuschlagen.

(Conv. acad. exhib. d. 18 Maii 1772.)

---

1. Zuerst ist zu betrachten der Hammer selbst, dessen Gewicht gesetzt wird $= P$, und die Höhe, aus welcher er herabfällt bis zu dem Stosse, sei $= a$; also, dass seine Geschwindigkeit in einer Secunde betragen wird $2\sqrt{ga}$, wo $g$ die Höhe bedeutet, aus der ein Körper in einer Secunde fällt. Der Kürze halber aber sei diese Geschwindigkeit $= c$, so dass $c = 2\sqrt{ga}$.

2. Um sich den Stoss und die Wirkung desselben auf den Pfahl deutlich vorzustellen, so soll der Hammer nicht unmittelbar auf den Pfahl stossen, sondern es soll sich dazwischen ein Elastrum, gleichsam als ein Kissen auf dem Pfahl befinden, also, dass der Stoss nicht anders, als durch dieses Kissen auf den Pfahl wirkt.

3. Im ersten Anfang sei die Dicke dieses Elastri $= \alpha$, in welchem Zustande dasselbe keinen Widerstand leistet; sobald aber dasselbe auch nur ein wenig zusammengedrückt wird, so soll sich eine elastische Kraft äussern, um dasselbe wieder in seinen natürlichen Zustand zu versetzen.

4. Dieses Kissen dienet dazu, um uns die Wirkung des Hammers auf den Pfahl, wodurch derselbe die Theilchen des Holzes zusammendrückt, auf eine bestimmtere Art zu versinnlichen.

5. Man kann sich auch statt dieses Kissens, eines mit Luft angefüllten Gefässes bedienen, auf dessen Deckel der Hammer stösst und denselben näher gegen den Boden treibet; wodurch die Luft in einen kleineren Raum zusammengedrückt wird, und also eine desto grössere Kraft ausübet. Demnach wird $\alpha$ die Höhe dieses Gefässes andeuten, wo sich die Luft noch in ihrem natürlichen Zustande befindet. Hierdurch erhalten wir nun eine Regel, nach welcher diese widerstehende Kraft bequem ausgedrückt werden kann.

6. Denn ist entweder das Kissen näher zusammengepresst, oder der Deckel des Gefässes näher gegen den Boden gedrückt worden, so dass die Dicke desselben $= y$, und also kleiner als $\alpha$ geworden, so wird sich die Dichtigkeit der nun zusammengepressten Luft verhalten wie $\alpha : y$, und also die Dichtigkeit sein $= \frac{\alpha}{y}$, und um eben soviel grösser wird auch die elastische Kraft der Luft

sein, wovon aber der Druck der natürlichen Luft abgezogen werden muss; weswegen der gegenwärtige Druck proportional sein wird dieser Formel: $\frac{\alpha-y}{y}$. Man setze demnach diese widerstehende Kraft $=A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$.

7. Aus dieser Formel erhellet, dass, wenn $y=\alpha$, und also das Kissen in seinem natürlichen Zustande sich befindet, diese Kraft $=0$ werde; dieselbe aber um so viel grösser anwachse, je kleiner $y$ wird; so dass wenn $y=0$ werden sollte, die Kraft sogar unendlich sein würde; wodurch also die ungeheure Kraft des Stosses auf eine verständliche Art wird erklärt werden können.

8. Was den Pfahl selbst betrifft, so ist nicht nur die Masse desselben, welche $=M$, zu erwägen, sondern insbesondere der grosse Widerstand, welchen derselbe antrifft, indem er in die Erde geschlagen wird. Wir wollen denselben durch den Buchstaben $Q$ andeuten, wodurch diejenige Kraft ausgedrückt wird, welche dem Pfahl widersteht, sobald er weiter in die Erde getrieben wird. Daher so lang die stossende Kraft des Hammers kleiner ist als dieser Widerstand, so lang bleibt der Pfahl unbeweglich.

9. Dieses vorausgesetzt, lasset uns betrachten, wie sich Alles nach einer Zeit von $t$ Secunden verhalten werde. Alsdann sei nun der Hammer von $A$ bis $X$ (Fig. 161) gekommen, also dass $AX=x$, und die Dicke des Gefässes sei nun $XY=y$, und folglich die Kraft desselben $=A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$, wodurch dasselbe theils dem Hammer widersteht, theils den Pfahl hinabzudrücken sich bemühet.

10. Da im Anfang das obere Ende des Pfahles in $B$ war, also, dass $AB=\alpha$, nun aber dasselbe sich in $Y$ befindet, so ist der Raum, durch den der Pfahl schon fortgetrieben worden, $BY=x+y-\alpha$; wobei aber zu merken, dass anfänglich, so lange die Kraft des Hammers den Widerstand des Pfahles $Q$ nicht zu überwinden vermögend ist, der Pfahl noch nicht weicht. So lange also wird $BY=0$ bleiben und mithin $y=\alpha-x$.

11. Nun lasst uns, nach den Grundsätzen der Bewegung, erstlich die Bewegung des Hammers bestimmen. Da nun derselbe, in der Zeit $t$, durch den Raum $AX=x$ fortgerückt ist, so ist seine Geschwindigkeit $=\frac{dx}{dt}$, und also die Beschleunigung $=\frac{ddx}{dt^2}$. Nun aber ist die forttreibende Kraft des Hammers seine Schwere $=P$, die widerstehende Kraft aber $=A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$, folglich die Kraft selbst $=P-A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$. Da nun die Masse des Hammers auch $=P$, so bekommt man

$$\frac{ddx}{dt^2}=2g\left(1-\frac{A}{P}\cdot\frac{\alpha-y}{y}\right),$$

aus welcher die Bewegung des Hammers zu bestimmen ist.

12. Hieraus lässt sich nun die Bewegung des Hammers von Anfang an, bis der Pfahl anfängt zu weichen, bestimmen; denn da alsdann $y=\alpha-x$ ist, so erhalten wir

$$\frac{ddx}{dt^2}=2g\left(1-\frac{A}{P}\cdot\frac{x}{\alpha-x}\right).$$

Man multiplicire mit $2dx$ und integrire

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2g\left(2x + \frac{2Ax}{P} + \frac{2aA}{P}\, l\,(a - x) + \text{Const.}\right).$$

Hier bedeutet $\frac{dx^2}{dt^2}$ das Quadrat der Geschwindigkeit, welche im Anfange, da $x = 0$ gesetzt worden, $= c = 2\sqrt{ga}$. Folglich bekommen wir, um $C$ zu bestimmen,

$$c^2 = 4ga = 2g\,(-\frac{2aA}{P}\, la + \text{Const.})$$

$$\text{und} \quad C = 2a - \frac{2aA}{P}\, la.$$

Daher unsere Gleichung sein wird

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 4g\,(\frac{A+P}{P}\cdot x - \frac{aA}{P}\, l\,.\,\frac{a}{a-x} + a).$$

Hieraus wird nun die Bewegung des Hammers bestimmt, so lange, bis die Kraft des Kissens dem Widerstande des Pfahles gleich wird; denn da $x$ zunimmt, so nimmt $y$ um so viel ab, und daher die Kraft $A\cdot\frac{a-y}{y}$ immer zu. Wir wollen demnach setzen, dass, wenn $x = \beta$, und also $y = a - \beta$, alsdann die Kraft des Kissens $= A\cdot\frac{\beta}{a-\beta}$ dem Widerstande des Pfahles gleich werde; also dass $Q = \frac{A\beta}{a-\beta}$, mithin $A = \frac{Q\,(a-\beta)}{\beta}$. Für den Zeitpunkt also, da der Pfahl anfängt zu rücken, werden wir haben

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 4g\,(\frac{A+P}{P}\cdot\beta - \frac{aA}{P}\, l\cdot\frac{a}{a-\beta} + a),$$

welches also nicht Statt finden kann, wenn nicht

$$\frac{A+P}{P}\cdot\beta + a > \frac{aA}{P}\, l\cdot\frac{a}{a-\beta} \quad \text{ist.}$$

Denn wenn diese Formel $= 0$ wird, ehe $x = \beta$, so hat der Stoss sein Ende erreicht; folglich wird der Pfahl nur alsdann eingeschlagen, wenn

$$a > \frac{aA}{P}\, l\cdot\frac{a}{a-\beta} - \frac{A+P}{P}\cdot\beta \quad \text{ist.}$$

13. Da von nun an nicht mehr $y = a - x$ ist, so werden wir für die fernere Bewegung des Hammers diese Gleichung zu betrachten haben:

$$\frac{ddx}{dt^2} = 2g\,(1 - \frac{A}{P}\cdot\frac{a-y}{y}),$$

und da der Pfahl schon durch den Raum $x + y - a$ hineingetrieben worden, die hineintreibende Kraft aber $= A\cdot\frac{a-y}{y}$, der Widerstand $= Q$ und die Masse des Pfahls $= M$ ist, so erhält man für die Bewegung des Pfahls folgende Gleichung:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g\,(\frac{A}{M}\cdot\frac{a-y}{y} - \frac{Q}{M}).$$

14. Man subtrahire nun die erste Gleichung von dieser, so hat man

$$\frac{ddy}{dt^2} = 2g\left(\frac{\alpha - y}{y}\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) - \frac{Q}{M} - 1\right),$$

welche mit $2dy$ multiplicirt und integrirt gibt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = 4g\left[(\alpha l y - y)\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) - \frac{Qy}{M} - y + C\right].$$

Hier muss $C$ aus dem Zeitpunkte bestimmt werden, wo der Pfahl sich zu bewegen anfängt, oder wo $y = \alpha - \beta$, und damals war die Geschwindigkeit des Pfahles noch $\frac{dx + dy}{dt} = 0$. Damals aber war

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{g}\left(\frac{A+P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right), \quad \text{folglich war}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{g}\left(\frac{A+P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right).$$

Daher bekommen wir diese Gleichung

$$\left(\frac{A+P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right) = \left[\left(\alpha l (\alpha - \beta) - \alpha + \beta\right)\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) - \frac{Q(\alpha - \beta)}{M} - \alpha + \beta + \text{Const.}\right].$$

Folglich ist

$$C = \frac{A+P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + \frac{Q(\alpha - \beta)}{M} - \left(\alpha l (\alpha - \beta) - \alpha + \beta\right)\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) + a + \alpha - \beta$$

und daher wird man haben

$$\frac{dy^2}{dt^2} = 4g\left[\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right)\left(\alpha l \frac{y}{\alpha - \beta} - y + \alpha - \beta\right) - \frac{Q}{M}(y - \alpha + \beta) - y + \alpha - \beta + \frac{A+P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right].$$

15. Da man nun diese Gleichung zwischen $y$ und $t$ gefunden, so ist noch übrig auch $x$ zu bestimmen. Zu diesem Ende multiplicire man die erste Gleichung mit $P$, und die andere mit $M$, so gibt die Summe derselben

$$\frac{(P + M)\, ddx + M ddy}{dt^2} = 2g(P - Q),$$

welche mit $dt$ multiplicirt und integrirt gibt

$$\frac{(P + M)\, dx + M dy}{dt} = 2gt(P - Q) + \text{Const.}$$

Da man nun $\frac{dy}{dt}$ gefunden, so wird hieraus auch $\frac{dx}{dt}$ bestimmt, woraus man denn die Geschwindigkeit des Pfahls, nämlich $\frac{dx + dy}{dt}$ herleiten kann, und die Rechnung so weit fortsetzen, bis diese Geschwindigkeit verschwindet.

Um diese Untersuchung weiter auszuführen, müssen zwei Fälle betrachtet werden; der erste, wenn der Stoss nicht stark genug ist, um den Pfahl weiter hinabzutreiben, welches geschieht, wenn der Hammer seine Bewegung verliert, ehe $x = \beta$ wird, das ist, ehe die Kraft des Elastri dem Widerstand des Pfahls gleich wird. Nachdem dieser Fall wohl erörtert worden, so wird es nicht

mehr schwer fallen, mit dem andern Falle zu Stande zu kommen, wo der Pfahl wirklich tiefer hineingetrieben wird.

16. Vor allen Dingen aber ist nöthig, den für die Kraft des Elastri angegebenen Ausdruck: $A\frac{\alpha-y}{y}$ besser zu erläutern; indem die Buchstaben $A$ und $\alpha$ nicht blos unserer Willkühr überlassen sind. Denn, behalten wir die Zusammendrückung der Luft, um die Stelle des Stosses auf den Fall zu vertreten, so kommt es hauptsächlich auf die Weite des Gefässes, darin die Luft enthalten ist, an; denn, setzt man diese Weite $= b^2$, so muss $A$ das Gewicht einer Wassersäule ausdrücken, deren Basis $= b^2$, die Höhe aber $= 33$ Fuss, als welche mit dem Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht steht. Folglich wird $A =$ dem Gewicht einer Masse Wassers, deren Volumen $= 33 b^2$ cubische Fuss; und solchergestalt können auch die andern Gewichte und Massen, als $P$, $Q$ und $M$ in cubischen Fussen Wassers ausgedrückt werden, wobei man 70 Pfund auf einen cubischen Fuss zu rechnen pflegt.

17. Es ist aber leicht zu begreifen, dass die obgedachte Weite $b^2$ sowohl aus der untern Breite des Hammers, als der obern Dicke des Pfahles bestimmt werden muss, weil der Hammer gewiss eine andere Wirkung hervorbringen würde, je nachdem seine Basis breiter oder schmäler wäre, und nachdem der Kopf des Pfahles eine grössere oder geringere Dicke hat.

18. Inzwischen muss man nicht glauben, dass man sich so genau an die oben gegebene Formel zu binden habe; indem es wohl sein könnte, dass man die Quetschung der Theilchen des Holzes mit einer dichteren oder dünneren Luft vergleichen sollte, da dann der Buchstab $A$ wohl eine andere Grösse bekommen könnte für eben dieselbe Breite $b^2$. Ferner könnte auch die Formel $\frac{\alpha-y}{y}$ gar wohl eine andere Gestalt haben; weil man so genau nicht bestimmen kann, nach welchem Gesetze der Zusammendrückung der Hammer auf die obersten Zäserchen des Holzes wirkt; und wenn man auch bei der Vergleichung mit der Luft bleiben will, so weiss man, dass, wenn $y$ sehr viele Mal kleiner als $\alpha$ geworden, alsdann die elastische Kraft weit grösser werde, als nach dem Ausdruck $\frac{\alpha}{y}$. Also könnte diese Formel gar wohl eine ganz andere Gestalt haben, wenn dabei nur dieses beobachtet wird, dass, wenn $y = \alpha$, die Kraft gänzlich verschwinde; hingegen aber, wenn $y = 0$, unendlich gross werde.

19. Daher können wir, anstatt der Formel $A \cdot \frac{\alpha-y}{y}$, gar füglich andere gebrauchen, als da sind $A\left(\frac{\alpha^2-y^2}{y^2}\right)$, oder überhaupt $A\left(\frac{\alpha^n-y^n}{y^n}\right)$, welche ebenfalls $= 0$ wird, wenn $y = \alpha$, und unendlich gross, wenn $y = 0$; deren ganzer Unterschied also nur darin besteht, dass für die mittleren Werthe von $y$, zwischen $\alpha$ und $0$, die elastische Kraft grösser oder kleiner herauskomme. Insonderheit aber werden wir genöthigt sein eine solche Formel zu erwählen, dass die Rechnung ohne alzugrosse Weitläufigkeit zu Stande gebracht werden kann, welches uns um soviel weniger zu verdenken sein wird, da uns die wahren Gesetze, nach welchen die Quetschung geschieht, unbekannt sind, und weil es hiebei nicht sowohl auf absolute Bestimmungen, als blos auf Vergleichung verschiedener Fälle ankommt. Lasset uns nun den ersten Fall wiederum vornehmen, für welchen wir diese Gleichung gefunden:

$$\frac{ddx}{dt^2} = 2g\left(1 - \frac{A}{P} \cdot \frac{a-y}{y}\right),$$

deren Integral oben gefunden worden

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 4g\left(\frac{A+P}{P}x - \frac{aA}{P}\, l\frac{a}{a-x} + a\right).$$

Wollte man nun aus dieser Formel den Ort, das ist, den Werth für $x$ bestimmen, wo die Geschwindigkeit des Hammers $= 0$ wird, und also der ganze Stoss sich endigt, so würde man allerdings die grössten Schwierigkeiten finden, um dieses zu leisten; denn man würde auf diese Gleichung kommen:

$$0 = \frac{A+P}{P}x - \frac{aA}{P}\, l\frac{a}{a-x} + a,$$

aus welcher sich der Werth von $x$ durch keine algebraischen Operationen bestimmen lässt, welches doch ein sehr wesentliches Stück in der ganzen Unsersuchung ausmacht. Da nun diese Unbequemlichkeit von der angenommenen Formel $A.\frac{a-y}{y}$ herrührt, so sind wir genöthigt, statt derselben, eine andere, und vorzüglich diese: $A\left(\frac{a^2}{y^2} - 1\right)$ zu gebrauchen, als wobei sich alles ordentlich integriren lassen wird. Da wir nun diese Gleichung haben

$$\frac{ddx}{2gdt^2} = 1 - \frac{A}{P}\left(\frac{a^2}{y^2} - 1\right)$$

und $x + y = a$ ist, so multiplicire man mit $dx$, oder mit $-dy$, so wird die Integration geben

$$\frac{dx^2}{4gdt^2} = -y - \frac{A}{P}\left(\frac{a^2}{y} + y\right) + C.$$

Da nun $\frac{dx^2}{dt^2}$ gleich werden muss dem $c^2$, oder $4ga$, wenn $x=0$, und also $y=a$, so bekömmt man

$$a = -a - \frac{2Aa}{P} + \text{Const.}, \quad \text{folglich} \quad C = a + a + \frac{2aA}{P};$$

daher unsere Gleichung sein wird

$$\frac{dx^2}{4gdt^2} = a + a - y - \frac{A}{P}\left(\frac{a^2}{y} + y - 2a\right) = a + a - y - \frac{A(a-y)^2}{Py},$$

oder, weil $a - y = x$, so erhält man

$$\frac{dy^2}{4gdt^2} = a + x - \frac{A}{P} \cdot \frac{x^2}{a-x},$$

aus welcher sich nun leicht bestimmen lässt, wo die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ verschwindet.

20. Diese Rechnung kann aber noch sehr erleichtert werden, wenn man in Betrachtung zieht, dass die ganze Quetschung nur ein ganz geringes Räumchen beträgt, welches hier durch den Buchstaben $a$ ausgedrückt wird, und noch überdies $x$ und $y$ kleiner sein müssen, als $a$, so wird man $x$ in Rücksicht auf $a$, welches die Höhe des Falles des Hammers bedeutet, als etwas unendlich Kleines ansehn können. Daher unsere Gleichung sein wird

$$a - \frac{A}{P} \cdot \frac{x^2}{a-x} = 0, \quad \text{woraus wir finden} \quad x^2 = -\frac{aP}{A}x + \frac{aaP}{A}.$$

Man setze $\frac{P}{A} = 2\lambda$, so ist

$$x^2 = -2\lambda a x + 2\lambda \alpha a \quad \text{und daher} \quad x = -\lambda a + \sqrt{(\lambda^2 a^2 + 2\lambda \alpha a)},$$

wo $\lambda^2 a^2$ sehr gross sein wird gegen $2\lambda\alpha a$; daher man durch die Näherung bekommt

$$x = -\lambda a + \lambda a + \alpha = \alpha.$$

Weil aber doch immer $x < \alpha$ sein muss, so muss die obige Näherung genauer genommen werden:

$$x = \alpha - \frac{\alpha}{2\lambda a}, \text{ oder } x = \alpha - \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}, \text{ und daher } y = \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}.$$

21. Also vom ersten Anfang des Stosses fällt der Hammer nicht weiter, als durch diese kleine Höhe $x$, welche an sich selbst keineswegs beträchtlich ist, wo derselbe gänzlich zur Ruhe kommt, und also der Stoss völlig aufhört. Da nun in diesem Zustande die Grösse $y = \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}$, so wird die elastische Kraft unseres Kissens sein

$$= A\left(\frac{\alpha^2}{y^2} - 1\right) = A\left(\frac{P^2 a^2}{A^2 \alpha^2} - 1\right),$$

und weil die Einheit gleichsam unendlich klein sein wird im Vergleich zu $\frac{P^2 a^2}{A^2 \alpha^2}$, so wird diese Kraft sein $= \frac{P^2 a^2}{A \alpha^2}$, welcher Ausdruck augenscheinlich sehr gross sein muss. Doch aber nehmen wir hier an, dass derselbe noch nicht vermögend ist den Widerstand des Pfahls, $Q$, zu überwinden. Um diese Kraft einigermaassen zu erläutern, wollen wir z. B. annehmen, dass das Gewicht des Hammers $P = 280$ Pfund oder vier Cubikfuss Wasser betrage; ferner sei die Dicke der Pfähle, oder $b^2 = \frac{1}{2}$ Quadratfuss, und also nach der obigen Hypothese $A = 16$ Cubikfuss. Ferner sei die Höhe $a$, aus welcher der Hammer fällt, $= 4$ Fuss; $\alpha$ aber $= \frac{1}{10}$ Zoll oder $\frac{1}{120}$ Fuss. Hieraus wird also die letzte Kraft des Hammers auf den Pfahl sein $16 . 14400 = 230400$ Cubikfuss Wasser. Daher, 70 Pfund auf 1 Fuss gerechnet, wird diese Kraft betragen 16128000 Pfund oder 161280 Centner. Gleichwohl aber setzen wir hier, dass diese Kraft noch nicht vermögend sei den Pfahl wirklich einzuschlagen. Hierüber wird dienlich sein folgende Anmerkungen zu machen: 1. je grösser das Gewicht des Hammers $P$ angenommen wird, so wächst die Kraft nach dem Quadrat; und ebenfalls, je grösser die Höhe $a$ gesetzt wird, so wächst auch die Kraft nach dem quadratischen Verhältniss; 2. je kleiner das Räumchen $\alpha$ sein wird, worin die Quetschung geschieht, so wird auch die Kraft des Hammers nach dem quadratischen Verhältniss grösser. Dieses beruhet aber hauptsächlich auf der Beschaffenheit des Holzes, nach welcher dasselbe härter oder weicher ist, und also für das harte Holz $\alpha$ einen weit kleineren Werth haben wird, als für das weiche Holz; woraus sich offenbar ergibt, dass je härter zum wenigsten der Kopf des Pfahls ist, die Wirkung des Hammers alsdann ungemein viel stärker sein werde. 3. Es versteht sich von selbst, dass je dicker der Pfahl ist, oder je grösser der Ausdruck $b^2$, woraus $A$ bestimmt wird, die Kraft des Hammers desto kleiner sein werde, jedoch nur nach dem einfachen Verhältniss. 4. Eben dieser Schluss würde auch aus jeder andern Hypothese folgen, nach welcher die elastische Kraft des

Kissens ausgedrückt wird, und auch sogar aus der ersten, welche wir zu verlassen genöthigt worden. Denn da wir für das Ende des Stosses diese Gleichung bekommen haben:

$$0 = \frac{A+P}{P}x - \frac{\alpha A}{P}l\cdot\frac{a}{a-x} + a,$$

so können wir auch hier gegen die Höhe $a$ das erste Glied $\frac{A+P}{P}x$ ausstreichen, da dann nur noch diese Gleichung übrig ist:

$$a = \frac{\alpha A}{P}l\frac{a}{a-x}, \quad \text{oder} \quad l\cdot\frac{a}{a-x} = \frac{Pa}{A\alpha} = \frac{2\lambda a}{\alpha},$$

wenn gesetzt wird $\frac{P}{A} = 2\lambda$. Setzt man nun $e$ für die Zahl, deren Logarithmus $= 1$, so bekommt man

$$\frac{a}{a-x} = e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} \quad \text{und hieraus} \quad x = \frac{ae^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} - a}{e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}}}, \quad \text{oder}$$

$$x = a - ae^{\frac{-2\lambda a}{\alpha}}, \quad \text{und folglich} \quad y = a - x = ae^{\frac{-2\lambda a}{\alpha}}.$$

Hieraus ergibt sich nun die letzte Kraft des Hammers auf den Pfahl

$$= A\left(\frac{a}{y} - 1\right) = A\left(e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} - 1\right) = Ae^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} = Ae^{\frac{Pa}{A\alpha}};$$

wovon für das obige Exempel der Werth sein wird $= 16.e^{120}$ Cubikfuss, welcher Werth noch weit grösser ist als der obgefundene. Denn der Logarithmus davon ist $l\,16 + 120\,le$, und $le = 0{,}43429$, also der gesuchte Logarithmus $= 53, \ldots$ so dass mithin die Zahl der Cubikfuss Wasser aus 54 Ziffern bestehen wird. Ungeachtet es nun scheint, dass nach dieser Hypothese die Kraft des Hammers auf den Pfahl weit wirksamer sein müsse, als nach der obigen, so wird man doch sehn, dass die Wirkung selbst, oder die Tiefe, in welche der Pfahl hineingetrieben wird, in beiden Fällen wohl sehr verschieden sein werde. Bei dem ersten Falle, wo der Pfahl noch nicht gerückt wird, ist noch nöthig die Zeit zu bestimmen, in welcher der Hammer durch das Räumchen $AX = x$ fortrückt, wozu noch eine zweite Integration erfordert wird.

22. Da man nämlich gefunden $\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = a - \frac{A}{P}\cdot\frac{x^2}{a-x}$, so wird, wenn $\frac{A}{P} = \mu$,

$$4g\,dt^2 = \frac{(a-x)\,dx^2}{a(a-x) - \mu x^2},$$

folglich $2dt\sqrt{g} = \frac{dx\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a(a-x)-\mu x^2)}}$, wovon das Integral gesucht werden muss. Man bringe diese Gleichung auf $y$, weil $a - x = y$, so hat man

$$2dt\sqrt{g} = \frac{-dy\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu(a-y)^2)}},$$

wo im Nenner enthalten ist der Factor $y - \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}$, oder $ay - \frac{A\alpha^2}{P} = ay - \mu\alpha^2$. Daher der andere Factor sich findet $a - \mu y$; also, dass man hat

$$2dt\sqrt{g} = \frac{-dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-\mu y)\left(y - \frac{\mu\alpha^2}{a}\right)}}.$$

Da man nun hier anstatt $a - \mu y$ schreiben kann $a$, so bekommt man

$$2dt\sqrt{g} = \frac{-dy\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu\alpha^2)}},$$

welche keine weiteren Schwierigkeiten hat.

23. Um nun dieses Integral zu finden, setze man

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu\alpha^2)}} = \frac{f}{\sqrt{a}}, \text{ so ist } \frac{y}{ay - \mu\alpha^2} = \frac{f^2}{a} \text{ und daher } y = \frac{\mu\alpha^2 f^2}{a(f^2-1)}.$$

Nun sei

$$f = \frac{1}{v}, \text{ so wird } y = \frac{\mu\alpha^2}{a(1-v^2)}, \text{ folglich } dy = \frac{2\mu\alpha^2 v dv}{a(1-v^2)^2},$$

welches mit $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu\alpha^2)}} = \frac{f}{\sqrt{a}} = \frac{1}{v\sqrt{a}}$ multiplicirt, gibt

$$dt\sqrt{g} = \frac{-\mu\alpha^2 dv}{a\sqrt{a}(1-v^2)^2}, \text{ oder } \frac{adt\sqrt{ag}}{\mu\alpha^2} = \frac{-dv}{(1-v^2)^2}.$$

Man setze nun $\int \frac{dv}{(1-v^2)^2} = \frac{\beta v}{1-v^2} + \gamma \int \frac{dv}{1-v^2}$, so wird $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, und also

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu\alpha^2} = \frac{-v}{2(1-v^2)} - \frac{1}{4} l \frac{1+v}{1-v},$$

folglich

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu\alpha^2} = \frac{-ayv}{2\mu\alpha^2} - \frac{1}{4} l \cdot \frac{1+v}{1-v} + C, \text{ weil } v = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu\alpha^2}{ay}\right)}.$$

Wobei zu merken, dass, wenn $t = 0$, alsdann $x = 0$ und $y = a$, folglich $v = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)}$, woraus man erhält

$$C = \frac{a}{2\mu a}\sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)} + \frac{1}{4} l \cdot \frac{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)}}{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)}}.$$

Es ist aber zu merken, dass $\sqrt{\left(1 - \frac{\mu\alpha^2}{ay}\right)} = 1 - \frac{\mu\alpha^2}{2ay}$ und $\sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)} = 1 - \frac{\mu a}{2a}$ und $v = 1 - \frac{\mu\alpha^2}{2ay}$, welche Werthe unserer Gleichung diese Form geben

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu\alpha^2} = \frac{a}{2\mu a} - \frac{ay}{2\mu\alpha^2} + \frac{1}{4} l \cdot \frac{2 - \frac{\mu a}{2a}}{2 + \frac{\mu\alpha^2}{2ay}} - \frac{1}{4} l \frac{y}{a}.$$

Nun aber ist $l \cdot \frac{2 - \frac{\mu a}{2a}}{2 - \frac{\mu\alpha^2}{2ay}} = l \cdot 2 - \frac{\mu a}{4a} - l \cdot 2 + \frac{\mu\alpha^2}{4ay} = \frac{\mu\alpha^2}{4ay} - \frac{\mu a}{4a}$; folglich

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu a^2} = \frac{a}{2\mu a} - \frac{ay}{2\mu a^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{\mu a^2}{ay} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\mu a}{a} - \frac{1}{4}\,l\,\frac{y}{a}$$

$$= \frac{a(a-y)}{2\mu a^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{\mu a}{a}\cdot\frac{(a-y)}{y} + \frac{1}{4}\,l\,\frac{a}{y}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . .

(29) — — — zweite aber mit $M$, und es wird die Summe derselben geben

$$\frac{(P+M)\,ddx + M\,ddy}{2g\,dt^2} = P - Q,$$

welche mit $dt$ multiplicirt und integrirt gibt

$$\frac{(P+M)\,dx + M\,dy}{2g\,dt} = (P-Q)\,t + C.$$

Da nun für unsern ersten Zeitpunkt $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{-dy}{dt} = 2\sqrt{g}\,(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})$, so wird

$$C = \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})};$$

daher dann sein wird

$$\frac{(P+M)\,dx + M\,dy}{2g\,dt} = (P-Q)\,t + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})}.$$

30. Nun sind wir im Stand das letzte Ende des Stosses zu bestimmen, welches sich ereignet, wenn der Pfahl seine Bewegung verliert, und also sein wird $\frac{dx + dy}{dt} = 0$. Alsdann wird man haben

$$\frac{-P\,dy}{2g\,dt} = (P-Q)\,t + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})}.$$

Wir haben aber schon oben gefunden

$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{g}\,.\,Y$; daher dann sein muss $\frac{P\sqrt{Y}}{\sqrt{g}} = (P-Q)\,t + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})}$.

31. Um nun dieses Ende zu bestimmen, so muss man aus der Gleichung $\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{g}Y$ die Zeit $t$ durch $y$ bestimmen, welches durch diese Integration geschiehet $t = -\int\frac{dy}{2\sqrt{g}Y}$, wie oben schon bemerkt worden, und diesen Werth in die andere Aequation setzen, welche sodann sein wird

$$\frac{P\sqrt{Y}}{\sqrt{g}} = -(P-Q)\cdot\int\frac{dy}{2\sqrt{g}Y} + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})},$$

$$\text{oder}\quad P\sqrt{Y} = -(P-Q)\cdot\int\frac{dy}{2\sqrt{Y}} + P\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})},$$

aus welcher der Werth für $y$ gesucht werden muss, woraus sich sodann die Zeit $t$ bestimmen lässt. Da nun aber die Hauptsache auf die Bestimmung des Raumes $x + y - a$, durch welchen der Pfahl wirklich fortgetrieben worden, ankommt, so fehlt uns nur noch der Werth von $x$, welcher aus dieser Gleichung

$$\frac{(P+M)\,dx+M\,dy}{2g\,dt}=(P-Q)\,t+\frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{\left(a-\frac{\mu a^2}{\gamma}\right)}$$

leicht bestimmt werden kann; denn man darf nur mit $dt$ multipliciren und integriren, so hat man

$$\frac{(P+M)\,x+My}{2g}=\frac{(P-Q)\,t^2}{2}+\frac{Pt}{\sqrt{g}}\sqrt{\left(a-\frac{\mu a^2}{\gamma}\right)}+\text{Const.}$$

und weil im Anfang war $y=\gamma$, folglich $x=\alpha-\gamma$, und $t=0$, so wird $C=\frac{P(\alpha-\gamma)+M\alpha}{2g}$, und daher bekommen wir

$$x=\frac{(P-Q)\,gt^2}{P+M}+\frac{2Pt\sqrt{g}}{P+M}\sqrt{\left(a-\frac{\mu a^2}{\gamma}\right)}-\frac{My}{P+M}+\frac{P(\alpha-\gamma)+M\alpha}{P+M},$$

woraus sich der Werth von $x+y-\alpha$ anzeigen lässt, welcher den wirklichen Raum, durch welchen der Pfahl fortgetrieben worden, ausdrückt.

32. Da nun $\alpha$ kaum einen Messerrücken breit betragen kann, und $y$ noch weit kleiner ist, als $\alpha$, so können wir für den gesuchten Raum, durch welchen der Pfahl fortgetrieben wird, blos allein $x$ ansetzen, wovon der Werth, wenn die obigen Kleinigkeiten weggelassen werden, also bequemer ausgedrückt wird:

$$x=\frac{(P-Q)\,gt^2}{P+M}+\frac{2Pt}{P+M}\sqrt{g}\sqrt{\left(a-\frac{\mu a^2}{\gamma}\right)}.$$

33. Hierbei ist aber wohl zu merken, dass die Zeit $t$ nicht mehr so klein sein wird, als im ersten Fall; denn da der Pfahl wirklich hinabgetrieben wird, so muss auch der Hammer folgen, und dazu wird schon eine merkliche Zeit erfordert, die hier durch $t$ ausgedrückt wird. Also kommt die Hauptsach darauf an, dass der Werth von $t$ erstlich durch $y$ ausgedrückt werde, und hernach für $y$ derjenige Werth gesetzt werde, welchen die oben angeführte Gleichung geben wird. Uebrigens ist hier noch zu merken, dass $Q$ ein ungeheuer grosses Gewicht andeutet, gegen welches $P$ verschwinden kann.

34. Vor allen Dingen muss demnach diese Formel integrirt werden;

$$t=-\int\frac{dy}{2\sqrt{gY}},\quad\text{wo}\quad Y=a+2\eta\cdot\frac{a^2}{\gamma}-\zeta\cdot\frac{a^2}{y}-\eta\cdot\frac{a^2}{\gamma^2}\cdot y=\frac{ay+2\eta\frac{a^2}{\gamma}y-\zeta a^2-\eta\cdot\frac{a^2}{\gamma^2}y^2}{y}$$

$$=\frac{-\eta\cdot\frac{a^2}{\gamma^2}\cdot y^2+\left(a+2\eta\cdot\frac{a^2}{\gamma}\right)y-\zeta a^2}{y},$$

welche, wenn man Kürze halber setzt

$$k=\sqrt{\left(a^2+\frac{4\eta a a^2}{\gamma}-\frac{4\mu\eta a^4}{\gamma^2}\right)},$$

sich folgendergestalt in factores resolvirt

$$Y=\frac{1}{y}\left(\frac{\eta a^2}{\gamma^2}y-\frac{\left(a+\frac{2\eta a^2}{\gamma}\right)}{2}+\frac{1}{2}k\right)\cdot\frac{\gamma^2}{\eta a^2}\left(-\frac{\eta a^2}{\gamma^2}y+\frac{\left(a+\frac{2\eta a^2}{\gamma}\right)}{2}+\frac{1}{2}k\right),$$

welcher Werth im ersten Zeitpunkt wird

$$Y = \frac{\gamma}{\eta a^2}\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}a\right),$$

woraus man sieht, dass

$$\frac{\eta a^2}{\gamma^2}y + \frac{1}{2}k > \frac{1}{2}a + \frac{\eta a^2}{\gamma},$$

hingegen aber $\quad \frac{\eta a^2}{\gamma^2}y < \frac{1}{2}a + \frac{\eta a^2}{\gamma} + \frac{1}{2}k.$

Unsere Integration wird also auf eine solche Formel ankommen: Wenn man Kürze halber setzt $Y = \frac{(p+y)(q-y)}{ry}$, so bekommt man

$$2t\sqrt{g} = \frac{dy\sqrt{ry}}{\sqrt{(p+y)(q-y)}},$$

welches sich aber nicht anders, als durch Näherungen thun lässt, weil diese Formel weder durch Cirkelbögen noch Logarithmos integrirt werden kann.

35. Zu allem Glück aber fügt es sich hier, dass in dem zweiten factore die pars constans $\frac{1}{2}a + \frac{\eta a^2}{\gamma} + \frac{1}{2}k$ ungleichweit grösser ist, als der erste Theil $\frac{\eta a^2}{\gamma^2}y$, und daher dieser ausgelassen werden kann, also, dass man in der letzten Formel anstatt $q - y$ nur $q$ allein schreiben könnte; da dann die Formel keine Schwierigkeit haben würde. Jedoch ist zu bedenken, dass, da $\gamma$ gegen $a$ sehr klein, und also $\frac{a^2}{\gamma^2}$ eine ungeheure Zahl sein wird, dieser Theil auch nicht gegen den andern verschwinden möchte; insonderheit da es sehr wahrscheinlich ist, dass, sobald der Pfahl zu rücken angefangen, der Werth von $y$, so anfangs $= \gamma$ gewesen, hernach nicht mehr kleiner, sondern vielmehr grösser werde, und daher um so viel weniger der erste Theil des zweiten factoris weggelassen werden kann. Auch ist zu merken, dass die pars constans im zweiten factore weit grösser als im ersten, aus welchem Umstand sich vielleicht ein Hülfsmittel ergeben möchte.

---

## Anmerkungen.

ad §§ 25 et 26.

Weil $Q$ sehr gross, und also $\gamma$ sehr klein gegen $a$ sein wird, so haben wir $Q = A\frac{a^2}{\gamma^2}$. Da nun $A$ und $a$ von der Beschaffenheit des Holzes abhangen, und folglich gegeben sind, so muss aus diesem Umstand $\gamma$ bestimmt werden; woraus man bekommt $\gamma = a\sqrt{\frac{A}{Q}}$. Daher denn sein wird

$$\sqrt{\frac{A}{Q}} > \frac{\mu a}{a} > \frac{Ad}{Pa}, \quad \text{folglich} \quad Q < \frac{P^2a^2}{Aa^2},$$

woraus man erkennt, dass, wenn der Widerstand grösser wäre, als die gefundene Quantität, die Arbeit des Rammens fruchtlos sein würde.

ad § 27.

Es wird dienlich sein diese Geschwindigkeit durch einen besondern Buchstaben auszudrücken. Es sei demnach die ursprüngliche Höhe derselben $= h$; also, dass hier $\frac{dx^2}{4gdt^2} = h$; daher man

bekommt $h = a - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} = a - \frac{\alpha\sqrt{AQ}}{P}$, woraus wir weiter sehen, dass, wenn eine Wirkung erfolgen soll, sein müsse $Pa > \alpha\sqrt{AQ}$, oder die vis viva des Hammers muss grösser sein, als $\alpha\sqrt{AQ}$; wobei ferner zu merken, dass je grösser $h$ ist, desto grösser die Wirkung sein werde. In dem ersten Zeitpunkt nun wird sein $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{gh}$, und weil bis dahin $x + y = \alpha$, so wird auch sein

$$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{gh}.$$

ad § 29.

Diese Gleichung kann noch auf eine andere Art integrirt werden, so, dass kein $t$ ins Integral kommt; denn man multiplicire dieselbe mit $(P + M)\,dx + M\,dy$, und integrire, so kommt

$$\frac{((P+M)\,dx + M\,dy)^2}{4g\,dt^2} = (P - Q)(P + M)\,x + (P - Q)\,My + \text{Const.}$$

Nun setze man für den Anfang $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{gh}$ und $\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{gh}$ und $y = \gamma$, $x = \beta$, so wird

$$P^2 h = (P - Q)(P + M)\,\beta + (P - Q)\,M\gamma + \text{Const.}$$

also $\text{Const.} = P^2 h - (P - Q)(P + M)\,\beta - (P - Q)\,M\gamma$,

folglich $\frac{((P+M)\,dx + M\,dy)^2}{4g\,dt^2} = (P - Q)(P + M)(x - \beta) + (P - Q)\,M(y - \gamma) + P^2 h.$

Weil nun bei dem völligen Ende des Stosses sein muss $\frac{dx + dy}{dt} = 0$, oder $dx = -dy$, so erhalten wir für dieses Ende diese Gleichung

$$\frac{P^2\,dy^2}{4g\,dt^2} = (P - Q)(P + M)(x - \beta) + (P - Q)\,M(y - \gamma) + P^2 h = P^2\,Y,$$

woraus der ganze Raum, durch welchen der Balken fortgetrieben worden, bestimmt werden muss, wozu aber noch diese Gleichung zu Hülfe genommen werden muss, welche aus dem gedoppelten Werthe von $dt$ entspringt:

$$-\frac{dy}{2\sqrt{gY}} = dt = \frac{(P+M)\,dx + M\,dy}{2\sqrt{g}\,((P-Q)(P+M)(x-\beta) + (P-Q)\,M(y-\gamma) + P^2 h)},$$

deren Integral ist

$$C - \int\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2\sqrt{((P-Q)(P+M)(x-\beta) + (P-Q)\,M(y-\gamma) + P^2 h)}}{P - Q},$$

aus welcher $y$ durch $x$ bestimmt werden kann, welcher Werth sodann in der ersten Aequation für $y$ geschrieben, uns den Werth von $x$ offenbaren wird, woraus dann auch $y$ erkannt wird, und da wird $x + y + \alpha$ die Grösse der Einrämmung anzeigen.

Hiebei aber ist insonderheit zu merken, dass, weil $\gamma$ und $\alpha$ keinen Messerrücken breit betragen können, diese Tiefe nur allein durch $x$ angezeigt wird, und da ferner auch $\beta$ und $\gamma$ gegen dieses $x$ als nichts angesehn werden können, so wird obige Aequation diese Form annehmen:

$$(P - Q)(P + M)\,x + P^2 h = P^2\,Y.$$

Weil nun hier $Y$ den Werth von $\frac{dy^2}{4g\,dt^2}$, oder das Quadrat der letzten Geschwindigkeit des Kissens anzeigt, so kann man diese Geschwindigkeit als $= 0$ betrachten; daher sich folglich $x$ unmittelbar also bestimmen lässt

$$x = \frac{P^2 h}{(Q-P)(P+M)},$$

wodurch die Tiefe der Einrammung genau genug bestimmt wird: Setzt man nun hier für $h$ den oben gefundenen Werth, so erhält man

$$x = \frac{P^2\left(a - \frac{\alpha\sqrt{AQ}}{P}\right)}{(Q-P)(P+M)} = \frac{P(Pa - \alpha\sqrt{AQ})}{(Q-P)(P+M)},$$

wovon alle Elemente als bekannt angesehn werden: als nämlich $P$, das Gewicht des Hammers; $a$, die Höhe, aus welcher derselbe gefallen; $M$, die Masse des Pfahls; $Q$, der Widerstand des Pfahls, und endlich schliesst $A$ die Dicke des Pfahls und $A$ nebst $\alpha$ die Beschaffenheit des Holzes in sich; welche letztere Stücke blos allein aus einigen Erfahrungen zu bestimmen sind.

Nur ist noch zu merken, dass in dem Buchstaben $M$ nicht allein die Masse des Pfahls, sondern auch des Erdreichs, welches der Pfahl vor sich herstösst, begriffen werden muss. Diese Formel scheint auch mit allen Umständen, welche bei dem Einrammen wahrgenommen werden, ziemlich genau übereinzustimmen; daher kein Zweifel, dass diese Formel nicht auf alle Fälle mit Nutzen sollte können angewendet werden.

Man kann zum Ueberfluss auch noch die Zeit, in welcher diese Wirkung hervorgebracht wird, leicht bestimmen, indem dieselbe sein wird

$$t = \frac{\sqrt{(P^2 h - (Q-P)(P+M)x)}}{(Q-P)\sqrt{g}},$$

oder, wenn man für $x$ seinen Werth setzt, $t = 0$; woraus erhellet, dass es in sehr kurzer Zeit geschieht und nur durch die kleinen Quantitäten $\beta$ und $\gamma$ bestimmt wird.

## Zusatz.

Man lasse den Hammer successive immer höher herunterfallen, um diejenige Höhe $a$ zu finden, wo die Wirkung anfängt, daraus man sogleich bekommt $\alpha\sqrt{AQ} = Pa$. Hernach darf man nur den Hammer noch höher aufziehen und die Tiefe der Einrammung $x$ ausmessen, so wird sich daraus der Nenner $(Q-P)(P+M)$ bestimmen lassen.

## X.

# Détermination de l'effet d'une machine hydraulique inventée par Mr. Segner, Prof. à Gottingue.

---

Cette machine est composée d'un tuyau cylindrique vertical, tellement posé qu'il puisse librement tourner autour de son axe. (Fig. 162.) Ce cylindre n'est pas exprimé dans la figure qui n'en représente qu'une section horizontale $ABCDEF$ faite près de sa base inférieure. Dans cet endroit le tuyau est percé de plusieurs trous $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ dont chacun porte un tuyau horizontal, qui communique par ce trou avec le cylindre vertical. La figure représente six de ces tuyaux horizontaux $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$, $Ff$ attachés en bas au cylindre vertical. Ces tuyaux sont fermés à leur autre bout $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, mais ils ont tous une ouverture à côté en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$.

La machine étant construite en sorte, si l'on remplit d'eau le tuyau vertical, elle sortira par les ouvertures $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$ des tuyaux horizontaux, et chacun d'eux sera poussé en arrière par la réaction de l'eau. Donc, puisque la machine est librement mobile autour de son axe, toutes ces forces de réaction feront tourner la machine dans le sens $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$. Et si l'on fait en sorte que le cylindre vertical demeure toujours plein d'eau, ce mouvement de rotation de la machine continuera non seulement, mais il deviendra aussi de plus en plus rapide, jusqu'à un certain degré de vitesse, qui dépend tant de la masse de toute la machine, que des obstacles qu'elle peut avoir à surmonter.

On comprend aisément que cette machine peut être employée à mettre en mouvement quantité d'autres machines, pourvu qu'on ait un réservoir ou une source d'eau, qui en fournit assez pour entretenir le tuyau vertical toujours plein d'eau. Or si la quantité d'eau, dont on peut profiter, est donnée, on n'a qu'à déterminer la grandeur des ouvertures, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. en sorte que la dépense lui soit proportionnée.

Or, pour déterminer l'effet d'une telle machine, il s'agit de trouver la force dont les jets d'eau, qui sortent des ouvertures $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc., font tourner la machine, pour en juger combien

d'obstacles elle sera capable de surmonter. Cette recherche sera non seulement fort curieuse, et peut-être fort utile pour la pratique; mais elle est aussi d'une telle nature, que les principes connus de l'hydraulique n'y apportent aucun secours. La théorie du mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite, qu'on a cultivée depuis quelque temps avec beaucoup de soin, n'est pas non plus suffisante pour nous éclairer sur cette matière, puisque les tuyaux par lesquels l'eau se meut, ne sont pas en repos, mais qu'ils ont un mouvement causé par la force de l'eau même. Voilà donc un sujet presque tout à fait nouveau, c'est de déterminer le mouvement de l'eau par des tuyaux mobiles, et d'assigner la pression que les tuyaux en souffrent en chaque endroit. Cette circonstance demande des recherches beaucoup plus profondes, que les autres problèmes de l'hydraulique qu'on a traités jusqu'ici; mais c'est par là aussi, que cette science sera portée à un plus haut degré de perfection, et qu'elle sera rendue propre à développer quantité d'autres cas, qui sont de la dernière importance en plusieurs autres machines. Les problèmes suivants contiendront la méthode dont je me suis servi, pour déterminer l'action de la machine proposée.

### Problème 1.

1. Si l'eau coule par un tuyau horizontal immobile, dont la courbure et l'amplitude soit donnée en chaque endroit, et que la vitesse de l'eau au commencement du tuyau soit connue pour chaque instant, trouver les forces, dont chaque particule d'eau sera sollicitée.

**Solution.** (Fig. 163.) Soit $AME$ le tuyau courbe proposé, couché sur un plan horizontal que je suppose partout d'une amplitude extrêmement petite, de sorte que l'eau ne puisse avoir un autre mouvement, que selon la tangente de la courbe en chaque endroit. Cela non obstant, l'amplitude du tuyau pourra être considérée comme variable; ainsi supposant l'amplitude du tuyau au commencement $AB = ff$; soit en $M$, posant l'arc $AM = s$, l'amplitude $MN = zz$; de sorte que $zz$ sera une certaine fonction de l'arc $s$; d'où prenant $Mm = ds$, l'amplitude en $mn$ sera $= zz + zzdz$. Maintenant pour l'instant présent, soit $\sqrt{v}$ la vitesse, avec laquelle l'eau coule par la section $AB$; et après l'élément de temps $dt$, que cette vitesse en $AB$ devienne $\sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$; de sorte que $v$ sera une fonction du temps $t$. Considérons dans le tuyau l'élément d'eau $MN$ comme une section infiniment mince, et à l'instant présent la vitesse de cette section sera $= \frac{ff}{zz}\sqrt{v}$, dont la direction sera suivant la tangente du tuyau en $M$. Avec cette vitesse cet élément $MN$ parcourra donc dans le tuyau l'espace $Mm = \frac{ffdt}{zz}\sqrt{v}$ dans le temps $dt$, et sa vitesse en $mn$ sera

$$= \frac{ff}{zz}\sqrt{v} + d\frac{ff}{zz}\sqrt{v} = \frac{ff}{zz}\sqrt{v} - \frac{2ffdz}{z^3}\sqrt{v} + \frac{ffdv}{2zz\sqrt{v}}.$$

Qu'on rapporte le lieu de l'élément $MN$ à un axe fixe $AD$ par les coordonnées $AP = x$ et $PM = y$; et qu'on décompose le mouvement de cet élément $MN$ suivant les mêmes directions. Pour cet effet, posant l'élément de la courbe $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, la vitesse de $MN$, suivant la direction $AP$, sera $= \frac{ffdx}{zzds}\sqrt{v}$, et suivant la direction $PM$, $= \frac{ffdy}{zzds}\sqrt{v}$. Or, posant l'élément $Mm = ds$, que la section $MN$ parcourt dans le temps $dt$, la vitesse suivant $AP$ sera $= \frac{dx}{dt}$, et suivant $PM = \frac{dy}{dt}$; de sorte que $\frac{ffdt}{zz}\sqrt{v} = ds$ et $dt = \frac{zzds}{ff\sqrt{v}}$.

Soit maintenant la section d'eau $MN$ sollicitée par deux forces accélératrices, l'une $P$ selon la direction $AP$, et l'autre $Q$, selon la direction $PM$; et par les principes de la mécanique on aura en prenant $dt$ pour constant:

$$2ddx = Pdt^2 \quad \text{et} \quad 2ddy = Qdt^2,$$

$$\text{ou bien} \quad P = \frac{2ddx}{dt^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2ddy}{dt^2},$$

où il faut substituer les valeurs de $ddx$ et $ddy$, qui leur conviennent en vertu de l'équation $dt = \frac{zz\,ds}{ff\sqrt{v}}$, en supposant $dt$ constant. De là on aura:

$$zzvdds + 2zvdzds - \tfrac{1}{2}zzdsdv = 0$$

et l'on sait qu'il y a

$$dxddx + dyddy = dsdds.$$

Or, ayant trouvé ces deux forces accélératrices $P$ et $Q$, on les réduira aisément à deux autres, dont l'une agit suivant la direction du tuyau $Mm$, et l'autre selon la direction perpendiculaire $MN$ au tuyau. La première sera $= \frac{Pdx + Qdy}{ds}$, et l'autre $= \frac{Qdx - Pdy}{ds}$. D'où remettant pour $P$ et $Q$ les valeurs trouvées, on aura:

$$\text{la force accélératrice selon } Mm = \frac{2dxddx + 2dy\,ddy}{ds\,dt^2} = \frac{2dds}{dt^2}$$

$$\text{et la force accélératrice selon } MN = \frac{2dx\,ddy - 2dy\,ddx}{ds\,dt^2}.$$

Le rayon de la développée étant posé $= r$, on sait que $r = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, supposant la courbe concave vers l'axe.

Donc puisque $dds = -\frac{2dz\,ds}{z} + \frac{ds\,dv}{2v}$, les formes cherchées seront:

$$\text{la force suivant } Mm = -\frac{4dz\,ds}{z\,dt^2} + \frac{ds\,dv}{v\,dt^2},$$

$$\text{la force suivant } MN = -\frac{2ds^2}{r\,dt^2} = -\frac{2f^4v}{rz^4}.$$

Ce sont les forces accélératrices, dont la section d'eau infiniment mince $MN$ est sollicitée dans l'instant présent, où la vitesse de l'eau dans la section $AB$ du tuyau est supposée $= \sqrt{v}$.

2. **Coroll. 1.** La force accélératrice $-\frac{2f^4v}{rz^4}$, qui vient d'être trouvée pour la direction $MN$, étant négative, marque que l'élément d'eau en est poussé suivant la direction $NM$, c'est à dire vers le centre du cercle osculateur de la courbe $AM$ au point $M$. En effet, on voit que cette formule $\frac{2f^4v}{rz^4}$ exprime la force centrifuge qui convient à l'eau, en tant qu'elle est obligée de suivre dans son mouvement la courbure du tuyau. Car posant la vitesse véritable de l'élément d'eau $MN = \sqrt{V}$, de sorte que $V$ marque la hauteur due à cette vitesse, on aura $\sqrt{V} = \frac{ds}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, et partant $\frac{f^4v}{z^4} = V$: d'où la force $NM$ sera $= \frac{2V}{r}$ qui est, comme on sait, l'expression de la force centrifuge d'un corps qui se meut dans un cercle dont le rayon $= r$ avec la vitesse $= \sqrt{V}$.

3. **Coroll. 2.** Donc pendant que l'élément d'eau $MN$ passe par l'espace infiniment petit $Mm$ du tuyau, et qu'il est obligé de changer la direction de son mouvement en suivant la courbure du tuyau, il fera des efforts égaux à la force $\frac{2f^4v}{rz^4}$ contre les parois du tuyau, dont la partie $Nn$, convexe par dehors, éprouvera la force. Par conséquent, le tuyau sera pressé en chaque point $N$ en dehors suivant la direction $Nv$ qui y est perdendiculaire, avec une force, qui convient à la force accélératrice $= \frac{2f^4v}{rz^4}$.

4. **Coroll. 3.** Pour connaître la véritable force que le tuyau soutient de ce côté, on n'a qu'à chercher la force motrice qui est le produit de la force accélératrice par la masse qui en est douée. Considérons, pour cet effet, la quantité d'eau, qui remplit dans l'instant présent l'espace infiniment petit du tuyau $MNmn$, qui est $= zzds$, à cause de l'amplitude du tuyau en $MN = zz$ et $Mm = ds$: et la force actuelle, dont le tuyau sera poussé en $Nn$ selon la direction $Nv$, sera $= \frac{2f^4v\,ds}{rzz}$. Et à moins que le tuyau ne soit bien attaché sur le plan horizontal, il sera emporté par cette force.

5. **Coroll. 4.** Pour l'autre force accélératrice $-\frac{4dz\,ds}{zdt^2} + \frac{ds\,dv}{vdt^2}$, qui agit selon la direction $Mm$ qui est celle du mouvement de la section $MN$, elle est uniquement employée à accélérer le mouvement, pendant que la section $MN$ parvient en $mn$. Car posant la véritable vitesse de l'eau en $MN = \sqrt{V}$, à cause de $V = \frac{f^4v}{z^4}$, on aura $\frac{dV}{V} = \frac{dv}{v} - \frac{4dz}{z}$, d'où cette force accélératrice sera $= \frac{ds\,dV}{Vdt^2}$. Or à cause de $\sqrt{V} = \frac{ds}{dt}$, il sera $Vdt^2 = ds^2$, de sorte que cette force sera $= \frac{dV}{ds}$ qui est l'expression connue pour l'accélération d'un corps dont la hauteur due à la vitesse reçoit l'accroissement $dV$, pendant que le corps parcourt l'espace $ds$.

6. **Coroll. 5.** Or dans la recherche dont il s'agit ici, il vaut mieux considérer la vitesse de l'eau dans une section fixe du tuyau $AB$, au lieu de la vitesse que l'eau a dans un endroit quelconque du tuyau. Ainsi, cette force accélératrice suivant la direction $Mm$ est $= \frac{ds\,dv}{vdt^2} - \frac{4dz\,ds}{zdt^2}$; et est, par conséquent, composée de deux membres, dont le premier renferme l'accélération de l'eau en $AB$ pendant le temps $dt$, et l'autre, l'élargissement du tuyau de $MN$ en $mn$ où la section $MN$ parvient dans le temps $dt$.

7. **Coroll. 6.** Pour mieux comprendre la force de cette expression, il faut considérer qu'elle contient deux sortes de quantités variables. Les unes dépendent du temps $t$, dont $v$ est une fonction, et les autres, du lieu $M$ dans le tuyau ou de l'arc $AM = s$ dont $zz$ est une fonction. Ainsi tant $\frac{dv}{dt}$ que $\frac{dz}{ds}$ seront des quantités finies déterminées dont la première dépend du mouvement variable de l'eau en $AB$, et l'autre de la figure du tuyau même. Donc ayant

$$dt = \frac{zz\,ds}{ff\sqrt{v}} \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz},$$

il conviendra de représenter la force accélératrice suivant $Mm$ en sorte

$$\frac{ff}{zz\sqrt{v}} \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{4f^4v}{z^5} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

8. **Coroll. 7.** Il faut donc que la section d'eau $MN$ soit actuellement sollicitée par cette force accélératrice; or, puisqu'elle n'a point de force en elle-même, il s'en suit que cette force lui est imprimée par l'eau voisine, ou celle qui la suit dans le tuyau. Cette force vient donc de la pression dont les parties d'eau agissent les unes sur les autres. Ainsi, si nous posons que la compression de l'eau en $MN$ soit exprimée par sa hauteur $p$, ou qu'elle soit égale à la pression qui se trouve dans une eau dormante à la profondeur $= p$, la pression en $mn$ sera $= p + dp$ dans le même instant, et $p$ sera une fonction de $s$ tant que nous conservons l'état présent de l'eau dans le tuyau. Donc l'élément d'eau $MNmn$ est poussé en avant par le poids d'une colonne d'eau de la hauteur $= p$, et il sera poussé en arrière par une colonne de la hauteur $= p + dp$, donc la pression en avant répondra à la colonne $dp$ qui, agissant sur toute la base $MN = zz$, donnera la force motrice $= -zz\,dp$ qui poussant la masse d'eau $= zz\,ds$, produira la force accélératrice en avant $= -\frac{dp}{ds}$, qui doit être égale à celle qui vient d'être trouvée, de sorte que nous ayons

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{ff}{zz\sqrt{v}} \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{4f^4 v}{z^5} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

9. **Coroll. 8.** Nous aurons donc pour trouver l'état de pression de l'eau dans le tuyau:

$$dp = -\frac{ff\,ds}{zz\sqrt{v}} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{4f^4 v\,dz}{z^5}.$$

De là, si nous voulons trouver pour l'instant présent la pression de l'eau en chaque endroit du tuyau, il faut considérer tant la quantité $v$, que $\frac{dv}{dt}$ comme constante, et alors en intégrant cette formule, nous obtiendrons

$$p = \text{Const.} - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ds}{zz} - \frac{f^4 v}{z^4}$$

où l'intégrale $\int \frac{ds}{zz}$ dépend uniquement de la figure du tuyau qu'il faut prendre en sorte, qu'il s'évanouisse au commencement $A$, ou lorsque $z = 0$.

10. **Scholie.** Quoique la machine, à l'examen de laquelle je me suis proposé de borner mes recherches, ne contienne pas de tuyaux courbes, il faut néanmoins étendre le calcul à des tuyaux courbes, puisque l'eau, en sortant du côté des tuyaux horizontaux de la machine, change subitement de direction dans son mouvement. Or, pour appliquer le calcul à un si subit changement, la plus sûre méthode est de considérer en général un tuyau courbé d'une manière quelconque; car alors on n'a qu'à rassembler toute la courbure dans un seul endroit, pour connaître l'effet, lorsque l'eau sort à côté du tuyau; ce cas revenant au même, que si le tuyau était courbé subitement à angles droits dans l'endroit, où est l'ouverture. C'est pour cette raison que j'ai commencé mes recherches par celle du mouvement de l'eau par un tuyau courbe quelconque, posé dans une situation horizontale, et afin qu'on ne rencontre pas d'abord à la fois trop de difficultés, j'ai supposé ce tuyau en repos. En effet, la solution de ce problème me facilitera très considérablement celle du cas où le tuyau sera supposé mobile, car quoique la solution, que je viens de tirer des premiers principes de la mécanique, soit assez longue, on verra par les corollaires, qu'on l'aurait pu rendre beaucoup plus simple, si l'on y introduisait d'abord la vraie vitesse $\sqrt{V}$ de l'eau, qui se trouve dans la section $MN$;

car cette vitesse devant être en $mn = \sqrt{(V + dV)}$, on voit d'abord que pour produire cette accélération, il faut une force accélératrice $= \frac{dV}{ds}$ suivant la direction $Mm$; et outre cela, il est clair que la courbure du tuyau, dont le rayon en $M$ est $= r$, demande une force accélératrice $= \frac{2V}{r}$. Ensuite, ayant trouvé ces formules, on n'a qu'à introduire dans le calcul la valeur de $V = \frac{f^4 v}{z^4}$, qui lui convient en vertu de la vitesse donnée dans la section $AB$ et de son changement dans le temps $dt$. Je me servirai donc de ces avantages dans la solution du problème suivant.

### Problème 2.

**11.** (Fig. 164.) Le tuyau horizontal $ABEF$ étant tourné autour d'un axe vertical $O$ avec un mouvement quelconque, si l'eau coule par ce tuyau en y entrant à $AB$ avec une vitesse quelconque, trouver les forces dont chaque particule d'eau sera sollicitée.

**Solution.** Soit, comme auparavant, l'ouverture du tuyau en $AB$ où l'eau y entre $= ff$ et l'amplitude dans un autre endroit quelconque $MN = zz$, posant l'arc $AM = s$; et que le rayon de courbure en $M$ soit $= r$, puisque nous en aurons besoin. Soit, à l'instant présent, le tuyau dans la situation $ABEF$, et que son mouvement de rotation autour de l'axe $O$ soit tel, que la vitesse du point $A$ soit $= \sqrt{u}$ dans le sens $ABA'B'$; posant donc le rayon $OA = a$, la vitesse rotatoire sera $= \frac{\sqrt{u}}{a}$, et si l'on nomme la distance d'un point quelconque $M$ du tuyau à l'axe $O = y$, la vitesse de rotation de ce point sera $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$. Que $t$ marque le temps que le tuyau a mis à parvenir depuis le commencement du mouvement dans la situation présente $ABEF$, et $u$ sera une certaine fonction de $t$ d'où l'on connaîtra le mouvement de rotation du tuyau à chaque temps proposé. Or, pour représenter le mouvement de l'eau, il faut considérer, que premièrement, le mouvement du tuyau lui est commun, de sorte que si l'eau n'avait point de mouvement dans le tuyau même, elle aurait pourtant celui du tuyau, et la vitesse de la section $MN$ serait $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$ selon la direction $MM'$ perpendiculaire à la droite $MO$. Ce serait le cas, si l'eau demeurait immobile dans le tuyau et que la particule $MN$ ne quittât jamais cet endroit, ce qui arriverait, si le tuyau était bouché en $EF$ de sorte que l'eau n'en saurait sortir.

Mais que l'eau ait aussi un mouvement dans le tuyau même, outre celui, qui lui est commun avec le tuyau, et que la vitesse, avec laquelle l'eau entre dans le tuyau $AB$ soit $= \sqrt{v}$, la quantité $v$ marquant une fonction quelconque du temps $t$: et la vitesse de l'eau dans la section $MN$ sera $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, dont la direction est celle du tuyau dans cet endroit, suivant $Mm$. Par là, on connaîtra le mouvement de l'eau dans le tuyau, indépendamment du mouvement de rotation. Ainsi le vrai mouvement de l'élément d'eau, qui se trouve dans la section $MN$, sera composé de deux mouvements, dont l'un sera dirigé selon $Mm$ avec une vitesse $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, et l'autre selon $MM'$ avec une vitesse $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$. De là on connaîtra, à chaque temps proposé, le mouvement de chaque particule d'eau dans le tuyau avec le mouvement du tuyau même. Il s'agit donc de déterminer les forces requises, pour que chaque particule d'eau puisse poursuivre ce mouvement.

Supposons qu'après un temps infiniment petit $dt$, le tuyau parvienne dans la situation $A'B'E'F'$, et l'arc $AA'$ sera $= dt\sqrt{u}$ et l'angle $AOA' = \frac{dt\sqrt{u}}{a}$. Pendant ce temps, la particule d'eau $MN$ parviendra dans le tuyau en $mn$, de sorte que $Mm = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$. Or le point du tuyau $m$ étant transporté en $m'$, par le mouvement de rotation, la particule $MN$ parviendra en effet en $m'n'$. Il faudrait maintenant rapporter ces lieux à un axe fixe $OD$ par les coordonnées $OP$, $PM$, et décomposer le mouvement suivant ces mêmes directions, pour en déduire les forces selon les principes de mécanique; mais de peur que la figure n'en devienne trop embrouillée, à cause de l'épaisseur du tuyau, qui n'entre pourtant en considération qu'en tant que la vitesse $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ en est affectée, je m'en vais poursuivre cette recherche sur une figure, où l'amplitude du tuyau n'est pas exprimée.

(Fig. 165.) Que $AME$ représente donc la position actuelle du tuyau, après un temps écoulé $= t$ depuis le commencement du mouvement, et qu'au commencement le point $A$ ait été en $C$. Posons l'angle $COA = \vartheta$ que le tuyau a déjà décrit depuis le commencement, ou dans le temps $= t$, et l'arc de cercle $CA$ sera $= a\vartheta$ et sa différentielle $AA' = ad\vartheta = dt\sqrt{u}$, de sorte que $d\vartheta = \frac{dt\sqrt{u}}{a}$. Pour considérer dans l'instant présent le mouvement de la particule d'eau qui se trouve en $M$, posant l'arc $AM = s$, tirons la droite $OM = y$, et soit l'arc $AX = x$. Puis, prenant $Mm = ds$, et tirant $Om$, soit $M'Mk$ perpendiculaire sur $Om$, et nous aurons

$$Xx = dx, \quad Mk = \frac{ydx}{a} \quad \text{et} \quad mk = dy, \quad \text{donc} \quad ds^2 = dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}.$$

Maintenant, qu'on décompose le mouvement selon $Mm$, dont la vitesse est $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, selon les directions $M\mu$ et $Mk$ dont celle-là éloigne l'eau de l'axe $O$, et la vitesse selon $M\mu$ sera $= \frac{ffdy\sqrt{v}}{zzds}$, et la vitesse selon $Mk = \frac{ffydx\sqrt{v}}{azzds}$. Or celle-ci étant contraire à l'autre mouvement, qui est commun à l'eau avec le tuyau, et dont la vitesse selon $MM'$ est $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$, le vrai mouvement de la particule d'eau en $M$ sera réduit à ces deux directions $M\mu$ et $MM'$ dont les vitesses sont:

$$\text{selon } M\mu = \frac{ffdy\sqrt{v}}{zzds}, \text{ et selon } MM' = \frac{y}{a}\left(\sqrt{u} - \frac{ffdx\sqrt{v}}{zzds}\right).$$

Posons maintenant, pour poursuivre plus commodément le calcul,

$$\text{la vitesse selon } M\mu \text{ ou } \frac{ffdy\sqrt{v}}{zzds} = V,$$

$$\text{la vitesse selon } MM' \text{ ou } \frac{y}{a}\left(\sqrt{u} - \frac{ffdx\sqrt{v}}{zzds}\right) = U$$

et soit la droite $OCD$ l'axe fixe, auquel nous rapporterons ce mouvement et, ayant tiré la perpendiculaire $MP$, soit $OP = X$ et $PM = Y$. Donc à cause de $OM = y$ et l'angle $COX = \vartheta - \frac{x}{a}$, nous aurons

$$X = y\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) \quad \text{et} \quad Y = y\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right).$$

Ensuite, décomposant le mouvement suivant ces directions fixes $OP$ et $PM$, nous trouverons:

$$\text{la vitesse selon } OP = \frac{XV}{y} - \frac{XU}{y} = \frac{dX}{dt},$$

$$\text{la vitesse selon } PM = \frac{YV}{y} + \frac{XU}{y} = \frac{dY}{dt}.$$

Soient à présent les forces, dont l'eau en $M$ est sollicitée, l'une qui agit selon la direction $OP = P$, et l'autre qui agit selon la direction $PM = Q$; et par les principes du mouvement, on aura en supposant l'élément du temps $dt$ constant:

$$P = \frac{2ddX}{dt^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2ddY}{dt^2}.$$

Or comme $$\frac{dX}{dt} = V\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - U\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)$$

et $$\frac{dY}{dt} = V\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + U\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right),$$

la différentiation donnera:

$$P = \frac{2}{dt}\left(dV\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - V\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - dU\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - U\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)\right),$$

$$Q = \frac{2}{dt}\left(dV\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + V\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + dU\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - U\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)\right).$$

Réduisons ces deux forces à deux autres dont l'une agisse selon $M\mu$ et l'autre selon $MM'$, et la force selon $M\mu$ sera

$$= P\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + Q\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)$$

et la force selon $MM'$ $$= Q\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - P\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right).$$

De là nous aurons:

$$\text{la force selon } M\mu = \frac{2}{dt}\left(dV - Ud\vartheta + \frac{Udx}{a}\right),$$

$$\text{la force selon } MM' = \frac{2}{dt}\left(Vd\vartheta - \frac{Vdx}{a} + dU\right).$$

Réduisons enfin ces deux forces à deux autres, dont l'une agisse selon la direction du tuyau $Mm$, et l'autre selon la direction du rayon de courbure $MR$; et l'on aura:

$$\text{la force selon } Mm = \phantom{-}\text{force } M\mu \cdot \frac{dy}{ds} - \text{force } MM' \cdot \frac{ydx}{ads},$$

$$\text{la force selon } MR = -\text{force } M\mu \cdot \frac{ydx}{ads} - \text{force } MM' \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Donc ces deux forces seront:

$$\text{la force } Mm = \frac{2}{ds\,dt}\left(dy\,dV - Ud\vartheta\,dy + \frac{Udx\,dy}{a} - \frac{Vy\,d\vartheta\,dx}{a} + \frac{Vy\,dx^2}{aa} - \frac{ydx\,dU}{a}\right),$$

$$\text{la force } MR = \frac{2}{ds\,dt}\left(-\frac{ydx\,dV}{a} + \frac{Uyd\vartheta\,dx}{a} - \frac{Uy\,dx^2}{aa} - Vd\vartheta\,dy + \frac{Vdx\,dy}{a} - dy\,dU\right).$$

Soit maintenant la vitesse de l'eau dans le tuyau $=\sqrt{S}$, de sorte que $\sqrt{S}=\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, et nous aurons

$$V=\frac{dy}{ds}\sqrt{S} \quad \text{et} \quad U=\frac{y\sqrt{u}}{a}-\frac{y\,dx}{a\,ds}\sqrt{S}.$$

Or introduisant le rayon de courbure $r$, pour éviter les différentio-différentielles, à cause de:

$$d.\frac{dy}{ds}=-\frac{y\,dx}{ar}+\frac{y\,dx^2}{aa\,ds} \quad \text{et} \quad d.\frac{y\,dx}{a\,ds}=\frac{dy}{r}-\frac{dx\,dy}{a\,ds},$$

nous aurons

$$dV=\frac{dy\,dS}{2ds\sqrt{S}}-\frac{y\,dx}{ar}\sqrt{S}+\frac{y\,dx^2}{aa\,ds}\sqrt{S},$$

$$dU=\frac{dy\sqrt{u}}{a}+\frac{y\,du}{2a\sqrt{u}}-\frac{y\,dx\,dS}{2a\,ds\sqrt{S}}-\frac{dy\sqrt{S}}{r}+\frac{dx\,dy}{a\,ds}\sqrt{S}.$$

Ces valeurs étant substituées, on trouvera, la réduction faite à cause de $ds^2=dy^2+\frac{yy\,dx^2}{aa}$:

$$\text{la force } Mm=\frac{2}{ds\,dt}\left(\frac{ds\,dS}{2\sqrt{S}}-\frac{y\,d\vartheta\,dy}{a}\sqrt{u}-\frac{yy\,dx\,du}{2aa\sqrt{u}}\right),$$

$$\text{la force } MR=\frac{2}{ds\,dt}\left(\frac{ds^2}{r}\sqrt{S}-d\vartheta\,ds\sqrt{S}-\frac{ds^2}{a}\sqrt{u}+\frac{yy\,d\vartheta\,dx}{aa}\sqrt{u}-\frac{y\,dy\,du}{2a\sqrt{u}}\right).$$

Or si $Mm=ds$ est l'espace que la particule d'eau en $M$ parcourt dans le tuyau pendant l'élément du temps $dt$, il y aura $\frac{ds}{\sqrt{S}}=dt$ et $d\vartheta=\frac{dt\sqrt{u}}{a}$. Donc faisant usage de ces formules, on obtiendra:

$$\text{la force } Mm=\frac{dS}{ds}-\frac{2uy\,dy}{aa\,ds}-\frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR=\frac{2S}{r}-\frac{4\sqrt{uS}}{a}+\frac{2u\,yy\,dx}{a^3\,ds}-\frac{y\,dy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

Enfin puisque

$$S=\frac{f^4v}{z^4} \quad \text{et} \quad dS=\frac{f^4dv}{z^4}-\frac{4f^4v\,dz}{z^5},$$

on aura:

$$\text{la force } Mm=\frac{f^4dv}{z^4\,ds}-\frac{4f^4v\,dz}{z^5\,ds}-\frac{2uy\,dy}{aa\,ds}-\frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR=\frac{2f^4v}{rz^4}-\frac{4ff}{azz}\sqrt{uv}+\frac{2u\,yy\,dx}{a^3\,ds}-\frac{y\,dy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

Et ce sont les forces accélératrices, qui doivent agir sur l'élément d'eau en $M$, afin qu'il poursuive le mouvement qui vient d'être supposé par les deux vitesses $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$, dont celle-là détermine le mouvement de l'eau dans le tuyau, et celle-ci le mouvement du tuyau même.

12. **Coroll. 1.** Si le tuyau est supposé en repos, comme dans le cas du problème précédent, on aura $u=0$ et les forces accélératrices se trouveront comme auparavant

$$\text{la force } Mm=\frac{dS}{ds}=\frac{f^4dv}{z^4\,ds}-\frac{4f^4v\,dz}{z^5\,ds},$$

$$\text{la force } MR=\frac{2S}{r}=\frac{2f^4v}{rz^4},$$

où $S$ marque la hauteur, due à la vitesse avec laquelle l'eau se meut dans le tuyau et qui est dans ce cas sa véritable vitesse.

13. **Coroll. 2.** Puisque $v$ est une fonction du temps $t$, la formule $\frac{dv}{dt}$ en sera aussi une, de même que $u$ et $\frac{du}{dt}$. Donc dans le premier terme des formules trouvées, qui est $\frac{f^4 dv}{z^4 ds}$, il faudra pour $ds$ mettre sa valeur qui lui convient par cette équation $ds = dt\sqrt{S} = \frac{ffdt}{zz}\sqrt{v}$. Et partant les forces cherchées seront:

$$\text{la force } Mm = \frac{ffdv}{zzdt\sqrt{v}} - \frac{4f^4 v dz}{z^5 ds} - \frac{2uydy}{aads} - \frac{yydxdu}{aadsdt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff\sqrt{uv}}{azz} + \frac{2uyydx}{a^3 ds} - \frac{ydydu}{adsdt\sqrt{u}}.$$

14. **Coroll. 3.** Si l'un et l'autre mouvement était uniforme, ou que les quantités $u$ et $v$ fussent constantes, ces forces seraient:

$$\text{la force } Mm = -\frac{f^4 v dz}{z^5 ds} - \frac{2uydy}{aads},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff}{azz}\sqrt{uv} + \frac{2uyydx}{a^3 ds}.$$

Ce cas est en particulier remarquable, puisqu'on peut supposer que la machine proposée se réduit enfin à un tel mouvement uniforme.

### Problème 3.

15. (Fig. 166.) Si le tuyau horizontal $ABEF$ tourne autour de l'axe vertical en $O$, avec un mouvement quelconque, et que l'eau y soit continuellement poussée par l'ouverture $AB$ avec une force quelconque, d'où elle sorte par l'ouverture $EF$: déterminer tant le mouvement de l'eau par ce tuyau, que la pression que le tuyau en soutient dans tous ses points.

**Solution.** Posons, comme auparavant, le rayon du cercle $CA$ dans lequel le point $A$ tourne, $OA = a$ et la vitesse du point $A = u$, qui sera une fonction du temps $t$. Ensuite, soit $q$ la force par laquelle l'eau est forcée d'entrer dans le tuyau par l'ouverture $AB$, ou que $q$ marque la hauteur d'une colonne d'eau, à laquelle est égale la pression de l'eau en $AB$ qui dépendra aussi du temps $t$, à moins qu'elle ne soit pas constante. De plus, soit l'ouverture en $AB = ff$ et la vitesse, avec laquelle l'eau y entre dans le tuyau $= \sqrt{v}$ de laquelle dépend la vitesse de l'eau dans chaque endroit pour l'instant présent, de sorte qu'il s'agit de trouver cette quantité $v$, qui dépendra aussi du temps $t$. Cela posé, considérons un élément quelconque $MNmn$ dans le tuyau, et ayant tiré la droite $OM$, soit $AX = x$, $OM = y$ et l'élément de la courbe

$$M = ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}\right)},$$

et puisque la courbe $AME$, ou la figure du tuyau est donnée, on aura une équation entre $x$ et $y$: soit de plus le rayon de courbure en $M$ savoir $MR = r$, et il y aura

$$\frac{dy}{r} = \frac{dxdy}{ads} + d.\frac{ydx}{ads} = \frac{yddx + 2dydx}{ads},$$

*

prenant l'élément $ds$ pour constant; or l'amplitude du tuyau en $m$ soit $= zz$, dont la valeur dépendra aussi des variables $x$ et $y$. Comme ce sont les mêmes dénominations, que celles du problème précédent, l'élément d'eau en $MNmn$ doit être sollicité par deux forces accélératrices, dont l'une agit selon la direction $Mm$ ou selon la tangente du tuyau, et l'autre selon la direction du rayon de courbure $MR$; et ces forces seront

$$\text{la force } Mm = \frac{ff\,dv}{zz\,dt\sqrt{v}} - \frac{4f^4 v\,dz}{z^5\,ds} - \frac{2uy\,dy}{aa\,ds} - \frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff}{azz}\sqrt{uv} + \frac{2uyy\,dx}{a^3\,ds} - \frac{y\,dy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

Soit maintenant l'état de compression de l'eau en $MN = p$ et en $mn = p + dp$, d'où résulte une force accélératrice en avant dans le tuyau $= \frac{-dp}{ds}$, comme nous avons vu dans le problème précédent.

Donc nous aurons:

$$dp = \frac{-ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ds}{zz} + 4f^4 v\frac{dz}{z^5} + \frac{2uy\,dy}{aa} + \frac{du}{aa\,dt\sqrt{u}}yy\,dx,$$

et prenant les intégrales par la longueur du tuyau, en supposant $u$ et $v$ de même que $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ constantes, on aura:

$$p = C - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\int\frac{ds}{zz} - \frac{f^4 v}{z^4} + \frac{uyy}{aa} + \frac{du}{aa\,dt\sqrt{u}}\int yy\,dx.$$

Pour déterminer cette constante, il faut considérer, qu'à la sortie en $EF$ l'état de compression de l'eau doit s'évanouir; soit donc l'ouverture en $EF = hh$; la distance $OE = b$; et prenant les intégrales par toute la longueur du tuyau soit:

$$\int\frac{ds}{zz} = E \quad\text{et}\quad \int\frac{yy\,dx}{a} = F;$$

et l'on aura pour la dernière section $EF$

$$0 = C - \frac{ffE\,dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{f^4 v}{h^4} + \frac{bbu}{aa} + \frac{F du}{a\,dt\sqrt{u}},$$

et partant, en général, pour une section quelconque $MN$:

$$p = \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)v + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\left(E - \int\frac{ds}{zz}\right) - \left(\frac{bb}{aa} - \frac{yy}{aa}\right)u - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}}\left(F - \int\frac{yy\,dx}{a}\right).$$

Donc à la première section $AB$ où $y = a$, $zz = ff$, $\int\frac{ds}{zz} = 0$ et $\int yy\,dx = 0$, la pression, que nous avons supposée $= q$, sera:

$$q = \left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)v + \frac{ffE\,dv}{dt\sqrt{v}} - \left(\frac{bb}{aa} - 1\right)u - \frac{F du}{a\,dt\sqrt{u}}$$

d'où l'on doit déterminer la quantité $v$.

Pour l'autre force selon $MR$, c'est le tuyau même qui la doit exercer sur l'eau, et partant le tuyau en sera repoussé suivant la direction $NS$ par une force égale, qui étant accélératrice, il faut

la multiplier par la masse de l'élément $MmNn = zz\,ds$, pour avoir la force motrice dont l'élément d'eau $MmNn$ pousse suivant la direction $NS$ perpendiculaire à la tangente du tuyau.

Donc cette force motrice selon $NS$ qui résulte de l'élément d'eau $MmNn$ sera:

$$2f^4 v \frac{ds}{rzz} - \frac{4ff\,ds}{a} \sqrt{uv} + \frac{2u}{a^3} yy\,zz\,dx - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} y\,zz\,dy.$$

Cette force tend à tourner le tuyau autour de l'axe $O$ dans le sens $AG$, et partant à accélérer le mouvement de rotation du tuyau qui se fait dans le même sens. Le moment de cette force, pour produire cet effet se trouvera donc, si l'on multiplie la force tant par la distance $OM = y$ que par le sinus de l'angle $OMR$ qui est $= \frac{dy}{ds}$; ou en tout par $\frac{y\,dy}{ds}$. Par conséquent, le moment de la force élémentaire $NS$ sera:

$$2f^4 v \frac{y\,dy}{rzz} - \frac{4ffy\,dy}{a} \sqrt{uv} + \frac{2u}{a^3} - \frac{y^3\,zz\,dx\,dy}{ds} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} \cdot \frac{yy\,zz\,dy^2}{ds}.$$

Et partant le moment total de toutes les forces de l'eau pour faire tourner le tuyau autour de l'axe dans le sens $AG$ sera:

$$2f^4 v \int \frac{y\,dy}{rzz} - \frac{2ffyy}{a} \sqrt{uv} + \frac{2u}{a^3} \cdot \int \frac{y^3\,zz\,dx\,dy}{ds} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} \int \frac{yy\,zz\,dy^2}{ds} + 2aff\sqrt{uv},$$

en prenant les intégrales en sorte qu'elles s'évanouissent au point $A$, et en les étendant jusqu'au dernier bout du tuyau $EF$.

C'est l'effet entier des forces de l'eau sur le mouvement du tuyau; car la pression de l'eau $p$ dans le tuyau, agissant sur tous les côtés également, se détruit elle-même, de sorte qu'il n'y résulte aucun moment pour déranger le mouvement du tuyau.

16. **Coroll. 1.** Puisqu'il y a $\frac{dy}{r} = \frac{y\,ddx + 2dy\,dx}{a\,ds}$, supposant l'élément $ds$ constant, nous aurons

$$\frac{y\,dy}{r} = \frac{yy\,ddx + 2y\,dy\,dx}{a\,ds} = d\frac{yy\,dx}{a\,ds}.$$

Donc si l'amplitude du tuyau est partout la même ou bien $zz = ff$, la valeur de la formule intégrale

$$\int \frac{y\,dy}{rzz} \text{ sera } = \frac{yy}{aff} \cdot \frac{dx}{ds},$$

supposé qu'en $A$ il y ait $\frac{dx}{ds} = 0$, ou que le rayon $OA$ y touche le tuyau. Or $\frac{y\,dx}{a\,ds}$ marque le sinus de l'angle $AMO$, que le tuyau fait avec le rayon $OM$ en $M$. Donc si cet angle devient droit en $E$ ou $OE = b$, on aura pour le tuyau tout entier $\int \frac{y\,dy}{rzz} = \frac{b}{ff}$, et partant le premier terme de l'expression trouvée pour le moment des forces d'eau sera

$$2f^4 v \int \frac{y\,dy}{rzz} = 2bffv.$$

17. **Coroll. 2.** Si le tuyau n'a pas partout la même amplitude, on cherchera la valeur de $2f^4 v \int \frac{ydy}{zz}$ par parties, en la calculant pour chaque partie du tuyau, dont l'amplitude est la même. Ainsi si la partie $ME$ est de la même largeur $zz$, la valeur de

$$\int \frac{ydy}{rzz} \text{ sera } = \frac{1}{zz}(OE \sin OEA - OM \sin OMA),$$

et partant on aura pour cette partie du tuyau

$$2f^4 v \int \frac{ydy}{rzz} = \frac{2f^4 v}{zz}(OE \sin OEA - OM \sin OMA).$$

18. **Coroll. 3.** Par là on voit que si une partie du tuyau est ou droite ou courbée selon un arc de cercle dont le centre est en $O$, la valeur de $\int \frac{ydy}{rzz}$ pour cette partie sera nulle, quelque variable qu'y soit l'amplitude de $zz$. Ainsi, au lieu que le tuyau soit terminé en $EF$, supposé que l'angle $OEM$ soit droit, on y peut encore ajouter une partie, ou droite ou circulaire, dont le centre soit en $O$, sans que la valeur totale du terme $\int \frac{ydy}{rzz}$ en souffre quelque changement, et il n'importe même, quelque variable qu'en soit l'amplitude, de sorte qu'on pourra par ce moyen donner à volonté une grandeur quelconque à l'ouverture par où l'eau sort.

19. **Coroll. 4.** La seconde partie de l'expression que j'ai trouvée pour le moment des forces de l'eau, est

$$= -\frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(yy - aa) = -\frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(OE^2 - OA^2):$$

elle dépend donc uniquement des distances $OA$ et $OE$ auxquelles les deux bouts du tuyau se trouvent du centre $O$. Cette expression étant négative, elle diminue la valeur du moment.

20. **Coroll. 5.** La troisième partie $\frac{2u}{a^3}\int \frac{y^3 zz\, dx\, dy}{ds}$ est encore affirmative et augmente le moment. Elle se réduit à cette forme:

$$\frac{2u}{aa}\int yy\, zz\, ds \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ydx}{ads} = \frac{2u}{aa}\int yy\, zz\, ds \sin AMO \cos AMO, \quad \text{ou bien à } \frac{u}{aa}\int yy\, zz\, ds \sin 2AMO.$$

D'où l'on voit que si l'angle $AMO$ est ou nul ou droit, la valeur de cette partie s'évanouit également dans l'un et l'autre cas. Or elle sera la plus grande, quand l'angle $AMO$ contiendra $45^0$, à moins que la variabilité de la distance $y$ n'y cause quelque changement.

21. **Coroll. 6.** La quatrième partie

$$-\frac{du}{adt\sqrt{u}}\int \frac{yy\, zz\, dy^2}{ds} = -\frac{du}{adt\sqrt{u}}\int yy\, zz\, ds \cos^2 AMO$$

diminue le moment des forces de l'eau, tant que le mouvement de rotation du tuyau va en augmentant. Cette partie sera donc la plus grande, lorsque l'angle $AMO$ sera évanouissant; et elle deviendra $= 0$ quand cet angle sera droit.

22. **Coroll. 7.** Donc si nous posons pour toute la longueur du tuyau

$$\int \frac{ydy}{rzz} = L; \quad \int yyzz\, ds \sin 2AMO = M; \quad \int yyzz\, ds \cos^2 AMO = H;$$

le moment total des forces de l'eau dans le sens $AG$ sera:

$$= 2f^4 Lv - \frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(OE^2 - OA^2) + \frac{Mu}{aa} - \frac{Hdu}{adt\sqrt{u}}.$$

### Problème 4.

23. La machine hydraulique de M. Segner étant proposée, déterminer l'effet qu'elle est capable de produire par le moyen d'une dépense d'eau donnée.

**Solution.** (Fig. 167). Soit $\alpha\alpha\delta\delta$ le grand tuyau cylindrique vertical, mobile autour de son axe $OO$: soit cet axe élargi en haut, pour mieux recevoir l'eau qui y coule constamment par le canal $V$: car supposons que ce vaisseau demeure toujours rempli d'eau jusqu'en $\gamma\gamma$, et soit la hauteur de l'eau au-dessus de l'endroit, où les tuyaux horizontaux y sont attachés, $\varepsilon\varepsilon = e$; soit, ensuite, le demi-diamètre de ce cylindre en bas comme ci-dessus $= a$: et $AB$ une ouverture qui reçoit un tuyau horizontal dont l'amplitude en $AB$ soit $= ff$, et soit $n$ le nombre des tuyaux horizontaux dont le cylindre est garni en bas, et qui tous soient égaux et semblables entr'eux et également attachés. Que le mouvement de la machine se trouve déjà dans l'état d'uniformité, et soit la vitesse dont le point $A$ tourne autour de l'axe $OO = \sqrt{u}$, ou bien la vitesse rotatoire de toute la machine $= \frac{\sqrt{u}}{a}$: soit, enfin, $\sqrt{v}$ la vitesse avec laquelle l'eau entre en $AB$ dans le tuyaux horizontaux, et que la hauteur $q$ exprime l'état de compression de l'eau dans l'embouchure $AB$.

Soit de plus $ABMNEF$ un des tuyaux horizontaux, que je supposerai d'une figure quelconque donnée: de sorte que, posant l'arc $AM = s$, la distance $OM = y$, le rayon de courbure en $M = r$ et l'amplitude $MN = zz$, la relation de ces quantités soit donnée; d'où l'on trouvera pour le tuyau tout entier $ABEF$ la valeur des formules intégrales suivantes:

$$\int \frac{ydy}{rzz} = L \quad \text{et} \quad \int yyzz\, ds \sin 2AMO = M,$$

et soit enfin l'amplitude de l'embouchure $EF$, par laquelle l'eau sort $= hh$ et la distance $OE = b$.

Cela posé, si l'eau dans le grand vaisseau $\alpha\alpha\gamma\gamma$ était en repos, on sait que la compression de l'eau en $AB$ serait $= e - v$: or puisque l'eau dans ce vaisseau suivra bientôt le mouvement de rotation du vaisseau, la force centrifuge augmentera ses efforts d'échapper par les ouvertures $AB$, d'où la compression dans ces endroits deviendra plus grande. Et en examinant la chose, on trouvera que la compression de l'eau en $AB$ sera exprimée par la hauteur $e + u - v$: de sorte que $q = e + u - v$. Ayant donc trouvé dans le Problème précédent la valeur de $q$ par la considération du mouvement de l'eau dans les tuyaux horizontaux, en supposant tant $du = 0$ que $dv = 0$, à cause de l'uniformité du mouvement, nous aurons cette équation:

$$e + u - v = \left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)v - \left(\frac{bb}{aa} - 1\right)u,$$

ou bien $e = \frac{f^4}{h^4} v - \frac{bb}{aa} u$, d'où nous tirerons

$$f^4 v = eh^4 + \frac{bbh^4}{aa} u, \quad \text{ou} \quad v = \frac{eh^4}{f^4} + \frac{bbh^4 u}{aaf^4}.$$

Que cette machine ait maintenant à vaincre un certain obstacle, dont le moment pour arrêter le mouvement de la machine soit $= Ga$, ou que la machine doive monter un poids $G$ qui lui est attaché par une corde qui s'enveloppe autour du cylindre $\alpha\alpha$, de sorte que la vitesse dont ce poids est monté, soit $= \sqrt{u}$. Or le mouvement des forces de l'eau pour accélérer le mouvement de la machine, étant dans un tuyau horizontal

$$= 2f^4 Lv - \frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(bb - aa) + \frac{Mu}{aa},$$

puisque le nombre des tuyaux horizontaux est $= n$, le moment total qui en résulte sera

$$2nf^4 Lv - \frac{2nff\sqrt{uv}}{a}(bb - aa) + \frac{nMu}{aa}$$

qui doit être égal au moment de l'obstacle $Ga$, de sorte que:

$$Ga = 2nf^4 Lv - \frac{2nff\sqrt{uv}}{a}(bb - aa) + \frac{nMu}{aa}.$$

Ayant donc déjà trouvé $f^4 v = \frac{h^4}{aa}(aae + bbu)$, nous aurons:

$$Ga = 2nLh^4 e + \frac{2nLbbh^4 u}{aa} - \frac{2nhh(bb - aa)}{a} \sqrt{u(aae + bbu)} + \frac{nMu}{aa}.$$

Si nous posons à présent pour abréger:

$$\frac{2nLaah^4 e - Ga^3}{2nhh(bb - aa)} = A \quad \text{et} \quad \frac{2Lbbh^4 + M}{2hh(bb - aa)} = B,$$

nous trouverons:

$$u = \frac{\frac{1}{2}aae - AB \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 ee - ABa^2 e + AAbb)}}{BB - bb},$$

d'où l'on connaîtra la vitesse avec laquelle la machine tournera autour de son axe, et qui est aussi celle, avec laquelle le poids $G$ sera élevé.

Or l'effet de la machine doit être estimé par le produit du fardeau $G$ et de sa vitesse $\sqrt{u}$, ou par $G\sqrt{u}$; il est par conséquent déterminé. Or pour produire cet effet, il faut employer une certaine quantité d'eau, qui maintienne le vaisseau toujours plein. Cette quantité d'eau se connaît tant par l'ouverture $ff$ des tuyaux horizontaux, que par la vitesse $\sqrt{v}$ avec laquelle l'eau passe par ces ouvertures; d'où la dépense d'eau sera exprimée par

$$nff\sqrt{v} = \frac{nhh}{a}\sqrt{(aae + bbu)}.$$

Supposons que l'eau entre continuellement dans le grand vaisseau, par une ouverture $= gg$, avec une vitesse $= \sqrt{k}$, et nous aurons:

$$nff\sqrt{v} = gg\sqrt{k} \quad \text{ou} \quad ff\sqrt{v} = \frac{1}{n}gg\sqrt{k} \quad \text{et} \quad agg\sqrt{k} = nhh\sqrt{(aae + bbu)},$$

d'où nous tirons $aag^4k = nnaah^4e + nnbbh^4u$, ou bien

$$\frac{u}{aa} = \frac{g^4k - nnh^4e}{nnbbh^4}.$$

Par conséquent nous aurons:

$$Ga = \frac{2}{n}Lg^4k - \frac{2(bb-aa)}{nbhh}gg\sqrt{k}(g^4k - nnh^4e) + \frac{M(g^4k - nnh^4e)}{nbbh^4},$$

et l'effet de la machine sera:

$$G\sqrt{u} = \frac{2Lg^4k\sqrt{(g^4k-nnh^4e)}}{nnbhh} - \frac{2(bb-aa)gg(g^4k-nnh^4e)\sqrt{k}}{nnbbh^4} + \frac{M(g^4k-nnh^4e)\sqrt{(g^4k-nnh^4e)}}{nnb^3h^6}$$

qui dépend, à ce qu'on voit, de toutes ces quantités $a$, $b$, $h$, $e$, $n$, $gg$, $\sqrt{k}$ et des lettres $L$ et $M$ qui sont déterminées par la figure des tuyaux horizontaux.

24. **Coroll. 1.** Si nous posons la vitesse avec laquelle l'eau sort des tuyaux horizontaux en $EF = \sqrt{w}$, qui marque la vitesse relative de l'eau à l'égard des tuyaux, et non pas la vitesse véritable, nous aurons $hh\sqrt{w} = ff\sqrt{v} = \frac{1}{n}gg\sqrt{k}$, et partant cette vitesse $\sqrt{w}$ sera $= \frac{gg\sqrt{k}}{nhh}$, lorsque la machine sera parvenue dans l'état d'uniformité, et alors il résultera pour la vitesse de rotation $\frac{u}{aa} = \frac{w-e}{bb}$. Donc la machine ne sera capable de produire quelqu'effet, qu'en tant que $w > e$, ou que la vitesse $\sqrt{w}$ sera plus grande que celle qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur $e$.

25. **Coroll. 2.** Or si la direction dans laquelle l'eau sort des tuyaux horizontaux, est perpendiculaire au rayon $OE$, la véritable vitesse de l'eau qui en sort, sera

$$= \sqrt{w} - \frac{b\sqrt{u}}{a} = \sqrt{w} - \sqrt{(w-e)}$$

qui est toujours plus petite que $\sqrt{e}$, ou la vitesse d'un corps qui est tombé de la hauteur $e$. Ainsi il ne faut pas être surpris, que la vitesse relative $\sqrt{w}$ doive être plus grande que $\sqrt{e}$.

26. **Coroll. 3.** En introduisant cette vitesse relative $\sqrt{w}$ avec laquelle l'eau sort des tuyaux horizontaux, dans les formules trouvées pour le poids $G$ et l'effet de la machine $G\sqrt{u}$, nous aurons:

$$Ga = 2nLh^4w - \frac{2n(bb-aa)hh}{b}\sqrt{w}(w-e) + \frac{nM(w-e)}{bb},$$

$$G\sqrt{u} = \frac{2nLh^4w}{b}\sqrt{(w-e)} - \frac{2n(bb-aa)hh(w-e)\sqrt{w}}{bb} + \frac{nM(w-e)\sqrt{(w-e)}}{b^3}.$$

27. **Coroll. 4.** Si $w = e$, la machine sera capable de soutenir le poids $G$ sans se mouvoir, ou les forces de l'eau seront en équilibre avec le moment de ce poids $Ga = 2nLh^4w = 2nLh^4e$. Dans ce cas, le mouvement de rotation $u$ s'évanouit, et la dépense d'eau sera $= nhh\sqrt{e}$. Donc pour élever ce même poids, il faut que $w$ soit plus grand que $e$, et partant la dépense d'eau plus grande que dans le cas d'équilibre.

28. **Exemple 1.** (Fig. 168.) Soient les tuyaux horizontaux droits et partout de la mê largeur $ff$; qu'ils soient dirigés vers l'axe du mouvement $O$ en $AB$ où ils sont attachés au gra vaisseau; or qu'à l'autre extrémité ils aient un petit bout $DEF$ joint à angles droits, par où l'e sorte en $EF$, selon une direction perpendiculaire à $OD$. Soit, de plus, l'ouverture en $EF=hh$, rayon entier $OD=b$, le rayon de la base du vaisseau $OA=a$, et que l'eau y soit entreten constamment à la hauteur $=e$. Cela posé, la valeur de $\int\frac{ydy}{rzz}=L$ et celle de $M=\int yyzzds\sin AM$ s'évanouira, puisque l'angle $AMO$ est ou nul ou droit.

Donc posant la dépense d'eau $=nhh\sqrt{w}$, ou que $\sqrt{w}$ exprime la vitesse avec laquelle l'eau échap des tuyaux en $EF$, le nombre des tuyaux étant $=n$; le mouvement de rotation sera déterminé p cette égalité $\frac{u}{aa}=\frac{w-e}{bb}$. Ou si l'on imprime d'abord à la machine, par une force étrangère, ce mo vement de rotation, et qu'on verse constamment dans le vaisseau la quantité d'eau marquée po l'entretenir plein, la machine sera en état de lever le poids $G$ avec la masse $\sqrt{u}=\frac{a}{b}\sqrt{(w-}$ de sorte que

$$Ga=\frac{2nbh^4w}{ff}-\frac{2n(bb-aa)hh}{b}\sqrt{w(w-e)},$$

ou bien l'effet de la machine sera:

$$G\sqrt{u}=\frac{2nh^4w}{ff}\sqrt{(w-e)}-\frac{2n(bb-aa)hh(w-e)\sqrt{w}}{bb}.$$

Donc s'il ne s'agit que de soutenir un poids, on aura $w=e$, et ce poids que la machine sera c pable de soutenir, sera:

$$G=\frac{2nbh^4e}{aff},$$

s'il est attaché à la distance $a$ de l'axe.

Mais s'il faut élever un poids avec un certain degré de vitesse $\sqrt{u}$, cela demandera une pl grande dépense d'eau qui, à cause de $w=e+\frac{bbu}{aa}$, sera $=nhh\sqrt{(e+\frac{bbu}{aa})}$, et le poids $G$ que machine sera capable d'élever, sera:

$$G=\frac{2nbh^4w}{aff}-\frac{2n(bb-aa)hh}{ab}\sqrt{w(w-e)}.$$

Or si la quantité d'eau qu'on verse dans le grand vaisseau pour le maintenir, est donnée $=ff\sqrt{k}$, de mêm que la vitesse $\sqrt{u}$, avec laquelle le poids doit monter, et qui est supposée celle du point $A$ de machine, nous aurons $nhh\sqrt{w}=ff\sqrt{k}$ et $w=e+\frac{bbu}{aa}$, d'où nous tirons $h^4=\frac{aaf^4k}{nn(aae+bbu)}$. alors le poids que la machine est capable d'élever avec ce degré marqué de vitesse et avec dépense d'eau $=ff\sqrt{k}$, sera:

$$G=\frac{2bffk}{na}-\frac{2(bb-aa)}{aa}ff\sqrt{ku}.$$

Ou bien, si l'on pose la dépense d'eau $=D$, sans qu'elle dépende de la largeur des tuyaux, de sor que $\sqrt{k}=\frac{D}{ff}$, et $hh=\frac{aD}{n\sqrt{(aae+bbu)}}$; le poids, élevé par la machine sera:

$$G = \frac{2bDD}{naff} - \frac{2(bb-aa)}{aa} D \sqrt{u},$$

où je fais les remarques suivantes:

1) Puisque $nff$ marque la somme des ouvertures, par lesquelles l'eau passe dans les tuyaux horizontaux, on voit que, plus on diminue ces ouvertures, plus le poids $G$ deviendra grand. Mais on comprend aussi qu'on ne les saurait diminuer considérablement au-delà des ouvertures $hh$, par lesquelles l'eau sort: de peur que l'eau ne perde sa continuité dans les tuyaux. Donc si l'on met $ff = hh$, de sorte que $ff = \frac{aD}{n\sqrt{(aae+bbu)}}$, le poids, élevé par la machine, sera

$$G = \frac{2bD\sqrt{(aae+bbu)}}{aa} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{u}}{aa},$$

et partant ce poids $G$ sera à la dépense d'eau dans un rapport donné:

$$\frac{G}{D} = \frac{2}{aa}(b\sqrt{(aae+bbu)} - (bb-aa)\sqrt{u}).$$

2) On voit aussi que plus la hauteur de l'eau $e$ dans le grand vaisseau sera grande, plus aussi le poids $G$, que la machine sera capable d'élever à l'aide de la dépense $D$ et avec la vitesse donnée $\sqrt{u}$, deviendra grand.

3) La valeur de $G$ dépend aussi principalement du rapport de $b$ à $a$, et il est clair que, plus ce rapport devient grand, plus aussi le deviendra le poids $G$; mais non pas dans la même raison, car posant $\frac{b}{a} = m$, on aura:

$$\frac{G}{D} = 2m\sqrt{(e+mmu)} - 2(mm-1)\sqrt{u};$$

et si les tuyaux horizontaux sont les plus courts possibles, ce qui arrive si $b = a$ ou $m = 1$, alors on aura:

$$\frac{G}{D} = 2\sqrt{(e+u)} \quad \text{ou} \quad G = 2D\sqrt{(e+u)}.$$

Mais si les tuyaux horizontaux étaient infiniment longs ou $b = \infty$, et partant aussi $m = \infty$, on trouverait:

$$\frac{G}{D} = \frac{e+2u}{\sqrt{u}}, \quad \text{ou} \quad G = \frac{D(e+2u)}{\sqrt{u}} = 2D\sqrt{\left(e+u+\frac{ee}{4u}\right)}$$

et ce poids est le plus grand qu'on puisse élever à l'aide d'une telle machine avec la vitesse $= \sqrt{u}$, moyennant la dépense d'eau $= D$.

4) Or il faut aussi avoir égard à l'état de compression de l'eau dans les tuyaux, qui a été indiquée par la lettre $p$; car si la valeur de $p$ devenait négative et plus grande que 32 pieds, ce qui est le poids de l'atmosphère, l'eau se séparerait des parois des tuyaux, et partant ne produirait plus l'effet qui vient d'être assigné. Or pour le cas du mouvement uniforme, que je considère ici dans un endroit du tuyau $MN$, où l'amplitude $= zz$ et la distance au centre $OM = y$, la compression de l'eau y est

$$p = \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)v - \left(\frac{bb}{aa} - \frac{yy}{aa}\right)u.$$

Donc pour notre cas, où $z = f = h$, la compression en $M$ deviendra actuellement négative, savoir

$$p = -\frac{(bb-yy)}{aa}u;$$

et en $A$, où elle est la plus grande, il y aura

$$p = -\frac{(bb-aa)}{aa}u.$$

Par conséquent, on ne saurait prendre la quantité $b$ si grande que

$$\frac{(bb-aa)u}{aa} \text{ ou } (mm-1)u$$

montât à 32 pieds: il faudrait même qu'elle fût toujours considérablement au-dessous de ce terme. Voilà donc un limite pour la valeur $\frac{b}{a} = m$, qu'il ne faut pas surpasser.

29. **Coroll. 1.** Soit la hauteur de l'eau dans le vaisseau $e = 3$ pieds; la vitesse du poids à élever $\sqrt{u} = \sqrt{^1/_4} = {^1/_2}$, ou égale à celle, qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur d'un quart de pied. Soit, de plus, le rayon $OA = a = {^1/_2}$ pied; la longueur des tuyaux horizontaux $AD = 2\,{^1/_2}$ pieds, ou $b = 3$ pieds, et leur nombre $n = 4$. Pour la dépense d'eau, qu'elle soit égale à celle qu'une ouverture d'un pied carré fournit, par laquelle l'eau passe avec une vitesse due à la hauteur d' $^1/_4$ de pied: de sorte que $D = 1.\sqrt{^1/_4} = {^1/_2}$. Cela posé, si les tuyaux horizontaux sont partout de la même amplitude $ff$, cette amplitude doit être $ff = \frac{{^1/_2}.{^1/_2}}{4\sqrt{({^1/_4}.3+9.{^1/_4})}} = \frac{1}{16\sqrt{3}}$ pied carré, ou bien $ff = 3\sqrt{3}$ pouces carrés. La machine, étant construite suivant ces mesures, élèvera un poids $Q = 6\sqrt{12} - 17\,{^1/_2} = 3{,}2846$ pieds cubiques d'eau, ou bien de 230 livres à peu près.

30. **Coroll. 2.** Dans ce cas, la compression de l'eau à l'embouchure des tuyaux horizontaux est $= -{^{35}/_4}$ pieds, et partant il n'y a point de danger que l'eau ne demeure continue dans les tuyaux. De là on voit qu'on pourrait, sans rien risquer de ce côté, poser $b = 5$ pieds, de sorte que $m = 10$, et conservant les autres mesures, $e = 3$, $u = {^1/_4}$, $a = {^1/_2}$, $n = 4$ et $D = {^1/_2}$, la pression en $A$ sera $p = {^{99}/_4}$ pieds et $ff = \frac{1}{16\sqrt{28}}$ pied carré $= \frac{9}{\sqrt{28}} = 1\,{^7/_{10}}$ pouces carrés. Et cette machine élèvera, avec la vitesse marquée, un poids $Q = 10\sqrt{28} - 49\,{^1/_2} = 3{,}414$ pieds cubiques d'eau, ou bien $Q = 240$ livres environ.

Il s'en suit qu'on ne gagne pas considérablement en augmentant de deux pieds la longueur des tuyaux horizontaux, puisque le poids $Q$ n'en est devenu que de 10 livres plus grand. Il n'est donc pas avantageux de faire les tuyaux horizontaux trop longs, et il vaut mieux leur donner une longueur médiocre.

31. **Coroll. 3.** Si l'on posait la dépense $D$ plus grande ou plus petite, les autres quantités $e$, $a$, $b$, $u$ et $n$ demeurant les mêmes, on devrait augmenter ou diminuer dans la même raison l'amplitude des tuyaux horizontaux, à laquelle les ouvertures $EF$ sont supposées égales. Et alors le poids $Q$, que la machine est capable d'élever avec la vitesse donnée $\sqrt{u}$, sera aussi augmenté ou diminué dans la même raison.

32. **Exemple 2.** Soient, comme auparavant, les tuyaux droits et dirigés vers l'axe $O$, leur nombre $= n$, le petit rayon $OA = a$, le grand $OD = b$, la hauteur de l'eau dans le vaisseau vertical $= e$. De plus, soit $ff$ l'amplitude des tuyaux horizontaux, et $hh$ leur ouverture en $EF$, ce bout $DEF$ leur étant joint à angles droits, de sorte que la direction de l'eau qui en sort, soit perpendiculaire au rayon $OE$, et que la dépense d'eau, pour entretenir plein le vaisseau, soit $= D$; puis, que le poids $Q$ que la machine élève n'y soit plus attaché à la base du vaisseau $\alpha\alpha$, mais qu'il y ait un autre tambour du diamètre $\zeta\zeta$, qui reçoit la corde par laquelle le poids est tiré; et que ce tambour tourne avec le vaisseau. Soit le rayon de ce tambour $\iota\zeta = c$, et la vitesse de rotation au point $\zeta = \sqrt{i}$ qui est celle avec laquelle le poids $Q$ doit être élevé. Maintenant, les dimensions $e$, $a$, $b$, $n$, $c$ et $i$ étant données, il faut déterminer les autres $ff$ et $hh$, avec le poids $Q$ que la machine sera capable d'élever avec la vitesse $\sqrt{i}$.

Pour cet effet soit $\sqrt{\varpi}$ la vitesse avec laquelle l'eau sort par les ouvertures $DE = hh$, et $\sqrt{v}$ celle avec laquelle l'eau passe par les tuyaux horizontaux: et l'on aura

$$nhh\sqrt{\varpi} = nff\sqrt{v} = D, \text{ ou } \sqrt{\varpi} = \frac{D}{nhh}; \quad \sqrt{v} = \frac{D}{nff}.$$

De plus, soit la vitesse de rotation en $A = \sqrt{u}$, et nous aurons

$$\frac{\sqrt{u}}{a} = \frac{\sqrt{i}}{c} \text{ ou } \sqrt{u} = \frac{a\sqrt{i}}{c}.$$

Donc cette équation $v = \frac{h^4}{f^4}(e + \frac{bbu}{aa})$ se changera en celle-ci

$$DD = nnh^4(e + \frac{bbi}{cc}), \text{ ou } D = nhh\sqrt{(e + \frac{bbi}{cc})},$$

et partant on aura
$$hh = \frac{cD}{n\sqrt{(cce + bbi)}}.$$

Ensuite, le moment du poids $G$, pour arrêter le mouvement de la machine, étant $= Gc$, il faut le mettre à la place de $Ga$, dans la formule trouvée dans le problème, pour avoir:

$$Gc = \frac{2}{n}LDD - \frac{2(bb-aa)}{nbhh}D\sqrt{(DD - nnh^4e)} + \frac{M(DD - nnh^4e)}{nbbh^4};$$

ce qui, à cause de $nhh = \frac{cD}{\sqrt{(cce+bbi)}}$, se change en

$$Gc = \frac{2}{n}LDD - \frac{2(bb-aa)}{c}D\sqrt{i} + \frac{nMi}{cc}.$$

Or pour le cas présent on a $L = \frac{b}{ff}$ et $M = 0$, et partant

$$G = \frac{2bDD}{ncff} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{i}}{cc},$$

où l'on voit, que plus on donne de la largeur aux tuyaux horizontaux, plus le poids $G$ deviendra petit, et nous avons déjà vu, qu'on ne saurait diminuer $ff$ au de là de $hh$, de peur que l'eau ne

perde sa continuité dans les tuyaux. Pour cet effet, considérons l'état de compression de l'eau près des embouchures de ces tuyaux en $AB$, où elle est trouvée répondre à la hauteur

$$p = (\tfrac{f^4}{h^4} - 1)\, v - (\tfrac{bb}{aa} - 1)\, u,$$

c'est à dire

$$p = e + \frac{bbi}{cc} - \frac{DD}{nnf^4} - \frac{(bb-aa)\,i}{c} = e + \frac{aai}{cc} - \frac{DD}{nnf^4}$$

dont la valeur négative, savoir $\frac{DD}{nnf^4} - e - \frac{aai}{cc}$, ne doit pas surpasser la hauteur de 30 pieds. Posons donc:

$$\frac{DD}{nnf^4} - e - \frac{aai}{cc} = d$$

où $d$ marque une hauteur moindre que 30 pieds, et nous aurons:

$$ff = \frac{cD}{n\sqrt{(ccd + cce + aai)}} \quad \text{et partant}$$

$$G = \frac{2bD}{cc}\sqrt{(ccd + cce + aai)} - \frac{2\,(bb-aa)\,D\sqrt{i}}{cc}$$

ou bien

$$G = \frac{2D}{cc}\left(b\sqrt{(ccd + cce + aai)} - (bb - aa)\sqrt{i}\right).$$

33. **Coroll. 1.** De la dernière formule on voit, qu'on peut prendre pour $b$ une telle valeur que le poids $G$ devienne le plus grand. Il sera donc à propos de donner à $b$ cette valeur la plu avantageuse qui se trouve $b = \frac{\sqrt{(ccd + cce + aai)}}{2\sqrt{i}}$, et alors le poids élevé par la machine sera

$$G = \frac{(ccd + cce + 5aai)\,D}{2cc\sqrt{i}} = \frac{D}{2\sqrt{i}}\left(d + e + \frac{5aai}{cc}\right).$$

34. **Coroll. 2.** Connaissant la valeur la plus avantageuse de $b$, pour que la machine pr duise le plus grand effet, il faut remarquer que plus on augmente $b$ au-delà de cette valeur, pl le poids $G$ en devient petit, et que ce poids paraît même s'évanouir, ce qui arrive en effet, si

$$b = \frac{\sqrt{(ccd + cce + aai)}}{2\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{(ccd + cce + 5aai)}}{2\sqrt{i}}$$

et si l'on mettait la valeur de $b$ plus grande, l'expression trouvée pour le poids $G$ deviendrait même négative. Or, de l'autre côté, si l'on donne à $b$ une valeur plus petite que la plus avantageu, le poids $G$ demeure néanmoins affirmatif, car faisant $b = a$, ce qui est la valeur la plus pet possible, le poids sera:

$$G = \frac{2Da}{cc}\sqrt{(ccd + cce + aai)}.$$

35. **Coroll. 3.** On voit aussi que, pourqu'on puisse, avec la même dépense d'eau $D$, éle r le plus grand poids $G$ avec la vitesse donnée $\sqrt{i}$, on n'a qu'à diminuer autant qu'il est possible e rayon $c$ du tambour, autour duquel la corde qui tient le poids s'enveloppe: et par ce moyen il paraît, que le poids $G$ pourrait devenir extrêmement grand.

36. **Remarque 1.** Il suivrait donc de là, qu'une force aussi petite qu'on voudra serait apable d'élever les plus grands fardeaux; ce qui est sans doute contraire aux premiers principes de ı mécanique. Or, puisque ma solution est tirée de ces mêmes principes, il est impossible qu'elle uisse conduire à une contradiction si ouverte, qui surpasserait bien loin le mouvement perpétuel: ar on n'aurait qu'à arranger la machine en sorte, qu'elle élevât continuellement autant d'eau que la épense demande, et l'on aurait un vrai mouvement perpétuel. Mais je remarque ici, qu'il ne suffit as de fournir dans le vaisseau en haut autant d'eau qu'il s'en échappe par en bas, pour produire effet déterminé par le calcul, mais il faut que l'eau, qui y est continuellement ajoutée, ait déjà le iouvement de rotation dont l'eau, contenue dans le vaisseau, est agitée; car, sans cela, une partie es forces, qui se trouvent dans la machine, devrait être employée à imprimer à l'eau nouvellement enue ce mouvement de rotation qui subsiste dans le vaisseau, et ainsi l'effet ne serait pas si rand qu'il vient d'être déterminé par le calcul. Et en effet, quand j'ai dit ci-dessus que le aisseau demeure toujours plein, j'ai supposé que l'eau, qui entre continuellement dans le vaisseau, it déjà reçu par quelque force étrangère que ce soit, le mouvement qui se trouve dans le vaiseau. Or, si nous réfléchissons sur cette circonstance, nous reconnaîtrons bientôt que la grandeur u poids qui vient d'être trouvée, ne renferme rien d'absurde. Car si l'on prend le rayon $c$ du ambour très petit, ce qui est le cas où le poids $G$ devient fort grand, la vitesse de rotation du aisseau $\sqrt{u} = \frac{a}{c}\sqrt{i}$ en deviendra aussi fort grande, et partant, pour entretenir le vaisseau toujours lein, il faudra employer une grande force qui imprime à l'eau qu'on y verse le mouvement de otation qui lui convient. Donc puisque la dépense d'eau même exige déjà une si grande force, l n'est pas surprenant, qu'elle soit capable de produire un si grand effet, et l'on voit aussi, que effet de la machine, qui a été assigné, ne devient aussi surprenant, que lorsque le mouvement e rotation de la machine est extrêmement rapide.

37. **Remarque 2.** Je dois encore remarquer, qu'ayant supposé ci-dessus que la comression de l'eau dans les tuyaux horizontaux, qui a été indiquée par la hauteur $p$, ne contribue ien au mouvement de la machine, cette supposition n'est vraie à la rigueur, que lorsque les tuyaux ›nt partout de la même largeur, quoique cette largeur soit infiniment petite; car pour s'assurer de ela, on n'a qu'à considérer l'état de repos de l'eau dans un vaisseau $ABCD$ (Fig. 169), dont les eux ouvertures $GH$ et $EF$ sont inégales. Soit $EFGH$ la masse d'eau renfermée dans ce vaisseau, t qui y soit comprimée par deux forces $PM$ et $QN$ qui agissent perpendiculairement sur les fonds $EF$ t $GH$ que je suppose exactement remplir la cavité du vaisseau, afin que l'eau n'en puisse échapper. ela posé, on sait par les lois de l'hydrostatique, que pour que cette masse d'eau demeure en repos, faut que les forces $PM$ et $QN$ soient entr'elles comme les fonds $EF$ et $GH$ sur lesquels elles gissent. Donc quoique la force $PM$ soit plus grande que la force $QN$, la masse d'eau en est ourtant maintenue en équilibre: or cela se doit entendre, en tant que les forces n'agissent que sur eau; ce qui est le cas, quand le vaisseau $ABCD$ est immobile. Mais si ce vaisseau est mobile, uoique l'eau soit en équilibre, étant sollicitée par ces deux forces, le vaisseau même ne le sera oint, mais il sera emporté avec l'eau par la plus grande force, tout de même que si le vaisseau

constituait avec l'eau un seul corps solide. Ainsi l'eau demeurera bien en équilibre dans le vaisseau et les forces $PM$ et $QN$ ne la remueront pas de sa place dans le vaisseau, mais elles agiront sur l corps tout entier du vaisseau comme sur un corps solide. La même chose doit donc arriver dan nos tuyaux, lorsqu'ils ne sont pas partout de la même largeur. Car soit $EFGH$ un élément d'u tel tuyau, dont l'amplitude en $GH$ soit $= zz$ et en $EF = zz + 2zdz$, la longueur $MN$ étant $= ds$ Soit $p$ l'état de compression tant en $GH$ qu'en $EF$, de sorte que l'eau étant poussée par ces deu forces soit en équilibre dans les tuyaux, ou, ce qui revient au même, que son mouvement n'en reçoive aucune altération. Cependant, puisque la force motrice qui agit sur la section $GH$ est $= pz$ et la force de l'autre côté qui agit sur la section $EF$ est $= pzz + 2pz\,dz$, le tuyau même en ser (Fig. 165) poussé selon la direction $MN$ par la force $= 2pz\,dz$. Par conséquent, il y aura en $M$ outre la force que j'ai trouvée ci-dessus agir sur la machine, encore la force $= 2pzdz$ qui pouss le tuyau selon la direction $mM$. De là naît donc un moment pour tourner la machine dans le sen $CXA = 2pz\,dz \cdot y \cdot \frac{ydx}{ads}$, qu'il faut encore ajouter au moment élémentaire trouvé dans la solutio du Probl. 3 pour avoir la force entière qui agit sur la machine. Mais je me contente d'avoir in diqué cette correction, dont a besoin la formule, trouvée pour le moment des forces de la machine lorsque les tuyaux horizontaux ne sont pas partout de la même largeur. Car il vaudra toujour mieux donner à ces tuyaux partout la même largeur. (Fig. 168). Or quand ce n'est que le dernie bout $DEF$ qui va soit en s'élargissant soit en se rétrécissant, pour former l'ouverture $EF = hh$ l'amplitude ayant été jusque là $= ff$; comme pour ce bout nous avons

$$y = b, \quad \frac{ydx}{a} = ds \quad \text{et} \quad p = \frac{f^4 v}{h^4} - \frac{f^4 v}{z^4},$$

l'intégrale de $\int 2pz\,dz \cdot \frac{yy\,dx}{ads}$ sera $= -\frac{bffv}{h^4}(hh - ff)^2$.

Donc pour le second exemple on aura

$$G = \frac{2bDD}{ncff} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{i}}{cc} - \frac{bDD}{ncff}\left(1 - \frac{nff\sqrt{(cce+bbi)}}{cD}\right)^2$$

et si nous posons, comme ci-dessus $nff = \frac{cD}{\sqrt{(ccd+cce+aai)}}$, nous obtiendrons:

$$G = \frac{D}{cc}\left(b\sqrt{(ccd+cce+aai)} - 2(bb-aa)\sqrt{i} + 2b\sqrt{(cce+bbi)} - \frac{b(cce+bbi)}{\sqrt{(ccd+cce+aai)}}\right),$$

ou $$G = \frac{D}{cc}\left(\frac{b(ccd-[bb-aa]i)}{\sqrt{(ccd+cce+aai)}} - 2(bb-aa)\sqrt{i} + 2b\sqrt{(cce+bbi)}\right)$$

ce qui est la valeur véritable de $G$, d'où l'on ne peut plus si aisément trouver la plus avantageu longueur des tuyaux horizontaux. Cependant, on voit en général que le poids $G$ doit être plus pet à cause de l'inégalité entre $ff$ et $hh$. Et partant il sera toujours plus convenable de faire l'ouv- ture $EF = hh$ égale à la largeur des tuyaux $ff$, ou bien $nff = nhh = \frac{cD}{\sqrt{(cce+bbi)}}$. Alors le pos que la machine sera capable d'élever avec la vitesse donnée $= \sqrt{i}$ se trouvera:

$$G = \frac{2bD\sqrt{(cce+bbi)}}{cc} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{i}}{cc}$$

et la compression de l'eau au commencement des tuyaux horizontaux $AB$ sera exprimée par la hauteur

$$=-\left(\frac{bb}{aa}-1\right)\frac{aai}{cc}=-\frac{(bb-aa)i}{cc},$$

de sorte que $\frac{(bb-aa)i}{cc}$ ne doit pas surpasser la hauteur de 30 pieds. Donc si l'on met $\frac{(bb-aa)i}{cc}=d$, on aura $bb=aa+\frac{ccd}{i}$ et le poids élevé sera

$$G=\frac{2D\sqrt{(ccd+aai)(ccd+cce+aai)}}{cc\sqrt{i}}-\frac{2Dd}{\sqrt{i}}$$

qui devient encore d'autant plus grand, plus on diminue la grosseur du tambour ou son rayon $=c$. Et si $c$ s'évanouissait, le poids $G$ deviendrait même infini. Ce qui n'est plus surprenant, vu que la vitesse rotatoire $\frac{\sqrt{u}}{a}=\frac{\sqrt{i}}{c}$ devient aussi infinie, et que la dépense d'eau $D$, quelque petite qu'elle soit, renferme déjà une force infinie, puisqu'on suppose que l'eau, qu'on verse continuellement dans le vaisseau, a déjà un mouvement de rotation pareil à celui qui se trouve dans l'eau du vaisseau.

### Problème 5.

38. Si l'eau qu'on verse continuellement dans le vaisseau pour l'entretenir plein, n'a pas encore le mouvement de rotation qui lui convient, mais qu'elle doive être mise dans ce mouvement par les forces de la machine, déterminer le déchet dont l'effet de la machine en sera diminué.

**Solution.** (Fig. 170) Désignant par $D$ la dépense d'eau qu'il faut, pour entretenir le vaisseau toujours plein, de sorte que $D$ soit le produit de l'ouverture par laquelle l'eau coule dans le vaisseau, et de la vitesse, la quantité d'eau fournie dans le vaisseau, pendant un temps $=t$, sera $=Dt$. Cette quantité d'eau étant entrée dans ce vaisseau que je suppose cylindrique, dont le rayon de la base $=a$, et partant la base même $=\pi aa$ (où $\pi$ désigne la circonférence d'un cercle, dont le diamètre $=1$), elle y formera un cylindre de la hauteur $=\frac{Dt}{\pi aa}$. Qu'il faille imprimer à cette masse d'eau un mouvement de rotation égal à celui de la machine dans le temps $=t$, voyons alors quelle force est requise pour produire cet effet. Soit $ABC$ la base de ce cylindre $OA=a$; et $\sqrt{u}$ la vitesse de rotation qui doit être imprimée à la périphérie $ABC$. Considérons en un élément $ZRSz$ dont le rayon $OZ=z$, $Zz=dz$ et l'anneau $ZzRS$ sera $=2\pi z dz$ qui, multiplié par la hauteur $\frac{Dt}{\pi aa}$, donne la masse de l'élément $=\frac{Dt}{aa}2zdz$, auquel il faut imprimer, dans le temps $t$, une vitesse autour de l'axe $O=\frac{z\sqrt{u}}{a}$. Or si nous avons une masse $M$, à laquelle une force motrice $P$ imprime, dans le temps $t$, une vitesse $=\sqrt{v}$, les principes de mécanique donnent $dv=\frac{Pdt}{M}\sqrt{v}$ ou $\frac{Mdv}{\sqrt{v}}=Pdt$ dont l'intégrale est $2M\sqrt{v}=Pt$. Donc, pour produire cet effet, il faut la force $P=\frac{2M\sqrt{v}}{t}$, et partant, posant $\frac{2Dt}{aa}zdz$ pour $M$, et $\frac{z\sqrt{u}}{a}$ pour $\sqrt{v}$, la force requise pour l'élément $ZzRS$ sera $=\frac{4D\sqrt{u}}{a^3}\cdot zzdz$, et la direction de cette force étant perpendiculaire au rayon $OA$, son moment sera $=\frac{4D\sqrt{u}}{a^3}z^3dz$, et partant son intégrale $=\frac{D\sqrt{u}}{a^3}\cdot z^4$. Par conséquent, pour imprimer à toute la masse qu'on verse continuellement dans le vaisseau, le mouvement de rotation qui lui convient, il faut une force dont le moment est $DA\sqrt{u}$. C'est donc de ce moment qu'on doit diminuer le moment total des forces

de la machine: Ou bien, si le poids élevé par la machine est nommé $=G$, sa vitesse $=\sqrt{i}$ et le rayon du tombour $=c$, de sorte que $\sqrt{u}=\frac{a\sqrt{i}}{c}$ et $Da\sqrt{u}=\frac{Daa\sqrt{i}}{c}$, on aura

$$Gc=\frac{2}{n}LDD-\frac{2(bb-aa)}{c}D\sqrt{i}+\frac{nMi}{cc}-\frac{Daa\sqrt{i}}{c}$$

ayant fait $ff=hh=\frac{cP}{n\sqrt{(cce+bbi)}}$, puisqu'il faut que l'ouverture et l'amplitude des tuyaux horizontaux soit partout la même. On aura donc

$$G=\frac{2LDD}{nc}+\frac{nMi}{c^3}-\frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}+\frac{aaD\sqrt{i}}{cc}.$$

Mais il ne suffit pas que ce mouvement de rotation soit imprimé à la masse d'eau $Dt$ au bout du temps $t$; puisque avant ce terme, n'ayant pas encore ce mouvement de rotation, elle diminuerait déjà le mouvement de la machine, et cette diminution subsistera toujours, quand même on supposerait le temps $t$ infiniment petit. Donc, afin que le mouvement de la machine ne soit pas troublé de ce côté, il faut que le juste mouvement de rotation soit imprimé à l'eau qui succède dans un temps plus court, et pour peu qu'on y réfléchisse, on verra que cela doit être la moitié; donc la force qui est requise à cet effet, sera aussi deux fois plus grande, et son moment $=\frac{2Daa\sqrt{i}}{c}$; et partant la vraie valeur du poids $G$ que la machine est capable d'élever sera:

$$G=\frac{2LDD}{nc}+\frac{nMi}{c^3}-\frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}.$$

39. **Coroll. 1.** Puisque nous supposons les tuyaux horizontaux partout de la même amplitude $ff$, et leur ouverture $hh$ aussi la même, $ff=hh=\frac{cD}{n\sqrt{(cce+bbi)}}$; nous aurons:

$$L=\frac{1}{ff}\int\frac{ydy}{r}=\frac{b}{ff}\ (16)\quad \text{ou}\quad L=\frac{n\sqrt{(cce+bbi)}\,b}{cD},$$

$$M=ff\int yy\,ds\sin 2AMO=\frac{Dc}{n\sqrt{(cce+bbi)}}\int yy\,ds\sin 2AMO,$$

et partant

$$G=\frac{2Db\sqrt{(cce+bbi)}}{cc}+\frac{Di}{cc\sqrt{(cce+bbi)}}\int yy\,ds\sin 2AMO-\frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}.$$

40. **Coroll. 2.** Donc pour le cas où les tuyaux horizontaux sont supposés droits, à l'exception de leur dernier bout, qui est courbé à angles droits, à cause de $\sin 2AMO=0$ partout, on aura

$$G=\frac{2Db}{cc}\left(\sqrt{(cce+bbi)}-b\sqrt{i}\right).$$

Et si l'on met ici $c$ infiniment petit, on aura $G=\frac{De}{\sqrt{i}}$, où l'effet de la machine sera $G\sqrt{i}=De$, ce qui ne renferme plus rien qui puisse choquer. Or plus la valeur de $c$ est prise grande, plus deviendra petite la valeur de $G$ qui s'évanouira même faisant $c=\infty$.

41. **Remarque.** Mais il faut considérer que, lorsque le mouvement de la machine est très rapide, ce qui arrive, si l'on fait le tambour qui sert à élever le poids, fort mince, la machine

souffre aussi un grand obstacle du côté de la résistance de l'air; de sorte que dans ce cas l'effet sera considérablement plus petit que le calcul ne le donne, même après en avoir retranché la perte déterminée dans ce problème. Je ne m'arrêterai point à calculer l'effet de la résistance de l'eau, puisque d'un côté, ce calcul n'a aucune difficulté, et de l'autre côté, un mouvement fort rapide de la machine est assujetti encore, par rapport au mouvement de l'eau même, à plusieurs empêchements, auxquels on n'a point fait attention dans le calcul, de sorte que dans ces cas, le calcul serait toujours peu d'accord avec l'expérience, quand même il n'y aurait point de résistance de l'air. Car quand l'eau entre du grand vaisseau dans les tuyaux horizontaux, il faut qu'elle change subitement tant de vitesse que de direction, et l'on comprendra aisément, que lorsque le mouvement de la machine est fort rapide, il se puisse glisser des irrégularités dans le mouvement de l'eau qui dérangent le calcul. Outre cela, on sait que l'eau, en passant par de longs tuyaux étroits, y rencontre un frottement considérable qui en diminue le mouvement; de sorte qu'on ne doit pas être surpris, lorsque l'expérience se trouvera fort peu d'accord avec le calcul, surtout quand le mouvement de rotation de la machine est fort rapide. Mais quand ce mouvement est assez lent, le calcul ne différera pas beaucoup de la vérité, et partant on ne saurait être assuré, que l'effet de la machine soit actuellement le même qu'on aura trouvé par le calcul; à moins que le mouvement de rotation ne soit assez lent. Pour cet effet, la vitesse du poids élevé $\sqrt{i}$ étant donnée, il ne convient pas de prendre la valeur de $c$ trop petite; du moins faut-il faire en sorte, que la hauteur $\frac{(bb-aa)i}{cc}$ ne surpasse pas 30 pieds. Ensuite, la valeur de $b$ ne doit pas être prise trop grande, puisqu'alors le mouvement de l'eau serait trop retardé par le frottement dans de si longs tuyaux. Ces circonstances ne nous convainquent que trop, que la théorie du mouvement des eaux n'est pas encore portée à ce degré de perfection dont on puisse être content, et qu'il faut même encore faire de très grands progrès, avant qu'on arrive à ce point.

## Problème 6.

42. Trouver la figure la plus avantageuse qu'on puisse donner aux tuyaux horizontaux, pour que l'effet de la machine en devienne le plus grand.

**Solution.** Ayant supposé jusqu'ici les tuyaux horizontaux droits, nous avons vu que la valeur intégrale indiquée par $M$ ou $\int yy\,ds \sin 2AMO$ s'évanouit, puisque, dans ce cas, $\sin 2AMO = 0$. Et il est clair que, lorsqu'on donne quelque courbure aux tuyaux horizontaux, cette formule en obtiendra une valeur quelconque dont le moment des forces de la machine sera augmenté, d'où l'on peut conclure qu'il est possible de donner aux tuyaux horizontaux une telle courbure, que le moment des forces de la machine, et partant aussi son effet devienne le plus grand. Soit (Fig. 171) $AMD$ cette courbure, et quel que soit l'angle $ADO$ qu'elle fait avec le rayon $OD$, on y peut ajouter un bout $DE$ perpendiculaire à $OD$, sans que la valeur de l'intégrale $M$ soit changée; or je suppose, que ce tuyau ait partout la même amplitude. Posons donc comme ci-dessus $OA = a$, $OX = x$, $OM = y$ et l'arc $AM = s$, de sorte que $ds = \sqrt{(dy^2 + \frac{yydx^2}{aa})}$. Maintenant le sinus de l'angle $AMO$ sera $= \frac{ydx}{ads}$, et son cosinus $\frac{dy}{ds}$, donc $\sin 2AMO = \frac{2ydxdy}{ads^2}$, et partant $\int yy\,ds \sin 2AMO = 2\int \frac{y^3dxdy}{ads}$ dont la valeur doit être un maximum.

Pour cet effet, suivant ma méthode je pose $dx = pdy$, et puisque $ds = dy\sqrt{(1 + \frac{ppyy}{aa})}$, la formule intégrale qui doit devenir un maximum sera $\int \frac{y^3 pdy}{\sqrt{(aa + ppyy)}}$. Or la différentielle de $\frac{y^3 p}{\sqrt{(aa + ppyy)}}$ étant

$$\frac{3aapyydy + 2p^3y^4dy}{(aa + ppyy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{aay^3dp}{(aa + ppyy)^{\frac{3}{2}}};$$

il faut que la différentielle de $\frac{aay^3}{(aa + ppyy)^{\frac{3}{2}}}$ divisé par $dy$ soit $= 0$, d'où l'on tire

$$\frac{y^3}{(aa + ppyy)^{\frac{3}{2}}} = \text{Const.}$$

et partant on aura

$$y = \alpha\sqrt{(aa + ppyy)} \quad \text{ou} \quad yy = \alpha\alpha aa + \alpha\alpha ppyy \quad \text{et} \quad p = \frac{\sqrt{(yy - \alpha\alpha aa)}}{\alpha y} = \frac{dx}{dy}.$$

Donc $\quad dx = \frac{dy\sqrt{(yy - \alpha\alpha aa)}}{\alpha y} \quad$ et $\quad ds = \frac{ydy}{\alpha a}.$

Or le tuyau $DMA$ doit être perpendiculaire au vaisseau en $A$, ou posant $y = a$, il faut qu'il soit $\frac{dx}{dy} = 0$, d'où l'on voit que $\alpha = 1$, et partant l'équation pour la courbe cherchée sera

$$dx = \frac{dy}{y}\sqrt{(yy - aa)} \quad \text{et} \quad ds = \frac{ydy}{a}.$$

Pour la rectification de la courbe on aura donc d'abord $s = \frac{yy - aa}{2a}$.

Qu'on tire à la courbe en $M$ la perpendiculaire $MT$, sur laquelle on abaisse de $O$ la perpendiculaire $OT$, et l'on aura $ds : dy = OM : OT = y : a$; donc puisque $OM = y$, il y aura $OT = a$, et partant $MT$ une tangente du cercle $ACT$ qui reçoit tous les tuyaux horizontaux. D'où il est clair que la courbe $AMD$ se décrit par l'évolution du cercle $AXT$. Ayant donc trouvé cette courbe, nous aurons:

$$\int yy\,ds \sin 2AMO = \int 2ydy\sqrt{(yy - aa)} = \tfrac{2}{3}(yy - aa)\sqrt{(yy - aa)},$$

ce qui est la valeur la plus grande qui soit possible.

Et partant, en donnant aux tuyaux horizontaux cette courbure qui est la plus avantageuse, le poids $G$ que la machine sera capable d'élever avec la vitesse $\sqrt{i}$ et la dépense d'eau $= D$, se trouve en posant $OD = b$ par le § 39

$$G = \frac{2Db\sqrt{(cce + bbi)}}{cc} + \frac{2Di(bb - aa)\sqrt{(bb - aa)}}{3cc\sqrt{(cce + bbi)}} - \frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}.$$

43. **Coroll.** De là il est clair que l'effet de la machine peut être très considérablement augmenté par la courbure des tuyaux horizontaux, et que cette augmentation irait à l'infini, si l'on mettait le rayon du tambour $c$ infiniment petit. Cela doit s'entendre, sans qu'on ait fait réflexion sur la résistance de l'air et le frottement de la machine.

44. **Exemple.** Posons $a = 1$ pied; $b = 6$ pieds, $e = 6$ pieds, $c = \frac{1}{2}$ pied et $i = \frac{1}{6}$ pied, afin que $\frac{(bb - aa)i}{cc} = 23\frac{1}{3}$ ne surpasse pas 30 pieds. De plus, soit le nombre des tuyaux horizontaux $= 6$ et leur amplitude $ff = hh = \frac{1}{144}$ pied carré, ou un pouce carré. De là nous trouverons la dépense d'eau requise pour entretenir le vaisseau plein d'eau

$$D = \frac{nff\sqrt{(cce + bbi)}}{c} = \frac{\sqrt{30}}{48} \quad \text{et} \quad \sqrt{u} = 2\sqrt{\tfrac{1}{6}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad u = \tfrac{2}{3} \text{ pied.}$$

Alors le poids que la machine sera capable d'élever avec la vitesse $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{6}}$ se trouve:

$$G = \frac{\sqrt{30}}{48}\left(24\sqrt{30} + \frac{140}{9}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}} - 48\sqrt{6}\right),$$

ou bien $G = 5{,}419$ pieds cubiques d'eau.

Une telle quantité d'eau serait donc élevée à la hauteur $e = 6$ pieds, dans le temps $\frac{e}{\sqrt{i}} = 6\sqrt{6}$. Or dans ce même temps, la dépense d'eau comporte $\frac{De}{\sqrt{i}} = \frac{1}{8}\sqrt{180}$ pieds cubiques d'eau, c'est-à-dire 1,677 pieds cubiques d'eau, donc elle élèverait trois fois plus d'eau qu'il ne faut pour la maintenir dans son mouvement: ce qui est le plus grand paradoxe, dont il s'agirait de trouver la solution.



# ASTRONOMIA MECHANICA.

# XI.

# Astronomia mechanica.

---

## Caput I.

### De viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur.

1. **Definitio 1.** *Astronomia mechanica* est scientia motus corporum coelestium ex viribus, uibus sollicitantur, determinandi.

2. **Coroll. 1.** Cognitis viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur, eorum motus per prinipia mechanica determinatur, ex quo haec scientia nomen Astronomiae mechanicae est adepta.

3. **Coroll. 2.** Ante omnia ergo vires nosse oportet, quibus corpora coelestia sollicitantur, uarum cognitio cum ex suis causis cognosci nequeat, earum indolem ex ipsis phaenomenis crutari convenit.

4. **Coroll. 3.** Si enim corpora coelestia a nullis viribus sollicitarentur, singula vel quiesrent, vel uniformiter in directum progrederentur, secundum prima Mechanicae principia.

5. **Scholion 1.** Quatenus scilicet corpora coelestia non uniformiter in directum incedunt, ed vel celeritate variata, vel secundum lineas curvas progrediuntur, eatenus vires adsint necesse est, uibus eorum motus afficiatur. Atque hoc non solum de motu absoluto valet, sed etiam de repectivo, cum semper vires concipi possint, quibus motus cujusquam corporis, qualis ex alio apparet, roducatur. In Astronomia autem non tam motus corporum coelestium absolutos spectamus, quam os, quibus spectatori in quopiam loco constituto moveri videntur, etiamsi forte hic ipse locus uomodocunque circumferatur. Hic ergo locus spectari solet tanquam absolute quiescens, ejusque espectu corporum coelestium motus ita considerari debent, ut vires, quae talem motum producere aleant, definiantur. Ita vires assignari possent, quae planetis eos motus irregulares inducerent, uibus ex terra visi incedere observantur, verum hoc modo illae vires nimis prodirent complicatae, uam ut earum existentiam in mundo agnoscere liceret. Quam ob causam talem investigationem espectu plurium locorum, in quibus spectator concipiatur, suscipi conveniet, et pro quo in viribus nventis maxima simplicitas inesse deprehenditur, eas demum tanquam in mundo revera existentes

admittere fas erit. Dummodo enim vires invenerimus, quae pro dato spectatoris loco motibu coelestibus producendis fuerint pares, eas tanquam revera existentes considerare possumus, etiam forte ob motum spectatoris longe aliae vires in mundo existerent, quandoquidem hic nobis tantu est propositum motus apparentes explicare.

6. **Scholion 2.** Ad hanc ergo virium investigationem instituendam nosse oportet motus co porum coelestium, qui quo accuratius fuerint perspecti, eo certius illarum virium indolem cognosce licebit. Quare si quilibet motus peculiarem virium legem postularet, ita ut inde pro reliquis nih concludere liceret, hinc etiam ipsa motuum cognitio nihil lucri adipisceretur; sin autem eveniat, vires pro omnibus motibus inventae ad communem quandam regulam referantur, hinc sine dub plurimum lucis consequemur; cum inde etiam eorum motuum, quorum ratio per observationes no satis fuerit explorata, explicatio peti queat. Hocque ergo casu ex Astronomia mechanica maxim incrementa in Astronomiam practicam transferrentur. Atque istud institutum summus quondam v Isaacus Newtonus felicissimo successu absolverit, dum ex collatione phaenomenorum cum principi mechanicis elegantissimam aeque ac simplicissimam legem detexit, quae omnes vires coelestes complec teretur. Haec itaque virium lex fundamentum universae Astronomiae mechanicae constituet, und omnium motuum coelestium ratio est repetenda, quod felicissimum inventum, cum phaenomenis po tissimum innitatur, instar hypothesis hic proponam et ad usum accomodabo.

7. **Hypothesis 1.** *Corpora coelestia perinde inter se commoventur, ac si singula se mutu attraherent, viribus reciproce quadratorum distantiis proportionalibus.*

8. **Explicatio.** De tellure res est manifesta, cum omnia corpora circa terram existentia deo sum urgeantur vi, quae gravitas appellatur, et sine dubio ad multo majores distantias extenditu quam experimenta capere licet. Luna enim ab eadem vi sollicitari deprehenditur, quae autem mul minor est quam prope terrae superficiem, hocque fere in ratione reciproca duplicata distanti. Scilicet cum luna circiter sexagies magis sit remota a centro terrae quam corpora in ejus superfic sita, vis, qua luna terram versus urgetur, sexagies minor est aestimanda quam vis gravitatis superficie, quemadmodum ex motu lunae concludere licet. Gravitas quidem in superficie terrae e effectus mixtus ex vero corporum nisu deorsum directo et vi centrifuga e motu terrae diurno or, unde potissimum evenit, ut gravitas neque ubique praecise ad centrum terrae dirigatur, neque eju dem sit magnitudinis. Seposita autem vi centrifuga, quippe cujus corpora longius a terra remo sunt expertia, nisus ad ejus centrum directus satis exacte distantiarum ab eo quadratis recipr proportionalis deprehenditur. Concesso igitur hoc, quod omnia corpora, quantumvis a terra fuer t remota, ad ejus centrum quasi trahantur hujusmodi vi, similes vires Newtonus singulis corporibus mundanis tribuit, ita ut eorum quodque reliqua corpora ad se attrahat viribus in ratione duplica distantiarum decrescentibus. Atque in hac lege contineri sunt censendae omnes vires, quibus co porum coelestium motus reguntur.

9. **Coroll. 1.** Cum istae vires attractrices corporum mundanorum in ratione duplicata dista tiarum decrescant, in maximis distantiis tam parvae evadunt, ut pro evanescentibus haberi queat.

10. **Coroll. 2.** Hinc cum stellae fixae ad tam enormes distantias a nobis et toto system solari sint remotae, vires, quibus sol et planetae ad stellas fixas attrahuntur, pro nihilo sunt habend.

11. **Coroll. 3.** Planetarum igitur et cometarum motus a nullis aliis viribus perturbari sunt ensendi, nisi quibus vel ad solem vel ad reliquos planetas gravitatione mutua sollicitantur.

12. **Scholion 1.** Haec virium mundanarum lex per phaenomena stabilita etsi in magnis inrvallis veritati apprime consentanea deprehenditur, tamen in minoribus distantiis, praecipue ubi orpus attractum intra superficiem corporis attrahentis est situm, a veritate vehementer recedit. vanescente enim distantia corporis attracti a centro corporis attrahentis, secundum hanc legem vis ttrahens infinita prodiret, id quod sine dubio rerum naturae adversaretur. Quin potius statuere ebemus, si in terrae visceribus experimenta capere liceret, quo propius ad ejus centrum pertingeemus, eo minorem esse futuram vim gravitatis, cum in ipso centro plane in nihilum abire necesse t ob defectum rationis, cur potius in hanc quam aliam plagam dirigeretur. Ex quo etiam Newonus statuit, a terrae superficie intus ad ejus centrum penetrando, vim gravitatis iterum decrescere tque ipsis a centro distantiis esse proportionalem, quem saltum ex principiis gravitationis universalis gregie explicavit, ita ut lex illa ad corpora extra se posita nullum detrimentum patiatur. Cum ;itur in Astronomia corpora tantum longis intervallis a se invicem dissita considerentur, sine ulla aesitatione phaenomena sequentes agnoscere debemus vires, quibus ea se mutuo attrahunt, rationem eciprocam duplicatam distantiarum sequi, atque esse directas ad cujusque corporis attrahentis cenrum, siquidem figuram habeant sphaericam, vel potius centrum inertiae, si ab hac figura abludant, uod quidem exiguum discrimen in tantis distantiis pro nihilo est habendum. Quamvis enim in uperficie terrae gravitas non ubique ad ejus centrum dirigatur, tamen in grandibus ab ea distantiis, tiamsi gravitatis directio aliquantillum centrum praetergrediatur, haec tantilla aberratio in motuum leterminatione nullius plane est momenti.

13. **Scholion 2.** Quando autem statuimus singula corpora coelestia perinde ac terram ejusnodi proprietate esse praedita, qua corpora extra se posita attrahant vi quadrato distantiae reciproce roportionali, haec virium ratio de eadem vel aequalibus massis corporis attracti est interpretanda. 'osita scilicet massa corporis attracti $= M$, ejusque distantia a centro corporis attrahentis $= x$; si is qua eo impellitur fuerit $V$, eadem massa $M$ in alia distantia $= y$ a centro ejusdem corporis ttrahentis remota eo impelletur vi $U$, ut sit

$$V:U = \frac{1}{xx} : \frac{1}{yy} \quad \text{seu} \quad U = \frac{xx}{yy} V.$$

Unde si pro una quadam distantia innotescat vis attractrix, pro alia quacunque distantia facile defiietur, siquidem ambo corpora tam attrahens quam attractum maneant eadem. Sin autem massa orporis attracti fuerit major vel minor, vis attractrix praeterea in eadem ratione erit augenda vel ninuenda, ut mox declarabimus. Tum vero etiam vis attrahens diversorum corporum coelestium lurimum discrepat, ita ut etiam in pari distantia diversas vires exerant. Scilicet cum vis attrahens errae in superficie, seu distantia ab ejus centro, radio ejus aequali, sit ipsa gravitas, pro aliis corporibus coelestibus distantia, ad quam vis eorum attractrix gravitati est aequalis, modo major modo ninor esse potest, quam radius terrae; unde dicimus alia corpora coelestia majori, alia minori acultate attrahendi pollere, etiamsi pro unoquoque vis attrahens sequatur rationem reciprocam duplicatam distantiarum.

14. **Hypothesis 2.** *Vires, quibus diversa corpora ab eodem corpore coelesti in eadem d stantia attrahuntur, sunt ut eorum massae, ac si distantiae fuerint diversae, rationem sequant compositam ex ratione massarum et reciproce duplicata distantiarum.*

15. **Coroll. 1.** Vis ergo attractrix corporum coelestium perinde ac gravitas terrestris secundu quantitatem materiae in corpora agit, ita ut nisus cujusque corporis sit ejus massae proportional siquidem distantia fuerit eadem.

16. **Coroll. 2.** Hae igitur vires coelestes corpora quasi penetrant, in eaque, quatenus inert sunt praedita, agunt, ita ut quo major fuerit massa cujuspiam corporis, ideo fortius a quolib corpore coelesti attrahatur.

17. **Coroll. 3.** Hinc vis, qua corpus quodvis ad aliquod corpus coeleste attrahitur, e aggregatum omnium virium elementarium, quibus singula corporis elementa pro ratione massae s inertiae sollicitantur.

18. **Scholion.** De corporibus circa terram sitis per experimenta est evictum eorum grav tatem seu pondus ipsorum massae esse proportionale, cum singulae particulae seorsim graviten ratione massae. Quare cum vis attractrix corporum coelestium pari ratione sit comparata atque v gravitatis telluris, nullum etiam est dubium, quin eorum vires parem sequantur legem atque corpo attracta pro ratione materiae seu massae afficiunt. Unde si singulae corporis particulae a corpo coelesti aeque distent, quod evenire censendum est, si magnitudo corporis attracti prae ejus distant a centro corporis attrahentis tam sit exigua ut pro nihilo reputari queat, singulae vires elementar erunt aequales sub directionibus inter se parallelis: hincque vis tota earum summae aequalis, ejusq directio per centrum inertiae corporis attracti transire est censenda. Sin autem corporis attrac magnitudo ad distantiam a centro corporis attrahentis notabilem teneat rationem, ut vires eleme tares, quibus singula corporis elementa attrahuntur, neque pro aequalibus, ob inaequales elementoru distantias, neque directiones pro parallelis inter se haberi queant, vis tota inde demum per calculu est colligenda; hincque evenire potest, ut vis tota neque massae corporis attracti sit proportional neque per ejus centrum inertiae transeat. Ex quo proprie loquendo ambae allatae hypotheses tantu ad corpuscula quasi infinite parva, quae ad corpora coelestia attrahantur, sunt restringendae, ita vires tantum elementares praefatas leges sequantur. Unde deinceps vires totae, quibus corpora m jora attrahuntur, per regulas staticas demum colligi debeant.

19. **Hypothesis 3.** *Corpora coelestia in aequalibus distantiis eo majores exerunt vires attra trices, quo majores fuerint ipsorum massae, atque in inaequalibus distantiis vires attractrices corpor coelestium sunt in ratione composita massarum et reciproca duplicata distantiarum.*

20. **Coroll. 1.** Hinc si massa corporis coelestis fuerit $= A$, in distantia $x$ ab ejus cent erit vis attractrix ut $\frac{A}{xx}$, quae propterea est directe ut massa corporis attrahentis $A$, et reciproce quadratum distantiae ab ejus centro.

21. **Coroll. 2.** Haec autem lex tantum valet, si corporis attracti massa fuerit eadem; ali quin enim cum illa ratione composita insuper ratio massae corporis attracti conjungi debet, secu dum hypothesin praecedentem.

22. **Coroll. 3.** Ita si massa corporis coelestis sit $=A$, corporis autem attracti massa $=M$, hujusque ab illius centro distantia $=x$, erit vis, qua hoc ad illud attrahitur ut $\frac{AM}{xx}$. Quia autem in motus determinatione vis haec semper per massam corporis attracti $M$ dividi debet, in calculum tantum ingreditur formula $\frac{A}{xx}$, massa $M$ inde iterum egrediente.

23. **Scholion 1.** Ista hypothesis non aeque certo ex phaenomenis colligitur ac praecedentes, etsi enim inde veram virium quantitatem concludere licet, tamen nulla constat ratio massas corporum coelestium dignoscendi. Eorum quidem magnitudinem Astronomi sollicite definire conantur, verum hinc de massa, quoniam pro volumine vehementer discrepare potest, nihil statuere licet. Haec massae autem ratione omnino carere possemus, si pro quovis corpore coelesti eam distantiam determinaremus, in qua vis ejus attractrix aequalis esset futura vi gravitatis in superficie terrae. Ita si pro quopiam corpore coelesti haec distantia fuerit $=f$, pro alia quacunque distantia $x$ ejus vis attractrix erit $=\frac{ff}{xx}$ unitate gravitatem exprimente: Sicque sufficit pro quolibet corpore coelesti distantiam hanc $f$ ipsi convenientem nosse, parumque interest quomodo haec distantia ad massam corporis attrahentis se sit habitura. Newtonus autem statuit quadratum istius distantiae semper esse massae corporis attrahentis proportionale; ita ut loco $ff$ massa $A$ substitui queat, — quae propositio, si de ejus veritate convicti essemus, non solum pro pulcherrima esset habenda, sed etiam plurimum lucis ad naturae mysteria scrutanda esset allatura. Phaenomena autem huic propositioni jam insignem probabilitatis gradum conciliant, quoniam quo corpora coelestia fuerint majora vel minora, etiam quadratum distantiae $f$ illis respondentis majus minusve deprehenditur: ratione autem ea propositio multo magis confirmari potest. Primum enim cum gravitatio in corporibus coelestibus sit reciproca, ex principio aequalitatis inter actionem et reactionem duo corpora se mutuo attrahentia paribus viribus in se invicem niti debent. Hinc si eorum massae sint $A$ et $B$, et distantiae, ad quas eorum vires attractrices gravitati aequantur, sint $a$ et $b$, distantia inter centra corporum existente $=x$, erit per praecedentem hypothesin vis, qua corpus $B$ ad $A$ urgetur $=\frac{aaB}{xx}$, vis autem, qua corpus $A$ vicissim ad $B$ urgetur $=\frac{bbA}{xx}$, quae duae vires si censeantur aequales, fit $aa:bb=A:B$, prorsus ut vult Newtonus. Quodsi haec propositio admittatur, inde etiam haec eximia proprietas consequitur, quod plurium corporum se mutuo hac lege attrahentium commune centrum inertiae perpetuo vel quiescat, vel uniformiter in directum proferatur; — quae cum tanquam constans naturae lex assumenda videatur, inde vicissim veritas nostrae hypotheseos evincitur.

24. **Scholion 2.** Quoniam igitur vis attractrix massae corporis attrahentis est proportionalis, ea ita inde oriri est judicanda, ut singula corporis elementa seorsim vires attractrices exerant, ex quarum collectione demum vis tota attrahens nascatur. Lex ergo praescripta tantum ad vires elementares, quibus singula corporis elementa ad se attrahuntur, proprie pertineri est censenda, neque stricte ad corpora finita extendi patitur, nisi haec corpora tantopere a se invicem fuerint remota, ut eorum magnitudo prae distantia quasi evanescat. Eatenus ergo tantum haec lex attrahendi in corporibus mundanis deprehenditur, quatenus ea tam vastis intervallis a se invicem sunt sejuncta, quae si sibi multo essent propiora, nullum est dubium quin vires eorum attractrices ab hac lege sint

aberraturae, nisi forte eorum figura perfecte fuerit sphaerica. Quare si hoc modo praecedentem hypothesin restringamus, uti ratio suadet, universum Astronomiae mechanicae fundamentum sequenti hypothesi continebitur.

25. **Hypothesis 4.** *Omnia materiae elementa, ex quibus corpora mundana sunt conflata, vi pollent attrahendi, quae cujusque massae directe, inverso autem quadrato distantiae est proportionalis, cum qua ratione insuper massa corpusculi attracti est conjungenda.*

26. **Coroll. 1.** Positis ergo massis duorum elementorum materiae $\mu$ et $\nu$, eorumque distantia $= z$, erit vis, qua alterum ab altero attrahitur ut $\frac{\mu\nu}{zz}$, atque ex viribus elementaribus, quibus singula duorum corporum finitorum se mutuo attrahunt, vires ambo corpora tota sollicitantes, debent colligi.

27. **Coroll. 2.** Cum haec vis elementaris sit ut $\frac{\mu\nu}{zz}$, factor quidam constans $C$ adjungi debet, ut formula $\frac{C\mu\nu}{zz}$ ipsam vim exprimat; atque haec quantitas $C$ perpetuo erit eadem ubicunque locorum ista duo elementa materiae fuerint posita.

28. **Coroll. 3.** Corpora ergo coelestia eatenus tantum se mutuo attrahunt, quatenus constant materia, cujus omnia elementa tali vi se attrahendi sunt praedita. Ex quo patet si corpora non fuerint admodum a se invicem remota, simulque figuram habeant irregularem, fieri posse, ut vis tota e viribus elementaribus resultans multum a simplicitate formulae exhibitae discrepet.

29. **Scholion 1.** Cum hujusmodi vis attrahendi omnibus corporibus coelestibus conveniat, ideoque omnibus elementis corporum, ubicunque reperiantur, tribui debeat, ea tanquam proprietas universalis materiae spectari potest, cujus existentiam realem ex phaenomenis cum ratione conjunctis evictam agnoscere debemus. Certum itaque est omnia materiae elementa tali vi attrahendi, qualem descripsimus, esse praedita, neque de hoc ullo modo dubitare licet. Utrum autem haec vis omni materiae ex sua natura competat perinde atque inertia et impenetrabilitas? an vero a causa quapiam externa producatur? multum inter Philosophos dubitatur. Qui priorem sententiam propugnant, eximium firmamentum inveniunt in universalitate istius indolis attractricis, quae cum in omnibus corporibus inesse, atque adeo eorum massae proportionalis deprehendatur, eam pariter atque inertiam materiae essentialem esse autumant, ita ut ejus causa extrinsecus frustra quaeratur; quin etiam quaerere solent, an non Creator per omnipotentiam corporibus talem proprietatem infundere potuerit; quod negare ipsis adeo impium videtur. Deinde in hoc non parum subsidii sibi situm esse arbitrantur, quod nemo adhuc istius phaenomeni latissime patentis causam externam dilucide docere voluerit. Qui autem contrariae sententiae sunt addicti, haec argumenta gravibus rationibus infirmare conantur, maluntque credere dari hujus phaenomeni causam externam, etiamsi eam nobis nullo modo perspicere liceat, quam concedere ejus rationem in ipsa materiae indole esse positam. Ad nostrum autem institutum parum refert, utrum causa externa existat, nec ne? sufficit enim nosse in omnibus corporibus mundi talem vim attrahendi revera inesse, cum nobis id tantum sit propositum, ut quomodo motus corporum coelestium ab his viribus afficiantur, investigemus.

30. **Scholion 2.** Prior sententia, qua materiae vis attractrix, tanquam proprietas essentialis tribuitur, si esset vera, hoc commodi afferret, ut ulteriori investigatione causae liberaremur; du

altera sententia naturae scrutatoribus hoc onus gravissimum esset impositura, cui expediendo vires eorum fortasse nunquam sufficerent. Ex quo ad nostrum commodum utique esset optandum, ut prior sententia veritati foret consentanea. Multis autem premitur difficultatibus, quas cum primis cognitionis nostrae principiis minime conciliare licet: si enim corpus ab alio attractum moveri incipit, causa motus non in illo sed in hoc altero est ponenda, quod cum ab illo sit remotum, concedendum est fieri posse, ut corpus quaqua versus a nullis aliis corporibus cinctum, sed quasi in vacuo positum, sponte moveri incipiat, etiamsi nusquam tangatur; neque tamen motus causam in ipso, sed in alio quodam corpore longissime ab eo remoto esse quaerendam, hocque perinde evenire sive spatium inter corpora sit vacuum, sive plenum. Corpus ergo, quatenus vi attrahendi esset praeditum, ad omnia alia corpora utrumque remota quasi vires emitteret, quibus alia quasi comprehenderet et ad se arriperet. Quam actionem in distans qui concoquere non possunt, cum nullo modo concipi queat, ad materiam quandam subtilem confugiunt, quae pressione in corpora agens ea phaenomena producat, quae priores attractioni, tanquam essentiali omnium corporum proprietati, adscribunt, etiamsi et illi modum, quo hoc efficitur, explicare haud valeant.

31. **Scholion 3.** Hactenus saltem alium modum, quo duo corpora in se invicem agant, non concipimus, nisi quando in se mutuo impetum faciunt et ad contactum perveniunt; cum enim tum utrumque in statu suo perseverare annitatur, hoc autem fieri nequeat, nisi se mutuo penetrent, eorum impenetrabilitas in causa est quominus hoc eveniat. Ex ea ergo nascantur, necesse est, vires utriusque statum ita immutantes, ut penetratio evitetur. Experientia etiam testatur, hoc casu majores vires utrinque non exeri, quam quae penetrationem avertere valeant. Istarum igitur virium, quarum effectus in conflictu corporum cernitur, origo in eorum impenetrabilitate manifesto est posita, unde multo minus percipere licet, quomodo duo corpora remota in se invicem agere valeant; ac si quis statuat corpora ab aliis quantumvis remotis sine adminiculo medii inter ea existentis affici posse, omnia cognitionis nostrae principia funditus everti videntur, neque apparet quo jure tum siderum influxus aliaque superstitionis commenta negari queant. Qui quidem a Leibnizii Harmonia praestabilita abhorrent, concedere coguntur spirituum actioni corpora esse subjecta, quod etiam Leibniziani de numine supremo negare non audent; spirituum autem actio in corpora ab omni contactu certe immunis est statuenda, id quod attractioni favere videtur. Verum si corpora a spiritu concitantur, si non contactus, saltem praesentia quaedam concipi debet, ita ut etiam hinc actio corporum in distans nullum firmamentum recipiat. Quare qui dicunt corporibus a Deo vim alia corpora quantumvis dissita attrahendi tribui potuisse, nihil aliud dicere videntur, nisi Deum perpetuo immediate corpora ad se invicem impellere. Verum omissa hac disputatione, ad Physicam potius quam huc pertinente, cum certum sit singula materiae elementa perinde ad se mutuo impelli, ac si se attraherent, videamus quales inde vires pro corporibus finitae magnitudinis nascantur.

32. **Theorema.** Corpus rigidum a viribus, quibus singula ejus elementa se mutuo attrahunt, ad motum neutiquam sollicitatur.

**Demonstratio.** Veritas hujus theorematis isto nititur fundamento, quod vires, quibus duo elementa se mutuo attrahunt, utrinque sint aequales. Si enim duo concipiantur elementa, quorum

massulae sint $\mu$ et $\nu$, distantia vero $= z$, vis, qua $\mu$ ad $\nu$ attrahitur est $= \frac{C\mu\nu}{zz}$ (26), ac vicissim vis, qua $\nu$ ad $\mu$ attrahitur est $= \frac{C\mu\nu}{zz}$. Sunt igitur hae vires aequales, et quia alterum ad alterum urgetur, earum directiones sunt contrariae. Jam in corpore elementum quodcunque ad reliqua omnia attrahitur, et sumtis binis quibusque, vires, quibus alterum ab altero attrahitur, sunt aequales et contrariae, ideoque in corpore rigido se mutuo destruunt. Quod cum eveniat, quaecunque bina elementa considerentur, necesse est omnes vires elementares, quibus cuncta elementa in se mutuo agunt, se mutuo destruere, propterea quod quaelibet vis habeat in corpore sibi aequalem et contrariam.

33. **Coroll. 1.** Cum in hac mutua virium elementarium destructione ratio distantiae $z$ non in censum veniat, patet theorema fore verum, etiamsi attractio aliam quamcunque distantiae rationem sequeretur, dummodo vires, quibus duo elementa se mutuo attrahunt, utrinque fuerint aequales.

34. **Coroll. 2.** Sive ergo corpus rigidum quiescat, sive moveatur, a viribus, quibus ejus elementa se mutuo appetunt, neque ejus status quietis, neque motus perturbabitur, sed a viribus externis aeque afficietur, ac si elementa ejus vi attractrice carerent.

35. **Coroll. 3.** Quae ergo in Mechanica de motu corporum rigidorum traduntur, ea omnia veritati consentanea manent, etiamsi elementorum mutua attractio, a qua quidem ibi animum abstraxeramus, accedat, neque quidquam ibi propterea erit immutandum.

36. **Scholion 1.** Quod ad formulam $\frac{\mu\nu}{zz}$ attinet, cui vis, qua massula $\mu$ aliam massulam $\nu$ in distantia $= z$ remotam attrahit, est proportionalis, quatenus ea constat ex reciproco quadrato distantiae et massa corpusculi attracti $\nu$, ejus veritatem per phaenomena stabilivimus. Quatenus autem ea vis ipsi massae corpusculi attrahentis $\mu$ est proportionalis, id quidem sola ratione collegimus. Nunc igitur haec postrema ratio multo fortius corroboratur: Cum enim phaenomena etiam evincant motum cujusque corporis coelestis non perturbari a viribus, quibus ejus partes se mutuo attrahunt, hinc vicissim intelligitur, vires, quibus bina quaeque elementa se mutuo attrahunt, aequales esse oportere, quoniam alioquin evenire posset, ut hae vires elementares se mutuo non destruerent. Quo hoc clarius perspiciatur, sumamus vim attractricem non ipsi massae $\mu$ corpusculi attrahentis, sed ejus quadrato $\mu^2$ esse proportionalem, corpusque rigidum tantum ex duobus elementis $\mu$ et $\nu$ intervallo $z$ dissitis esse conflatum. Quo posito erit vis, qua $\nu$ ad $\mu$ attrahitur $= \frac{C\mu^2\nu}{zz}$, contra vero vis qua $\mu$ ad $\nu$ attrahitur $= \frac{C\mu\nu^2}{zz}$, quae ergo duae vires non essent aequales, nisi elementa fuerint aequalia, ideoque corpus totum excessu virium $\frac{C\mu\nu}{zz}(\mu - \nu)$ ad motum sollicitaretur, quod eo magis esset absurdum, cum idem corpus infinitis modis in duas partes dissectum concipi queat, et quaelibet sectio peculiarem vim esset exhibitura, cujus etiam directio a sectionis ratione pendens non foret certa. Quod cum sit maxime absurdum, extra omne dubium est positum, vim attrahentem cujusque elementi ipsius massae esse proportionalem, hancque rationis $\frac{\mu\nu}{zz}$ partem adeo multo certius esse evictam quam reliquas, cum hae tantum ex phaenomenis sint conclusae, illa autem adeo principio contradictionis innitatur.

37. **Scholion 2.** Hoc theorema quidem tantum ad corpora rigida, quorum partes ita firmo nexu inter se sunt conjuncta, ut a nullis viribus de situ suo relativo dimoveri queant, accommodavimus, sed etiam quodammodo ad corpora flexibilia atque etiam fluida extenditur, quatenus scilicet tantum ad motum progressivum centri inertiae spectamus. Quodsi enim elementa corporis fuerint a se invicem dissoluta, quoniam vires, quibus bina quaeque se mutuo attrahunt, sunt aequales et contrariae, hinc nulla vis in centrum inertiae resultat. Ab his scilicet viribus fieri potest, ut partes quidem corporis quomodocunque inter se commoveantur, commune autem centrum inertiae jugiter quiescat, vel si semel moveri coeperit, perpetuo uniformiter in linea recta progrediatur. Ex quo efficitur, ut quotcunque fuerint corpora se mutuo attrahentia, eorum commune centrum inertiae vel quiescat, vel uniformiter in directum promoveatur. Hinc ergo certum est omnium corporum mundanorum commune centrum inertiae vel in perpetua quiete versari, vel uniformiter in directum proferri. Atque hoc jam statim in ipso limine certissime affirmare licet, etiamsi adhuc minime pateat, quo motu singula corpora concitentur, in quo sine dubio veritas maximi momenti continetur.

38. **Problema 1.** Si corpus finitum, data figura praeditum, attrahat corpusculum ad datam et insignem ab eo distantiam remotum, definire tam quantitatem quam directionem ejus vis, qua corpusculum sollicitatur.

**Solutio.** (Fig. 172.) Cum corpusculum a singulis elementis corporis finiti attrahatur, definiri oportet vim ex omnibus istis viribus elementaribus resultantem. Quoniam igitur corporis finiti figura est data, tam ejus centrum inertiae quam ternos axes principales, eorumque respectu momenta inertiae pro cognitis assumi licet. Sit igitur $J$ centrum inertiae corporis attrahentis, et $JA$, $JB$, $JC$ ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae $Maa$, $Mbb$, $Mcc$, denotante $M$ corporis massam. Corpusculum autem attractum, cujus massa $= m$, sit in $H$ in distantia ab illius centro inertiae $JH = h$, quae recta cum axibus principalibus faciat angulos $HJA = \alpha$, $HJB = \beta$ et $HJC = \gamma$, ut sit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Hinc demisso ab $H$ ad planum $AJB$ perpendiculo $HG$, et ex $G$ ad $JA$ productam normali $GF$, erit $JF = h\cos\alpha$, $FG = h\cos\beta$ et $GH = h\cos\gamma$. Concipiatur jam corporis elementum quodcunque in $Z$, pro quo coordinatae axibus principalibus parallelae sint $JX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; massa autem istius elementi sit $= dM$, eritque ex indole axium principalium et centri inertiae $\int x dM = 0$, $\int y dM = 0$, $\int z dM = 0$; porro $\int xy dM = 0$, $\int xz dM = 0$, $\int yz dM = 0$, atque $\int xx dM = \frac{1}{2}M(bb + cc - aa)$, $\int yy dM = \frac{1}{2}M(aa + cc - bb)$, $\int zz dM = \frac{1}{2}M(aa + bb - cc)$. Ducatur recta $HZ$, qua posita $= v$ erit

$$v = \sqrt{((h\cos\alpha - x)^2 + (h\cos\beta - y)^2 + (h\cos\gamma - z)^2)}, \quad \text{seu}$$

$$v = \sqrt{(hh - 2h(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) + x^2 + y^2 + z^2)}.$$

His positis, corpusculum $m$ in $H$ ad elementum $dM$ in $Z$ situm attrahitur vi $= \frac{CmdM}{vv}$, ubi quidem coëfficientem constantem $C$ negligere licet, deinceps, ubi opus fuerit, facile introducendum; ita ut vis haec secundum $HZ$ sit $= \frac{mdM}{vv}$, quae resoluta secundum directiones $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ axibus principalibus parallelas, praebebit

$$\text{vim secundum } H\alpha = \frac{m(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vim secundum } H\beta = \frac{m(h\cos\beta - y)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vim secundum } H\gamma = \frac{m(h\cos\gamma - z)\,dM}{v^3}.$$

Hinc ergo integrando vis tota, qua corpusculum $m$ in $H$ sollicitatur, componitur ex his tribus viribus:

$$\text{vi secundum } H\alpha = m\int\frac{(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vi secundum } H\beta = m\int\frac{(h\cos\beta - y)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vi secundum } H\gamma = m\int\frac{(h\cos\gamma - z)\,dM}{v^3},$$

quae formulae ita generaliter ulterius tractari nequeunt. Sed quia distantia corpusculi attracti $JH = h$ prae magnitudine corporis praegrandis supponitur, ita ut maximi valores, quos quidem coordinatae $x$, $y$, $z$ recipere possunt, prae $h$ sint satis exigui, ejusmodi approximatione uti licebit, qua valor ipsius $v$ in seriem resolvatur, in qua coordinatarum $x$, $y$, $z$ potestates, secunda altiores, rejiciantur; hinc ergo fiet

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{h^3} + \frac{3(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{h^4} - \frac{3(xx + yy + zz)}{2h^5} + \frac{15(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}{2h^5},$$

unde colligitur pariter non ultra secundam potestatem ascendendo

$$\frac{h\cos\alpha - x}{v^3} = \frac{\cos\alpha}{hh} - \frac{x}{h^3}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3y\cos\alpha\cos\beta}{h^3} + \frac{3z\cos\alpha\cos\gamma}{h^3}$$

$$- \frac{3xx\cos\alpha}{2h^4}(3 - 5\cos^2\alpha) - \frac{3yy\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\beta) - \frac{3zz\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\gamma)$$

$$- \frac{3xy\cos\beta}{h^4}(1 - 5\cos^2\alpha) - \frac{3xz\cos\gamma}{h^4}(1 - 5\cos^2\alpha) + \frac{15yz\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{h^4}.$$

Multiplicetur haec formula per $DM$, captisque singulorum membrorum integralibus secundum praecepta exposita, habebimus

$$\int\frac{(h\cos\alpha - x)}{v^3}dM = \frac{M\cos\alpha}{hh} - \frac{3M(bb + cc - aa)}{4h^4}\cos\alpha(3 - 5\cos^2\alpha)$$

$$- \frac{3M(aa + cc - bb)}{4h^4}\cos\alpha(1 - 5\cos^2\beta) - \frac{3M(aa + bb - cc)}{4h^4}\cos\alpha(1 - 5\cos^2\gamma),$$

quae forma ob $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ad sequentem revocatur

$$\int\frac{(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3} = \frac{M\cos\alpha}{hh} + \frac{3Maa\cos\alpha}{2h^4}(3 - 5\cos^2\alpha)$$

$$+ \frac{3Mbb\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\beta) + \frac{3Mcc\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\gamma).$$

Si simili modo reliqua duo integralia colligantur, erunt ternae vires, quibus corpusculum $m$ in $H$ corpore finito sollicitatur, sequentes:

secundum $H\alpha = \frac{Mm\cos\alpha}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(3 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma)\right)$,

$$H\beta = \frac{Mm\cos\beta}{hh}\left(1 + \frac{3bb}{2hh}(3 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha)\right),$$

$$H\gamma = \frac{Mm\cos\gamma}{hh}\left(1 + \frac{3cc}{2hh}(3 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta)\right),$$

quae vires jam pro lubitu ad alias directiones reduci possunt.

39. **Coroll. 1.** Si harum trium virium quadrata colligantur, et ex summa radix quadrata extrahatur, prodit vis illis aequivalens, quae ergo simili approximatione adhibita reperitur:

Vis aequivalens $= \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\right)$,

cujus directio deflectet a directione $HJ$ angulo exiguo, qui est

$$= \frac{3}{hh}\sqrt{\left((aa - bb)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + (aa - cc)^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma + (bb - cc)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma\right)}.$$

40. **Coroll. 2.** Quodsi ergo corporis attrahentis terna momenta principalia fuerint inter se aequalia: $aa = bb = cc$, ob $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, erit vis, qua corpusculum $H$ sollicitatur, $= \frac{Mm}{hh}$, ejusque directio in ipsam lineam $HJ$ cadit, ita ut hoc casu corpusculum $m$ in $H$ perinde attrahatur, ac si tota corporis attrahentis massa $M$ in ipso centro inertiae $J$ esset collecta.

41. **Coroll. 3.** Si corpusculum attractum in axe principali corporis attrahentis $JA$ fuerit situm, ut sit $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma = 90^0$, deflexio vis attrahentis a directione $HJ$ evanescit, ipsa vero vis attrahens erit $= \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3(bb + cc - 2aa)}{2hh}\right)$. Nisi ergo sit $bb + cc = 2aa$, attractio erit vel major vel minor, quam si tota corporis attrahentis massa in suo centro inertiae esset collecta.

42. **Coroll. 4.** Si corpus attractum ita fuerit situm, ut recta $HJ$ ad singulos axes principales aeque inclinetur, angulo scilicet $54^0\,45'$, tum vis attrahens erit $= \frac{Mm}{hh}$, perinde ac si massa attrahens $M$ in centro inertiae $J$ esset collecta, at ejus directio declinabit a directione $HJ$ angulo, qui est

$$= \frac{1}{hh}\sqrt{2\,(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)}.$$

43. **Scholion 1.** Vis, qua corpusculum $m$ a corpore $M$ attrahitur, infinitis aliis modis repraesentari potest. Primo scilicet haec vis aequivalet vi secundum $HJ = \frac{Mm}{hh}$, et insuper his tribus viribus:

secundum $H\alpha = \frac{3Mm\cos\alpha}{2h^4}\left(aa(3 - 5\cos^2\alpha) + bb(1 - 5\cos^2\beta) + cc(1 - 5\cos^2\gamma)\right)$,

$$H\beta = \frac{3Mm\cos\beta}{2h^4}\left(bb(3 - 5\cos^2\beta) + cc(1 - 5\cos^2\gamma) + aa(1 - 5\cos^2\alpha)\right),$$

$$H\gamma = \frac{3Mm\cos\gamma}{2h^4}\left(cc(3 - 5\cos^2\gamma) + aa(1 - 5\cos^2\alpha) + bb(1 - 5\cos^2\beta)\right),$$

quae prae prima sunt vehementer parvae.

*

Deinde ista vis etiam hoc modo referri potest, ut aequivaleat

$$\text{vi secund. } HJ = \frac{Mm}{hh}\Big(1 + \frac{5aa}{2hh}(1-3\cos^2\alpha) + \frac{5bb}{2hh}(1-3\cos^2\beta) + \frac{5cc}{2hh}(1-3\cos^2\gamma)\Big),$$

insuperque his tribus valde parvis

$$\text{vi sec. } H\alpha = \frac{Mm\,(2aa - bb - cc)\cos\alpha}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } H\beta = \frac{Mm\,(2bb - aa - cc)\cos\beta}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } H\gamma = \frac{Mm\,(2cc - aa - bb)\cos\gamma}{h^4}.$$

Tum vero etiam hoc modo, ut aequivaleat

$$\text{vi sec. } HJ = \frac{Mm}{hh}\Big(1 + \frac{3aa}{2hh}(1-3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1-3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1-3\cos^2\gamma)\Big),$$

et insuper his exiguis tribus

$$\text{vi sec. } H\alpha = \frac{3Mm\cos\alpha}{h^4}\Big((aa-bb)\cos^2\beta + (aa-cc)\cos^2\gamma\Big),$$

$$\text{vi sec. } H\beta = \frac{3Mm\cos\beta}{h^4}\Big((bb-aa)\cos^2\alpha + (bb-cc)\cos^2\gamma\Big),$$

$$\text{vi sec. } H\gamma = \frac{3Mm\cos\gamma}{h^4}\Big((cc-aa)\cos^2\alpha + (cc-bb)\cos^2\beta\Big).$$

Hinc si corpusculum $m$ in plano axium $JA$ et $JB$ reperiatur, ut sit $\gamma = 90^0$ et $\alpha + \beta = 90^0$, vis id sollicitans constabit primo

$$\text{vi sec. } HJ = \frac{Mm}{hh}\Big(1 + \frac{3aa}{2hh}(1-3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1-3\sin^2\alpha) + \frac{3cc}{2hh}\Big),$$

tum vero his duabus viribus

$$\text{vi sec. } H\alpha = \frac{3Mm\,(aa-bb)\cos\alpha\cos^2\beta}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } H\beta = \frac{3Mm\,(bb-aa)\cos\beta\cos^2\alpha}{h^4}.$$

Unde si momenta principalia respectu axium $JA$ et $JB$ fuerint aequalia, hae duae postremae vires evanescunt, remanetque sola vis prior

$$\text{sec. } HJ = \frac{Mm}{hh}\Big(1 + \frac{3\,(cc-aa)}{2hh}\Big).$$

**44. Scholion 2.** Quemadmodum corpora coelestia tantopere a se invicem sunt remota, ut nostra approximatio solutionem perfectam praebere sit censenda, ita etiam commode usu venit, ut eorum momenta inertiae sint fere inter se aequalia, unde proxime perinde ad se attrahunt, ac si universa eorum massa in ipsorum centro inertiae esset collecta, quo casu vis attrahens perpetuo ad centrum inertiae foret directa, et quadrato distantiae reciproce proportionalis, prorsus uti Newtonu

statuit. Sin autem notabilis inaequalitas inter momenta inertiae intercederet, vis attrahens ab hac simplici lege ita aberraret, ut motus corpusculi attracti nonnisi difficillime inde definiri possit, praecipue si distantia non fuerit adeo magna. Cum enim corpusculum attractum continuo situm suum respectu axium principalium mutet, in motu ejus non solum distantia $h$, sed etiam anguli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ erunt quantitates variabiles, viresque assignatae maximam in calculo parient difficultatem. Unico casu difficultas minueretur, quando scilicet corporis attrahentis duo momenta principalia inter se fuerint aequalia, corpusque attractum in horum binorum axium plano moveatur: tum enim vis attrahens perpetuo ad centrum inertiae corporis attrahentis dirigetur, atque per solam distantiam determinabitur; verumtamen duabus constabit partibus, quarum altera quadrato, altera vero biquadrato distantiae erit reciproce proportionalis, quippe quae ut vidimus est $=\frac{Mm}{hh}+\frac{3Mm(cc-aa)}{2h^4}$, ubi quidem ob duplicem rationem pars posterior prae priori est vehementer parva, primo scilicet, quod quantitas $hh$ plurimum superet quantitates $cc$ et $aa$, tum vero quod ista quadrata $aa$ et $cc$ sint proxime inter se aequalia. Quod quo clarius perspiciatur, sit corpus attrahens sphaeroides ellipticum homogeneum, genitum ex conversione ellipsis, cujus semiaxes sint $A$ et $C$, circa axem $2C$, ita ut bini semiaxes principales $JA$ et $JB$ futuri sint $=A$, ac tertius $JC=C$. Cum igitur massa istius corporis sit $M=\frac{4}{3}\pi ACC$, erit momentum inertiae respectu axium $JA$ et $JB=\frac{1}{5}M(AA+CC)$, et respectu axis $JC=\frac{2}{5}MAA$, unde pro nostra formula fiet $aa=bb=\frac{AA+CC}{5}$ et $cc=\frac{2AA}{5}$, hincque $cc-aa=\frac{1}{5}(AA-CC)$. Quare si corpus fuerit sphaeroides compressum, uti terra, erit $AA>CC$, aliudque corpusculum circa id in plano aequatoris moveatur, vis attrahens major erit quam $\frac{Mm}{hh}$, et excessus erit biquadrato distantiae reciproce proportionalis, tota vi existente $=\frac{Mm}{hh}+\frac{3Mm(AA-CC)}{10h^4}$. Unde si semiaxes $A$ et $C$ proxime fuerint aequales, pars posterior prae priori fere pro evanescente haberi potest.

45. **Scholion 3.** Cum corpus solis sit fere perfecte sphaericum, in viribus, quibus planetae ad solem urgentur, haec inaequalitas tuto negligi potest, id quod etiam de viribus, quibus planetae primarii se mutuo attrahunt, multo magis est tenendum, cum hae vires ipsae prae vi solis sint vehementer exiguae. In motu quidem lunae aberratio figurae terrae a sphaerica alicujus momenti esse posse videtur, cum ob lunae vicinitatem, tum vero quod terrae figura magis a sphaerica recedat quam solis. Imprimis autem quando motus satellitum Jovis ac Saturni scrutari lubuerit, hujus aberrationis rationem haberi conveniet, propterea quod figura Jovis non parum a sphaerica recedit, cum ratio semiaxium $A:C$ fere ut $11:10$ reputatur, ac vicinitas satellitum hanc aberrationem eo magis adauget. In Saturno autem praeter eandem rationem annulus in vi attrahente notabilem perturbationem generare debet. Si enim annulus tanquam pars corporis Saturni spectetur, hoc figuram sphaeroidis admodum compressi induere est censendum. His autem casibus commode evenit, ut satellites Jovis fere in plano aequatoris hujus planetae, satellites Saturni autem fere in plano annuli revolvantur, quod si secus eveniret, investigationem motus satellitum ne suscipere quidem liceret. Quemadmodum autem figura corporis attrahentis hujusmodi anomaliam in vi attrahente gignere valet, ita similis anomalia quoque ex figura corporis attracti resultat, id quod in sequente problemate plenius ostendemus.

46. **Problema 2.** (Fig. 173.) Si corpus finitum attrahatur ad punctum $N$ valde remotum, seu ad corpus, cujus totam massam in eo puncto collectam concipere licet, invenire vim attractricem, qua illud corpus sollicitatur.

**Solutio.** Sit $J$ centrum inertiae corporis attracti, et $JA$, $JB$, $JC$ ejus axes principales, quorum respectu ejus momenta inertiae sint $Maa$, $Mbb$, $Mcc$, denotante littera $M$ ejus massam. Corporis autem attrahentis centrum inertiae sit in $N$, cujus effectus ut perinde se habeat, ac si tota ejus massa, quae sit $= N$, in puncto $N$ esset collecta, hujus corporis momenta inertiae omnia inter se aequalia sunt concipienda, quemadmodum ex § 40 intelligitur. Hoc posito, singula corporis $ABC$ elementa ad ipsum punctum $N$ attrahantur viribus distantiarum quadratis reciproce proportionalibus, et quoniam hae vires aequales sunt et contrariae viribus, quibus corpusculum in $N$ collocatum, cujus quidem massa esset $= N$, ad singula corporis $M$ elementa attrahitur, vis etiam tota, qua corpus $M$ a corpore $N$ sollicitatur, aequalis et contraria erit vi, qua corpus $N$, ut punctum consideratum, a corpore $M$ attrahitur, et quam in problemate praecedente determinavimus. Ponatur ergo centrorum inertiae distantia $JN = h$, et anguli $NJA = \alpha$, $NJB = \beta$, $NJC = \gamma$, ductisque ex $N$ rectis $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ parallelis ternis axibus principalibus $JA$, $JB$, $JC$ corporis attracti, vires, quibus corpus $ABC$ sollicitatur, ita ad directiones $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ reducentur, ut sit vis

$$\text{sec. } N\alpha = \frac{MN\cos\alpha}{hh}\Big(1 + \frac{3aa}{2hh}(3 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma)\Big),$$

$$\text{sec. } N\beta = \frac{MN\cos\beta}{hh}\Big(1 + \frac{3bb}{2hh}(3 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha)\Big),$$

$$\text{sec. } N\gamma = \frac{MN\cos\gamma}{hh}\Big(1 + \frac{3cc}{2hh}(3 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta)\Big),$$

quippe quae sunt aequales et contrariae iis, quas in problemate praecedente invenimus, nisi quo hic corporis attrahentis massa sit $N$, cum ibi ejus loco habuissemus litteram $m$. Etsi autem ha vires hic ad punctum $N$ sint relatae, tamen corpus $ABC$ sollicitare sunt censendae; scilicet quae oportet vim illis ternis aequivalentem, cujus directio ad corpus $ABC$ usque producta vim hoc cor pus sollicitantem manifestabit. Potest autem ex his viribus una vis elici secundum directionem $J$ sollicitans, quae quasi vis primaria spectari potest, prae qua reliquae sint valde parvae. Scilicet u in § 43 vires corpus $ABC$ sollicitantes ita repraesentari possunt, ut primo adsit

$$\text{vis sec. } JN = \frac{MN}{hh}\Big(1 + \frac{5aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{5bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{5cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\Big),$$

tum vero hae tres vires valde exiguae

$$\text{sec. } N\alpha = \frac{MN(2aa - bb - cc)\cos\alpha}{h^4},$$

$$\text{sec. } N\beta = \frac{MN(2bb - aa - cc)\cos\beta}{h^4},$$

$$\text{sec. } N\gamma = \frac{MN(2cc - aa - bb)\cos\gamma}{h^4}.$$

Vel etiam hoc modo ut primo adsit vis principalis

$$\text{sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\right)$$

c praeterea hae tres vires minimae

$$\text{sec. } N\alpha = \frac{3MN\cos\alpha}{h^4}\left((aa - bb)\cos^2\beta + (aa - cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{sec. } N\beta = \frac{3MN\cos\beta}{h^4}\left((bb - aa)\cos^2\alpha + (bb - cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{sec. } N\gamma = \frac{3MN\cos\gamma}{h^4}\left((cc - aa)\cos^2\alpha + (cc - bb)\cos^2\beta\right).$$

47. **Coroll. 1.** Si igitur et corporis $ABC$ terna momenta principalia fuerint inter se aequalia, ola vis secundum $JN = \frac{MN}{hh}$ relinquitur, et ambo corpora utut finita perinde se attrahant, ac si triusque massa in suo centro inertiae esset collecta, ac tum directio vis attractricis per utriusque entrum inertiae transit.

48. **Coroll. 2.** Si corpus attrahens $N$ in plano $AJB$ binis axibus principalibus $JA$ et $JB$ corporis attracti determinato versetur, erit $\gamma = 90^0$ et $\alpha + \beta = 90^0$; unde hoc casu habebitur

$$\text{vis sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\sin^2\alpha) + \frac{3cc}{2hh}\right),$$

: praeterea hae duae tantum vires valde parvae

$$\text{vis sec. } N\alpha = \frac{3MN(aa - bb)\cos\alpha\cos^2\beta}{h^4},$$

$$\text{vis sec. } N\beta = \frac{3MN(bb - aa)\cos\beta\cos^2\alpha}{h^4}.$$

49. **Coroll. 3.** Quare si hoc casu corporis attracti momenta inertiae respectu axium $JA$ et ? fuerint inter se aequalia, binae vires exiguae secundum $N\alpha$ et $N\beta$ evanescunt, relinquiturque vis trahens sola secundum $JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2hh}\right)$, quae ergo partim quadrato partim biquadrato stantiae est proportionalis.

50. **Coroll. 4.** In genere autem si fuerit $bb = aa$, seu corporis $ABC$ omnia momenta inertiae spectu axium in plano $AJB$ sumtorum sint aequalia, vis sollicitans constabit

$$\text{vi sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3(cc - aa)(1 - 3\cos^2\gamma)}{2hh}\right)$$

insuper his viribus exiguis

$$\text{vi sec. } N\alpha = \frac{3MN(aa - cc)\cos\alpha\cos^2\gamma}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } N\beta = \frac{3MN(aa - cc)\cos\beta\cos^2\gamma}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } N\gamma = \frac{3MN(cc - aa)\cos\gamma\sin^2\gamma}{h^4}.$$

51. **Scholion 1.** Effectus ab his viribus oriundus duplici modo se habet, prout vel solum motum progressivum corporis $ABC$ afficit, vel ejus motum gyratorium, quos binos effectus seorsim definire licet. Quodsi ergo ad solum motum progressivum corporis $ABC$ respiciamus, singulas vires sollicitantes, tanquam ipsi ejus centro inertiae $J$ in suis directionibus applicatas consideramus, a propterea corpus tum ab his viribus sollicitatum est censendum, primo a

$$\text{vi sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1-3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1-3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1-3\cos^2\gamma)\right)$$

ac praeterea ab his tribus exiguis viribus

$$\text{vi sec. } JA = \frac{3MN}{h^4}\cos\alpha\left((aa-bb)\cos^2\beta + (aa-cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{vi sec. } JB = \frac{3MN}{h^4}\cos\beta\left((bb-cc)\cos^2\gamma + (bb-aa)\cos^2\alpha\right),$$

$$\text{vi sec. } JC = \frac{3MN}{h^4}\cos\gamma\left((cc-aa)\cos^2\alpha + (cc-bb)\cos^2\beta\right).$$

Sin autem perturbationem motus vertiginis, quo corpus $ABC$ circumagitur, definire velimus, no tam ad ipsas vires, quam earum momenta respectu axium principalium respicere debemus. Ex viribus autem secundum directiones $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ agentibus colligimus primo momentum respectu ax $JA$ in sensum $BC$ tendens $=$ vi $N\gamma.FG$ — vi $N\beta.GN =$ vi $N\gamma.h\cos\beta$ — vi $N\beta.h\cos\gamma$. Cum ergo v primaria secundum $JN$ nullum praebeat momentum, ex viribus exiguis sequentia colligimus moment

I. Momentum respectu axis $JA$ in sensum $BC = \frac{3MN(cc-bb)\cos\beta\cos\gamma}{h^3}$,

II. Momentum respectu axis $JB$ in sensum $CA = \frac{3MN(aa-cc)\cos\alpha\cos\gamma}{h^3}$,

III. Momentum respectu axis $JC$ in sensum $AB = \frac{3MN(bb-aa)\cos\alpha\cos\beta}{h^3}$,

unde quemadmodum perturbatio motus gyratorii definiri debeat, in libro superiori abunde est ostensu.

52. **Scholion 2.** Si corpora coelestia essent perfecte sphaerica et ex materia homogenea co- flata, seu saltem eorum momenta inertiae inter se aequalia, haud aliter se mutuo attraherent, ac i singulorum massae in suo quaeque centro inertiae essent collectae, quam hypothesin etiam Newtons in investigatione motuum coelestium assumsit. Verum si corpora coelestia ab hac figura receda, iisdem principiis inducti videmus vires attractrices neque ad centrum inertiae cujusque corporis te- dere, neque exacte quadratis distantiarum reciproce esse proportionales, ac nunc quidem intelligims aberrationem ab hac lege a duplici causa proficisci, a figura scilicet non sphaerica tam corpois attrahentis quam corporis attracti. In primo nempe problemate in corpore attracto momenta inertie aequalia, et in attrahente inaequalia; in secundo autem problemate in corpore attracto momenta i- ertiae inaequalia et in attrahente aequalia sumsimus; unde dum alterum corpus habeat momenta ia inertiae aequalia, inde vis attractrix determinari potest. Superesset igitur, ut investigaremus quoie casum, quo ambo corpora habeant sua momenta inertiae inaequalia; verum etiamsi hanc investia- tionem feliciter expediremus, vix quicquam lucri inde consequeremur, cum calculus pro motu der-

minando instituendus nimis difficilis redderetur. Quo etiam facile erit vim attrahentem his casibus proxime assignare, modo unum modo alterum corpus tanquam sphaericum spectando et aberrationes a lege vulgari colligendo. Sed plerumque hae aberrationes tam sunt exiguae pro motu progressivo, ut satis tuto negligi queant; pro motu autem vertiginis sufficit figuram corporis attracti considerasse, quoniam vires sollicitantes per praelongos vectes agunt, unde tanta earum momenta nascuntur, ut prae iis momenta virium, quae ex figura corporis attracti resultarent, pro nihilo essent habenda, quandoquidem hae in ipso corpore attracto applicatae sunt censendae, ideoque nonnisi exigua momenta producere valent.

53. **Scholion 3.** Hae ergo sunt vires, quibus corpora coelestia sollicitantur, et ex quarum actione eorum motus ex principiis mechanicis investigari oportet, qui, quin deinceps vicissim cum observationibus exactissime conveniant, eo minus est dubitandum, cum existentia harum virium sit per ipsas observationes confirmata. Cum igitur hae vires neque sint quadratis distantiarum reciproce proportionales, neque ad ipsa centra inertiae cujusque corporis tendant, nisi corpora sint sphaerica, seu omnia momenta inertiae habeant aequalia, in multo difficiliores investigationes delabimur, quam quidem Newtonus susceperat. Praeterea vero insigne dubium hic oritur, an hae vires solae in mundo existant, quibus corpora coelestia sollicitentur? Etsi enim phaenomena alias nobis non patefaciant, tamen cum universum spatium aethere, utpote luminis vehiculo sit repletum, fieri omnino nequit, quin inde resistentia quaedam nascatur, quam corpora coelestia in motu suo patiantur. Nam quantumvis etiam subtilem aetheris materiam fingamus, tamen neque liberrime corpora crassiora penetrare statui potest, neque ea usque adeo poris plena concipere licet, ut in motu suo nullos plane impetus ab aethere sustineant. Ob poros quidem aetheri pervios concedere debemus, ejus resistentiam prae ea, quam alia fluida objicerent, multo minorem esse quam pro ratione densitatis; scilicet si aether esset centies millies rarior aëre, resistentia multo magis quam centies millies minor esset statuenda prae ea, quam idem corpus pari celeritate motum in aëre sentiret. Si quis objicere vellet, aetherem cuique corpori coelesti vicinum pari celeritate proferri, ideoque nullam inde resistentiam oriri, quod quidem nulla ratione confirmari potest, is tamen concedere teneretur, cometas resistentiam pati debere. Quod autem effectum hujusmodi resistentiae non percipiamus, causa est, quod nonnisi post plura secula sensibilis evadat: ac tantum abest, ut observationes huic sententiae plane adversentur, ut potius in motu lunae talis effectus animadverti videatur.

54. **Theorema.** Quotcunque fuerint corpora, quae se mutuo attrahant, et quomodocunque moveantur, eorum commune centrum inertiae vel quiescit, vel uniformiter in directum promovetur.

**Demonstratio.** Veritas hujus theorematis isto nititur fundamento, quod vires, quibus duo quaeque corpora se invicem attrahunt, sint inter se aequales et in contrarium directae. Scilicet si fuerint (fig. 174) duo corpora quaecunque *Ma* et *Nb*, et vis, qua se mutuo attrahunt $= V$, cujus directio sit recta *ab*, ita ut corpus *Ma* a corpore *Nb* sollicitetur a vi $= V$ in directione *ab*, corpus vero *Nb* a corpore *Ma* vi $= V$ in directione *ba*. Considerentur utriusque corporis centra inertiae, quae sint in *A* et *B*, et quatenus tantum ad motum progressivum horum corporum respicimus,

utrique corpori vis, qua sollicitatur, in ipso centro inertiae secundum eandem directionem applicata est concipienda. Hinc corpus $A$ sollicitari censendum est vi $= V$ in directione $A\alpha$, et corpus $B$ vi $= V$ in directione $B\beta$, ita ut vires sint aequales et directiones parallelae oppositaeque. Quare si motus ad ternas directiones fixas referatur, et vis corpus $A$ sollicitans secundum has ternas directiones resoluta praebeat vires $P$, $Q$, $R$, vis corpus $B$ sollicitans eodem modo resoluta dabit vires $-P$, $-Q$, $-R$. His positis (fig. 175) sint corpora quotcunque se mutuo attrahentia, quorum massae, in cujusque centro inertiae $A$, $B$, $C$ collectae, denotentur literis $A$, $B$, $C$, pro quibus coordinatae ternis directionibus fixis $OE$, $OF$, $OG$ parallelae statuantur

$$O\alpha = x,\ \alpha a = y,\ aA = z;\quad O\beta = x',\ \beta b = y',\ bB = z';\quad O\gamma = x'',\ \gamma c = y'',\ cC = z''.$$

Sit porro vis, qua corpora $A$ et $B$ se mutuo attrahunt, $= V$, vis corporum $A$ et $C = V'$ et vis corporum $B$ et $C = V''$, quae secundum easdem directiones fixas resolutae dent vires $P$, $Q$, $R$, $P'$, $Q'$, $R'$, et $P''$, $Q''$, $R''$ atque

| corpus | sollicitabitur secundum | | |
|---|---|---|---|
| | direct. $OE$ | direct. $OF$ | direct. $OG$ |
| $A$ | $+P+P'$ | $+Q+Q'$ | $+R+R'$ |
| $B$ | $-P+P''$ | $-Q+Q''$ | $-R+R''$ |
| $C$ | $-P'-P''$ | $-Q'-Q''$ | $-R'-R''$ |

Jam ex principiis accelerationis, sumto elemento temporis $dt$ constante, colligimus formulas sequentes:

$$Addx = 2gdt^2(+P+P');\quad Addy = 2gdt^2(+Q+Q');\quad Addz = 2gdt^2(+R+R')$$
$$Bddx' = 2gdt^2(-P+P'');\quad Bddy' = 2gdt^2(-Q+Q'');\quad Bddz' = 2gdt^2(-R+R'')$$
$$Cddx'' = 2gdt^2(-P'-P'');\quad Cddy'' = 2gdt^2(-Q'-Q'');\quad Cddz'' = 2gdt^2(-R'-R'')$$

unde concludimus

$$Addx + Bddx' + Cddx'' = 0$$
$$Addy + Bddy' + Cddy'' = 0$$
$$Addz + Bddz' + Cddz'' = 0,$$

simulque patet si plura tribus fuerint corpora, hujusmodi ternas aequationes semper oriri debere. Hinc ergo integrando consequimur

$$Adx + Bdx' + Cdx'' = Edt;\quad Ax + Bx' + Cx'' = Et + \mathfrak{E}$$
$$Ady + Bdy' + Cdy'' = Fdt;\quad Ay + By' + Cy'' = Ft + \mathfrak{F}$$
$$Adz + Bdz' + Cdz'' = Gdt;\quad Az + Bz' + Cz'' = Gt + \mathfrak{G},$$

unde apparet, commune centrum inertiae corporum secundum singulas directiones $OE$, $OF$, $OG$ uniformiter proferri, ideoque ejus motum verum fore uniformem in directum. Nisi igitur commune centrum inertiae quiescat, certe uniformiter in directum profertur.

55. **Coroll. 1.** Si igitur toti systemati motus aequalis et contrarius ei, quo commune centrum inertiae progreditur, imprimi concipiatur, corpora ita movebuntur, ut commune centrum inertiae in quiete persistat.

56. **Coroll. 2.** Hoc autem motu superaddito, motus corporum respectivus inter se non mutabitur, ex quo totius mundi commune centrum inertiae tanquam quiescens spectari potest, motus enim singulorum corporum ab iisdem viribus efficietur, sive istud centrum quiescat, sive uniformiter in directum promoveatur.

57. **Coroll. 3.** Quare si motum corporum respectivum, respectu communis centri inertiae definire velimus, non alias vires, praeter eas, quibus singula corpora revera sollicitantur, considerari opus est.

58. **Scholion 1.** In Astronomia autem neque motus corporum coelestium absolutos, neque ad eorum commune centrum inertiae relatos contemplari solemus, sed potius propositum est eorum motus respectu corporis cujuspiam mundani, quales spectatori, in ejus centro inertiae collocato, essent appariturі, assignare. Ita motus planetarum primariorum ut et cometarum ad centrum solis, secundariorum vero ad centrum primarii referri solent. Ut autem hi motus apparentes per calculum reperiantur, id corpus, ex cujus centro ii spectari concipiuntur, tanquam quiescens assumitur, reliquis vero, praeter vires, quibus revera sollicitantur, insuper vires applicari debent, quae sint similes et contrariae iis, quibus corpus quiescens urgetur; scilicet hae vires primo per massam corporis quiescentis dividi, tum vero iterum per massam cujusque corporis moti, cui sunt applicandae, multiplicari debent, ut in his corporibus aequalem et contrariam motus perturbationem producant ei, quam in corpore, quod quiescens assumitur, producturae fuissent. Haec regula rite observata perducet ad motus apparentes, ex quibus deinceps motus veri, si motus corporis, quod pro quiescente assumitur, fuerit cognitus, facile definiuntur, siquidem opus fuerit eos nosse: semper enim sufficit motus tantum respectivos inter se habere cognitos. Ac si hos motus respectu unius noverimus, facile respectu cujusque alius determinabimus, quemadmodum Astronomi ex locis planetarum heliocentricis eorum loca geometrica elicere solent: scilicet cognito motu planetarum ac proinde etiam terrae, qualis ex centro solis esset apparituras, per solam Geometriam inde colligitur motus eorum, quo spectatori in centro terrae posito progredi videntur, unde deinceps etiam motus apparens pro spectatoribus in superficie terrae constitutis facile concluditur.

59. **Scholion 2.** Cum numerus corporum in mundo existentium et se mutuo attrahentium sit quasi infinitus, eorum motus exactissime definire haud licet, nisi pro corporum se mutuo attrahentium numero quantumvis magno motus inde oriundos determinare voluerimus, quod problema tantis calculi difficultatibus involutum deprehenditur, ut sagacitas humana illi enodando minime sufficere videatur. Verum corpora mundana ita commode a sapientissimo Conditore disposita deprehenduntur, ut primo sol et stellae fixae tam vastis a se invicem intervallis sint remotae, ut vires, quibus in se mutuo agunt, non obstante horum corporum insigni mole, pro nihilo sint reputandae; unde fit, ut stellas fixas cum sole tanquam corpora quiescentia et nullis viribus se mutuo sollicitantia spectare liceat, quod commodum neutiquam locum esset habiturum, si minoribus intervallis a se invicem distarent. Deinde etiam planetae et cometae nunquam tantopere a sole recedere videntur, ut vires, quas a stellis fixis sustinent, prae vi solis quicquam momenti adipiscantur. Tum vero etiam planetae principales et cometae pro suis massis tantis distantiis a se invicem manent sejuncti, ut vires, qui-

bus se mutuo afficiunt, prae viribus, quibus ad solem tendunt, sint satis exiguae. Luna autem ac satellites Jovis et Saturni tam vicini sunt suis principalibus, ut vires, quibus ad eos urgentur, plurimum excedant ipsam vim solis. Quare pro motu omnium horum corporum proxime determinando sufficit unicam vim considerasse, dum reliquae prae ea sint valde parvae, quarum effectus tantum in exiguis perturbationibus producendis consumuntur, quas ope methodi approximandi definire licet. Sin autem vel planetae primarii sibi essent multo propiores, vel satellites a suis principalibus magis distarent, nullo fere modo ad motus eorum cognitionem pertingere possemus.

60. **Scholion 3.** Primo ergo duo tantum corpora se mutuo attrahentia comtemplari conveniet, ubi quidem eorum indoles, prout fuerint sphaerica vel non sphaerica, investigationem bipartitam reddet. Nomine autem corporum sphaericorum complector omnia ea, in quibus terna momenta principalia sunt aequalia, reliqua omnia non sphaerica appellans. Sphaeroidica autem corpora in genere mihi erunt ea, in quibus duo momentorum principalia sunt aequalia, quae ergo unico axe principali sunt praedita, dum bini reliqui fuerint indefiniti, atque ad hoc genus omnia corpora coelestia referenda videntur. Expedito autem binorum corporum motu, ad terna progrediamur, quousque scilicet licuerit. Si enim problema in genere resolvere nequeamus, contenti esse poterimus approximationibus inde petitis, quod prae una vi reliquae sint valde exiguae, qui casus in mundo ubique locum habere videtur. Denique quid aetheris resistentia valeat erit inquirendum, ac tandem perturbatio in motu vertiginis a momentis virium sollicitantium oriunda Astronomiae mechanicae finem imponet.

---

## Caput II.

### De motu duorum corporum sphaericorum se mutuo attrahentium.

61. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahant, definire motum alterius, qualis spectatori in alterius centro posito est appariturus, ad planum, in quo ipse motus absolvitur, relatum.

**Solutio.** (Fig. 176.) Sint $A$ et $B$ duo corpora, quae litterae simul eorum massas denotent, et observator constitutus sit in centro corporis $A$, quod propterea ut quiescens consideretur. Jam quia virium, quibus se mutuo attrahunt, directio per utriusque centrum transit, quomodocunque corpus $B$ moveri coeperit, directio vis sollicitantis semper est in plano per motus directionem et centrum corporis $A$ transeunte, ideoque corpus $B$ in eodem plano progredi perget. Quare tabula repraesentet hoc planum, in quo centrum corporis $B$ moveri videtur, et cum initio ex $E$ fuerit egressum, elapso tempore $t$ pervenerit in $B$, ita ut circa $A$ confecerit angulum $EAB = \varphi$, sitque distantia $AB = v$, unde patet si ad quodvis tempus $t$ tam angulum $EAB = \varphi$ quam distantiam $AB = v$ assignare potuerimus, motum corporis $B$ perfecte fore cognitum. Cum igitur $B$ trahatur ad $A$ in directione $BA$ vi $= \frac{A}{vv}$, parique vi corpus $A$ ad $B$ in directione $AB$ sollicitetur, haec posterior vis in corpus $B$ translata fiet $= \frac{B}{vv}$, idque in directione $AB$ afficere censendum est, ita

ut jam corpus $B$ sollicitetur omnino vi $= \frac{B(A+B)}{vv}$ in directione $BA$, quoniam corpus $A$ ut quiescens consideramus. Ex $B$ in directionem fixam $AE$ demisso perpendiculo $BX$, ut sit $AX = v\cos\varphi$ et $XB = v\sin\varphi$, et secundum easdem directiones vis $BA = \frac{B(A+B)}{vv}$ resolvatur, erit vis secundum $XA = \frac{B(A+B)}{vv}\cos\varphi$, et vis secundum $BX = \frac{B(A+B)}{vv}\sin\varphi$. Hinc sumto elemento temporis $dt$ constante, ex principiis Mechanicae elicimus has binas aequationes:

$$dd.v\cos\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\cos\varphi; \qquad dd.v\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\sin\varphi,$$

ubi $g$ est altitudo, per quam grave delabitur tempore unius minuti secundi, siquidem tempus $t$ detur in minutis secundis; at hic formula virium per certam constantem multiplicari oporteret, cujus magnitudo ex dato casu esset definienda. Verum hanc ipsam constantem sine ulla confusione subintelligere licet. En ergo has duas aequationes solutionem problematis continentes:

$$\text{I.} \quad ddv\cos\varphi - 2dvd\varphi\sin\varphi - vd\varphi^2\cos\varphi - vdd\varphi\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\cos\varphi,$$

$$\text{II.} \quad ddv\sin\varphi + 2dvd\varphi\cos\varphi - vd\varphi^2\sin\varphi + vdd\varphi\cos\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\sin\varphi,$$

unde haec combinatio $\text{II}.\cos\varphi - \text{I}.\sin\varphi$ praebet

$$2dvd\varphi + vdd\varphi = 0,$$

quae per $v$ multiplicata dat hoc integrale

$$vvd\varphi = Cdt \quad \text{hincque} \quad d\varphi = \frac{Cdt}{vv}.$$

At prima aequatio per $v$ multiplicata ita repraesentari potest:

$$vddv\cos\varphi - d.vvd\varphi\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)}{v}dt^2\cos\varphi,$$

ubi, ob $vvd\varphi = Cdt$, est $d.vvd\varphi\sin\varphi = Cdtd\varphi\cos\varphi$, ideoque

$$vddv - Cdtd\varphi + \frac{2g(A+B)}{v}dt^2 = 0, \quad \text{seu}$$

$$vddv - \frac{CCdt^2}{vv} + \frac{2g(A+B)}{v}dt^2 = 0,$$

quae multiplicata per $\frac{2dv}{v}$ praebet

$$2dvddv - \frac{2CCdt^2dv}{v^3} + \frac{4g(A+B)dt^2}{vv} = 0,$$

cujus integrale est

$$dv^2 + \frac{CCdt^2}{vv} - \frac{4g(A+B)dt^2}{v} = Ddt^2,$$

unde elicitur

$$dt = \frac{vdv}{\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}}$$

hincque

$$d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}}.$$

Cum igitur hinc per $v$ definiantur tam $t$ et $\varphi$, vicissim pro dato tempore $t$ assignare licebit valores variabilium $v$ et $\varphi$.

62. **Coroll. 1.** Prima aequatio integralis $vvd\varphi = Cdt$ continet elementum areae descriptae $BAb$, quod est $= \frac{1}{2} vvd\varphi$, unde tota area $EAB = \frac{1}{2}\int vvd\varphi$ aequalis fit $\frac{1}{2} Ct$, ideoque tempori est proportionalis.

63. **Coroll. 2.** Aequatio inter $v$ et $\varphi$ inventa

$$d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}}$$

exprimit naturam curvae $EB$, quam corpus $B$ circa $A$ describere videtur. Eam autem esse sectionem conicam mox ostendemus.

64. **Coroll. 3.** Cum $-CC$ necessario sit quantitas negativa, ex formula irrationali

$$\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}$$

patet distantiam $v$ evanescere nunquam posse, nisi sit $C = 0$, quo casu ob $d\varphi = 0$, corpus $B$ in linea recta ad $A$ esset accessurum.

65. **Coroll. 4.** At si non est $C = 0$, necesse est, ut distantia $v$ semper limitem quendam superet, qui limes, si constans $D$ sit positiva, est

$$= \frac{\sqrt{(4gg(A+B)^2 + CCD)} - 2g(A+B)}{D}.$$

Sin autem $D$ sit quantitas negativa $= -E$, erit limes

$$= \frac{2g(A+B) - \sqrt{(4gg(A+B)^2 - CCE)}}{E};$$

at si $D = 0$, limes iste fit $= \frac{CC}{4g(A+B)}$.

## Resolutio formularum.

66. Quoniam distantia $v$ superare debet certum limitem, si hic ponatur $= h$, erit $v - h$ factor formulae post signum radicale $Dvv + 4g(A+B)v - CC$, et alter factor erit formae $k \pm v$, prout $D$ fuerit vel positivum vel negativum. Commodius autem scopum attingemus ponendo $v = \frac{f}{u}$; unde ob $dv = \frac{-fdu}{uu}$, erit

$$dt = \frac{-ffdu}{uu\sqrt{(Dff + 4fg(A+B)u - CCuu)}}$$

et $$d\varphi = \frac{-Cdu}{\sqrt{(Dff + 4fg(A+B)u - CCuu)}}.$$

Hic si ponatur $Cu = Cp + \frac{2fg(A+B)}{C}$, fit formula radicalis $= \sqrt{(Dff + \frac{4ffgg(A+B)^2}{CC} - CCpp)}$, unde ob $-Cdu = -Cdp$, integrale posterioris aequationis erit

$$\alpha + \varphi = \text{Arc.}\cos.\frac{CCp}{\sqrt{(CCDff + 4ffgg(A+B)^2)}}.$$

Habebimus ergo

$$p = \frac{f\cos(\alpha+\varphi)}{CC}\sqrt{(CCD + 4gg(A+B)^2)}$$

$$\text{et}\quad u = \frac{2fg(A+B)}{CC} + \frac{f\cos(\alpha+\varphi)}{CC}\sqrt{(CCD + 4gg(A+B)^2)}.$$

Quo has formulas commodiores reddamus, constantes ita definiamus, ut fiat $u = 1 + n\cos s$, eritque

$$\alpha + \varphi = s,\quad \frac{2fg(A+B)}{CC} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f}{CC}\sqrt{(CCD + 4gg(A+B)^2)} = n.$$

Quare ob $CC = 2fg(A+B)$, sumtis quadratis habebitur

$$\frac{Df}{2g(A+B)} + 1 = nn \quad \text{et} \quad D = \frac{-2(1-nn)g(A+B)}{f}, \quad \text{seu} \quad D = \frac{-(1-nn)CC}{ff}.$$

Hinc pro signo radicali obtinebimus

$$\sqrt{(-CC + nnCC + 2CCu - CCuu)} = C\sqrt{(nn - (1-u)^2)},$$

quae, ob $u - 1 = n\cos s$ abit in $Cn\sin s$, ubi meminisse oportet esse $C = \sqrt{2fg(A+B)}$. Cum ergo sit

$$v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{Cnds\sin s}{Cn\sin s} = ds, \text{ erit } \varphi = s + \text{Const.} \quad \text{et} \quad Cdt = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2},$$

unde elicimus

$$\frac{Ct}{ff} = \frac{1}{1-nn}\int\frac{ds}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}.$$

Jam vero si $n < 1$ est

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s};$$

sin autem $n > 1$ erit

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\log\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Casu autem quo $n = 1$ reperitur

$$\frac{Ct}{ff} = \int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}.$$

In hac ergo resolutione loco binarum constantium $C$ et $D$ aliae duae $f$ et $n$ introducuntur, et omnia per novam variabilem, angulum scilicet $s$, ita definiuntur ut sit

$$\text{I. } \varphi = s + \text{Const.} \quad \text{II. } v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad dt\sqrt{2fg(A+B)} = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2}, \quad \text{sive}$$

$$\text{III. } t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2},$$

cujus solutionis usum et applicationem mox diligentius evolvemus.

67. **Scholion 1.** Binae aequationes differentio-differentiales in alias transformari possunt, ut anguli $\varphi$ sinus et cosinus elidantur. Uti enim $\text{II}.\cos\varphi - \text{I}.\sin\varphi$ praebet $2dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0$, ita $\text{I}.\cos\varphi + \text{II}.\sin\varphi$ suppeditat hanc aequationem

$$ddv - vd\varphi^2 = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2,$$

quarum illa per $v$ multiplicata et integrata statim praebet, ut vidimus, $vvd\varphi = Cdt$, qua aequabilis arearum descriptio continetur. Deinde posterior per $2dv$, prior vero per $2vd\varphi$ multiplicata in una summa praebent

$$2dv\,ddv + 2v\,dv\,d\varphi^2 + 2vv\,d\varphi\,dd\varphi = \frac{-4g(A+B)dv}{vv}dt^2,$$

quae integrata dat:

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = Ddt^2 + \frac{4g(A+B)}{v}dt^2,$$

ubi $\sqrt{(dv^2 + vv\,d\varphi^2)}$ exprimit elementum spatii $Bb$ tempusculo $dt$ descripti, inde autem ob $vv\,d\varphi^2 = \frac{CCdt^2}{vv}$ altera aequatio integralis ante inventa elicitur. Juvabit autem has aequationes pluribus modis tractare, ut deinceps, cum hujusmodi aequationes magis complicatae occurrent, subsidia inde peti queant. Licet etiam has duas aequationes

$$2dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0 \quad \text{et} \quad ddv - vd\varphi^2 + \frac{2g(A+B)}{vv}dt^2 = 0$$

hoc modo resolvere: Multiplicetur prior per $2v^3d\varphi$, ut habeatur $4v^3dv\,d\varphi^2 + 2v^4d\varphi\,dd\varphi = 0$, cujus integrale est $v^4d\varphi^2 = EEdt^2$, unde valor pro $dt^2$ in altera aequatione substitutus praebet

$$ddv - vd\varphi^2 + \frac{2g(A+B)vv\,d\varphi^2}{EE} = 0.$$

Cum autem hic adhuc sit $dt$ constans assumtum, ut ejus loco $d\varphi$ tanquam constans introducatur, multiplicetur per $2dv$, ut habeatur

$$2dv\,ddv - 2v\,dv\,d\varphi^2 + \frac{4g(A+B)vv\,dv}{EE}d\varphi^2 = 0$$

et loco $2dv\,ddv$ scribatur

$$dt^2d\cdot\frac{dv^2}{dt^2} = \frac{v^4d\varphi^2}{EE}d\cdot\frac{EEdv^2}{v^4d\varphi^2} = v^4d\cdot\frac{dv^2}{v^4}$$

et nunc elementum $d\varphi$ est constans. Statuatur porro $v = \frac{f}{u}$, erit $\frac{dv}{vv} = \frac{-du}{f}$ et $vdv = \frac{-ffdu}{u^3}$; sicque prodibit

$$\frac{f^4}{u^4}d\cdot\frac{du^2}{ff} + \frac{2ffdu\,d\varphi^2}{u^3} - \frac{4g(A+B)f^3du}{EEu^4}d\varphi^2 = 0,$$

$$\text{seu} \quad \frac{2du\,ddu}{u^4} + \frac{2du\,d\varphi^2}{u^3} - \frac{4fg(A+B)du}{EEu^4}d\varphi^2 = 0,$$

$$\text{vel} \quad 2du\,ddu + 2u\,du\,d\varphi^2 - \frac{4fg(A+B)du}{EE}d\varphi^2 = 0,$$

cujus integrale est

$$du^2 + uu\,d\varphi^2 - \frac{4fg\,(A+B)\,u\,d\varphi^2}{EE} = \frac{D\,d\varphi^2}{EE}.$$

unde colligitur

$$d\varphi = \frac{E\,du}{\sqrt{(D + 4fg\,(A+B)\,u - EEuu)}},$$

quae formula cum ante inventa congruit.

68. **Scholion 2.** Integralia formulae $\frac{ds}{(1+n\cos s)^2}$, quae prout fuerit $n < 1$, vel $n > 1$, vel $n = 1$ exhibuimus, per se sunt manifesta, uti ex differentiatione patet. Est ergo casu $n < 1$,

$$\int \frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Arc.cos} \frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)};$$

sin autem sit $n > 1$, erit

$$\int \frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}} \log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

quarum formularum utraque casu $n = 1$ fit inepta; hoc autem casu $n = 1$ habetur

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2},$$

ubi praecipue notari meretur, quod in integrali eadem denominatoris potestas occurrit, atque in differentiali, cum alias sit unitate inferior. Simili modo est

$$\int \frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s}$$

atque adeo in genere formula $\int \frac{ds}{(1+\cos s)^n}$ integrari potest, cum sit

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^n} = \frac{n-1}{2n-1} \int \frac{ds}{(1+\cos s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\sin s}{(1+\cos s)^n},$$

unde sequentia integralia deducuntur

$$\int \frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s},$$

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{\sin s\,(2+\cos s)}{3\,(1+\cos s)^2},$$

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^3} = \frac{\sin s\,(7+6\cos s+2\cos^2 s)}{3.5\,(1+\cos s)^3},$$

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^4} = \frac{\sin s\,(36+39\cos s+24\cos^2 s+6\cos^3 s)}{3.5.7\,(1+\cos s)^4},$$

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^5} = \frac{\sin s\,(249+300\cos s+252\cos^2 s+120\cos^3 s+24\cos^4 s)}{3.5.7.9\,(1+\cos s)^5},$$

etc.

quae evanescunt posito $s = 0$; ubi notandum si post integrationem ponatur $s = 90^0$, fore

$$\int \frac{ds}{(1+\cos s)^n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)} \text{ etc.},$$

quae series ad hanc progressionem infinitam reducitur

$$\frac{\sqrt{2}}{2n-1} + \frac{1.\sqrt{2}}{4(2n-3)} + \frac{1.3\sqrt{2}}{4.8(2n-5)} + \frac{1.3.5\sqrt{2}}{4.8.12(2n-7)} + \text{etc.}$$

Verum ad propositum revertentes, videamus hujusmodi curvam corpus $B$ sit descripturum, et qua lege per eam sit progressurum, ita ut ad datum quodvis tempus locus corporis assignari possit; quod fit cum distantiam $AB = v$, tum angulum $EAB = \varphi$ pro tempore $t$ definiendo.

69. **Problema.** Definire (fig. 176) naturam curvae $EB$, quam corpus $B$ motu suo ex $A$ spectato describit.

**Solutio.** Hic nullo respectu ad tempus habito, tantum ad relationem inter distantiam $AB = v$ et angulum $EAB = \varphi$ est spectandum, quae per angulum $s$ ita definiuntur, ut sit $\varphi = s + \alpha$ et $v = \frac{f}{1 + n\cos s}$. Statuantur coordinatae $AX = x$, $BX = y$, erit $vv = xx + yy$ et $x = v\cos\varphi$, $y = v\sin\varphi$, seu $\cos\varphi = \frac{x}{v}$, $\sin\varphi = \frac{y}{v}$. Cum ergo sit $s = \varphi - \alpha$, erit $\cos s = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{v}$, unde fit $v + nx\cos\alpha + ny\sin\alpha = f$, ideoque

$$vv = xx + yy = (f - nx\cos\alpha - ny\sin\alpha)^2,$$

unde patet curvam esse sectionem conicam, cujus natura et positio ex aequatione $v = \frac{f}{1 + n\cos(\varphi - \alpha)}$ facilius intelligitur. Ac primo quidem liquet, si sit $n = 0$, ob $v = f$, curvam fore circulum centro $A$ et radio $= f$ descriptum. Deinde si $n$ sit numerus quicunque positivus, angulus $\varphi = \alpha$ dat minimam distantiam curvae a puncto $A$, quae est $= \frac{f}{1+n}$, ubi est $dv = 0$ ob $dv = \frac{nfd\varphi\sin(\varphi - \alpha)}{(1 + n\cos(\varphi - \alpha))^2}$. Simili modo sumendo $\varphi - \alpha = 180^0$, prodit alter locus, ubi recta $AB$ ad curvam est normalis, estque tum $v = \frac{f}{1-n}$, unde patet si sit $n < 1$, curvam fore ellipsin; si $n = 1$, parabolam, ac si $n > 1$, hyperbolam. Tum vero quia distantia $AB = v$ per coordinatas rationaliter exprimitur, punctum $A$ in altero foco sectionis conicae est situm, cujus bini habentur vertices, quorum alterius a foco $A$ distantia est $= \frac{f}{1+n}$, alterius $= \frac{f}{1-n}$, ita ut totus axis transversus sit $= \frac{2f}{1-nn}$, ideoque ejus semissis $= \frac{f}{1-nn}$, unde focus a centro sectionis distat intervallo $= \frac{nf}{1-nn}$; semiaxis ergo conjugatus erit $= \frac{f}{\sqrt{(1-nn)}}$, ideoque semiparameter $= f$. Axis denique transversus ad rectam fixam $AE$ inclinatur angulo $= \alpha$, seu sumto $EAB = \alpha$, is in rectam $AB$ cadet.

70. **Coroll. 1.** Curva ergo a corpore $B$ circa $A$ descripta semper est sectio conica, et cum sumto angulo $\varphi = \alpha$, corpus $B$ transeat per verticem foco $A$ propiorem, post singulas revolutiones completas, ubi $\varphi = \alpha + 360^0$, $\varphi = \alpha + 2.360^0$ etc. eodem revertitur, ita ut orbita haec quiescens sit censenda.

71. **Coroll. 2.** Cum valor numeri $n$ speciem sectionis conicae ita determinet, ut $n = 0$ det circulum, $n < 1$ ellipsin, $n = 1$ parabolam, et $n > 1$ hyperbolam, idem intelligendum est, si $n$ sit numerus negativus. In genere enim idem numerus $n$, sive sit positivus, sive negativus, eandem speciem declarat, quia scribendo $s + 180^0$ loco $s$ alter casus ad alterum reducitur.

72. **Scholion.** Praeter denominationes hic adhibitas notandae sunt sequentes ab Astronomis receptae:

I. Axis transversus sectionis conicae vocatur etiam *linea absidum*, ejusque terminus alter foco $A$ vicinior absis *ima*, alter remotior absis *summa*.

II. Distantia foci $A$ a centro sectionis conicae per semiaxem transversum divisa, seu binorum focorum distantia per axem transversum ipsum divisa, vocatur *excentricitas* orbitae, quae ergo nostro casu numero $n$ exprimitur.

III. Angulus ad focum $A$, quem recta $AB$ cum linea absidum facit, vocari solet *anomalia vera*, vulgo quidem hic angulus ad absidem summam refertur. Nihil autem impedit, quominus ad absidem imam referamus, quandoquidem corpus $B$, si orbita fuerit vel parabola vel hyperbola, nunquam ad absidem summam pervenit, semper autem per imam transit. (Fig. 177) Ita si $C$ sit absis ima, corpusque ex $C$ ad $B$ pervenerit, angulum $CAB$ vocabo anomaliam veram, quam ergo in calculo nostro littera $s$ denotat.

IV. Angulus autem $EAB$ a recta quadam fixa $AE$ computatus vocari solet *longitudo*, quae hic nobis littera $\varphi$ exprimitur. Simili modo angulus $EAC$ est longitudo absidis imae $C$, unde patet longitudinem $\varphi$ inveniri, si ad anomaliam veram $s$ longitudo absidis imae $EAC$ addatur.

His praemissis ipsam motus rationem, prout orbita fuerit vel circulus, vel ellipsis, vel parabola, vel hyperbola, investigemus.

**73. Problema.** Si orbita, in qua corpus $B$ circa $A$ revolvi videtur, fuerit circulus, definire rationem motus.

**Solutio.** Erit ergo excentricitas $n=0$, et radius circuli simulque perpetua distantia $AB=v=f$, unde si ponatur tempus, quo angulus $EAB=\varphi$ percurritur, $=t$, ob $ds=d\varphi$, habebitur $t=\frac{f\varphi\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}$; unde cum tempus sit ipsi angulo $\varphi$, ideoque et arcui $EB=f\varphi$ proportionale, motus erit uniformis, ejusque celeritas $=\frac{f\varphi}{t}=\sqrt{\frac{2g(A+B)}{f}}$, quae propterea est directe ut $\sqrt{(A+B)}$ et reciproce ut $\sqrt{f}$. Ac si tempus, quo totus circulus percurritur, quodque tempus *periodicum* vocatur, ponatur $=T$, ob $\varphi=2\pi$, erit

$$T=\frac{2\pi f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{(A+B)}}.$$

Ergo ob $\frac{2\pi}{\sqrt{2g}}$ quantitatem constantem, tempus periodicum est directe in ratione sesquiplicata radii circuli $f$ et reciproce in ratione subduplicata summae massarum $A+B$ utriusque corporis. Tempore ergo periodico cognito $T$, ob $\frac{t}{T}=\frac{\varphi}{2\pi}$, quovis tempore $t$ percurritur arcus $\varphi$, ut sit $\varphi=\frac{2\pi t}{T}$, unde ad quodvis tempus $t$ locus corporis $B$, ejus scilicet longitudo $EAB$ facile colligitur. Pro mensura autem temporis absoluta definienda, consideretur ea corporum $A$ et $B$ distantia, in qua vis eorum attractrix aequalis est gravitati, quae distantia sit $=d$, eritque $\frac{A+B}{dd}=1$, seu $A+B=dd$; ubique ergo summa massarum $A+B$ per ejusmodi constantem multiplicari est censenda, ut fiat productum $=dd$. Hinc ergo tempus $t$ in minutis secundis exprimendo fiet $t=\frac{f\varphi\sqrt{f}}{d\sqrt{2g}}$, ideoque totum tempus periodicum $T=\frac{2\pi f\sqrt{f}}{d\sqrt{2g}}$ min. sec.

74. **Coroll. 1.** Ex dato ergo tempore periodico $T$ pro quovis tempore dato $t$ angulus interea descriptus $\varphi$ per hanc analogiam facile definitur $T:t = 360^0:\varphi$; unde pro diebus, horis, minutis et secundis motus angularis $\varphi$ assignatur.

75. **Coroll. 2.** Ex tempore etiam periodico $T$ et radio circuli descripti $f$, determinatur distantia corporum $d$, in qua eorum vis attractrix, qua $B$ ad $A$ urgetur, aequalis est ponderi corporis $B$, cum sit $d = \frac{2\pi f\sqrt{f}}{T\sqrt{2g}}$, ubi perpetuo est tenendum, tempora in minutis secundis exprimi oportere.

76. **Coroll. 3.** Si idem corpus $B$ modo in majori modo in minori distantia circa corpus $A$ in circulo revolvatur, erunt tempora periodica in ratione sesquiplicata radiorum, seu quadrata temporum periodicorum erunt ut cubi radiorum.

77. **Problema.** Si orbita, in qua corpus $B$ ex $A$ spectatum moveri videtur, fuerit ellipsis, rationem motus definire.

**Solutio.** Erit ergo numerus $n$, quo excentricitas exprimitur, unitate minor, ac si ponatur semiparameter $= f$, anomalia vera seu angulus $CAB = s$, erit absidis imae $C$ distantia $AC = \frac{f}{1+n}$, semiaxis transversus $= \frac{f}{1-nn}$, et semiaxis conjugatus $= \frac{f}{\sqrt{(1-nn)}}$. Statuatur autem longitudo absidis imae $C$ seu angulus $EAC = \alpha$, a directione fixa $AE$ computata, a qua corpus $B$ egressum elapso tempore $= t$ pervenerit in $B$, ut sit longitudo ejus $EAB = \varphi$, erit $\varphi = \alpha + s$, ac habebimus has aequationes: Posita distantia $AB = v$:

$$v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\right),$$

quae formula proprie indicat tempus, quo corpus ab abside ima $C$ in $B$ usque pervenit, anomaliamque veram $CAB = s$ absolvit, quod tempus primo definiri convenit, cum deinceps ex eo tempus pro angulo $EAB = \varphi$ haud difficulter concludatur. Cum igitur posito $s = 0$ fiat $t = 0$, statuamus $s = 180^0$, erit tempus ab abside ima ad summam

$$= \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}} \cdot \frac{\pi}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}},$$

cui iterum aequale fit tempus a summa ad imam, ita ut totum tempus periodicum, quod ponatur $= T$, futurum sit

$$= \frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}},$$

quo tempore integra revolutio seu anomalia vera $= 360^0$ absolvitur. Hinc si motus angularis esset aequabilis tempore $t$, conficeretur angulus $= \tau$, ut sit

$$\frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}} : t = 360^0 : \tau, \quad \text{seu} \quad t = \frac{\tau f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}};$$

ideoque ex cognito tempore periodico $T$, si motus esset aequabilis ad quodvis tempus elapsum $t$,

postquam corpus absidem imam $C$ fuerit transgressum, angulus interea confectus $\tau = \frac{360\,t}{T}$ assignari potest, quem ergo loco temporis $t$ in calculum introducamus et inquiramus, quantum angulus interea actu confectus, seu anomalia vera $CAB = s$ ab eo discrepet. Pro $t$ autem illo valore substituto habebimus

$$\frac{\tau f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}} = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\right),$$

seu
$$\tau = \text{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}.$$

Ponatur $\text{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} = \sigma$, erit

$$\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} = \cos\sigma \quad \text{et} \quad \sin\sigma = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}, \quad \text{hincque}$$

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1-n\cos\sigma} \quad \text{et} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma} \quad \text{atque} \quad \tau = \sigma - n\sin\sigma,$$

unde pro quovis angulo $\tau$ tempori $t$ proportionali haud difficulter colligitur angulus $\sigma$, hincque porro anomalia vera $s$, cui si addatur longitudo absidis imae $EAC = \alpha$, obtinebitur longitudo quaesita seu angulus $EAB = \varphi$; distantia autem $AB = v$ ope formulae $v = \frac{f}{1+n\cos s}$ facillime assignatur.

78. **Coroll. 1.** Cum tempus periodicum sit

$$T = \frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}}$$

semiaxis autem transversus orbitae $= \frac{f}{1-nn}$, qui si dicatur $= a$, erit tempus periodicum $T = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{2g(A+B)}}$, quod ergo est directe in ratione sesquiplicata axis transversi, et reciproce in subduplicata summae massarum.

79. **Coroll. 2.** Simili modo si loco semiparametri $f$ introducatur semiaxis transversus $a = \frac{f}{1-nn}$, habebitur pro tempore quocunque $t$

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\text{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}\right),$$

$$\text{seu} \quad t = \frac{T}{2\pi}(\sigma - n\sin\sigma) \quad \text{posito} \quad \sigma = \text{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}.$$

80. **Coroll. 3.** Cognito ergo tempore periodico $T$ et momento, quo corpus per absidem imam transiit, pro tempore inde elapso $= t$, quaeratur primo angulus $\tau = \frac{t}{T}\cdot 360^0$, hincque porro angulo $\sigma$, ut sit $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quo invento pro anomalia vera $s$ habebitur

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1-n\cos\sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma},$$

ac denique longitudo $\varphi = \alpha + s$.

81. **Scholion 1.** Hic iterum novae appellationes in Astronomia occurrunt quas probe notari convenit:

I. Angulus ille tempori proportionalis $\tau$, qui pro revolutione integra abit in 360°, vocatur *anomalia media*, quae ergo est angulus, quem corpus ab abside ima digressum, si aequabiliter circa punctum $A$ eodem tempore periodico revolveretur, dato tempore esset confecturum.

II. Differentia inter anomaliam mediam $\tau$ et veram $s$ vocari solet *aequatio centri*, vel etiam *prostaphaeresis*, quae igitur est nulla casibus $\tau = 0$, $\tau = 180^0$, $\tau = 360^0$ etc., hoc est quoties anomalia media in lineam absidum incidit.

III. Angulus ille subsidiarius $\sigma$, cujus relatio tam ad anomaliam mediam $\tau$ quam ad veram $s$ est assignata, vocari solet *anomalia excentrica.* Ex qua etiam distantia $AB = v$ expedite definitur. Cum enim sit $1 + n\cos s = \frac{1-nn}{1-n\cos\sigma}$ et $\frac{f}{1-nn} = a$, erit $v = \frac{f}{1+n\cos s} = a(1 - n\cos\sigma)$, ideoque distantia absidis imae a puncto $A = a(1-n)$, et summae $= a(1+n)$.

82. **Scholion 2.** Haec relatio inter anomalias veram, mediam et excentricam, quam per calculum eruimus, ita geometrice doceri potest: Sit (fig. 178) $AVB$ semiellipsis super axe transverso $AB$ descripta, cujus centrum in $C$ et focus in $F$, positoque semiaxe $CA = a$ et excentricitate $= n$, erit $CF = na$; tum super eodem axe constituatur semicirculus $ANB$. Sumta jam in ellipsi anomalia vera seu angulo $AFV = s$, ei respondeat in circulo anomalia media seu angulus $ACM = \tau$, atque necesse est, ut sector circuli $ACM$ sit ad aream semicirculi, ut sector ellipticus $AFV$ ad aream semiellipsis. Per $V$ ducatur ad axem $AB$ perpendicularis $PVN$ circulum secans in $N$, ductaque recta $FN$, est area elliptica $AFV$ ad aream circularem $AFN$, ut semiellipsis area ad aream semicirculi, ex quo sectorem circularem $ACM$ aequalem esse oportet areae circulari $AFN$. Unde notata rectarum $FN$ et $CM$ intersectione $O$, trilineum mixtilineum $MON$ aequale esse debet triangulo rectilineo $COF$. Addatur utrinque triangulum $CON$ ducto radio $CN$, ut fiat sector $CMN$ aequalis triangulo $CFN$. Nunc primo patet angulum $ACN$ esse anomaliam excentricam $\sigma$, nam hinc fit

$$PN = a\sin\sigma \quad \text{et} \quad PV = a\sin\sigma\sqrt{(1-nn)},$$

tum vero est $CP = a\cos\sigma$ et $FP = a(\cos\sigma - n)$, hincque $FV = a(1 - n\cos\sigma)$; unde fit uti invenimus

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma}, \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma}.$$

Porro ob angulum $MCN = \sigma - \tau$, erit sector $MCN = \frac{1}{2}aa(\sigma - \tau)$, area vero trianguli $CFN = \frac{1}{2}naa\sin\sigma$, quibus valoribus aequatis fit $\sigma - \tau = n\sin\sigma$ seu $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quae aequalitas cum supra inventa congruit.

83. **Problema.** Data excentricitate orbitae ellipticae et anomalia media, invenire anomaliam excentricam, indeque anomaliam veram et aequationem centri seu prostaphaeresin.

**Solutio.** Posita excentricitate $= n$, et anomalia media $= \tau$, inde primo definiatur anomalia excentrica $\sigma$ ope aequationis $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quod commodissime per approximationem praestatur. Ponamus enim pro $\sigma$ valorem jam prope verum esse inventum, qui sit $= \lambda$, et praebeat $\lambda - n\sin\lambda = \tau + \delta$, ut error sit valde parvus $\delta$, ac statuamus $\sigma = \lambda + \omega$, unde ob $\omega$ valde parvum, erit $\sin\sigma = \sin\lambda + \omega\cos\lambda$,

ideoque $\tau = \lambda + \omega - n\sin\lambda - n\omega\cos\lambda = \tau + \delta + \omega - n\omega\cos\lambda$. Erit ergo $\omega = \frac{-\delta}{1 - n\cos\lambda}$, ac propterea $\sigma = \lambda - \frac{\delta}{1 - n\cos\lambda}$. Si valor $\lambda$ non ita prope ad verum accedat, ut haec approximatio sufficiat, hinc saltem multo propior colligitur, qui loco $\lambda$ positus multo exactius ad veritatem perducet. Ceterum si anomaliae mediae $\tau$ convenire reperta fuerit anomalia excentrica $\sigma$, anomaliae mediae tantillum majori $\tau + d\tau$ conveniet anomalia excentrica $\sigma + d\sigma$, ut sit $d\tau = d\sigma - nd\sigma\cos\sigma$, ideoque $d\sigma = \frac{d\tau}{1 - n\cos\sigma}$, unde facile ad singulos gradus anomaliae mediae $\tau$ assignabitur anomalia excentrica $\sigma$. Inventa autem anomalia excentrica $\sigma$, anomalia vera $s$ definiri debet ex hac formula

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1 - nn)}}{1 - n\cos\sigma},$$

quae ut per logarithmos expediri posset, quaeratur primo angulus $\omega$, ut sit $\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\sigma}{\sqrt{(1 - nn)}}$, quo invento erit $\sin(s - \omega) = n\sin\omega$; seu quaeratur angulus $\psi$, ut sit $\sin\psi = n\sin\omega$, habebiturque $s = \omega + \psi$. Cum enim inde fiat $\sin s\cos\omega - \cos s\sin\omega = n\sin\omega$, erit

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin s}{n + \cos s} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\sigma = \frac{\sin s\sqrt{(1 - nn)}}{n + \cos s},$$

quae convenit cum formulis supra datis. Hinc denique erit aequatio centri $= s - \tau$ ad anomaliam mediam addenda, ut prodeat anomalia vera.

Ceterum notasse juvabit esse per formulas differentiales $ds = \frac{d\sigma\sqrt{(1 - nn)}}{1 - n\cos\sigma}$ et $d\sigma = \frac{ds\sqrt{(1 - nn)}}{1 + n\cos s}$. Quare cum sit $d\tau = d\sigma(1 - n\cos\sigma)$, erit

$$d\tau\, ds = d\sigma^2\sqrt{(1 - nn)} = \frac{ds^2(1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n\cos s)^2}, \quad \text{ideoque} \quad d\tau = \frac{ds(1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n\cos s)^2}.$$

Unde si aequatio centri $s - \tau$ dicatur $= \varepsilon$, erit

$$d\varepsilon = ds - \frac{ds(1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n\cos s)^2}.$$

84. **Coroll. 1.** Si anomalia media $\tau$ evanescit, etiam fit anomalia excentrica $\sigma = 0$, unde quoque anomalia vera $s$ et aequatio centri evanescit. Simili modo si anomalia media $\tau$ ponatur $= 180^0$, erit etiam $\sigma = 180^0$ et $s = 180^0$, ita ut etiam hoc casu aequatio centri evanescat.

85. **Coroll. 2.** Si anomalia media $\tau$ fuerit valde parva, erit etiam excentrica $\sigma$ valde parva et $\sigma = \frac{\tau}{1 - n}$, ob $\sin\sigma = \sigma$, hincque

$$ds = \frac{d\sigma\sqrt{(1 - nn)}}{1 - n} = \frac{d\tau\sqrt{(1 - nn)}}{(1 - n)^2}, \quad \text{unde} \quad s = \frac{\tau\sqrt{(1 + n)}}{(1 - n)\sqrt{(1 - n)}}$$

et aequatio centri $s - \tau = \tau\left(-1 + \frac{\sqrt{(1 + n)}}{(1 - n)\sqrt{(1 - n)}}\right)$, ideoque $s > \tau$.

86. **Coroll. 3.** Crescente anomalia media $\tau$ aequatio centri $s - \tau$ tamdiu crescit, quoad fiat

$$1 - \frac{(1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n\cos s)^2} = 0,$$

quo casu est maxima; tum iterum decrescit, donec posito $\tau = 180^0$ plane evanescat.

87. **Coroll. 4.** Aequatio centri ergo $s - \tau$ maxima evadit si

$$1 + n\cos s = (1 - nn)^{\frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad \cos s = \frac{(1-nn)^{\frac{3}{4}} - 1}{n},$$

unde fit

$$\cos\sigma = \frac{1-(1-nn)^{\frac{1}{4}}}{n} \quad \text{et} \quad \tau = \sigma - n\sin\sigma,$$

quae erit anomalia media, cui maxima aequatio centri convenit. Pro ea ergo erit $s > 90^0$, $\sigma < 90^0$, multoque magis $\tau < 90$.

88. **Coroll. 5.** Sumta anomalia media $\tau$ negativa, fiunt quoque anomaliae $\sigma$ et $s$ negativae ejusdem valoris, unde binis anomaliis mediis $\tau$ et $360^0 - \tau$ par respondet aequatio centri, quae autem priori casu est addenda, posteriori subtrahenda.

89. **Scholion.** Dum ergo corpus ab abside ima ad summam progreditur, aequatio centri est positiva, seu anomaliae mediae addenda, et quidem ab ima usque ad certum terminum continuo crescit, unde ad absidem summam usque iterum decrescit, ubi evanescit. Tum vero ab abside summa ad imam progrediendo per pares aequationes anomalia media est minuenda, unde sufficit aequationes centri nosse pro transitu ab abside ima ad summam. Si enim anomaliae mediae $\tau$ conveniat aequatio centri $\varepsilon$, anomaliae mediae $360^0 - \tau$ conveniet aequatio centri $-\varepsilon$. Modus autem hic expositus ex data anomalia media computandi anomaliam veram commodior reddi potest, si excentricitas fuerit valde parva, id quod plerumque usu venit, unde hunc casum seorsim evolvisse juvabit.

90. **Problema.** Si excentricitas $n$ fuerit valde parva, pro data anomalia media definire aequationem centri et anomaliam veram.

**Solutio.** Primo ex anomalia media $\tau$ colligitur anomalia excentrica $\sigma$ ope aequationis $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, unde erit

$$\sigma = \tau + n\sin(\tau + n\sin(\tau + n\sin(\tau + n\sin(\tau + \text{etc.},$$

vel etiam ope hujus formulae

$$\sigma = \tau + (n - \tfrac{1}{8}n^3)\sin\tau + (\tfrac{1}{2}nn - \tfrac{1}{6}n^4)\sin 2\tau + \tfrac{3}{8}n^3\sin 3\tau + \tfrac{1}{3}n^4\sin 4\tau,$$

ubi potestates ipsius $n$ quarta altiores sunt neglectae. Inventa autem anomalia excentrica $\sigma$, ex ea anomalia vera $s$ definitur hac aequatione $ds = \frac{d\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma}$, unde fit

$$ds = d\sigma(1 + n\cos\sigma + n^2\cos^2\sigma + n^3\cos^3\sigma + n^4\cos^4\sigma + n^5\cos^5\sigma + \text{etc.})\sqrt{(1-nn)}.$$

Cum igitur sit

$$\cos\sigma = \cos\sigma$$

$$\cos^2\sigma = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\sigma$$

$$\cos^3\sigma = \tfrac{3}{4}\cos\sigma + \tfrac{1}{4}\cos 3\sigma$$

$$\cos^4\sigma = \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8}\cos 2\sigma + \tfrac{1}{8}\cos 4\sigma$$

$$\cos^5\sigma = \tfrac{10}{16}\cos\sigma + \tfrac{5}{16}\cos 3\sigma + \tfrac{1}{16}\cos 5\sigma$$

etc.

erit colligendis his terminis:

$$ds = (1 - nn)^{\frac{1}{2}} d\sigma \begin{cases} + (1 + \frac{1}{2}nn + \frac{3}{8}n^4 + \text{etc.}) \\ + (n + \frac{3}{4}n^3 + \frac{10}{16}n^5 + \text{etc.}) \cos\sigma \\ + (\frac{1}{2}nn + \frac{4}{8}n^4 + \text{etc.}) \cos 2\sigma \\ + (\frac{1}{4}n^3 + \frac{5}{16}n^5 + \text{etc.}) \cos 3\sigma \\ + (\frac{1}{8}n^4 + \text{etc.}) \cos 4\sigma \\ + \text{etc.} \end{cases}$$

Est vero $$1 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{3}{8}n^4 + \text{etc.} = (1 - nn)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{et} \quad n + \tfrac{3}{4}n^3 + \tfrac{10}{16}n^5 + \text{etc.} = \frac{2}{n}\left((1 - nn)^{-\frac{1}{2}} - 1\right),$$

ita ut pro primis duobus terminis habeatur

$$ds = d\sigma\left(1 + \frac{2}{n}(1 - \sqrt{(1-nn)}) \cos\sigma\right), \quad \text{ideoque} \quad s = \sigma + \frac{2}{n}(1 - \sqrt{(1-nn)}) \sin\sigma.$$

Quo autem hanc seriem ulterius continuare queamus, ponamus

$$ds = d\sigma(1 + A\cos\sigma + B\cos 2\sigma + C\cos 3\sigma + D\cos 4\sigma + E\cos 5\sigma + \text{etc.})$$

et cum sit $\frac{ds}{d\sigma} - \frac{nds}{d\sigma}\cos\sigma = \sqrt{(1 - nn)}$, ob $\cos\sigma\cos\nu\sigma = \frac{1}{2}\cos(\nu - 1)\sigma + \frac{1}{2}\cos(\nu + 1)\sigma$ fiet

$$\left.\begin{array}{llllll} 1 & + A\cos\sigma & + B\cos 2\sigma & + C\cos 3\sigma & + D\cos 4\sigma & + E\cos 5\sigma + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2}nA & - n & -\frac{1}{2}nA & -\frac{1}{2}nB & -\frac{1}{2}nC & -\frac{1}{2}nD \\ & -\frac{1}{2}nB & -\frac{1}{2}nC & -\frac{1}{2}nD & -\frac{1}{2}nE & -\frac{1}{2}nF \end{array}\right\} = \sqrt{(1 - nn)}$$

unde coefficientes sequenti modo determinantur

$$A = \frac{2}{n}(1 - \sqrt{(1 - nn)}) \quad \text{seu} \quad A = 2\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right),$$

$$B = \frac{2}{n}(A - n) \quad \text{seu} \quad B = 2\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2,$$

$$C = \frac{1}{n}(2B - nA) \quad \text{seu} \quad C = 2\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^3,$$

$$D = \frac{1}{n}(2C - nB) \quad \text{seu} \quad D = 2\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^4,$$

$$E = \frac{1}{n}(2D - nC) \quad \text{seu} \quad E = 2\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^5,$$

$$F = \frac{1}{n}(2E - nD) \quad \text{seu} \quad F = 2\left(\frac{1 - \sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^6,$$

etc.

Ponatur brevitatis gratia $\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}=m$, erit

$$ds = d\sigma\,(1 + 2m\cos\sigma + 2m^2\cos 2\sigma + 2m^3\cos 3\sigma + 2m^4\cos 4\sigma + \text{etc.})$$

hincque integrando

$$s = \sigma + \tfrac{2}{1}m\sin\sigma + \tfrac{2}{2}m^2\sin 2\sigma + \tfrac{2}{3}m^3\sin 3\sigma + \tfrac{2}{4}m^4\sin 4\sigma + \text{etc.}$$

Cum nunc sit $\sigma = \tau + n\sin\sigma$, erit aequatio centri

$$s - \tau = (2m + n)\sin\sigma + \tfrac{2}{2}m^2\sin 2\sigma + \tfrac{2}{3}m^3\sin 3\sigma + \tfrac{2}{4}m^4\sin 4\sigma + \text{etc.}$$

Potest etiam anomalia media $\tau$ per veram $s$ simili modo exprimi; cum enim sit

$$d\tau = \frac{ds\,(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2},$$

erit $$d\tau = (1-nn)^{\frac{3}{2}}\,ds\,(1 - 2n\cos s + 3n^2\cos^2 s - 4n^3\cos^3 s + 5n^4\cos^4 s - \text{etc.}),$$

cujus seriei, si potestates cosinus $s$ ad cosinus multiplorum angulorum revocentur, prodit terminus constans

$$1 + \tfrac{3}{2}n^2 + \frac{3.5}{2.4}n^4 + \text{etc.} = (1-nn)^{-\frac{3}{2}}$$

et coefficiens ipsius $\cos s$ fit

$$= -2n\,(1-nn)^{-\frac{3}{2}}.$$

Quare ponamus

$$d\tau = ds\,(1 - A\cos s + B\cos 2s - C\cos 3s + D\cos 4s - \text{etc.}),$$

quae series per $(1+n\cos s)^2 = 1 + \frac{1}{2}nn + 2n\cos s + \frac{1}{2}nn\cos 2s$ multiplicata dat

$$\begin{array}{lllll}
1 + \frac{1}{2}nn & -A(1+\frac{1}{2}nn)\cos s & +B(1+\frac{1}{2}nn)\cos 2s & -C(1+\frac{1}{2}nn)\cos 3s & +D(1+\frac{1}{2}nn)\cos 4s\ \text{etc.} \\
-An & +2n & -An & +Bn & -Cn \\
+\frac{1}{4}Bnn & +Bn & -Cn & +Dn & -En \\
 & -\frac{1}{4}Ann & +\frac{1}{2}nn & -\frac{1}{4}Ann & +\frac{1}{4}Bnn \\
 & -\frac{1}{4}Cnn & +\frac{1}{4}Dnn & -\frac{1}{4}Enn & +\frac{1}{4}Fnn
\end{array}$$

aequari debet ipsi $(1-nn)^{\frac{3}{2}}$. At est $A = 2n$, unde fit primo

$$1 + \tfrac{1}{2}nn - 2nn + \tfrac{1}{4}Bnn = (1-nn)^{\frac{3}{2}},$$

ideoque

$$B = \frac{4(1-nn)^{\frac{3}{2}} - 4 + 6nn}{nn} = \tfrac{3}{2}nn + \tfrac{1}{4}n^4,$$

$$C = \frac{4Bn - 4A - 3Ann + 8n}{nn} = \frac{16(1-nn)^{\frac{3}{2}} - 16 + 24nn - 6n^4}{n^3},$$

$$D = \frac{4Cn - 4B - 2Bnn + 4An - 2nn}{nn} = \frac{8(6-nn)(1-nn)^{\frac{3}{2}} - 48 + 80nn - 30n^4}{n^4},$$

$$E = \frac{4Dn - 4C - 2Cnn + 4Bn - Ann}{nn},$$

$$F = \frac{4En - 4D - 2Dnn + 4Cn - Bnn}{nn}.$$

Alio autem modo reperitur

$$A = 2n; \quad B = 2(1 + 2\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2; \quad C = \frac{4B - 3An}{n}; \quad D = \frac{6C - 4Bn}{2n};$$

$$E = \frac{8D - 5Cn}{3n}; \quad F = \frac{10E - 6Dn}{4n}.$$

Hincque coëfficientes quaesiti sequenti modo exprimi invenirentur:

$$A = 2(1 + \sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right),$$

$$B = 2(1 + 2\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2,$$

$$C = 2(1 + 3\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^3,$$

$$D = 2(1 + 4\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^4,$$

etc.

quibus valoribus inventis erit

$$\tau = s - A\sin s + \tfrac{1}{2}B\sin 2s - \tfrac{1}{3}C\sin 3s + \tfrac{1}{4}D\sin 4s - \tfrac{1}{5}E\sin 5s + \text{etc.},$$

ita ut aequatio centri sit futura

$$s - \tau = A\sin s - \tfrac{1}{2}B\sin 2s + \tfrac{1}{3}C\sin 3s - \tfrac{1}{4}D\sin 4s + \tfrac{1}{5}E\sin 5s - \text{etc.}$$

91. **Coroll. 1.** Si $n$ tam sit parvum, ut potestates omnes rejicere liceat, erit $\sigma = \tau + n\sin\tau$, et ob $m = \frac{1}{2}n$, fit $s = \sigma + n\sin\sigma = \tau + 2n\sin\tau$, ideoque aequatio centri $s - \tau = 2n\sin\tau$; quae ergo est maxima $= 2n$, sumta anomalia media $\tau = 90^0$.

92. **Coroll. 2.** Si tantum potestates secunda superiores rejicere liceat, ob $\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n} = \frac{1}{2}n$, erit $A = 2n$, $B = \frac{3}{2}nn$, $C = 0$ etc., unde fit $\tau = s - 2n\sin s + \frac{3}{4}nn\sin 2s$; hincque per conver-

sionem reperitur $s = \tau + 2n\sin\tau + \frac{5}{4}nn\sin 2\tau$, seu aequatio centri $s - \tau = 2n\sin\tau + \frac{5}{4}nn\sin 2\tau$, quae ergo est maxima si $\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}n$, fitque $= 2n$.

93. **Coroll. 3.** Si potestates ipsius $n$ quarta altiores tantum rejicere liceat, erit

$$A = 2n - \tfrac{1}{2}n^3,\quad B = \tfrac{3}{2}nn - \tfrac{1}{2}n^4,\quad C = n^3,\quad D = \tfrac{5}{8}n^4,\quad E = 0,\ \text{etc.}$$

ideoque habebitur

$$\tau = s - (2n - \tfrac{1}{2}n^3)\sin s + (\tfrac{3}{4}nn - \tfrac{1}{4}n^4)\sin 2s - \tfrac{1}{3}n^3\sin 3s + \tfrac{5}{32}n^4\sin 4s,$$

unde per conversionem eruitur

$$s = \tau + (2n - \tfrac{3}{4}n^3)\sin\tau + (\tfrac{5}{4}nn - \tfrac{11}{12}n^4)\sin 2\tau + \tfrac{13}{12}n^3\sin 3\tau + \tfrac{103}{96}n^4\sin 4\tau.$$

94. **Coroll. 4.** Aequatio centri ergo fit maxima ubi est

$$(2n - \tfrac{3}{4}n^3)\cos\tau + (\tfrac{5}{2}nn - \tfrac{11}{6}n^4)\cos 2\tau + \tfrac{13}{4}n^3\cos 3\tau + \tfrac{103}{24}n^4\cos 4\tau = 0,$$

unde colligitur

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \tfrac{5}{4}n - \tfrac{25}{384}n^3,$$

ita ut haec anomalia media minor sit angulo recto. Ipsa autem aequatio maxima ex formula generali supra data facilius eruetur.

95. **Scholion.** Scilicet cum ex § 87 pro aequatione maxima sit proxime

$$\cos\sigma = \frac{1 - (1 - nn)^{\frac{1}{4}}}{n} = \tfrac{1}{4}n + \tfrac{3}{32}n^3,$$

erit $\quad \sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}n - \frac{37}{384}n^3 \quad$ et $\quad \sin\sigma = 1 - \frac{1}{32}nn - \frac{49}{2048}n^4$.

Deinde vero est

$$\cos s = \frac{(1 - nn)^{\frac{3}{4}} - 1}{n} = -\tfrac{3}{4}n - \tfrac{3}{32}n^3,$$

unde $\quad s = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}n + \frac{21}{128}n^3 \quad$ et $\quad \tau = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}n - \frac{25}{384}n^3$,

ideoque aequatio maxima $\qquad s - \tau = 2n + \frac{11}{48}n^3$.

Ceterum methodus priori loco exposita, qua primo anomaliam excentricam $\sigma$ investigavimus, commodius adhiberi videtur, cum ejus ope appropinquatio facile longius extendi queat, quandoquidem seriei, qua $s$ per $\sigma$ exprimitur, lex progressionis est manifesta; ac si accuratius $\sigma$ per $\tau$ exprimere velimus, reperiemus

$$\sigma = \tau + (n - \tfrac{1}{8}n^3 + \tfrac{1}{192}n^5)\sin\tau + (\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^4)\sin 2\tau + (\tfrac{3}{8}n^3 - \tfrac{41}{192}n^5)\sin 3\tau + \tfrac{1}{3}n^4\sin 4\tau + \tfrac{21}{64}n^5\sin 5\tau,$$

ubi tamen legem progressionis perspicere non licet.

96. **Problema.** Si curva, in qua corpus $B$ circa $A$ moveri cernitur, fuerit parabola, ad datum tempus assignare locum, ubi corpus $B$ versabitur.

**Solutio.** Denotante $f$ semiparametrum parabolae, ut distantia absidis imae $C$ a foco $A$ sit $AC = \frac{1}{2}f$; si tempore $t$ corpus ex $C$ in $B$ usque progrediatur, confecta anomalia vera $CAB = s$, erit distantia $AB = v = \frac{f}{1+\cos s}$, et si $A$ et $B$ corporum massas denotent, invenimus

$$t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\cdot\frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}.$$

Quo temporis rationem facilius tenere possimus, consideremus casum, quo corpus $E$ circa aliud corpus $F$ circulum uniformiter describit, cujus radius $= e$, atque tempore eodem $t$ angulus descriptus sit $= \tau$, qui loco ipsius temporis $t$ introducatur. Cum igitur sit $t = \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{2g(E+F)}}\cdot\tau$, statuamus brevitatis gratia $\frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\cdot\sqrt{\frac{A+B}{E+F}} = m$, ut obtineamus $m\tau = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}$, unde ex dato angulo $\tau$ definiri oportet angulum $s$, id quod resolutionem aequationis cubicae postulat. Praestabit autem tabulam computare, quae ad singulos gradus anguli $s$ exhibeat valorem formulae $\frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}$, ex qua deinceps facile erit pro dato $m\tau$ respondentem anomaliam veram $s$ colligere. Ad hunc calculum sublevandum notetur esse

$$m\tau = \frac{\left(1+2\cos^2\frac{1}{2}s\right)\sin\frac{1}{2}s}{6\cos^3\frac{1}{2}s} = \frac{\sin\frac{1}{2}s}{3\cos\frac{1}{2}s} + \frac{\sin\frac{1}{2}s}{6\cos^3\frac{1}{2}s},$$

seu $m\tau = \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s + \frac{1}{6}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s.\sec^2\frac{1}{2}s = \frac{1}{6}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s\,(2+\sec^2\frac{1}{2}s) = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s + \frac{1}{6}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}s.$

Verumtamen etiam ex dato $m\tau$, modo hic angulus in partibus radii exponatur, angulus $s$ definiri potest, nam ponatur $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = z$, erit $\sec^2\frac{1}{2}s = 1+zz$, unde fit $6m\tau = z(3+zz)$, ex cujus aequationis resolutione, si ponamus $3m\tau = u$, deducimus

$$z = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = (\sqrt{(1+uu)}+u)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{(1+uu)}-u)^{\frac{1}{3}},$$

vel quaeratur angulus $\omega$, ut sit $\operatorname{tang}2\omega = 3m\tau$, tum vero erit

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0+\omega)} - \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0-\omega)},$$

$$\text{sive}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0+\omega)} - \sqrt[3]{\cot.(45^0+\omega)},$$

cujus ope calculus per logarithmos haud difficulter instituitur, quoniam

$$\log.\sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0-\omega)} = -\log.\sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0+\omega)}.$$

Fortasse calculus adhuc facilior reddetur, si quaeratur angulus $\psi$, ut sit

$$\operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0 + \omega)},$$

eritque $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = 2\operatorname{tang}2\psi,$$

qui calculus ad logarithmorum usum maxime est accommodatus.

97. **Coroll. 1.** Elapso ergo tempore $t$ post transitum corporis $B$ per absidem imam, primo pro eodem tempore angulus $\tau$ definiatur, quem corpus quoddam $E$ circa aliud $F$ circulum radii $= e$ describens interea conficit, qui angulus loco temporis in calculum introducatur, tum vero capiatur numerus $m = \frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\frac{A+B}{E+F}}$, et factum $m\tau$ in partibus radii exprimatur eritque

$$m\tau = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{6}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}s.$$

98. **Coroll. 2.** Uti sumto $\tau = 0$, anomalia vera $s$ evanescit, ita tempus usque ad absidem summam fit infinitum; sumta enim anomalia vera $s = 180^0$, ob $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = \infty$, evidens est quantitatem $m\tau$ in infinitum augeri, scilicet corpus in parabola motum nunquam ad absidem summam pertingit.

99. **Coroll. 3.** Si anomalia vera $s$ fuerit valde parva, ob $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}s + \frac{1}{24}s^3$, et $\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}s = \frac{1}{8}s^3$, fiet $m\tau = \frac{1}{4}s + \frac{1}{24}s^3$. Sumta autem $s = 60^0$ ob $\operatorname{tang}30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ fit $m\tau = \frac{5}{9\sqrt{3}}$; at sumta $s = 90^0$, ob $\operatorname{tang}45^0 = 1$, fit $m\tau = \frac{2}{3}$. Sumta denique $s = 120^0$, ob $\operatorname{tang}60^0 = \sqrt{3}$, fit $m\tau = \sqrt{3}$.

100. **Coroll. 4.** Si ex dato tempore $t$ seu angulo ipsi proportionali $m\tau$ anomaliam veram $s$ definire velimus, promptissime id praestabitur hoc modo: Primo quaeratur angulus $\omega$, ut sit

$$\operatorname{tang}2\omega = 3m\tau,$$

tum angulus $\psi$ ut sit

$$\operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0 + \omega)},$$

quo invento erit $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = 2\operatorname{tang}2\psi$.

101. **Scholion.** Quemadmodum hic aequationis cubicae $z^3 + 3z = 6m\tau$ resolutionem commode per tabulas sinuum docuimus, qui modus alias tantum in iis aequationibus cubicis usurpari solet, quae omnes radices habent reales, ita in genere aequationum unica radice reali praeditarum resolutio quoque ad tabulas sinuum revocari potest hoc modo: Sit sublato secundo termino proposita haec aequatio cubica $y^3 + 3by = 2c$, quaeratur angulus $\omega$, ut sit

$$\operatorname{tang}2\omega = \frac{c}{b\sqrt{b}},$$

tum vero angulus $\psi$, ut sit

$$\operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0 + \omega)},$$

erit radix realis $y = 2\sqrt{b}\,\mathrm{tang}\,2\psi$. Hoc scilicet modo regula Cardani commodius ad calculum accommodatur. Vel etiam ex angulo $\omega$ statim est

$$y = (\sqrt[3]{\mathrm{tang}\,(45^0 + \omega)} - \sqrt[3]{\mathrm{tang}\,(45^0 - \omega)})\sqrt{b}.$$

102. **Problema.** Si curva, quam corpus $B$ circa $A$ describit, proxime tantum ad parabolam accedat, ad quodvis tempus ab abside ima elapsum locum corporis in curva assignare.

**Solutio.** Excentricitas ergo $n$ unitati proxime aequalis assumitur, unde si ut ante tempus $t$ ex motu uniformi, quo corpus quodpiam $E$ circa aliud $F$ ad distantiam $= e$ circulum describit, definiamus, atque in hoc circulo tempore $t$ absolvatur angulus $= \tau$, ponaturque

$$\frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\frac{A+B}{E+F}} = m;$$

ex superioribus habemus elapso tempore $t$ ab abside ima $C$ distantiam

$$AB = v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad m\tau = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}$$

denotante $f$ semiparametrum orbitae et $s$ anomaliam veram seu angulum $CAB$. Haec quidem formula pro casu, quo $n < 1$ et orbita est ellipsis, valet, unde patet pro tempore motus ab abside ima ad summam prodire

$$m\tau = \frac{\pi}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}$$

id quod ex approximationibus minus liquet, quippe quae non ad absidem summam usque extenduntur. Nam cum sit

$$\mathrm{Arc.cos}\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} = \mathrm{Arc.sin}\frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s},$$

hic sinus quidem est valde parvus, quamdiu anomalia vera $s$ non proxime ad $180^0$ accedit. Cum igitur existente sinu $u$ minimo sit

$$\mathrm{Arc.sin}\,u = u + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{3}{40}u^5 + \tfrac{5}{112}u^7 \text{ etc.}$$

$$\text{erit} \quad \mathrm{Arc.sin}\frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} + \frac{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sin^3 s}{6(1+n\cos s)^3} + \frac{3(1-nn)^{\frac{5}{2}}\sin^5 s}{40(1+n\cos s)^5},$$

ideoque nostra aequatio fiet

$$m\tau = \frac{\sin s}{(1+n)(1+n\cos s)} + \frac{\sin^3 s}{6(1+n\cos s)^3} + \frac{3(1-nn)\sin^5 s}{40(1+n\cos s)^5}.$$

Quoniam igitur $n$ proxime ad unitatem accedit, sive sit $n < 1$ sive $n > 1$, formula inventa aeque locum habet, neque tamen eousque progredi licet, ut denominator $1 + n\cos s$ proxime evanescat. Ponamus ergo $n = 1 - \delta$ et $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}s = z$, ac reperiemus

$$m\tau = \frac{2z}{(2-\delta)(2-\delta+\delta zz)} + \frac{4z^3}{3(2-\delta+\delta zz)^3} + \frac{24\delta z^5}{5(2-\delta+\delta zz)^5}$$

neglectis terminis ubi $\delta$ plus una dimensione adipiscitur. Pro data ergo anomalia vera $s$, tempus $t$ ejusve loco $m\tau$ facillime colligetur hoc modo: Statuatur $\frac{\sin s}{1+n\cos s}=u$, eritque

$$m\tau=\frac{u}{1+n}+\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{3}{40}(1-nn)u^5.$$

At si discrimen a particula $\delta$ oriundum noscere velimus, ex $z=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s$ obtinebimus

$$m\tau=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{6}z^3+\delta\left(\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{10}z^5\right),$$

unde si neglecta particula $\delta$ pro dato $m\tau$ invenerimus $z=q$, erit ratione ipsius $\delta$ habita

$$z=q-\frac{\delta q(5-q^4)}{5(1+qq)}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s.$$

103. **Coroll. 1.** Si ergo particula minima $\delta$ fuerit positiva, curva erit ellipsis perquam longa, cujus semiaxis transversus $=\frac{f}{1-nn}=\frac{f}{2\delta}$, et semiaxis conjugatus $=\frac{f}{\sqrt{2\delta}}$, atque distantia absidis imae a foco $=\frac{f}{2-\delta}=\tfrac{1}{2}f+\frac{\delta}{4}f$.

104. **Coroll. 2.** Sin autem particula $\delta$ fuerit negativa, curva erit hyperbola minime a parabola ejusdem parametri discrepans, cujus asymtotae ad axem erunt inclinatae angulo cujus cosinus $=\frac{1}{1+\delta}$ vel sinus $=\sqrt{2\delta}$.

105. **Coroll. 3.** Ceterum calculus, quo tam ex data anomalia vera $s$ quaeritur quantitas tempori proportionalis $m\tau$, quam vicissim haec ex illa, non multo onerosior est illo, quem ante pro parabola docuimus, unde ad motum in hyperbola scrutandum procedamus.

106. **Problema.** Si curva, in qua corpus $B$ circa $A$ moveri videtur, fuerit hyperbola, ad quodvis tempus ejus locum assignare.

**Solutio.** Loco temporis $t$ introducamus et hic quantitatem ipsi proportionalem $m\tau$ modo ante expositam, et cum numerus $n$ excentricitatem referens sit unitate major, ex § 68 habebimus

$$m\tau=\frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)}-\frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

qua aequatione relatio inter tempus et anomaliam veram $CAB=s$ exprimitur. Hic autem logarithmus ex canone logarithmorum hyperbolicorum sumi debet, vel si logarithmum vulgarem capiamus, eum per numerum 2.30258509299 multiplicari, hujusve reciprocum 0,4342944819 dividi oportet. Statuamus $\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}=u$, ut sit $\cos s=\frac{n-u}{nu-1}$, et quia $\sqrt{(uu-1)}=\frac{\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}$, nostra aequatio erit

$$m\tau=\frac{n}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{(uu-1)}-\frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log.(u+\sqrt{(uu-1)}),$$

quae aequatio adhuc simplicior reddi potest ponendo $u=\sec 2\omega=\frac{1}{\cos 2\omega}$, seu $\sqrt{(uu-1)}=\operatorname{tang}2\omega$,

ut sit $\frac{1-n\cos s}{n+\cos s} = \cos 2\omega$, hincque $\cos s = \frac{n\cos 2\omega - 1}{n-\cos 2\omega}$ et $\sin s = \frac{\sin 2\omega \sqrt{(nn-1)}}{n-\cos 2\omega}$; tum enim erit $u + \sqrt{(uu-1)} = \text{tang}\,(45^0 + \omega)$, ideoque

$$m\tau = \frac{n\,\text{tang}\,2\omega - \log.\text{tang}(45^0+\omega)}{(nn-1)\sqrt{(nn-1)}}.$$

Quodsi ergo ad singulos gradus anomaliae verae $s$ valores quantitatis $m\tau$ computentur, inde vicissim pro dato $m\tau$ ipsa anomalia vera $s$ simulque distantia $AB = v = \frac{f}{1+n\cos s}$ facile colligitur.

107. **Coroll. 1.** Crescente ergo tempore $t$ seu quantitate ipsi proportionali $m\tau$, crescit etiam anomalia vera $CAB = s$, atque elapso tempore infinito fit $\cos s = -\frac{1}{n}$ et $\sin s = \frac{\sqrt{(nn-1)}}{n}$, eodemque casu evadit distantia $AB = v$ infinita.

108. **Coroll. 2.** Elapso tempore infinito locus corporis in asymtotam incidet, et asymtotae utrinque ad axem hyperbolae inclinantur angulo, cujus cosinus est $= \frac{1}{n}$ et tangens $= \sqrt{(nn-1)}$. Est vero $\frac{f}{nn-1}$ semiaxis transversus hyperbolae et $\frac{f}{\sqrt{(nn-1)}}$ semiaxis conjugatus.

109. **Scholion.** Evolvimus ergo omnes species motuum, quibus duo corpora se mutuo attrahentia, siquidem fuerint sphaerica circumferri possunt; vidimus orbitam, quam alterum circa alterum describere spectatur, esse sectionem conicam. Huc quidem proxime accedunt orbitae, quas planetae primarii et cometae circa solem describere videntur, dum illi in ellipsibus circumferuntur, hi vero quasi in parabolis, etsi adhuc incertum est, utrum hyperbola penitus sit excludenda. Verumtamen planetas non exacte in orbitis ellipticis circa solem circumferri vel exinde patet, quod lineae absidum in coelo non quietae deprehenduntur. Duplex scilicet perturbatio eorum motum afficit, quarum altera a figura planetarum non sphaerica, altera ab attractione reliquorum corporum coelestium proficiscitur, quam investigationem deinceps sumus suscepturi. Ante autem juvabit hoc idem argumentum de motu duorum corporum sphaericorum per calculos variatos pertractasse. Cum enim totum negotium resolutione aequationum differentio-differentialium innitatur, plurimum intererit hujusmodi aequationes variis methodis tentari, quandoquidem hoc casu de successu certi sumus, quacunque methodo utamur, etiamsi forte, nisi solutio jam ante esset cognita, calculi evolutio nimis ardua videretur. His autem difficultatibus superatis, aditus ad sublimiores investigationes, quando plura duobus corpora proponuntur, facilior forsitan redderetur. In sequente ergo capite aliis quibusdam methodis determinationem motus duorum corporum sphaericorum aggrediamur.

---

## Caput III.

### Aliae investigationes motus duorum corporum sphaericorum.

110. **Problema.** (Fig. 179.) Dum corpora sphaerica $A$ et $B$ se mutuo attrahunt, hujus motum, qualis ex illo spectatur, referre ad planum quodcunque per corpus $A$ ductum.

**Solutio.** Repraesentet tabula planum, ad quod motum corporis $B$ referri oportet, quod jam tempore elapso $= t$ versetur in $B$, unde demisso ad planum propositum perpendiculo $BY$, et ex $Y$

ad rectam fixam $AE$ normali $YX$, sint ternae coordinatae $AX=x$, $XY=y$, $YB=z$; ipsa autem distantia $AB=v=\sqrt{(xx+yy+zz)}$. Cum jam vis, qua $B$ ad $A$ urgetur sit $=\frac{B(A+B)}{vv}$, massas corporum per litteras $A$ et $B$ indicando, ea secundum directiones ternarum coordinatarum resoluta dabit vim in directione

$$AX=\frac{-B(A+B)x}{v^3},$$

$$XY=\frac{-B(A+B)y}{v^3},$$

$$YB=\frac{-B(A+B)z}{v^3},$$

unde sequentes aequationes elicimus sumendo elementum $dt$ constans

$$ddx=\frac{-2g(A+B)x}{v^3}\cdot dt^2,\quad ddy=\frac{-2g(A+B)y}{v^3}\cdot dt^2,\quad ddz=\frac{-2g(A+B)z}{v^3}\cdot dt^2.$$

Hinc $dt^2$ eliminando colligimus

$$yddx-xddy=0,\quad zddy-yddz=0,\quad xddz-zddx=0,$$

quarum quidem quaelibet in binis reliquis jam continetur, ita ut duas tractasse sufficiat. Inde ergo integrando obtinemus

$$ydx-xdy=Edt \quad \text{et} \quad zdy-ydz=Fdt, \quad \text{hincque}$$

$$F(ydx-xdy)+E(ydz-zdy)=0,$$

quae per $yy$ divisa et integrata dat

$$\frac{Fx}{y}+\frac{Ez}{y}+G=0,\quad \text{seu}\quad Ez+Fx+Gy=0,$$

ex qua liquet motum corporis $B$ fieri in plano per punctum $A$ transeunte. Cum igitur habeamus $Ez+Fx+Gy=0$, ac praeterea has tres aequationes differentiales

$$Edt=ydx-xdy,\quad Fdt=zdy-ydz,\quad Gdt=xdz-zdx,$$

ob $xx+yy+zz=vv$ adipiscemur quadratis addendis

$$(EE+FF+GG)dt^2=dx^2(vv-xx)+dy^2(vv-yy)+dz^2(vv-zz)-2xydxdy-2yzdydz-2xzdxdz,$$

et quia $xdx+ydy+zdz=vdv$, obtinebimus

$$(EE+FF+GG)dt^2=vv(dx^2+dy^2+dz^2)-vvdv^2.$$

Verum si aequationum differentio-differentialium prima per $2dx$, secunda per $2dy$ et tertia per $2dz$ multiplicetur, summa erit

$$2dxddx+2dyddy+2dzddz=\frac{-4g(A+B)vdv}{v^3}\cdot dt^2,$$

cujus integrale, ob $dt$ constans, est

$$dx^2+dy^2+dz^2=Ddt^2+\frac{4g(A+B)}{v}dt^2,$$

qui valor ob superiorem aequationem est

$$= dv^2 + \frac{(EE+FF+GG)\,dt^2}{vv},$$

ita ut per $vv$ multiplicando habeamus

$$vv\,dv^2 = dt^2\,(Dvv + 4g\,(A+B)\,v - EE - FF - GG),$$

ideoque
$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{(Dvv + 4g\,(A+B)\,v - EE - FF - GG)}}.$$

Superest ut reliquas variabiles $x$, $y$, $z$ etiam per $v$ determinemus. Cum igitur sit $z = \frac{-Fx-Gy}{E}$, habebimus

$$EEvv = EExx + EEyy + FFxx + 2FGxy + GGyy, \quad \text{hincque}$$

$$y = \frac{-FGx + E\sqrt{((EE+GG)\,vv - (EE+FF+GG)\,xx)}}{EE+GG}.$$

Statuamus brevitatis gratia

$$EE+FF+GG = HH, \quad \text{sitque} \quad \frac{Hx}{v\sqrt{(EE+GG)}} = \cos\omega, \quad \text{seu} \quad x = \frac{v\sqrt{(EE+GG)}}{H}\cos\omega,$$

$$\text{erit} \quad y = \frac{-FG\cos\omega + EH\sin\omega}{H\sqrt{(EE+GG)}}\cdot v \quad \text{et} \quad z = \frac{-EF\cos\omega - GH\sin\omega}{H\sqrt{(EE+GG)}}\cdot v.$$

Hinc erit $\frac{y}{x} = \frac{-FG\cos\omega + EH\sin\omega}{(EE+GG)\cos\omega}$ et $\frac{x\,dy - y\,dx}{xx} = \frac{EH\,d\omega}{(EE+GG)\cos^2\omega}$, ideoque

$$x\,dy - y\,dx = \frac{Evv\,d\omega}{H} = -E\,dt, \quad \text{ita ut sit} \quad d\omega = \frac{-H\,dt}{vv}.$$

Quaeratur ergo angulus $\omega$, ut sit

$$\omega = -\int \frac{H\,dv}{v\sqrt{(Dvv + 4g\,(A+B)\,v - HH)}},$$

eritque
$$\sin\omega = \frac{HH - 2g\,(A+B)\,v}{v\sqrt{(DHH + 4gg\,(A+B)^2)}} \quad \text{et} \quad \cos\omega = \frac{H\sqrt{(Dvv + 4g\,(A+B)\,v - HH)}}{v\sqrt{(DHH + 4gg\,(A+B)^2)}}.$$

Invento hoc angulo $\omega$, ad eum constantem angulum quemcunque adjicere licet, unde obtinebimus

$$\frac{x}{v} = \frac{(EE+GG)\cos(\omega+\delta)}{H\sqrt{(EE+GG)}},$$

$$\frac{y}{v} = \frac{-FG\cos(\omega+\delta) + EH\sin(\omega+\delta)}{H\sqrt{(EE+GG)}},$$

$$\frac{z}{v} = \frac{-EF\cos(\omega+\delta) - GH\sin(\omega+\delta)}{H\sqrt{(EE+GG)}},$$

ita ut jam omnes quantitates variabiles sint determinatae per eandem variabilem $v$.

**111. Coroll. 1.** Si ponatur $\frac{EH}{FG} = \operatorname{tang}\alpha$ et $\frac{GH}{EF} = \operatorname{tang}\gamma$, formulae posteriores transmutantur in has:

$$\frac{x}{v} = \frac{\sqrt{(EE+GG)}}{H}\cos(\omega+\delta), \quad \frac{y}{v} = \frac{-\sqrt{(EE+FF)}}{H}\cos(\omega+\delta+\alpha), \quad \frac{z}{v} = \frac{-\sqrt{(FF+GG)}}{H}\cos(\omega+\delta-\gamma),$$

haeque formulae exprimunt cosinus angulorum, quibus recta $AB$ ad ternas directiones principales inclinatur.

112. **Coroll. 2.** Si ducta $AY$, angulus $XAY$ tanquam longitudo vocetur $= \varphi$, ob $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \varphi$ habebimus hanc longitudinis determinationem

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{-FG}{EE + GG} + \frac{EH \operatorname{tang}(\omega + \delta)}{EE + GG},$$

tum vero angulo $YAB$ tanquam latitudine posito $= \psi$, erit

$$\sin \psi = \frac{-EF \cos(\omega + \delta) - GH \sin(\omega + \delta)}{H\sqrt{(EE + GG)}} = \frac{-\sqrt{(FF + GG)}}{H} \cos(\omega + \delta - \gamma).$$

113. **Coroll. 3.** Si recta $A☊$ fuerit intersectio plani, in quo corpus $B$ movetur cum plano tabulae, motusque fiat in sensum $EB$, ita ut in ☊ sit nodus ascendens, erit pro longitudine hujus nodi $\operatorname{tang} EA☊ = \frac{-F}{G}$, et pro inclinatione planorum $\operatorname{tang} YNB = \frac{-\sqrt{(FF + GG)}}{E}$, seu $\cos YNB = \frac{-E}{H}$, ducta $YN$ ad $A☊$ normali.

114. **Coroll. 4.** Si ponamus $\frac{F}{H} = \cos \alpha$, $\frac{G}{H} = \cos \beta$, $\frac{E}{H} = \cos \gamma$, ut sit

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

tum vero statuamus

$$\frac{x}{v} = \sin \alpha \cos(\omega + \zeta), \quad \frac{y}{v} = \sin \beta \cos(\omega + \eta), \quad \frac{z}{v} = \sin \gamma \cos(\omega + \vartheta),$$

anguli $\zeta$, $\eta$, $\vartheta$ ita sunt comparati ut sit

$$\operatorname{tang}(\vartheta - \eta) = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}, \quad \operatorname{tang}(\zeta - \vartheta) = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \operatorname{tang}(\eta - \zeta) = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta},$$

unde ordo in his formulis facilius perspicitur.

115. **Scholion.** Evidens est hanc solutionem ad superiorem perducere. Si enim angulus $☊AB$ ponatur $= \varphi$, qui est angulus, quem corpus $B$ in sua orbita plana tempore $t$ absolvit, erit $\frac{BN}{v} = \sin \varphi$; at est $\frac{z}{BN} = \sin YNB = \frac{\sqrt{(FF + GG)}}{H}$, ideoque

$$BN = \frac{Hz}{\sqrt{(FF + GG)}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{H}{\sqrt{(FF + GG)}} \cdot \frac{z}{v} = -\cos(\omega + \delta - \gamma) \quad \text{per § 111.}$$

Ergo $\sin \varphi = \sin(\omega + \delta - \gamma - 90^0)$, ita ut sit

$$\varphi = \omega + \text{Const.} \quad \text{ac} \quad d\varphi = d\omega, \quad \text{seu} \quad d\varphi = \frac{-Hdv}{v\sqrt{(Dvv + 4G(A + B)v - HH)}},$$

quae aequatio cum supra inventa plane congruit. Signum enim —, quod supra erat +, ob signum radicalis ambiguum nihil turbat. Quin etiam poteramus ponere

$$\sin \varphi = + \cos(180^0 + \omega + \delta - \gamma) = \sin(-90^0 - \omega - \delta + \gamma),$$

unde deducitur $\varphi = \text{Const.} - \omega$ et $d\varphi = -d\omega$, eademque prorsus aequatio obtinetur. Ceterum cum hic motum corporis $B$ etiam, qualis ex $A$ spectatur, definiverimus, nunc in motus absolutos utriusque corporis inquiramus, quales scilicet ambo ex puncto quodam fixo visi apparerent; ac primo quidem ambos motus in eodem plano absolvi assumamus.

116. **Problema.** (Fig. 180.) Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahentia $A$ et $B$ moveantur in eodem plano, definire eorum motum absolutum.

**Solutio.** Moveantur ambo corpora $A$ et $B$, quorum massae iisdem litteris indicentur, in plano tabulae, in quo assumta recta fixa $OV$, in eaque puncto fixo $O$, ad quodvis tempus elapsum $= t$ pro utroque corpore coordinatas orthogonales $OX$, $XA$ et $OP$, $PB$ assignari oportet. Ponamus ergo pro corpore $A$ coordinatas $OX = X$, $XA = Y$, et ducta $AL$ rectae fixae $OV$ parallela, vocatisque distantia $AB = v$ et angulo $LAB = \varphi$, pro corpore $B$ erunt coordinatae

$$OP = X + v\cos\varphi \quad \text{et} \quad PB = Y + v\sin\varphi.$$

Jam quia vis, qua corpora se mutuo attrahunt, est $= \frac{AB}{vv}$, corpus $A$ sollicitabitur secundum directiones fixas

$$\text{sec. } OX \text{ vi} = \frac{AB}{vv}\cos\varphi, \qquad \text{sec. } XA \text{ vi} = \frac{AB}{vv}\sin\varphi;$$

corpus vero $B$ sollicitabitur

$$\text{sec. } OP \text{ vi} = \frac{-AB}{vv}\cos\varphi, \qquad \text{sec. } PB \text{ vi} = \frac{-AB}{vv}\sin\varphi.$$

Sumto ergo elemento temporis $dt$ constante, habebimus has quatuor aequationes:

$$\text{I.} \quad ddX = \frac{2gBdt^2}{vv}\cos\varphi, \qquad \text{II.} \quad ddY = \frac{2gBdt^2}{vv}\sin\varphi,$$

$$\text{III.} \quad ddX + dd.v\cos\varphi = \frac{-2gAdt^2}{vv}\cos\varphi, \qquad \text{IV.} \quad ddY + dd.v\sin\varphi = \frac{-2gAdt^2}{vv}\sin\varphi,$$

unde sublatis $ddX$ et $ddY$ supererunt hae duae aequationes

$$(1) \quad dd.v\cos\varphi = \frac{-2g(A+B)dt^2}{vv}\cos\varphi, \qquad (2) \quad dd.v\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)dt^2}{vv}\sin\varphi,$$

quibus definitur motus respectivus corporis $B$, qualis spectatori in $A$ posito esset appariturus, quippe qui motus per distantiam $AB = v$ et angulum $LAB = \varphi$ determinatur. Conveniuntque hae formulae perfecte cum iis, quas in superiori capite invenimus. Definito autem hoc motu respectivo, pro absoluto deinceps colligimus

$$(A+B)\,ddX + Bdd.v\cos\varphi = 0 \quad \text{et} \quad (A+B)\,ddY + Bdd.v\sin\varphi = 0,$$

ac proinde bis integrando

$$(A+B)\,X + Bv\cos\varphi = Et + \mathfrak{E} \quad \text{et} \quad (A+B)\,Y + Bv\sin\varphi = Ft + \mathfrak{F},$$

quibus motus uniformis communis centri inertiae corporum in directum declaratur. Ad motum ergo absolutum utriusque corporis cognoscendum primo motum respectivum investigari convenit, quod etsi jam in superiori capite est praestitum, solutionem tamen ex binis aequationibus hic expositis petamus. Ac primo quidem haec combinatio $(1).v\sin\varphi - (2).v\cos\varphi$ praebet

$$v\sin\varphi\, dd.v\cos\varphi - v\cos\varphi\, dd.v\sin\varphi = 0,$$

quae integrata dat $\quad v \sin\varphi\, d.v\cos\varphi - v\cos\varphi\, d.v\sin\varphi = -2Cdt,$

$$\text{seu}\quad vv\,d\varphi = Cdt.$$

Deinde ista combinatio $(1).d.v\cos\varphi + (2).d.v\sin\varphi$ praebet

$$d.v\cos\varphi.dd.v\cos\varphi + d.v\sin\varphi.dd.v\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)dt^2}{vv}(\cos\varphi\, d.v\cos\varphi + \sin\varphi\, d.v\sin\varphi)$$

$$= \frac{-2g(A+B)dt^2}{vv}.dv,$$

unde integrando impetramus

$$(d.v\cos\varphi)^2 + (d.v\sin\varphi)^2 = D + \frac{4g(A+B)dt^2}{v},\quad \text{sive}\quad dv^2 + vv\,d\varphi^2 = Ddt^2 + \frac{4g(A+B)dt^2}{v}.$$

Quare cum ex illa sit $dt = \frac{vv\,d\varphi}{C}$, fiet

$$CCdv^2 + CCvv\,d\varphi^2 = Dv^4d\varphi^2 + 4g(A+B)v^3d\varphi^2,$$

$$\text{hincque}\qquad d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{(Dv^2 + 4g(A+B)v - CC)}}$$

$$\text{atque}\qquad dt = \frac{vdv}{\sqrt{(Dv^2 + 4g(A+B)v - CC)}}.$$

Definitis autem ad tempus $t$ quantitatibus $v$ et $\varphi$, ex superioribus formulis colligentur coordinatae $X$ et $Y$ pro corpore $A$, ex quibus hujus corporis motus absolutus innotescit, indeque etiam corporis alterius $B$.

117. **Coroll. 1.** Si $J$ sit commune centrum inertiae amborum corporum, erit

$$(A+B)\,OK = A.OX + B.OP = (A+B)X + Bv\cos\varphi$$

$$\text{et}\qquad (A+B)\,KJ = A.XA + B.PB = (A+B)Y + Bv\sin\varphi,$$

unde in superioribus formulis $E$ est celeritas ejus in directione $OV$, et $F$ in directione $KJ$.

118. **Coroll. 2.** Positis ergo $E = 0$ et $F = 0$, commune centrum inertiae $J$ quiescet. Ac si punctum $O$ in eo ipso accipiamus, insuper constantes $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$ evanescunt, eritque tum

$$OX = X = \frac{-Bv\cos\varphi}{A+B}\quad \text{et}\quad XA = Y = \frac{-Bv\sin\varphi}{A+B}.$$

119. **Coroll. 3.** Cum in superiori capite per anomaliam veram $s$ has determinationes invenerimus:

$$v = \frac{f}{1+n\cos s},\quad \varphi = s + \alpha\quad \text{et}\quad t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2},$$

habebimus in genere pro curva, quam corpus $A$ motu absoluto describit, constantibus parumper immutatis,

$$OX = X = \mathfrak{E} + E\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} - \frac{Bf\cos(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)},$$

$$XA = Y = \mathfrak{F} + F\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} - \frac{Bf\sin(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)}.$$

120. **Coroll. 4.** Pro curva vero, quam alterum corpus $B$ motu absoluto describit, erunt coordinatae

$$OP = X + v\cos\varphi = \mathfrak{E} + E\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} + \frac{Af\cos(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)},$$

$$PB = Y + v\sin\varphi = \mathfrak{F} + F\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} + \frac{Af\sin(s+\alpha)}{(A+B)(1+n\cos s)}.$$

Unde patet casu, quo $E=0$ et $F=0$, utramque curvam fore sectionem conicam.

121. **Scholion.** Hinc perspicitur egregius consensus inter ambas methodos, quibus sum usus ad motus binorum corporum determinandos, ac simul patet, utramque methodum ita inter se cohaerere, ut determinatio motus respectivi praecipuam partem in motus absoluti investigatione constituat. Haec methodus scilicet latius patet, quam illa, cum non solum motum respectivum perinde ac illa patefaciat, sed etiam motum absolutum utriusque corporis declaret, atque hoc quidem ita, ut ratio motuum absolutorum facillime e calculo eliminetur, totumque negotium ad motus respectivi determinationem perducatur. Hoc enim cognito nihil aliud superest, nisi ut motus communis centri inertiae, qui semper est uniformis secundum lineam rectam, in computum introducatur. Quare etiam in investigatione motus plurium corporum se mutuo attrahentium semper sufficit motus respectivos, qui spectatori in uno eorum collocato sint apparituri, determinasse. Etsi enim hic unum corpus tanquam quiescens consideratur, tamen facile est deinceps toti systemati ejusmodi motum mente saltem inducere, quo commune centrum inertiae vel ad quietem vel motum uniformem rectilineum redigatur, hocque modo ad motuum absolutorum cognitionem pervenietur. Istud etiam eo clarius patebit ex sequente problemate, ubi motus binorum corporum, quando non in eodem plano absolvuntur, sum evoluturus.

122. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahentia ita moveantur, ut motus eorum non in eodem plano absolvatur, definire utriusque corporis motum absolutum.

**Solutio.** (Fig. 181) Sint jam elapso tempore $=t$ ambo corpora in $A$ et $B$, quorum massae iisdem litteris $A$ et $B$ indicentur. Referantur eorum loca ad ternas directiones fixas inter se normales $OE$, $OF$, $OG$, quibus constituantur pro utroque parallelae coordinatae, quas pro $A$ vocemus $OX=X$, $XY=Y$ et $YA=Z$. Pro corpore autem $B$ statuamus primo distantiam $AB=v$, tum vero ejus inclinatio ad ternas illas directiones fixas $OE$, $OF$, $OG$ indicetur angulis $\zeta$, $\eta$, $\vartheta$, ut sit $\cos^2\zeta+\cos^2\eta+\cos^2\vartheta=1$, hincque coordinatae pro $B$ erunt $OP=X+v\cos\zeta$, $PQ=Y+v\cos\eta$, $QB=z+v\cos\vartheta$, seu posito $v\cos\zeta=x$, $v\cos\eta=y$, $v\cos\vartheta=z$, ut sit $vv=xx+yy+zz$, habebimus $OP=X+x$, $PQ=Y+y$, $QB=Z+z$. Cum jam vis attractrix secundum $AB$ sit $=\frac{AB}{vv}$, corpus $A$ ab ea sollicitatur

$$\text{secundum } OE \text{ vi} = \frac{AB}{vv}\cos\zeta, \quad \text{sec. } OF \text{ vi} = \frac{AB}{vv}\cos\eta, \quad \text{sec. } OG \text{ vi} = \frac{AB}{vv}\cos\vartheta,$$

corpus vero $B$ his viribus

$$\text{sec. } OE \text{ vi} = \frac{-AB}{vv}\cos\zeta, \quad \text{sec. } OF \text{ vi} = \frac{-AB}{vv}\cos\eta, \quad \text{sec. } OG \text{ vi} = \frac{-AB}{vv}\cos\vartheta,$$

unde principia accelerationis suppeditabunt has aequationes

$$ddX = \frac{2gB}{vv} dt^2 \cos\zeta, \quad ddY = \frac{2gB}{vv} dt^2 \cos\eta, \quad ddZ = \frac{2gB}{vv} dt^2 \cos\vartheta,$$

$$ddX + ddx = \frac{-2gA}{vv} dt^2 \cos\zeta, \quad ddY + ddy = \frac{-2gA}{vv} dt^2 \cos\eta, \quad ddZ + ddz = \frac{-2gA}{vv} dt^2 \cos\vartheta.$$

Hic quantitates $X$, $Y$, $Z$ referuntur ad motum absolutum corporis $A$, at $x$, $y$, $z$ ad motum respectivum, quo corpus $B$ ex $A$ spectatum moveri cernitur. Pro hoc ergo colligimus:

$$\text{I.} \quad ddx = \frac{-2g(A+B)\,dt^2 \cos\zeta}{vv} = \frac{-2g(A+B)\,x\,dt^2}{v^3},$$

$$\text{II.} \quad ddy = \frac{-2g(A+B)\,dt^2 \cos\eta}{vv} = \frac{-2g(A+B)\,y\,dt^2}{v^3},$$

$$\text{III.} \quad ddz = \frac{-2g(A+B)\,dt^2 \cos\vartheta}{vv} = \frac{-2g(A+B)\,z\,dt^2}{v^3},$$

ex quibus cum aequatione $xx + yy + zz = vv$ omnes quantitates $x$, $y$, $z$ et $v$ ad tempus $t$ determinari oportet. Inde autem primo has aequationes integrabiles deducimus

$$yddx - xddy = 0, \quad zddy - yddz = 0, \quad xddz - zddx = 0,$$

quae integratae dant

$$ydx - xdy = Edt, \quad zdy - ydz = Fdt, \quad xdz - zdx = Gdt.$$

Quare cum sit $F(ydx - xdy) = E(zdy - ydz)$, per $yy$ dividendo nanciscemur $\frac{Fx}{y} = \frac{-Ez}{y} + \text{Const.}$ Similique modo ob $G(zdy - ydz) = F(xdz - zdx)$, per $zz$ dividendo adipiscimur $\frac{Gy}{z} = \frac{-Fx}{z} + \text{Const.}$ ex quibus conjunctim deducimus $Fx + Gy + Ez = 0$, qua aequatione motus corporis $B$ ex $A$ spectatus in eodem plano fieri indicatur.

Porro si primam per $2dx$, secundam per $2dy$ et tertiam per $2dz$ multiplicemus, ob $xdx + ydy + zdz = vdv$, summa erit

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy + 2dz\,ddz = \frac{-4g(A+B)\,dv}{vv} dt^2,$$

cujus integrale ob $dt$ constans dat

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + \frac{4g(A+B)\,dt^2}{v},$$

ex qua ope aequationum

$$Fx + Gy + Ez = 0, \quad xx + yy + zz = vv, \quad ydx - xdy = Edt, \quad zdy - ydz = Fdt,$$
$$xdz - zdx = Gdt$$

eadem solutio deducitur, quam jam supra dedimus. Denique inventis variabilibus $x$, $y$, $z$ motum respectivum spectantibus, ex iis pro motu absoluto corporis $A$ colliguntur coordinatae $X$, $Y$, $Z$ per has aequationes

$$X = \frac{-Bx + \mathfrak{E}t + \mathfrak{e}}{A+B}, \quad Y = \frac{-By + \mathfrak{F}t + \mathfrak{f}}{A+B}, \quad Z = \frac{-Bz + \mathfrak{G}t + \mathfrak{g}}{A+B}.$$

123. **Coroll. 1.** Ex aequationibus differentialibus

$$ydx - xdy = Edt, \quad zdy - ydz = Fdt, \quad xdz - zdx = Gdt,$$

sine integratione immediate colligitur, multiplicando primam per $z$, secundam per $x$, et tertiam per $z$, summamque sumendo:

$$0 = Ezdt + Fxdt + Gydt, \quad \text{hincque} \quad Ez + Fx + Gy = 0.$$

124. **Coroll. 2.** Eaedem aequationes differentiales quadratae et additae, posito

$$EE + FF + GG = HH, \quad \text{praebent}$$

$$HHdt^2 = vv(dx^2 + dy^2 + dz^2) - vvdv^2, \quad \text{ideoque} \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + \frac{HHdt^2}{vv}.$$

125. **Coroll. 3.** Si illae aequationes differentiales combinentur cum hac

$$xdx + ydy + zdz = vdv,$$

differentialia $dx$, $dy$ et $dz$ inde ita definiuntur, ut sit

$$dx = \frac{xdv}{v} + \frac{(Ey - Gz)\,dt}{vv}, \quad dy = \frac{ydv}{v} + \frac{(Fz - Ex)\,dt}{vv}, \quad dz = \frac{zdv}{v} + \frac{(Gx - Fy)\,dt}{vv}.$$

126. **Coroll. 4.** Cum autem sit $Ez + Gy = -Fx$, si ponamus $Ey - Gz = p$, erit quadratis addendis

$$(EE + GG)(yy + zz) = (EE + GG)(vv - xx) = FFxx + pp,$$

ideoque, ob $FF + GG + EE = HH$, erit $p = Ey - Gz = \sqrt{((EE + GG)vv - HHxx)}$, hincque

$$\frac{vdx - xdv}{vv} = d \cdot \frac{x}{v} = \frac{dt}{vv}\sqrt{\left(EE + GG - \frac{HHxx}{vv}\right)}.$$

127. **Scholion.** Hae investigationes non solum inserviunt motui absoluto definiendo, etsi in Astronomia parum interest eum nosse, sed imprimis eas ideo hic attulimus, ut intelligatur, quomodo hujusmodi solutiones, ubi plures aequationes differentio-differentiales occurrunt, tractari conveniat. Cum enim in sequentibus omnia a resolutione talium aequationum pendeant, in hujusmodi calculo maxime juvabit vires analyseos exercuisse, unde haec tractatio utilitate non caritura videtur. Expedito ergo motu duorum corporum sphaericorum, quod quidem argumentum jam passim satis cumulate est pertractatum, antequam casum trium corporum aggrediamur, in motum duorum corporum non sphaericorum inquiramus, ut pateat, quantum discrimen a defectu sphaericitatis proficiscatur. Cum enim tam solis quam planetarum corpora a figura sphaerica recedant, jam ob hanc solam causam irregularitates quaedam se motui, qui per regulas consuetas in hypothesi corporum sphaericorum determinatur, admiscebunt, quarum cognitio eo magis est necessaria, ne phaenomena hinc oriunda actioni aliorum corporum tribuantur. Hic vero alteri tantum corpori figuram a sphaerica diversam assignabimus, alterum perfecte sphaericum relinquentes; si enim ambo non fuerint sphaerica, primo alterum tanquam sphaericum spectetur, tum vero alterum, quo facto ex combinatione phaenomenorum solutio haud difficulter colligetur, praecipue cum viderimus a defectu figurae sphaericae motus parum perturbari.

## Caput IV.

### De motu duorum corporum, quorum alterum tantum est sphaericum.

128. **Problema.** Si corpus sphaericum moveatur circa corpus figura quacunque praeditum, quod omni motu rotatorio careat, invenire aequationes, quibus ejus motus determinatur.

**Solutio.** Cum quaestio sit de motu respectivo corporis sphaerici, alterum corpus non sphaericum in quiete considerabimus, quoniam ipsi etiam omnem motum rotatorium adimimus. Sit igitur hujus corporis centrum inertiae in $J$ (fig. 172), ejusque axes principales $JA$, $JB$, $JC$, quorum respectu sint momenta inertiae $Maa$, $Mbb$, $Mcc$, denotante $M$ massam hujus corporis, quod tanquam quiescens spectamus. Nunc autem elapso tempore $=t$, alterius corporis sphaerici centrum versetur in $H$, ejusque massa vocetur $=N$, unde ad planum binis axibus principalibus prioris corporis $JA$ et $JB$ contentum demittatur perpendiculum $HG$, et ex $G$ ad axem $JA$ ducatur normalis $GF$, ut habeantur pro ejus loco ternae coordinatae $JF=x$, $FG=y$ et $GH=z$; distantia autem ipsa $JH$ vocetur $=v$. Quodsi jam huc denominationes § 38 accommodemus, erit $h=v$, $\cos\alpha=\frac{x}{v}$, $\cos\beta=\frac{y}{v}$ et $\cos\gamma=\frac{z}{v}$, unde corpus $N$ in $H$ sequentibus tribus viribus secundum directiones $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ axibus principalibus parallelas sollicitatur

$$\text{secundum } H\alpha=\frac{MNx}{v^3}\left(1+\frac{3aa}{2vv}\left(3-\frac{5xx}{vv}\right)+\frac{3bb}{2vv}\left(1-\frac{5yy}{vv}\right)+\frac{3cc}{2vv}\left(1-\frac{5zz}{vv}\right)\right),$$

$$H\beta=\frac{MNy}{v^3}\left(1+\frac{3bb}{2vv}\left(3-\frac{5yy}{vv}\right)+\frac{3cc}{2vv}\left(1-\frac{5zz}{vv}\right)+\frac{3aa}{2vv}\left(1-\frac{5xx}{vv}\right)\right),$$

$$H\gamma=\frac{MNz}{v^3}\left(1+\frac{3cc}{2vv}\left(3-\frac{5zz}{vv}\right)+\frac{3aa}{2vv}\left(1-\frac{5xx}{vv}\right)+\frac{3bb}{2vv}\left(1-\frac{5yy}{vv}\right)\right).$$

A paribus autem viribus, sed contrario modo applicatis corpus $M$ ad corpus in $H$ sollicitatur, quae cum denuo, ob motum respectivum, contrario modo ad corpus in $H$ sint transferendae et in ratione massarum $M$ ad $N$ mutandae, motus respectivus corporis in $H$ sequentibus tribus aequationibus differentio-differentialibus exprimetur, sumto elemento temporis $dt$ constante:

$$ddx=\frac{-2g(M+N)x\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(3aa+bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

$$ddy=\frac{-2g(M+N)y\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(aa+3bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

$$ddz=\frac{-2g(M+N)z\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(aa+bb+3cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

ubi notandum esse $vv=xx+yy+zz$. Hinc autem primo colligimus

$$\frac{ddx}{x}-\frac{ddy}{y}=\frac{-2g(M+N)dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(aa-bb)}{vv},$$

$$\frac{ddy}{y}-\frac{ddz}{z}=\frac{-2g(M+N)dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(bb-cc)}{vv},$$

$$\frac{ddz}{z}-\frac{ddx}{x}=\frac{-2g(M+N)dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(cc-aa)}{vv},$$

indeque porro $\frac{yddx - xddy}{(aa - bb)xy} = \frac{zddy - yddz}{(bb - cc)yz} = \frac{xddz - zddx}{(cc - aa)xz}$,

$$\text{seu}\quad (aa - bb)\,xyddz + (bb - cc)\,yzddx + (cc - aa)\,xzddy = 0,$$

quam autem immediate ulterius reducere non licet.

Verum ex tribus illis primis formulis, si brevitatis gratia ponamus $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = f^2u^2$, obtinebimus hanc aequationem integrabilem

$$dxddx + dyddy + dzddz = \frac{-2g(M+N)\,dt^2}{v^3}\left(vdv + \frac{3(aa+bb+cc)\,dv}{2v} + \frac{3ffudu}{vv} - \frac{15ffuudv}{2v^3}\right)$$

$$= -2g(M+N)\,dt^2\left(\frac{dv}{vv} + \frac{3(aa+bb+cc)\,dv}{2v^4} + \frac{3ffudu}{v^5} - \frac{15ffuudv}{2v^6}\right).$$

Hujus enim integrale est

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{aa+bb+cc}{2v^3} - \frac{3ffuu}{2v^5}\right).$$

Cum autem praeterea aliae integrationes non adsint, hinc solutionem in quantitatibus finitis expressam deducere non licet.

129. **Coroll. 1.** Ob tres variabiles $x$, $y$, $z$ per tempus $t$ determinandas requiruntur tres aequationes, unde cum integrali postremo loco inventa adhuc duas conjungi oportet, ac perinde est quaenam ad hunc finem eligantur.

130. **Coroll. 2.** Loco alterius harum commodissime accipi videtur haec, in quam ternae variabiles $x$, $y$ et $z$ aequaliter ingrediuntur

$$(aa - bb)\,xyddz + (bb - cc)\,yzddx + (cc - aa)\,xzddy = 0,$$

quae etiam ad hanc formam reducitur

$$aax\,(yddz - zddy) + bby\,(zddx - xddz) + ccz\,(xddy - yddx) = 0.$$

131. **Coroll. 3.** Loco tertiae vero aequationis pro lubitu una ex his tribus accipietur

$$yddx - xddy = \frac{-6g(aa-bb)(M+N)\,xydt^2}{v^5},$$

$$zddy - yddz = \frac{-6g(bb-cc)(M+N)\,yzdt^2}{v^5},$$

$$xddz - zddx = \frac{-6g(cc-aa)(M+N)\,xzdt^2}{v^5}.$$

132. **Scholion 1.** Quomodocunque autem hae aequationes cum ista

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{aa+bb+cc}{2v^3} - \frac{3ffuu}{2v^5}\right)$$

posito brevitatis gratia $aaxx + bbyy + cczz = ffuu$ combinentur, solutio problematis maximis difficultatibus involvitur. Quare cum problema latissime pateat ob figuram quamcunque, quam corpori quiescenti tribuimus, casus magis particulares contemplemur; ac primo quidem statim patet, si duo

corporis $M$ momenta principalia fuerint inter se aequalia, difficultates illas maximam partem evanescere. Statuamus ergo momenta inertiae respectu axium $JA$ et $JB$ inter se aequalia, seu $bb = aa$, atque evidens est in hac hypothesi perinde esse, sive corpus $M$ quiescat, sive ei motus gyratorius quicunque circa axem tertium $JC$ tribuatur, quoniam omnia momenta respectu axium in plano $AJB$, quod tanquam quiescens spectamus, sumtorum, sunt inter se aequalia. Pro hoc ergo casu motum respectivum alterius corporis sphaerici $N$ investigemus.

133. **Scholion 2.** Interim tamen conatus exposuisse juvabit, qui forte aliquando ad solutionem producere valeant. Faciamus statim has substitutiones

$$x = pv, \quad ydx - xdy = ldt, \quad 2g\,(aa - bb)\,(M + N) = A,$$
$$y = qv, \quad zdy - ydz = mdt, \quad 2g\,(bb - cc)\,(M + N) = B,$$
$$z = rv, \quad xdz - zdx = ndt, \quad 2g\,(cc - aa)\,(M + N) = C,$$

ex quibus pro novis litteris concludimus has relationes

$$pp + qq + rr = 1, \quad lz + mx + ny = 0, \quad \text{seu} \quad lr + mp + nq = 0,$$

tum $A + B + C = 0$, item $Acc + Baa + Cbb = 0$. Porro ob $yddx - xddy = dldt$, habebimus

$$dl = \frac{-3\,Apqdt}{v^3}, \quad dm = \frac{-3\,Bqrdt}{v^3}, \quad dn = \frac{-3\,Cprdt}{v^3}.$$

Deinde cum sit $ydx - xdy = vv\,(qdp - pdq)$ nanciscimur

$$qdp - pdq = \frac{ldt}{vv}, \quad rdq - qdr = \frac{mdt}{vv}, \quad pdr - rdp = \frac{ndt}{vv},$$

unde fit $\frac{(lq - nr)\,dt}{vv} = qqdp - pqdq - prdr + rrdp = dp$, quia est $-qdq - rdr = pdp$ et $pp + qq + rr = 1$. Sicque erit

$$dp = \frac{(lq - nr)\,dt}{vv}, \quad dq = \frac{(mr - lp)\,dt}{vv}, \quad dr = \frac{(np - mq)\,dt}{vv};$$

atque hinc porro colligitur $rdl + pdm + qdn = 0$, $mdp + ndq + ldr = 0$; tum vero etiam

$$ccrdl + aapdm + bbqdn = 0, \quad \text{ideoque} \quad Cpdm = Bqdn, \quad Crdl = Aqdn, \quad Brdl = Apdm,$$
$$\text{sive} \quad \frac{rdl}{A} = \frac{pdm}{B} = \frac{qdn}{C} = \frac{-3\,pqrdt}{v^3}.$$

Ex assumtis autem aequationibus obtinemus

$$dt^2\,(ll + mm + nn) = vv\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - vvdv^2,$$

ita ut nostra aequatio integralis futura sit

$$dv^2 + \frac{(ll + mm + nn)\,dt^2}{vv} = Ddt^2 + 2g\,(M + N)\,dt^2\left(\frac{2}{v} + \frac{aa + bb + cc}{v^3} - \frac{3\,(aapp + bbqq + ccrr)}{v^3}\right)$$

in qua, quia quantitates $ll + mm + nn$ et $aapp + bbqq + ccrr\,.\,.\,.\,.\,.$, investigemus per formulas superiores earum differentialia. Reperiemus ergo

$$ldl + mdm + ndn = \frac{-3\,dt}{v^3}(Alpq + Bmqr + Cnpr) \quad \text{et}$$

$$aapdp + bbqdq + ccrdr = \frac{dt}{vv}((aa - bb)\,lpq + (bb - cc)\,mqr + (cc - aa)\,npr),$$

seu ob $aa - bb = \frac{A}{2g(M + N)}$ erit

$$aapdp + bbqdq + ccrdr = \frac{dt}{2g(M + N)v^2}(Alpq + Bmqr + Cnpr),$$

ita ut sit
$$aapdp + bbqdq + ccrdr = \frac{-v\,(ldl + mdm + ndn)}{6g(M + N)}.$$

Hinc etiam differentio-differentialia primitiva definire possumus, cum enim sit

$$dx = pdv + vdp = pdv + \frac{(lq - nr)\,dt}{v},$$

erit
$$ddx = pddv + \frac{(lq - nr)\,dt\,dv}{vv} - \frac{(lq - nr)\,dt\,dv}{vv} + \frac{dt}{v}\,d.(lq - nr).$$

Est vero
$$d(lq - nr) = \frac{-3\,Apqq\,dt + 3\,Cprr\,dt}{v^3} + \frac{dt}{vv}(lmr - llp - nnp + mnq),$$

quae ob $lr + nq = -mp$ abit in

$$d(lq - nr) = \frac{-3\,pdt}{v^3}(Aqq - Crr) - \frac{pdt}{vv}(ll + mm + nn),$$

ita ut sit
$$ddx = pddv - \frac{pdt^2}{v^3}(ll + mm + nn) - \frac{3\,pdt^2}{v^4}(Aqq - Crr),$$

quae expressio aequalis est isti

$$\frac{-2g(M + N)\,pdt^2}{v^2}\left(1 + \frac{3\,(3aa + bb + cc)}{2vv} - \frac{15\,(aapp + bbqq + ccrr)}{2vv}\right).$$

Cum jam sit

$$Aqq - Crr = 2g(M + N)(aaqq - bbqq - ccrr + aarr) = 2g(M + N)(aa - aapp - bbqq - ccrr),$$

erit
$$ddv = \frac{dt^2\,(ll + mm + nn)}{v^3} - \frac{2g(M + N)\,dt^2}{v^2}\left(1 + \frac{3(aa + bb + cc) - 9(aapp + bbqq + ccrr)}{2vv}\right),$$

quae, aequationem integralem per $dv$ multiplicando, facile reducitur.

En ergo octo variabiles $t$, $v$, $l$, $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, quas determinari oportet ope harum aequationum:

1. $pp + qq + rr = 1$, 2. $lr + mp + nq = 0$

3. $dp = \frac{(lq - nr)\,dt}{vv}$, 6. $dl = \frac{-6g\,(aa - bb)(M + N)\,pq\,dt}{v^3}$

4. $dq = \frac{(mr - lp)\,dt}{vv}$, 7. $dm = \frac{-6g\,(bb - cc)(M + N)\,qr\,dt}{v^3}$

5. $dr = \frac{(np - mq)\,dt}{vv}$, 8. $dn = \frac{-6g\,(cc - aa)(M + N)\,pr\,dt}{v^3}$

9. $rdl + pdm + qdn = 0$, 10. $ldr + mdp + ndq = 0$

11. $ccrdl + aapdm + bbqdn = 0$,

cum quibus aequationem vel differentio-differentialem $ddv$, vel integralem inde natam combinari oportet.

134. **Problema.** (Fig. 172). Si corpus $M$, quod ut quiescens spectatur, habeat momenta inertiae principalia respectu axium $JA$ et $JB$ aequalia, idque sive quiescat, sive circa axem tertium $JC$ gyretur, definire ejus respectu motum alterius corporis sphaerici $N$.

**Solutio.** Retentis omnibus denominationibus, quas in problemate praecedente constituimus, ob $bb = aa$, aequatio nostra integralis erit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + 4g\,(M + N)\,dt^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{2aa + cc}{2v^3} - \frac{3aa\,(xx + yy) - 3cczz}{2v^5}\right).$$

Praeterea vero habebimus has duas

$$yddx - xddy = 0 \quad \text{et} \quad xddz - zddx = \frac{-6g\,(cc - aa)\,(M + N)\,xzdt^2}{v^5}$$

existente $xx + yy + zz = vv$, quarum illa integrata praebet $ydx - xdy = Edt$. Statuamus praeterea $zdy - ydz = qdt$ et $xdz - zdx = rdt$, eritque

$$dq = \frac{6g\,(cc - aa)\,(M + N)\,yzdt}{v^5} \quad \text{et} \quad dr = \frac{-6g\,(cc - aa)\,(M + N)\,xzdt}{v^5},$$

ita ut sit $xdq + ydr = 0$. Tum vero ex illis tribus formulis colligimus $Ez + qx + ry = 0$, atque insuper $(EE + qq + rr)\,dt^2 = vv\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - vvdv^2$, hincque

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + \frac{(EE + qq + rr)\,dt^2}{vv}.$$

Ex aequationibus $Ez + qx + ry = 0$ et $xx + yy + zz = vv$ concludimus

$$x = \frac{-Eqz + r\sqrt{((qq + rr)\,vv - (EE + qq + rr)\,zz)}}{qq + rr}, \quad y = \frac{-Erz - q\sqrt{((qq + rr)\,vv - (EE + qq + rr)\,zz)}}{qq + rr}.$$

Deinde vero habemus $dz = \frac{zdv}{v} - \frac{(qy - rx)\,dt}{vv}$, ideoque

$$dz = \frac{zdv}{v} + \frac{dt}{vv}\sqrt{((qq + rr)\,vv - (EE + qq + rr)\,zz)} \quad \text{et} \quad d\cdot\frac{z}{v} = \frac{dt}{vv}\sqrt{\left(qq + rr - \frac{(EE + qq + rr)\,zz}{vv}\right)}.$$

Aequatio autem prima hinc reducitur ad hanc formam

$$dv^2 = Ddt^2 - \frac{(EE + qq + rr)\,dt^2}{vv} + 4g\,(M + N)\,dt^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{(cc - aa)\,(vv - 3zz)}{2v^5}\right).$$

Ponamus $z = uv$, $q = s\cos\omega$ et $r = s\sin\omega$, eritque

$$dv^2 = Ddt^2 - \frac{(EE + ss)\,dt^2}{vv} + 4g\,(M + N)\,dt^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{(cc - aa)\,(1 - 3uu)}{2v^3}\right)$$

atque $du = \frac{dt}{vv}\sqrt{(ss - (EE + ss)\,uu)}$; tum vero

$$x = \frac{-E\cos\omega + \sin\omega\sqrt{(ss - (EE + ss)\,uu)}}{s}\cdot v, \quad y = \frac{-E\sin\ - \cos\omega\sqrt{(ss - (EE + ss)\,uu)}}{s}\cdot v,$$

unde differentialia $dq$ et $dr$ supra definita dant

$$ds = -6g(cc - aa)(M + N) \cdot \frac{udt}{sv^3} \sqrt{(ss - (EE + ss)uu)},$$

$$sd\omega = +6g(cc - aa)(M + N) \cdot \frac{Eudt}{sv^3}.$$

Eliminato ergo $dt$ primo pro determinatione harum trium quantitatum $v$, $u$, $s$ hae duae aequationes oriuntur

$$dv^2(ss - (EE + ss)uu) = du^2\Big(Dv^4 - (EE + ss)vv + 4g(M + N)v\big(v^2 + \tfrac{1}{2}(cc - aa)(1 - 3uu)\big)\Big)$$

$$\text{et} \quad sds = -6g(cc - aa)(M + N)\frac{udu}{v},$$

quae si resolvi possent, ex iis deinceps angulus $\omega$ et tempus $t$ facile determinaretur. Sed vereor ne omnis labor hic nequicquam consumatur.

135. **Scholion.** Neque ergo hunc casum, etiamsi in suo genere facilis videatur, calculus expedire sinit. Verum si ponamus corpus $B$ in ipso plano $AJB$, in quod axes principales aequalia momenta inertiae habentes incidunt, moveri, calculi difficultates superare licet, qui casus propterea meretur, ut omni cura evolvatur. Cum autem corpus $M$ ita comparatum accipiatur, ut bina momenta inertiae, quae axibus $JA$ et $JB$ respondent, sint inter se aequalia, ei quasi unicus axis $JC$ relinquitur, quoniam omnes axes in plano $AJB$ assumti pari proprietate sunt praediti, sectionem per hoc planum factam tanquam aequatorem corporis spectare poterimus, praecipue cum corpori motum rotatorium quemcunque circa axem $JC$ tribuere liceat. Quomodocunque scilicet corpus $M$ circa axem $JC$ gyretur, si alterum corpus $B$ in ipso ejus aequatoris plano $AJB$ moveatur, motum ejus calculo definire poterimus, id quod in sequente problemate praestabimus.

136. **Problema.** (Fig. 182.) Si corpus $M$, momenta inertiae respectu axium $JA$ et $JB$ aequalia habens, utcunque gyretur circa axem $JC$, alterumque corpus $N$ in ipso illius plano aequatoris $AJB$ moveatur, hujus motum respectivum definire.

**Solutio.** Cum sit $bb = aa$, omnia momenta inertiae ad axes in plano aequatoris sumtos relata sunt $= Maa$, momentum inertiae autem respectu axis $JC = Mcc$, circa quem corpus gyratur. Deinde ob applicatam $z = 0$, si corpus $N$ in plano aequatoris tempore $= t$ confecerit arcum $AN$, ponamusque coordinatas $JX = x$, $XN = y$ et distantiam $JN = v$, ut sit $xx + yy = vv$, motus quaesitus his duabus aequationibus continetur

$$dx^2 + dy^2 = Ddt^2 + 4g(M + N)dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{2aa + cc}{2v^3} - \frac{3aa}{2v^3}\right) \quad \text{et} \quad ydx - xdy = Edt.$$

Cum ergo sit $ydy + xdx = vdv$, erit $EEdt^2 + vvdv^2 = (yy + xx)(dx^2 + dy^2) = vv(dx^2 + dy^2)$, ideoque

$$dv^2 + \frac{EEdt^2}{vv} = Ddt^2 + 4g(M + N)dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{cc - aa}{2v^3}\right) \quad \text{et}$$

$$dt = \frac{vdv}{\sqrt{\left(Dvv + 4g(M + N)v - EE + \frac{2g(cc - aa)(M + N)}{v}\right)}}.$$

Praeterea vero posito angulo $AJN = \varphi$, ut sit $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$, erit $ydx - xdy = -vvd\varphi$, hincque sumto $E$ negativo, $d\varphi = \frac{Edt}{vv}$, ac propterea

$$d\varphi = \frac{Edv}{v\sqrt{\left(Dvv + 4g(M+N)v - EE + \frac{2g(cc-aa)}{v}(M+N)\right)}}.$$

Statuamus $v = \frac{f}{u}$, ut obtineamus $dt = \frac{ffd\varphi}{Euu}$ et

$$d\varphi = \frac{-Edu}{\sqrt{\left(Dff + 4g(M+N)fu - EEuu + \frac{2g}{f}(cc-aa)(M+N)u^3\right)}}.$$

Ponamus $u = 1 + n\cos s$, ut ob $du = -nds\sin s$, differentiale $du$ et propterea etiam $dv$ duobus casibus evanescat: $s = 0$ et $s = 180^0$, ac necesse est, ut quoque denominator seu formula irrationalis evanescat iisdem casibus, quod fieri nequit, nisi ea factorem habeat $\sin s$. Facta autem substitutione $u = 1 + n\cos s$, quantitas signo radicali involuta abit in hanc formam, posito brevitatis causa $\frac{2g}{f}(cc-aa)(M+N) = L$

$$\begin{array}{lll} Dff & & \\ 4g(M+N)f + 4ng(M+N)f\cos s & & \\ -EE & -2nEE\cos s & -nnEE\cos^2 s \\ +L & +3nL\cos s & +3nnL\cos^2 s + n^3L\cos^3 s \end{array}$$

scribamus pro $\cos^2 s$ valorem $1 - \sin^2 s$, ut sit $\cos^3 s = \cos s - \sin^2 s\cos s$, fietque haec quantitas

$$\begin{array}{l} + Dff + 4g(M+N)f - (1+nn)EE + (1+3nn)L \\ + (4ng(M+N)f - 2nEE + n(3+nn)L)\cos s \\ + nn(EE - 3L - nL\cos s)\sin^2 s \end{array}$$

ac membra a $\sin^2 s$ immunia seorsim ad nihilum reducantur, ut constantes $D$ et $E$ per integrationes inductae per constantes novas assumtas $f$ et $n$ determinentur, quo pacto obtinebimus

$$EE = 2fg(M+N) + \tfrac{1}{2}(3+nn)L$$

$$\text{et}\quad Dff + 2(1-nn)fg(M+N) - \tfrac{1}{2}(1-nn)^2L = 0,$$

$$\text{seu}\quad Dff = -2(1-nn)fg(M+N) + \tfrac{1}{2}(1-nn)^2L,$$

unde denominator irrationalis prodit

$$n\sin s\sqrt{\left(2fg(M+N) - \tfrac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s\right)}$$

hincque

$$d\varphi = \frac{Eds}{\sqrt{\left(2fg(M+N) - \frac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s\right)}}$$

$$\text{et}\quad dt = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2\sqrt{\left(2fg(M+N) - \frac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s\right)}},$$

unde haud difficulter quantitates $\varphi$ et $t$ per variabilem $s$, ex eaque etiam $v = \frac{f}{1+n\cos s}$ definire licet.

**137. Coroll. 1.** Si $n=0$, ob $v=f$ corpus $N$ in circulo circa $J$ revolvetur motu uniformi, eritque celeritas angularis

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{E}{ff}=\frac{1}{ff}\sqrt{\left(2fg\,(M+N)+\frac{3g}{f}(cc-aa)\,(M+N)\right)}$$

posito pro $L$ ejus valore, ex quo haec celeritas erit quoque

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\sqrt{2g\,(M+N)}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\left(1+\frac{3\,(cc-aa)}{2ff}\right)}.$$

**138. Coroll. 2.** At si $n>1$, corpus $N$ ita movebitur, ut absolutis angulis $s=0^\circ$, $360^\circ$, $2.360^\circ$, $3.360^\circ$, etc. semper ad eandem distantiam minimam $v=\frac{f}{1+n}$ revertatur, angulis autem $s=180^\circ$, $3.180^\circ$, $5.180^\circ$, etc. absolutis, ad distantiam maximam $v=\frac{f}{1-n}$ perveniat. Illis scilicet casibus in abside ima, his vero in abside summa versabitur.

**139. Coroll. 3.** Cum autem anguli $s$ non sint angulis $\varphi$ aequales, loca absidum non iisdem angulis $AJN=\varphi$ successive respondebunt, unde hoc motu linea absidum mobilis est censenda, numerus vero $n$, quo discrimen inter distantiam maximam et minimam definitur, haud incongrue excentricitas, angulus $s$ vero anomalia vera dicetur.

**140. Coroll. 4.** Si pro $L$ valorem assumtum restituamus, erit

$$d\varphi=\frac{ds\sqrt{1+\frac{(3+nn)\,(cc-aa)}{2ff}}}{\sqrt{\left(1-\frac{(3-nn)\,(cc-aa)}{2ff}-\frac{n\,(cc-aa)\cos s}{ff}\right)}}$$

$$\text{et}\qquad dt\sqrt{2fg\,(M+N)}=\frac{ffds}{(1+n\cos s)^2\sqrt{\left(1-\frac{(3-nn)\,(cc-aa)}{2ff}-\frac{n\,(cc-aa)\cos s}{ff}\right)}}.$$

Ab harum ergo duarum formularum integratione tota problematis solutio pendet.

**141. Scholion 1.** Fieri posse videtur, ut formulae hae irrationales adeo fiant imaginariae, id quod etiam in formula $\sqrt{\left(1+\frac{3\,(cc-aa)}{2ff}\right)}$ locum haberet, si esset $2ff+3cc<3aa$, quo casu vis attractrix in distantia $f$, quae est $=\frac{MN}{ff}\left(1+\frac{3\,(cc-aa)}{2ff}\right)$, fuerit negativa, quod utique est absurdum. Verum meminisse oportet formulas, quas supra pro vi attractrice invenimus, expressis verbis ex hac hypothesi esse deductas, quod distantia, quae hic est $=f$, fit praegrandis prae corporis attrahentis magnitudine, a qua litterae $a$ et $c$ pendent. Quare in omnibus his solutionibus hoc primarium est requisitum, ut quantitas $f$ vehementer excedat $a$ et $c$, hincque fractio $\frac{cc-aa}{ff}$ semper sit quam minima. Atque ob hanc causam formulae inventae semper realiter motum quaesitum pro nostro quidem instituto definire sunt censendae. Si enim motus ita esset comparatus, ut corpus $N$ nimis prope ad alterum accederet, tum ne quidem ejus determinationem hic quidem suscipere liceret.

**142. Scholion 2.** Cum igitur quantitas $\frac{cc-aa}{ff}$ per hypothesin sit valde exigua, approximationibus adhibendis adipiscemur has formulas

$$d\varphi = ds\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff} + \frac{n(cc-aa)}{2ff}\cos s\right)$$

$$\text{et}\quad dt\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2}\left(1 + \frac{(3-nn)(cc-aa)}{4ff} + \frac{n(cc-aa)}{2ff}\cos s\right),$$

quarum illius integrale est

$$\varphi = \text{Const.} + \left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)s + \frac{n(cc-aa)}{2ff}\sin s,$$

altera vero, prout excentricitas $n$ fuerit unitate vel minor vel major vel eidem aequalis, singulari modo integrari debet, pro quo negotio ea in hanc formam transfundatur

$$dt\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2}\left(1 + \frac{(1-nn)(cc-aa)}{4ff} + \frac{(cc-aa)\,ds}{2(1+n\cos s)}\right).$$

Jam vero casu $n < 1$ supra ostendimus esse

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}$$

$$\text{et}\quad \int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)},$$

deinde casu, quo $n = 1$,

$$\int\frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s}\quad\text{et}\quad \int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}.$$

Tum vero casu, quo $n > 1$,

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

$$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Hinc ergo pro casu $n < 1$ habebimus

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{nff\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}$$

$$+ \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(1-nn)}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n(cc-aa)\sin s}{4(1+n\cos s)}.$$

Tum vero pro casu $n = 1$

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{ff(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2} + \frac{(cc-aa)\sin s}{2(1+\cos s)}.$$

Ac denique pro casu $n > 1$

$$t\sqrt{2fg(M+N)} = \frac{nff\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{ff}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}$$

$$- \frac{n(cc-aa)\sin s}{4(1+n\cos s)} + \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(nn-1)}}\log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Hunc quidem casum, quo $n > 1$, quoniam in mundo nusquam locum habere videtur, relinquentes, alterum, quo $n < 1$ accuratius persequamur, et quo pacto motus commodissime definiri atque ad datum tempus assignari possit, videamus. Manifestum autem est hunc motum parum a motu in ellipsi facto, quem supra exposuimus, fore diversum.

143. **Problema.** Determinationem motus, quo corpus $N$ in casu praecedentis problematis circa corpus $M$ in plano aequatoris revolvitur, ad calculum revocare.

**Solutio.** Primo cum $s$ exprimat anomaliam veram corporis $N$, hoc est ejus longitudinem ab abside ima computatam, littera vero $\varphi$ longitudinem veram denotet a directione quapiam fixa computatam, ab eadem hac directione fixa longitudo absidis imae erit $= \varphi - s$, quae ergo ita definitur, ut sit

$$\varphi - s = \text{Const.} + \frac{(cc - aa)(3s + n \sin s)}{2ff},$$

unde patet lineam absidum non quiescere, sed in consequentia proferri, si sit $cc > aa$; sin autem fuerit $cc < aa$, retro moveri. Corpus scilicet $N$ ab abside ima egressum ad absidem summam appellet confecto angulo $\varphi = \left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff}\right) 180^\circ$, hoc est majori quam $180^\circ$ si $cc > aa$; contra autem minori si $cc < aa$. In genere autem inventa anomalia vera $= s$, erit longitudo

$$\varphi = \text{Const.} + \left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff}\right) s + \frac{n(cc-aa)}{2ff} \sin s.$$

Sin autem anomaliam veram $s$ spectemus ut datam, erit distantia $JN = v = \frac{f}{1 + n \cos s}$, ubi $f$ contemplamur ut semiparametrum orbitae, et $n$ ejus excentricitatem, etiamsi orbita non sit elliptica. Tum vero pro relatione inter tempus $t$ et anomaliam veram $s$ commode exprimenda introducatur anomalia excentrica $\sigma$, ita ut sit

$$\cos\sigma = \frac{n + \cos s}{1 + n\cos s} \quad \text{et} \quad \sin\sigma = \frac{\sin s \sqrt{(1-nn)}}{1 + n\cos s},$$

unde vicissim ex data $\sigma$ fit

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma} \quad \text{et} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma \sqrt{(1-nn)}}{1 - n\cos\sigma}.$$

His positis habebimus

$$t\sqrt{2fg}\,(M+N) = \text{Const.} + \frac{ff(\sigma - n\sin\sigma)}{(1-nn)\sqrt{(1-nn)}} + \frac{(cc-aa)(3\sigma - n\sin\sigma)}{4\sqrt{(1-nn)}},$$

unde vicissim pro dato tempore $t$ primo anomalia excentrica $\sigma$, ex hacque porro vera $s$, hincque tam longitudo $\varphi$ quam distantia $JN = v$ definiri poterit.

144. **Coroll. 1.** Cum fractio $\frac{cc-aa}{ff}$ sit quam minima, motus lineae absidum erit tardissimus, atque singulis revolutionibus corporis $N$ tantum per angulum $\frac{3(cc-aa)}{2ff} \cdot 360^\circ = \frac{cc-aa}{ff} \cdot 540^\circ$ progredietur.

145. **Coroll. 2.** Tempus porro integrae revolutionis, quo corpus ab abside vel ima vel summa egressum iterum ad eandem revertitur, confecto angulo $\varphi = \left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff}\right) 360^\circ$, reperitur

ponendo $s = 360^0$, unde fit quoque $\sigma = 360^0 = 2\pi$. Ex quo tempus unius revolutionis erit

$$= \frac{2\pi ff}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fg(M+N)}} + \frac{3\pi(cc-aa)}{2(1-nn)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2fg(M+N)}},$$

vel posito semiaxe transverso $\frac{f}{1-nn} = k$, fiet hoc tempus $= \frac{\pi}{\sqrt{2g(M+N)}}\left(2k\sqrt{k} + \frac{3(cc-aa)}{2(1-nn)\sqrt{k}}\right)$.

146. **Coroll. 3.** Si anomaliam mediam seu angulum tempori proportionalem, qui absoluta una revolutione evadat $= 360^0$, introducamus, eamque ponamus $= \tau$, debet esse

$$t\sqrt{2fg}(M+N) = \tau\left(\frac{ff}{(1-nn)\sqrt{(1-nn)}} + \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(1-nn)}}\right),$$

hincque fiet $$\tau = \sigma - n\left(1 - \frac{(1-nn)(cc-aa)}{2ff}\right)\sin\sigma,$$

unde, ut supra, facile ex data anomalia media $\tau$ anomalia excentrica $\sigma$ colligitur.

147. **Scholion 1.** Ut intelligamus quanta hujusmodi perturbatio ob figuram corporum coelestium non sphaericam oriri debeat, tribuamus corpori $M$, quod ex materia constet homogenea, figuram sphaeroidis elliptici, revolutione ellipsis circa axem $CJ$ geniti, cujus alter semiaxis $JC$, circa quem fit revolutio, sit $= C$, alter vero seu semidiameter aequatoris $= A$, ita ut hoc sphaeroides sit compressum si $A > C$, elongatum vero si $A < C$. Jam supra § 44 vidimus fore pro nostris momentis inertiae $aa = bb = \frac{1}{5}(AA + CC)$ et $cc = \frac{2}{5}AA$, unde fit $cc - aa = \frac{1}{5}(AA - CC)$. Corpus ergo sphaeroidicum compressum, cujusmodi est sol et terra ac sine dubio omnes planetae principales, efficit, ut lineae absidum progrediantur, quae regrederentur, si sphaeroides esset oblongum. Jam in terra est quasi $A = \frac{201}{200}C$ et $AA - CC = \frac{1}{100}CC$, ergo $cc - aa = \frac{1}{500}CC$. Hinc si statuatur $f = 60C$, ut fere evenit in luna, erit $\frac{cc-aa}{ff} = \frac{1}{500.60.60}$. Quare hinc linea absidum orbitae lunaris singulis revolutionibus seu mensibus progrederetur per $\frac{1}{500.60.60}\cdot 540^0 = 1'' 5'''$, et unius anni intervallo per $14''$, qui effectus prae eo, qui ab aliis causis oritur, facile negligi potest. In sole autem $cc - aa$ multo minus est quam $\frac{1}{500}CC$, unde in planetis primariis hinc nulla perturbatio sensibilis oriri est censenda. In Jove autem, quia ob tam celerem motum vertiginis est circiter $A = \frac{11}{10}C$, erit $AA - CC = \frac{1}{5}CC$ hincque $cc - aa = \frac{1}{25}CC$. Cum jam pro primo satellite sit quasi $f = 6C$, una revolutione hujus satellitis linea absidum progreditur per angulum $\frac{1}{25.6.6}\cdot 540^0 = 36'$, siquidem orbitam ejus in plano aequatoris Jovis statuamus, unde cum hic effectus producatur tempore $42\frac{1}{2}$ horarum, intervallo unius diei erit $20'$ et unius anni $121^0\,45'$, cujusmodi velox absidum motus nusquam alibi est observatus; in reliquis autem Jovis satellitibus multo minor esse debet, ob majorem eorum distantiam. At Saturnus, si annulum cum eo conjunctim spectemus, referet sphaeroides multo magis compressum, ex quo in ejus satellitibus multo velocior motus absidum generari debet. Hic certe maxime notatu est dignum in orbitis satellitum Jovis, ac praecipue primi, tam enormem

lineae absidum mutabilitatem inesse debere, quae tantum a figura Jovis non sphaerica proficiscatur; quod phaenomenon si per observationes confirmari posset, mirifice theoriae attractionis universalitatem confirmaret.

148. **Scholion 2.** Quanquam in hoc motu, quem hic definivimus, tam via a corpore descripta, quam temporis ratio areis proportionalis maxime est transcendens, tamen calculum ita commode administrare licuit, ut determinatio motus vix difficilior, quam in casu ellipsis simplicis evaderet. Totum scilicet discrimen huc est perductum, ut linea absidum mobilis statueretur, dum reliqua omnia prorsus cum motu elliptico supra exposito conveniunt. Hoc compendio Astronomi jam pridem feliciter sunt usi, dum motus planetarum primariorum ita repraesentant, ac si in ellipsibus mobilibus circa solem revolverentur, in motu autem lunae insuper tam excentricitatem quam parametrum ellipsis variabilem statui oportere agnoverunt; quae idea eximium calculi alias intricatissimi compendium largitur. Atque non solum haec ita se habent, quando curva percursa sita est in eodem plano, sed etiam quando ejus planum est variabile; tum autem hujus variabilitatis rationem singulari modo ita ad quodpiam planum fixum referri convenit, ut ad quodvis tempus tam intersectio quam inclinatio planorum definiatur.

149. **Scholion 3.** Hoc modo approximationem institui conveniet, quando formulae analyticae, quibus motus determinatur, resolutionem non admittunt, quemadmodum in hoc capite usu venit, ubi hunc solum postremum casum, quo corpus $M$ bina momenta inertiae respectu axium $JA$ et $JB$ aequalia habere, alterumque corpus $N$ in ipso horum axium plano $AJB$ moveri ponebatur, expedire licuit. Fundamentum autem hujus approximationis in hoc est situm, quod inter vires corpus $N$ sollicitantes una prae ceteris eminet, quae ad punctum quasi fixum $J$ dirigitur et quadratis distantiarum reciproce est proportionalis, reliquae autem vires prae hac sint valde exiguae. Tum enim motus corporis $N$ non multum a ratione motus in sectione conica facti differet, cujus aberrationem tantum ab ista lege definivisse sufficiet. Quemadmodum ergo his casibus ope approximationis ad solutionem pervenire liceat, in sequente capite generatim explicabimus, in quo duplex investigatio erit instituenda, prout motus corporis $N$ vel in eodem plano absolvetur, vel secus.

---

## Caput V.

### Determinatio motus corporis, quando inter vires, quibus sollicitatur, una ad punctum fixum tendens, quadrato distantiae ab eo est reciproce proportionalis, reliquae vero vires prae illa sunt valde parvae.

150. **Problema.** (Fig. 182.) Si corpus $N$ circa punctum quasi fixum $J$ in eodem plano moveatur, atque ad id trahatur vi quadrato distantiae reciproce proportionali, praeterea vero a viribus quibuscunque illius respectu valde parvis, corporis motum definire.

**Solutio.** Elapso tempore $T$ sit distantia $JN = v$ et angulus $AJN = \varphi$, ut sint

$$JX = x = v\cos\varphi \quad \text{et} \quad XN = y = v\sin\varphi.$$

Ponamus jam vim secundum directionem $NJ$ esse $=\frac{LN}{vv}$, ac praeterea adesse vires valde parvas $NP$ et $NQ$, secundum directiones $JX$ et $XN$ agentes, et habebimus has aequationes:

$$ddx = -2g\,dt^2\left(\frac{Lx}{v^3}+P\right) \quad \text{et} \quad ddy = -2g\,dt^2\left(\frac{Ly}{v^3}+Q\right),$$

unde concludimus: $x\,ddy - y\,ddx = -2g\,dt^2\,(Qx-Py)$, hincque integrando

$$x\,dy - y\,dx = -2g\,dt\int dt\,(Qx-Py), \quad \text{seu} \quad vv\,d\varphi = -2g\,dt\int v\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi).$$

Statuamus nunc $v=\frac{p}{1+q\cos s}$, ubi non solum angulus $s$, qui denotet anomaliam veram, sed etiam semiparameter $p$ et excentricitas $q$ sint quantitates variabiles, quarum variabilitas autem sit valde parva utpote a viribus $P$ et $Q$ proficiscens, quae si evanescerent, utique tam $p$ quam $q$ forent quantitates constantes. Ponamus brevitatis gratia $S=-2g\int v\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)$, ut habeamus

$$d\varphi = \frac{S\,dt\,(1+q\cos s)^2}{pp}.$$

Deinde ex primis aequationibus concludimus

$$x\,ddx + y\,ddy = -2g\,dt^2\left(\frac{L}{v}+Px+Qy\right);$$

at est $\quad x\,ddx+y\,ddy+dx^2+dy^2 = d.v\,dv = v\,ddv+dv^2$ et $dx^2+dy^2=dv^2+vv\,d\varphi^2$,

hincque

$$x\,ddx+y\,ddy = v\,ddv - vv\,d\varphi^2,$$

$$\text{seu} \quad ddv - v\,d\varphi^2 = -2g\,dt^2\left(\frac{L}{vv}+P\cos\varphi+Q\sin\varphi\right),$$

ubi si pro $d\varphi$ valorem inventum substituamus, nanciscemur

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{SS\,dt\,(1+q\cos s)^3}{p^3} - \frac{2gL\,dt\,(1+q\cos s)^2}{pp} - 2g\,dt\,(P\cos\varphi+Q\sin\varphi).$$

Hic primum observo si praeter $P$ et $Q$ etiam excentricitas $q$ evanesceret, prodire debere $ddv=0$, unde necesse est sit $SS=2gLp$ et $S=\sqrt{2gLp}$. Quare habebimus

$$dS = \frac{dp}{2\sqrt{p}}\sqrt{2gL} = -2g\,v\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi),$$

$$\text{ideoque} \qquad dp = \frac{-4g\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,p\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\sqrt{2gL}} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}}.$$

Tum vero nostra aequatio adhuc resolvenda erit

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{2gLq\,dt\cos s}{pp}(1+q\cos s)^2 - 2g\,dt\,(P\cos\varphi+Q\sin\varphi).$$

Jam quia per hypothesin dum fit $\sin s=0$, etiam $\frac{dv}{dt}$ evanescere debet, statuamus $\frac{dv}{dt}=Vq\sin s$, eritque

$$Vq\,dt\sin s = dv = \frac{-4g\,dt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,p\sqrt{p}}{(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}} - \frac{pd.\,q\cos s}{(1+q\cos s)^2},$$

ita ut sit

$$d.q\cos s = \frac{-Vqdt\sin s\,(1+q\cos s)^2}{p} - \frac{4gdt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}.$$

Porro autem ob $\frac{ddv}{dt} = qdV\sin s + Vd.q\sin s$, erit

$$d.q\sin s = \frac{-qdV\sin s}{V} + \frac{2gLqdt\cos s}{Vpp}(1+q\cos s)^2 - \frac{2gdt\,(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)}{V},$$

ex quibus duabus aequationibus concluditur

$$dq = \frac{-Vqdt\sin s\cos s\,(1+q\cos s)^2}{p} - \frac{4gdt\cos s\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}$$
$$- \frac{qdV\sin^2 s}{V} + \frac{2gLqdt\sin s\cos s}{Vpp}(1+q\cos s)^2 - \frac{2gdt\sin s\,(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)}{V},$$

quae expressio evanescere debet casu $P = 0$ et $Q = 0$, ubi simul $V$ fieret constans, ex qua conditione prodit

$$VV = \frac{2gL}{p} \quad \text{et} \quad V = \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad dv = qdt\sin s\,\sqrt{\frac{2gL}{p}}.$$

Praeterea ob

$$\frac{dV}{V} = \frac{-dp}{2p} = \frac{2gdt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\,\sqrt{2gL}},$$

erit
$$d.q\cos s = \frac{-qdt\sin s\,(1+q\cos s)^2\,\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} - \frac{4gdt\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}$$

$$d.q\sin s = \frac{qdt\cos s\,(1+q\cos s)^2\,\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} - \frac{2gdt\,(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\,\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}$$
$$- \frac{2gqdt\sin s\,(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\,\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\,\sqrt{2gL}},$$

unde colligimus

$$dq = \frac{-2gdt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\left(2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\cos s + (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\sin s + \frac{q(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin^2 s}{1+q\cos s}\right),$$

$$qds = \frac{qdt(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} + \frac{2gdt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\left(2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s - (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\cos s - \frac{q(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right),$$

ita ut hinc sit

$$ds = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\,\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}} + \frac{2gdt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\left(\frac{2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s}{q} - \frac{(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\cos s}{q} - \frac{(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right).$$

Inde autem variatio excentricitatis $q$ definitur, aeque ac semiparametri $p$, quibus inventis pro ipso motu erit

$$v = \frac{p}{1+q\cos s} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\,\sqrt{2gL}}{p\sqrt{p}}.$$

Cum deinde $\varphi - s$ designet longitudinem absidis imae, et haec erit variabilis, habebiturque

$$d.(\varphi - s) = \frac{2gdt\sqrt{p}}{q\sqrt{2gL}}\left((P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\cos s - 2(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s + \frac{q(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right)$$

sicque omnia, quae ad motus determinationem attinent, sunt determinata.

151. **Coroll. 1.** Si ponamus $Q\cos\varphi - P\sin\varphi = T$ et $Q\sin\varphi + P\cos\varphi = U$, ut aequationes resolvendae sint:

$$vdd\varphi + 2dvd\varphi = -2gTdt^2 \quad \text{et} \quad ddv - vd\varphi^2 = \frac{-2gLdt^2}{vv} - 2gUdt^2,$$

eae posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$ ita resolventur, ut sit

$$1.\ d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{p}}\sqrt{2gL}, \qquad 2.\ d\varphi - ds = \frac{2gdt\sqrt{p}}{q\sqrt{2gL}}\left(U\cos s - 2T\sin s + \frac{qT\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right),$$

$$3.\ dp = \frac{-4gTpdt\sqrt{p}}{(1+q\cos s)\sqrt{2gL}}, \qquad 4.\ dq = \frac{-2gdt\sqrt{p}}{\sqrt{2gL}}\left(2T\cos s + U\sin s + \frac{qT\sin^2 s}{1+q\cos s}\right).$$

152. **Coroll. 2.** Si ex formulis N⁰ 2. 3. 4. quantitates $T$ et $U$ elidantur, pervenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq\cos s + q\,(d\varphi - ds)\sin s}{1+q\cos s},$$

quae integrata quatenus licet dat

$$l\,\frac{p}{1+q\cos s} = \int\frac{qd\varphi\sin s}{1+q\cos s} = \int\frac{qdt\,(1+q\cos s)\sin s}{p\sqrt{p}}\sqrt{2gL}.$$

153. **Coroll. 3.** Cum quantitates $P$ et $Q$ sint per hypothesin valde parvae, erunt quantitates $p$ et $q$ fere constantes et $d\varphi = ds$, unde fit

$$dt = \frac{pds\sqrt{p}}{(1+q\cos s)^2\sqrt{2gL}},$$

cujus integrale spectatis $p$ et $q$ ut constantibus exhiberi poterit, quod cum sit prope verum, sufficiet deinceps hunc valorem pro $dt$ in formulis 2, 3, 4 posuisse, ex iisque sumta sola $s$ pro variabili, valores proxime veros pro $\varphi - s$, $p$ et $q$ elicuisse.

154. **Coroll. 4.** Hoc autem pro $dt$ valore inducto, aequationes nostrae evolvendae erunt:

$$2\quad d\varphi - ds = \frac{ppds}{Lq\,(1+q\cos s)^2}\left(U\cos s - 2T\sin s + \frac{qT\sin s\cos s}{1+q\cos s}\right),$$

$$3.\quad dp = \frac{-2Tp^3ds}{L\,(1+q\cos s)^3},$$

$$4.\quad dq = \frac{-ppds}{L\,(1+q\cos s)^2}\left(2T\cos s + U\sin s + \frac{qT\sin^2 s}{1+q\cos s}\right).$$

Revera autem in his formulis pro $ds$ scribi oporteret $d\varphi$, sed quia saltem proxime est $d\varphi = ds$, iis in appropinquatione uti licebit.

155. **Scholion 1.** Hoc modo solutio problematis ad determinationem motus in ellipsi variabili perducitur, ita ut ratio motus similis sit illi, quam supra pro casu duorum corporum sphaericorum assignavimus, praeterquam quod hic elementa ellipsis omnia variabilia statuantur. Primo enim tam semiparameter ellipsis $p$ quam excentricitas $q$ est variabilis, tum vero etiam ipsa linea absidum mobilis assumitur, denotante angulo $s$ anomaliam veram, secundum eandem ideam, quam supra constituimus. Atque haec reductio eo magis est notatu digna, quod quaedam operationes prorsus pro

arbitrio nostro sint institutae, ex quo apparet infinitis aliis modis etiam posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$ relationem inter differentialia $dp$, $dq$, $ds$ et $d\varphi$ ita constitui posse, ut motus rationi satisfiat. Loco enim determinationum $SS = 2gLp$ et $VV = \frac{2gL}{p}$, eosdem valores quantitatibus quibusdam exiguis per vires $T$ et $V$ definiendis augere liceret, quo pacto conditiones propositae aeque impleri possent, ut scilicet facto tam $q = 0$ quam $\sin s = 0$, evanescat $\frac{dv}{dt}$, insuperque casu $T = 0$, $V = 0$ et $q = 0$ prodeat $\frac{ddv}{dt^2} = 0$. Cum enim loco unius variabilis $v$ tres novae $p$, $q$ et $s$ introducantur, mirum non est binarum determinationem arbitrio nostro relinqui, quam ita constitui convenit, ut calculus commodissimus reddatur, in quo quidem negotio saepenumero maxima difficultas deprehenditur. Atque in evolutione quidem, qua hic sumus usi, parum congruere videtur, quod expressio pro $d\varphi - ds$ inventa per excentricitatem $q$ sit divisa, qua conditione determinatio motus lineae absidum lubrica redditur, praecipue quando excentricitas $q$ est valde parva. Siquidem calculum perfecte expedire liceret, nullum incommodum hinc esset metuendum, quoniam perpetuo absides ibi existunt, ubi distantia $v$ est vel maxima vel minima, ita ut hic nulli incertitudini locus relinquatur. At cum approximatione contenti esse debeamus, ob hanc causam haud levia impedimenta occurrere possunt.

156. **Scholion 2.** Solutioni igitur summam extensionem tribuamus, et cum aequationes propositae sint:

$$vdd\varphi + 2dvd\varphi = -2gTdt^2, \qquad ddv - vd\varphi^2 = \frac{-2gLdt^2}{vv} - 2gVdt^2,$$

posito $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, statuamus $-2g\int Tvdt = \sqrt{2gp}\,(L+X) = \frac{vvd\varphi}{dt}$, eritque

$$\frac{-2gTpdt}{1+q\cos s} = \frac{dp}{2\sqrt{p}}\sqrt{2g}\,(L+X) + \frac{dX\sqrt{2gp}}{2\sqrt{(L+X)}}, \text{ hincque}$$

$$dp = \frac{-2Tpdt\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{pdX}{L+X} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2gp}\,(L+X)}{pp}.$$

Porro statuatur $\frac{dv}{dt} = q\sin s\sqrt{\frac{2g(L+Y)}{p}}$, eritque primo

$$qdt\sin s\sqrt{\frac{2g(L+Y)}{p}} = \frac{-2Tpdt\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)^2\sqrt{(L+X)}} - \frac{pdX}{(1+q\cos s)(L+X)} - \frac{pd.q\cos s}{(1+q\cos s)^2},$$

unde colligimus

$$d.q\cos s = \frac{-qdt\sin s\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g(L+Y)}}{p\sqrt{p}} - \frac{2Tdt\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{(1+q\cos s)\,dX}{L+X}.$$

Deinde ex forma $\frac{dv}{dt}$ assumta deducimus

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{\sqrt{2g(L+Y)}}{\sqrt{p}}\,d.q\sin s - \frac{qdp\sin s\sqrt{2g(L+Y)}}{2p\sqrt{p}} + \frac{qdY\sin s\sqrt{2g}}{2\sqrt{p(L+Y)}}, \quad \text{seu}$$

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{\sqrt{2g(L+Y)}}{\sqrt{p}}\,d.q\sin s + \frac{2gTqdt\sin s\sqrt{(L+Y)}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} + \frac{qdX\sin s\sqrt{2g(L+Y)}}{2(L+X)\sqrt{p}} + \frac{qdY\sin s\sqrt{2g}}{2\sqrt{p(L+Y)}}.$$

At ex aequatione proposita est

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{2gdt\,(1+q\cos s)^3\,(L+X)}{pp} - \frac{2gLdt\,(1+q\cos s)^2}{pp} - 2gVdt, \quad \text{seu}$$

$$\frac{ddv}{dt} = \frac{2gLqdt\cos s\,(1+q\cos s)^2}{pp} + \frac{2gXdt\,(1+q\cos s)^3}{pp} - 2gVdt,$$

qua expressione cum praecedente collata fit

$$d\,.\,q\sin s = \frac{2gLqdt\cos s\,(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} + \frac{2gXdt\,(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} - \frac{2gVdt\sqrt{p}}{\sqrt{2g}\,(L+Y)} - \frac{Tqdt\sin s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}}$$

$$- \frac{qdX\sin s}{2(L+X)} - \frac{qdY\sin s}{2(L+Y)}.$$

Hinc concludimus fore

$$dq = \frac{2gXdt\sin s\,(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} - \frac{2gVdt\sin s\sqrt{p}}{\sqrt{2g}\,(L+Y)} - \frac{dX\cos s\,(1+q\cos s)}{L+X} - \frac{qdX\sin^2 s}{2(L+X)}$$

$$\frac{-2gYqdt\sin s\cos s(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} - \frac{2Tdt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{Tqdt\sin^2 s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{qdY\sin^2 s}{2(L+Y)},$$

$$qds = \frac{2gLqdt\,(1+q\cos s)^2}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} + \frac{2gYqdt\sin^2 s\,(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} + \frac{2Tdt\sin s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} + \frac{dX\sin s\,(1+q\cos s)}{L+X}$$

$$+ \frac{2gXdt\cos s\,(1+q\cos s)^3}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} - \frac{Vdt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+Y)}} - \frac{qdX\sin s\cos s}{2(L+X)}$$

$$- \frac{Tqdt\sin s\cos s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{qdY\sin s\cos s}{2(L+Y)}.$$

Si jam quantitates arbitrariae $X$ et $Y$ ita accipi possent, ut haec postrema expressio per $q$ fieret divisibilis, incommodum supra memoratum tolleretur, id quod eveniret, si fieret

$$\frac{2gXdt\cos s}{p\sqrt{2gp}\,(L+Y)} + \frac{2Tdt\sin s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{Vdt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+Y)}} + \frac{dX\sin s}{L+X} = 0,$$

vel formulae per $q$ multiplicatae.

En ergo has determinationes, quae ob binas arbitrarias $X$ et $Y$, maxime generales sunt habendae:

1. $$d\varphi = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g}\,(L+X)}{p\sqrt{p}} \quad \text{existente} \quad v = \frac{p}{1+q\cos s},$$

2. $$d\varphi - ds = \frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g}}{p\sqrt{p}\,(L+Y)}\Big(\sqrt{(L+X)}\,(L+Y) - L - Y\sin^2 s - \frac{1}{q}X\cos s\,(1+q\cos s)\Big)$$

$$- \frac{2Tdt\sin s\sqrt{2gp}}{q\sqrt{(L+X)}} + \frac{Vdt\cos s\sqrt{2gp}}{q\sqrt{(L+Y)}} + \frac{Tdt\sin s\cos s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}}$$

$$+ \frac{dX\sin s\cos s}{2(L+X)} + \frac{dY\sin s\cos s}{2(L+Y)} - \frac{dX\sin s\,(1+q\cos s)}{q(L+X)},$$

3. $$dp = \frac{-2Tpdt\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}} - \frac{pdX}{L+X},$$

4. $$dq = \frac{dt\sin s\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g}}{p\sqrt{p}\,(L+Y)}\Big(X(1+q\cos s) - Yq\cos s\Big)$$

$$- \frac{2Tdt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{Vdt\sin s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+Y)}} - \frac{Tqdt\sin^2 s\sqrt{2gp}}{(1+q\cos s)\sqrt{(L+X)}}$$

$$- \frac{qdX\sin^2 s}{2(L+X)} - \frac{qdY\sin^2 s}{2(L+Y)} - \frac{dX\cos s\,(1+q\cos s)}{L+X}.$$

Notandum autem est quantitates $X$ et $Y$ valde parvas capi debere, easque quatenus a $p$ et $q$ pendent, pro constantibus esse habendas; sin autem insuper angulum $\varphi$ vel $s$ involvant, in earum differentiatione loco $d\varphi$ vel $ds$ scribi posse

$$\frac{dt\,(1+q\cos s)^2\sqrt{2g\,(L+X)}}{p\sqrt{p}}.$$

Denique meminisse juvabit esse $dv = qdt\sin s\sqrt{\frac{2g\,(L+Y)}{p}}$.

157. **Scholion 3.** Ut pro litteris $X$ et $Y$ quovis casu commodissimi valores eligantur, id efficiendum videtur, ut quantitatum $p$ et $q$ variabilitas tam exigua reddatur quam fieri potest. Quodsi enim fieri queat, ut hae duae quantitates $p$ et $q$ evadant constantes, nullum est dubium, quin tum motus simplicissimo modo repraesentetur. Semper quidem has litteras $X$ et $Y$ ita definire liceret, ut fieret tam $dp = 0$ quam $dq = 0$, verum tum plerumque reliquae formulae nimis prodirent complicatae, quam ut hinc ullum commodum consequeremur; quare in hoc negotio ita versari conveniet, ut si non commode formulae pro $dp$ et $dq$ inventae ad nihilum redigi queant, eae saltem tam parvae efficiantur, quam fieri poterit, neque tamen ad hoc valores nimis perplexi pro $X$ et $Y$ adhibeantur: id enim imprimis cavendum est, ne hi valores unquam limites quantitatum prae $L$ valde exiguarum superent. Quo igitur hoc judicium ratione formulae $dq$ facilius instituatur, plerumque conveniet eam ita transformari, ut quantitas $v$ cum suo differentiali $dv$, ponendo

$$1+q\cos s = \frac{p}{v} \quad \text{et} \quad qdt\sin s = \frac{dv\sqrt{p}}{\sqrt{2g\,(L+Y)}},$$

introducatur. Hoc modo obtinebimus

$$dq = \frac{pdv}{qvv\,(L+Y)}\left(\frac{pX}{v} - \frac{pY}{v} + Y\right) - \frac{2\,Tdt\cos s\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{pdX\cos s}{v\,(L+X)} - \frac{Vpdv}{q\,(L+Y)} - \frac{Tvdv\sin s}{\sqrt{(L+X)}\,(L+Y)}$$
$$-\frac{qdX\sin^2 s}{2\,(L+X)} - \frac{qdY\sin^2 s}{2\,(L+Y)}.$$

Cum autem sit

$$dp = \frac{-2\,Tvdt\sqrt{2gp}}{\sqrt{(L+X)}} - \frac{pdX}{L+X},$$

si hinc jam valorem idoneum pro $X$ elegerimus, habebimus

$$dq = \frac{pdv}{qv^3\,(L+Y)}\,(pX - pY + vY) + \frac{dp\cos s}{v} - \frac{Vpdv}{q\,(L+Y)} - \frac{Tvdv\sin s}{\sqrt{(L+X)}\,(L+Y)} + \frac{qdp\sin^2 s}{2p}$$
$$+ \frac{Tqvdt\sin^2 s\sqrt{2gp}}{p\sqrt{(L+X)}} - \frac{qdY\sin^2 s}{2\,(L+Y)},$$

ubi termini littera $T$ affecti se mutuo destruunt. Multiplicemus per $q$, et ob $q\cos s = \frac{p}{v} - 1$ et $qq\sin^2 s = qq - \left(\frac{p}{v} - 1\right)^2$, habebimus

$$qdq = \frac{pdv}{v^3\,(L+Y)}\,(pX - pY + vY) + \frac{dp\,(p-v)}{vv} - \frac{Vpdv}{L+Y} + \frac{qq\,dp}{2p} - \frac{dp\,(p-v)^2}{2pvv} - \frac{dY\,(qqvv - (p-v)^2)}{2vv\,(L+Y)},$$

quae reducitur ad hanc formam commodiorem

$$qdq = \frac{pdv\,(pX - pY + vY - Vv^3)}{v^3(L+Y)} - \frac{dp\,(1-qq)}{2p} - \frac{dY\,(qqvv - (p-v)^2)}{2vv\,(L+Y)},$$

unde quovis casu haud difficulter maxime idoneus valor pro $Y$ assumendus colligitur. Vel si ponamus $\frac{p}{1-qq} = r$, fiet

$$\frac{dr}{r} = \frac{2rdv\,(pX - pY + vY - Vv^3) + vdY\,(pr - 2rv + vv)}{v^3\,(L+Y)},$$

quae formula si ad nihilum redigi possit, commodissimam solutionem suppeditabit. Videamus ergo quantum fructum hinc colligere queamus pro casu praecedentis capitis, ubi corpus $N$ circa alterum $M$ in plano $AJB$ movetur.

158. **Problema.** Si corpus sphaericum $N$ circa corpus $M$, figura quacunque praeditum, quod omni motu gyratorio destitutum ponitur, ita moveatur, ut perpetuo in plano binorum axium principalium $AJB$ maneat, ejus motum definire.

**Solutio.** Maneant omnia ut in problemate § 128, ac tantum opus est, ut hic ponamus $z = 0$, unde fiet $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$. Quod si jam illas formulas ad has, quibus hic utimur, accommodemus, habebimus $L = M + N$ et

$$P = \frac{3L\cos\varphi}{2v^4}(3aa + bb + cc - 5aa\cos^2\varphi - 5bb\sin^2\varphi),$$

$$Q = \frac{3L\sin\varphi}{2v^4}(aa + 3bb + cc - 5aa\cos^2\varphi - 5bb\sin^2\varphi),$$

unde deducimus

$$T = \frac{3L\,(bb-aa)\sin\varphi\cos\varphi}{v^4} = \frac{3L\,(bb-aa)\sin 2\varphi}{2v^4},$$

$$V = \frac{3L}{4v^4}(2cc - aa - bb + 3\,(bb-aa)\cos 2\varphi).$$

Statuamus brevitatis gratia $bb - aa = n$ et $2cc - aa - bb = 2m$, eritque

$$T = \frac{3nL\sin 2\varphi}{2v^4} \quad \text{et} \quad V = \frac{3mL}{2v^4} + \frac{9nL\cos 2\varphi}{4v^4}.$$

Ponatur nunc $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, et cum invenerimus

$$dp = \frac{-3nLdt\sin 2\varphi\sqrt{2gp}}{v^3\sqrt{(L+X)}} - \frac{pdX}{L+X},$$

notetur esse $d\varphi = \frac{dt\sqrt{2gp\,(L+X)}}{vv}$, unde fit

$$dp = \frac{-3nLd\varphi\sin 2\varphi}{v\,(L+X)} - \frac{pdX}{L+X},$$

ad quem valorem diminuendum ponamus

$$X = \frac{3nL}{2pv}(\alpha + \cos 2\varphi) + \beta, \quad \text{fietque} \quad dp = \frac{3nL(\alpha + \cos 2\varphi)}{2\,(L+X)}\left(\frac{dp}{pv} + \frac{dv}{vv}\right),$$

ubi $dp$ est quam minimum, et $dv$ involvit excentricitatem $q$ tanquam factorem. Nunc pro expressione $dq$ diminuenda habebimus

$$\frac{v^3 dr}{r}(L+Y) = 2rdv\left(\frac{3nL(\alpha+\cos 2\varphi)}{2v} + \beta p - pY + vY - \frac{3mL}{2v} - \frac{9nL\cos 2\varphi}{4v}\right) + vdY(pr - 2rv + vv),$$

ubi est $r = \frac{p}{1-qq}$. Statuamus $Y = \zeta + \frac{\eta}{v}$, fietque haec expressio

$$2rdv\left(\frac{3\alpha nL}{2v} - \frac{3nL\cos 2\varphi}{4v} + \beta p - \frac{3mL}{2v} - p\zeta - \frac{p\eta}{v} + v\zeta + \eta\right)$$

$$-\eta dv\left(\frac{pr}{v} - 2r + v\right) + (vd\zeta + d\eta)(pr - 2rv + vv),$$

ut jam termini $vdv$ destruantur, sit $\eta = 2r\zeta$; pro terminis autem $dv$ prodit

$$2r\eta - 2pr\zeta + 2r\eta + 2\beta pr = 0 \quad \text{seu} \quad 2\eta - p\zeta + \beta p = 0,$$

hincque $\beta = \zeta\left(1 - \frac{4r}{p}\right)$. Tum vero termini $\frac{dv}{v}$ tollentur sumendo

$$3\alpha nLr - \tfrac{3}{2}nLr\cos 2\varphi - 3mLr - 3pr\eta = 0, \quad \text{hincque}$$

$$\zeta = \frac{\alpha nL}{2pr} - \frac{nL\cos 2\varphi}{4pr} - \frac{mL}{2pr}.$$

Verum ne variabilitas anguli $\varphi$ in differentiatione novum momentum introducat, omittamus hic potius terminum $\cos 2\varphi$, ponamusque $\alpha = 0$, ut sit

$$X = \frac{3nL\cos 2\varphi}{2pv} + \frac{mL(4r-p)}{2ppr} \quad \text{et} \quad Y = \frac{-mL(2r+v)}{2prv}.$$

Vel eodem res redibit, si ponamus $\zeta = 0$, $\eta = 0$, $\beta = 0$, ut sit $Y = 0$ et $\alpha n = m$, ideoque

$$X = \frac{3L}{2pv}(m + n\cos 2\varphi), \quad \text{eritque} \quad \frac{v^3 dr}{r}(L+Y) = \frac{-3nLrdv\cos 2\varphi}{2v} \quad \text{seu} \quad \frac{dr}{rr} = \frac{-3ndv\cos 2\varphi}{2v^4}.$$

Deinde vero pro motu lineae absidum habemus in genere

$$d\varphi - ds = \frac{dt\sqrt{2gp}}{vv\sqrt{(L+Y)}}\left(\sqrt{(L+X)(L+Y)} - L - Y\sin^2 s - \frac{pX\cos s}{qv}\right)$$

$$+ \frac{dp\sin s}{qv} - \frac{dp\sin s\cos s}{2p} + \frac{Vdt\cos s\sqrt{2gp}}{q\sqrt{(L+Y)}} + \frac{dY\sin s\cos s}{2(L+Y)}.$$

Cum nunc sit $Y = 0$ et $\sqrt{(L+X)(L+Y)} = L + \frac{1}{2}X$, erit

$$d\varphi - ds = \frac{3dt(m+n\cos 2\varphi)\sqrt{2gLp}}{4pv^3} + \frac{3ndt\cos s\cos 2\varphi\sqrt{2gLp}}{4qv^4} + \frac{dp\sin s}{qv} - \frac{dp\sin s\cos s}{2p}$$

existente $d\varphi = \frac{dt\sqrt{2gLp}}{vv}\left(1 + \frac{3(m+n\cos 2\varphi)}{4pv}\right)$, unde fit

$$ds = \frac{dt\sqrt{2gLp}}{vv} - \frac{3ndt\cos s\cos 2\varphi\sqrt{2gLp}}{4qv^4} - \frac{dp\sin s}{qv} + \frac{dp\sin s\cos s}{2p}.$$

Est vero $dp = \frac{3L(m+n\cos 2\varphi)}{2(L+X)}\left(\frac{dp}{pv} - \frac{dv}{vv}\right)$ et $dv = \frac{qdt\sin s\sqrt{2gLp}}{p}$, ideoque

$$dp = \frac{3(m + n\cos 2\varphi)\, qdt \sin s \sqrt{2gLp}}{2pvv}.$$

Cum igitur sit proxime $\frac{dt\sqrt{2gLp}}{vv} = ds$, erit $dp = \frac{3(m + n\cos 2\varphi)\, qdt \sin s}{2p}$ atque

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-3nq\, ds \sin s \cos 2\varphi}{2pvv} \quad \text{et}$$

$$d\varphi - ds = \frac{3mds}{4pp}\left(1 + 2\sin^2 s + q\cos s + q\sin^2 s \cos s\right) + \frac{3nds\cos 2\varphi}{4pp}\left(1 - 2\cos 2s - \frac{\cos s}{q} + 2q\sin^2 s \cos s\right),$$

in quibus formulis jam $p$ et $q$ ut constantes et $d\varphi = ds$ spectari possunt. Denique vero ope formulae $d\varphi = \ldots$ omnia ad tempus $t$ revocari poterunt.

### Alia solutio ejusdem problematis.

159. Cum ista solutio formulis differentialibus nimium sit implicata, quoniam eae ex differentio-differentialibus sunt immediate deductae, aliam viam tentemus ad hunc casum accommodatam. Cum enim aequationes principales sint

$$\text{I.} \quad v dd\varphi + 2dv\, d\varphi = \frac{-3ngLdt^2 \sin 2\varphi}{v^4},$$

$$\text{II.} \quad ddv - v d\varphi^2 = \frac{-2gLdt^2}{vv} - \frac{3gLmdt^2}{v^4} - \frac{9gLndt^2\cos 2\varphi}{2v^4},$$

prima per $v$ multiplicata, prius membrum integrabile habebit, integrali existente $vv\,d\varphi$. Integrabile ergo quoque fiet si multiplicetur per $2v^3 d\varphi$, quo pacto in altero membro elementum $dt$ e signo integrali tolletur; prodibit enim

$$v^4 d\varphi^2 = 2gLdt^2\left(C - 3n\int\frac{d\varphi \sin 2\varphi}{v}\right).$$

Sit brevitatis gratia $\int\frac{d\varphi\sin 2\varphi}{v} = S$, ut habeamus $v^4 d\varphi^2 = 2gLdt^2(C - 3nS)$. Deinde prima per $2vd\varphi$ et altera per $2dv$ multiplicatae, in una summa efficiunt

$$2vv\,d\varphi\, dd\varphi + 2v\,dv\,d\varphi^2 + 2dv\,ddv = 2gLdt^2\left(-\frac{2dv}{vv} - \frac{3mdv}{v^4} - \frac{3nd\varphi\sin 2\varphi}{v^3} - \frac{9ndv\cos 2\varphi}{2v^4}\right),$$

quae integrata dat

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2gLdt^2\left(D + \frac{2}{v} + \frac{m}{v^3} + \frac{3n\cos 2\varphi}{2v^3}\right).$$

Cum ergo inde sit $2gLdt^2 = \frac{v^4 d\varphi^2}{C - 3nS}$, hinc commode tempus $t$ eliminatur, obtineturque

$$(C - 3nS)(dv^2 + vv\,d\varphi^2) = v^4 d\varphi^2\left(D + \frac{2}{v} + \frac{2m + 3n\cos 2\varphi}{2v^3}\right)$$

$$\text{et} \quad d\varphi = \frac{dv\sqrt{(C - 3nS)}}{vv\sqrt{\left(D + \frac{2}{v} + \frac{(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2v^3} - \frac{(C - 3nS)}{vv}\right)}}.$$

Jam quoties $dv$ evanescit, necesse est, ut formula irrationalis denominatoris evanescat, quod cum

duobus casibus evenire debeat, quibus angulus quidem $s$ fit vel 0 vel 180°, denominator factorem habebit $\sin s$. Statuamus ergo $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$, et denominator erit

$$D + \frac{2}{p} + \frac{2m + 3n\cos 2\varphi}{2p^3} - \frac{(C - 3nS)}{pp}$$

$$+ \frac{2q\cos s}{p} + \frac{3q\cos s(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p^3} - \frac{2q\cos s(C - 3nS)}{pp}$$

$$+ \frac{3qq\cos^2 s(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p^3} - \frac{qq\cos^2 s(C - 3nS)}{pp}$$

$$+ \frac{q^3\cos^3 s(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p^3}.$$

Fiat nunc $D + \frac{2}{p} + \frac{2m + 3n\cos 2\varphi}{2p^3} - \frac{(C - 3nS)}{pp} + \frac{3qq(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p^3} - \frac{qq(C - 3nS)}{pp} = 0,$

$$1 + \frac{3(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2pp} - \frac{2(C - 3nS)}{p} + \frac{qq(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2pp} = 0,$$

eritque formula irrationalis in denominatore

$$\frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(C - 3nS - \frac{3(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p} - \frac{q\cos s(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p}\right)}$$

$$\text{et} \quad \frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1 - \frac{(3 + q\cos s)(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2p(C - 3nS)}\right)}.$$

Jam ex illis aequationibus quantitates $p$ et $q$ definiantur, quae si esset $m = 0$ et $n = 0$, prodirent: $p = C$ et $qq = 1 + CD$, atque hi erunt quasi valores medii ipsarum $p$ et $q$, qui statuantur $f$ et $k$, ut sit $C = f$ et $D = \frac{kk - 1}{f}$. Deinde cum $m$ et $n$ sint quantitates valde parvae, in terminis per $m$ et $n$ affectis scribere licebit $p = f$ et $q = k$, sicque habebimus

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{(3 + kk)(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2f^3} + \frac{3nS}{ff} \quad \text{et} \quad \frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} + \frac{(1 + 3kk)(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2f^4} + \frac{3nS(1 + kk)}{f^3},$$

unde fit

$$p = f - \frac{(3 + kk)(2m + 3n\cos 2\varphi)}{4f} - 3nS \quad \text{et} \quad qq = kk + \frac{(1 - k^4)(2m + 3n\cos 2\varphi)}{2ff} + \frac{3n(1 - kk)S}{f}.$$

Quoniam nunc habemus valores litterarum $p$ et $q$, ob $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$ erit

$$S = \int\frac{d\varphi(1 + q\cos s)\sin 2\varphi}{p} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} - \frac{dq\cos s}{p} + \frac{qds\sin s}{p} + \frac{qdp\cos s}{pp}, \quad \text{seu}$$

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} - \frac{(pdq - qdp)\cos s}{pp} + \frac{qds\sin s}{p}.$$

At est superioribus formulis differentiandis

$$\frac{dp}{pp} = \frac{3n(3 + kk)d\varphi\sin 2\varphi}{2f^3} - \frac{3n(1 + q\cos s)d\varphi\sin 2\varphi}{ffp}, \quad \text{seu} \quad = \frac{3n(1 - 2k\cos s + kk)d\varphi\sin\varphi}{2f^3} \quad \text{et}$$

$$\frac{2q(pdq - qdp)}{p^3} = \frac{-3n(1 + 3kk)d\varphi\sin 2\varphi}{f^4} + \frac{3n(1 + kk)d\varphi(1 + k\cos s)\sin 2\varphi}{f^4},$$

$$\frac{pdq - qdp}{pp} = \frac{3nd\varphi \sin 2\varphi\,(1 + kk\cos s - 2k)}{2f^3},$$

ex quibus colligitur

$$\frac{dv}{vv} = \frac{3n(1+kk)\,d\varphi \sin^2 s \sin 2\varphi}{2f^3} + \frac{qds \sin s}{p}.$$

At est

$$\frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p}\sqrt{\left(1 - \frac{(3+k\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)}{2ff}\right)} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} - \frac{k(3+k\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)\,d\varphi \sin s}{4f^3}.$$

Ergo $\quad d\varphi - ds = \frac{pd\varphi}{4f^3 q}(6n(1+kk)\sin s \sin 2\varphi + k(3+k\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi)).$

Hic jam spectatis $p$ et $q$ ut constantibus, nempe $p = f$ et $q = k$, erit

$$d\varphi - ds = \frac{d\varphi}{4ffk}(6mk + 2mkk\cos s + 9nk\cos 2\varphi + 3n(1+\tfrac{3}{2}kk)\cos(2\varphi - s) - 3n(1+\tfrac{1}{2}kk)\cos(2\varphi + s)).$$

Cum igitur proxime sit $d\varphi = ds$, erit integrando

$$\varphi - s = \text{Const.} + \frac{3m\varphi}{2ff} + \frac{mk\sin s}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} + \frac{3n(2+3kk)\sin(2\varphi - s)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\sin(2\varphi + s)}{8ffk},$$

qua aequatione relatio inter longitudinem $\varphi$ et anomaliam veram $s$ exprimitur. Tum vero quia $S$ per quantitatem minimam $n$ multiplicatur, sufficiet posuisse

$$dS = \frac{d\varphi}{f}(\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}k\sin(2\varphi - s) + \tfrac{1}{2}k\sin(2\varphi + s)),$$

unde fit $\quad S = \frac{-\cos 2\varphi}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi - s)}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi + s)}{6f},$

hincque deducimus

$$p = f - \frac{m(3+kk)}{2f} - \frac{3n(1+kk)\cos 2\varphi}{4f} + \frac{3nk\cos(2\varphi - s)}{2f} + \frac{3nk\cos(2\varphi + s)}{6f},$$

$$qq = kk + \frac{m(1-k^4)}{ff} + \frac{3nkk(1-kk)\cos 2\varphi}{2ff} - \frac{3nk(1-kk)\cos(2\varphi - s)}{2ff} - \frac{3nk(1-kk)\cos(2\varphi + s)}{6ff}.$$

Denique ut omnia ad tempus $t$ reducamus, habemus

$$dt\sqrt{2gL} = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2\sqrt{(f-3nS)}} = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{f}} + \frac{3nS}{2f\sqrt{f}}\right),$$

cujus integratio per praecedentes formulas in potestate est censenda. Cum enim sit

$$d\varphi = ds\left(1 + \frac{3m}{2ff} + \frac{mk\cos s}{2ff} + \frac{9n\cos 2\varphi}{4ff} + \frac{3n(2+3kk)\cos(2\varphi - s)}{8ffk} - \frac{3n(2+kk)\cos(2\varphi + s)}{8ffk}\right),$$

$$pp = ff - m(3+kk) - \tfrac{3}{2}n(1+kk)\cos 2\varphi + 3nk\cos(2\varphi - s) + nk\cos(2\varphi + s),$$

$$1 + \frac{3nS}{2f} = 1 - \frac{3n\cos 2\varphi}{4ff} - \frac{3nk\cos(2\varphi - s)}{4ff} - \frac{nk\cos(2\varphi + s)}{4ff}, \quad \text{erit}$$

$$pp\,d\varphi\left(1 + \frac{3nS}{2f}\right) = ff\,ds\left(1 - \frac{m(3+2kk)}{2ff} + \frac{mk\cos s}{2ff} - \frac{3nkk\cos 2\varphi}{2ff} + \frac{3n(2+9kk)\cos(2\varphi - s)}{8ffk} - \frac{3n(2-kk)\cos(2\varphi + s)}{8ffk}\right).$$

Porro est

$$q = k + \frac{m(1-k^4)}{2ffk} + \frac{3nk(1-kk)\cos 2\varphi}{4ff} - \frac{3n(1-kk)\cos(2\varphi - s)}{4ff} - \frac{n(1-kk)\cos(2\varphi + s)}{4ff},$$

unde tandem concluditur $dt\sqrt{2fgL} = \frac{ffds}{(1+k\cos s)^2} + \frac{ffWds}{(1+k\cos s)^3}$ existente

$$W = \frac{-3m(2+kk)}{4ff} - \frac{m(1+kk)\cos s}{ffk} + \frac{mkk\cos 2s}{4ff} + \frac{n(8-5kk)\cos 2\varphi}{8ff}$$

$$+ \frac{3n(2+7kk)\cos(2\varphi - s)}{8ffk} + \frac{3n(6+5kk)\cos(2\varphi - 2s)}{16ff}$$

$$- \frac{3n(2+kk)\cos(2\varphi + s)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\cos(2\varphi + 2s)}{16ff}.$$

160. **Coroll. 1.** Formula $\varphi - s$ exprimit longitudinem absidis imae, unde si corpus $N$ nunc fuerit in abside ima, ad absidem summam pertinget confecto angulo $\varphi$, ut ob $s = 180^\circ = \pi$ sit

$$\varphi - \pi = \frac{3m\pi}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} + \frac{3n(2+3kk)\sin(2\varphi - \pi)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\sin(2\varphi + \pi)}{8ffk},$$

$$\text{seu} \quad \varphi - \pi = \frac{3m\pi}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} - \frac{n(1+2kk)\sin 2\varphi}{2ffk},$$

ubi ob $2\varphi = 2\pi$ proxime, et neglectis terminis binas dimensiones litterarum $m$ et $n$ involventibus, erit $\varphi = \pi + \frac{3m\pi}{2ff}$.

161. **Coroll. 2.** At dum absolvitur anomalia vera $s = 2\lambda\pi$, existente $\lambda$ numero integro valde magno, ob $\varphi = 2\lambda\pi + \frac{3\lambda m\pi}{ff}$, proxime erit

$$\varphi = 2\lambda\pi + \frac{3\lambda m\pi}{ff} + \frac{9n}{8ff}\sin\frac{6\lambda m\pi}{ff} + \frac{n(1+2kk)}{2ffk}\sin\frac{6\lambda m\pi}{ff};$$

unde si sit $\frac{6\lambda m}{ff} = \frac{1}{2}$, seu $\lambda = \frac{ff}{12m}$, post $\frac{ff}{2m}$ revolutiones anomaliae verae, erit

$$\varphi = 2\lambda\pi + \tfrac{1}{4}\pi + \frac{9n}{4ff} + \frac{n(1+2kk)}{2ffk}.$$

162. **Coroll. 3.** Si esset $n = 0$, promotio lineae absidum in singulis revolutionibus anomaliae verae $s$ foret eadem, scilicet $= \frac{3m\pi}{ff} = \frac{3(cc-aa)}{ff}\pi$, uti jam supra invenimus. Sed si $n$ non est $=0$, singulis revolutionibus anomaliae verae non amplius aequalis progressio lineae absidum respondet, quod tamen discrimen demum post plures revolutiones fit sensibile.

163. **Coroll. 4.** Relatio inter angulos $\varphi$ et $s$ ita definitur, ut sit

$$\varphi = \zeta + s + \frac{3ms}{2ff} + \frac{mk\sin s}{2ff} + \frac{9n\sin 2\varphi}{8ff} + \frac{3n(2+3kk)\sin(2\varphi - s)}{8ffk} - \frac{n(2+kk)\sin(2\varphi + s)}{8ffk},$$

ubi in posterioribus terminis pro $\varphi$ scribi potest $\zeta + s + \frac{3ms}{2ff}$, neque vero hic terminum $\frac{3ms}{2ff}$ omittere licet, cum is crescente cum tempore angulo $s$ ad valorem quantumvis magnum assurgere possit. Constans autem $\zeta$ non est arbitraria, sed denotat longitudinem absidis imae ab axe principali $JA$.

164. **Scholion 1.** Pro quavis ergo anomalia vera $s$ et angulo constante $\zeta$ definiri potest longitudo corporis $N$ seu angulus $AJN = \varphi$, qua cognita porro semiparameter $p$ et excentricitas $q$ orbitae ellipticae variabilis innotescit, unde concluditur distantia $JN = v = \frac{p}{1 + q\cos s}$. Superest autem, ut relatio inter tempus $t$ et angulum $s$ assignetur, seu ut haec aequatio

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{ffds}{(1+k\cos s)^2} + \frac{ffWds}{(1+k\cos s)^3}$$

integretur, quod negotium, quia $\varphi$ per $s$ datur, concedendum est. Est enim

$$\int\frac{ds}{1+k\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-kk)}}\,\text{Arc.}\cos\frac{k+\cos s}{1+k\cos s},$$

$$\int\frac{ds}{(1+k\cos s)^2} = \frac{1}{(1-kk)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{k+\cos s}{1+k\cos s} - \frac{k\sin s}{(1-kk)(1+k\cos s)},$$

$$\int\frac{ds}{(1+k\cos s)^3} = \frac{2+kk}{2(1-kk)^{\frac{5}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{k+\cos s}{1+k\cos s} - \frac{k\sin s}{2(1-kk)(1+k\cos s)^2} - \frac{3k\sin s}{2(1-kk)^2(1+k\cos s)}.$$

Reliquae partes exigunt integrationem hujusmodi formulae $\int\frac{ds\cos(\alpha s+\beta)}{(1+k\cos s)^3}$, quae si $k$ fuerit fractio valde parva, facile per seriem evolvitur; posito enim

$$\frac{1}{(1+k\cos s)^3} = A + B\cos s + C\cos 2s + D\cos 3s + E\cos 4s + \text{etc.}$$

reperitur integrale $\int\frac{ds\cos(\alpha s+\beta)}{(1+k\cos s)^3}$ ita expressum

$$\frac{A}{\alpha}\sin(\alpha s+\beta) + \frac{B\sin(\alpha s - s + \beta)}{2(\alpha-1)} + \frac{C\sin(\alpha s - 2s + \beta)}{2(\alpha-2)} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{B\sin(\alpha s + s + \beta)}{2(\alpha+1)} + \frac{C\sin(\alpha s + 2s + \beta)}{2(\alpha+2)} + \text{etc.}$$

verum nisi $k$ sit fractio valde parva, haec series parum juvat.

165. **Scholion 2.** At si $k$ est quantitas valde exigua, aliud incommodum nascitur, quod in nostris formulis termini per $k$ divisi nimis fiant magni, ideoque determinatio anguli $\varphi - s$ nimis incerta reddatur. Operae ergo pretium erit casum, quo $k = 0$, data opera evolvisse, quo fit

$$p = f - \frac{3(2m + 3n\cos 2\varphi)}{4f} - 3nS \quad \text{et} \quad qq = \frac{2m + 3n\cos 2\varphi}{2ff} + \frac{3nS}{f},$$

quae formula autem locum habere nequit, nisi sit positiva; si enim fieret negativa, hoc indicio esset quantitatem $k$ evanescere non posse, vel tum etiam $\cos s$ imaginarium esse proditurum, ita ut hoc casu positio $v = \frac{p}{1+k\cos s}$ contradictionem involveret. Casu autem, quo $qq$ prodit positivum, reperitur

$$d\varphi = ds + \frac{3nd\varphi\sin s\sin 2\varphi}{f\sqrt{(4m + 6n\cos 2\varphi + 12fnS)}} \quad \text{existente} \quad S = \int\frac{d\varphi\sin 2\varphi}{f} = \frac{-\cos 2\varphi}{2f},$$

ita ut sit

$$d\varphi = ds + \frac{3nd\varphi \sin s \sin 2\varphi}{2f\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad qq = \frac{m}{ff} \quad \text{et} \quad p = f - \frac{3m}{2f} - \frac{3n\cos 2\varphi}{4f},$$

ideoque $q = \frac{\sqrt{m}}{f}$, sicque excentricitas $q$ constans. Tum erit

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{d\varphi\,(ff - 3m - \frac{9}{4}n\cos 2\varphi)}{\left(1 + \frac{\sqrt{m}}{f}\cos s\right)^2}, \quad \text{seu} \quad = d\varphi\,(ff - 2f\cos s\sqrt{m} - 3m - \tfrac{9}{4}n\cos 2\varphi).$$

Solutio ergo hujus casus pendet a resolutione hujus aequationis $d\varphi = ds + \frac{3nd\varphi \sin s \sin 2\varphi}{2f\sqrt{m}}$, ex qua, si $\frac{n}{\sqrt{m}}$ est quantitas valde parva, concluditur

$$\varphi = \zeta + s + \frac{3n\sin(2\varphi - s)}{4f\sqrt{m}} - \frac{n\sin(2\varphi + s)}{4f\sqrt{m}}.$$

Reliquis autem casibus, praecipue si $m$ esset $= 0$, alia tractatio requireretur, in valorem scilicet ipsius $S$ accuratius inquiri oporteret, quod difficultatibus haud esset cariturum.

166. **Scholion 3.** Solutio nostri problematis posterior ideo priori est anteferenda, quod binarum aequationum differentio-differentialium propositarum una integratio successerit. In genere igitur, si idem usu veniat, solutio facilior obtineri potest. Propositis enim his duabus aequationibus

$$vdd\varphi + 2dvd\varphi = -gLTdt^2 \quad \text{et} \quad ddv - vd\varphi^2 = -gLdt^2\left(\frac{2}{vv} + V\right),$$

multiplicetur prior per $2v^3 d\varphi$, ut prodeat

$$v^4 d\varphi^2 = 2gLdt^2\,(C - \int Tv^3 d\varphi) = 2gLdt^2\,(C - S),$$

posito $\int Tv^3 d\varphi = S$. Deinde priori per $2vd\varphi$, et posteriori per $2dv$ multiplicata, summa praebet

$$d\,.\,(vvd\varphi^2 + dv^2) = -2gLdt^2\left(Tvd\varphi + Vdv + \frac{2dv}{vv}\right).$$

Quod si jam fuerit $Tvd\varphi + Vdv$ integrabile, ponatur integrale $\int(Tvd\varphi + Vdv) = \frac{R}{v^3}$, ut habeamus

$$dv^2 + vvd\varphi^2 = 2gLdt^2\left(D + \frac{2}{v} - \frac{R}{v^3}\right),$$

hinc eliminando $dt^2$ adipiscemur

$$(C - S)\,dv^2 = v^4 d\varphi^2\left(D + \frac{2}{v} - \frac{R}{v^3} - \frac{(C-S)}{vv}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{vv}\sqrt{(C - S)} = d\varphi\sqrt{\left(D + \frac{2}{v} - \frac{(C-S)}{vv} - \frac{R}{v^3}\right)}.$$

Statuamus $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$, sitque

$$D + \frac{2}{p} - \frac{R(1 + 3qq)}{p^3} - \frac{(1 + qq)(C - S)}{pp} = 0 \quad \text{et} \quad 2 - \frac{R(3 + qq)}{pp} - \frac{2(C - S)}{p} = 0,$$

ut fiat formula irrationalis

$$\sqrt{\left(D + \frac{2}{v} - \frac{(C-S)}{vv} - \frac{R}{v^3}\right)} = \frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(C - S + \frac{R(3 + q\cos s)}{p}\right)}, \quad \text{hincque}$$

$$\frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p}\sqrt{\left(1 + \frac{R(3 + q\cos s)}{p(C - S)}\right)}.$$

Inde autem cum $R$ et $S$ sint quantitates valde parvae, posito $C=f$ et $D=\frac{kk-1}{f}$, ut fiat proxime $p=f$ et $q=k$, colligitur

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}+\frac{S}{ff}-\frac{(3+kk)R}{2f^3} \quad \text{et} \quad p=f-S+\frac{(3+kk)R}{2f}$$

$$\frac{qq}{pp}=\frac{kk}{ff}+\frac{(1+kk)S}{f^3}-\frac{(1+3kk)R}{f^4},$$

unde fit
$$qq=kk+\frac{(1-kk)S}{f}-\frac{(1-k^4)R}{ff}.$$

Deinde ob
$$\frac{dp}{pp}=\frac{-dS}{ff}+\frac{(3+kk)dR}{2f^3} \quad \text{et} \quad \frac{pdq-qdp}{pp}=\frac{(1+kk)dS}{2ffk}-\frac{(1+3kk)dR}{2f^3k}, \quad \text{erit}$$

$$\frac{dv}{vv}=\frac{qdS\sin s}{p}-\frac{dS}{ff}-\frac{(1+kk)dS\cos S}{2ffk}+\frac{(3+kk)dR}{2f^3}+\frac{(1+3kk)dR\cos s}{2f^3k}.$$

Est vero etiam $\frac{dv}{vv}=\frac{qd\varphi\sin s}{p}\left(1+\frac{(3+k\cos s)R}{2ff}\right)$, unde

$$\frac{q\sin s}{p}(d\varphi-ds)=\frac{-dS}{ff}-\frac{(1+kk)dS\cos s}{2ffk}+\frac{(3+kk)dR}{2f^3}+\frac{(1+3kk)dR\cos s}{2f^3k}-\frac{k(3+k\cos s)R\sin s}{2f^3}d\varphi.$$

Denique est
$$dt\sqrt{2fgL}=vvd\varphi\left(1+\frac{S}{f}\right)=\frac{ppd\varphi}{(1+q\cos s)^2}\left(1+\frac{S}{f}\right);$$

ubi notandum est esse ob $dv=\frac{kvvd\varphi\sin s}{f}$ in terminis minimis

$$dS=Tv^3d\varphi \quad \text{et} \quad dR=\frac{3kRvd\varphi\sin s}{f}+Tv^4d\varphi+\frac{kVv^5d\varphi\sin s}{f},$$

unde fit

$$\frac{q}{p}(d\varphi-ds)=\frac{(1+kk)Tv^4\sin s}{2f^3}d\varphi+\frac{Rvd\varphi}{2f^4}(6k+(3+5kk)\cos s+3k^3-k^3\cos^2 s)$$
$$+\frac{Vv^4d\varphi}{2f^4}(k(3+kk)+(1+3kk)\cos s).$$

167. **Scholion 4.** Aliam formam habitura esset solutio, si formula integralis

$$\int(Tvd\varphi+Vdv) \quad \text{non} \quad \frac{R}{v^3}, \quad \text{sed} \quad \frac{R}{v^\lambda},$$

vel aggregato ex pluribus hujusmodi formulis aequalis poneretur. Ponamus ergo

$$\int Tvd\varphi+Vdv)=-\mathfrak{A}-\frac{\mathfrak{B}}{v}-\frac{\mathfrak{C}}{vv}-\frac{D}{v^3}-\frac{E}{v^4}-\frac{F}{v^5}-\text{etc.}$$

existente
$$\int(Tv^3d\varphi=S \quad \text{et} \quad dt\sqrt{2fgL}=vvd\varphi\left(1+\frac{S}{2f}\right),$$

habebimus ergo

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{(f-S)}=d\varphi\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f}+\mathfrak{A}+\frac{2-\mathfrak{B}}{v}-\frac{(f-S-\mathfrak{C})}{vv}+\frac{D}{v^3}+\frac{E}{v^4}+\frac{F}{v^5}+\text{etc.}\right)},$$

ubi quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $D$, $E$, $F$ et $S$ ut valde parvae sunt spectandae. Ponamus brevitatis gratia

$$\frac{kk-1}{f}+\mathfrak{A}=A,\quad 2+\mathfrak{B}=B,\quad \text{et}\quad -f+S+\mathfrak{C}=C,$$

ut formula irrationalis sit

$$\sqrt{\left(A+\frac{B}{v}+\frac{C}{vv}+\frac{D}{v^3}+\frac{E}{v^4}+\frac{F}{v^5}\right)},$$

quae posito $v=\frac{p}{1+q\cos s}$ ita comparata esse debet, ut factorem obtineat $\sin s$, seu ut evanescat posito tam $s=0$ quam $s=180^\circ$. Quocirca efficiendum est, ut fiat

$$A+B\left(\frac{1\pm q}{p}\right)+C\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^2+D\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^3+\text{etc.}=0,$$

fiant ergo necesse est $\frac{1+q}{p}$ et $\frac{1-q}{p}$ binae radices hujus aequationis

$$A+Bz+Czz+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{etc.}=0,$$

quae rejectis terminis minimis habebit hanc formam $\frac{kk-1}{f}+2z-fzz=0$, unde fit $z=\frac{1\pm k}{f}$, ita ut sit proxime $p=f$ et $q=k$. Ponatur jam in terminis minimis $p=f$ et $q=k$, et habebimus

$$\frac{kk-1}{f}+\mathfrak{A}+\frac{2(1\pm q)}{p}+\frac{\mathfrak{B}(1\pm k)}{f}-\frac{f(1\pm q)^2}{pp}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1\pm k)^2}{ff}+\frac{D(1\pm k)^3}{f^3}+\frac{E(1\pm k)^4}{f^4}+\frac{F(1\pm k)^5}{f^5}=0,$$

quae ob signa ambigua resolvitur in has duas

$$\frac{kk-1}{f}+\mathfrak{A}+\frac{2}{p}+\frac{\mathfrak{B}}{f}-\frac{f(1+qq)}{pp}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1+kk)}{ff}+\frac{D(1+3kk)}{f^3}+\frac{E(1+6kk+k^4)}{f^4}+\frac{F(1+10kk+5k^4)}{f^5}=0,$$

$$\frac{2q}{p}+\frac{\mathfrak{B}k}{f}-\frac{2fq}{pp}+\frac{2(S+\mathfrak{C})k}{ff}+\frac{D(3k+k^3)}{f^3}+\frac{E(4k+4k^3)}{f^4}+\frac{F(5k+10k^3+k^5)}{f^5}=0.$$

Ponamus jam $\frac{1}{p}=\frac{1+x}{f}$, et prior aequatio abit in hanc

$$\frac{kk}{f}+\mathfrak{A}+\frac{\mathfrak{B}}{f}-\frac{fqq}{pp}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1+kk)}{ff}+\frac{D(1+3kk)}{f^3}+\text{etc.}=0,$$

unde deducimus

$$\frac{qq}{pp}=\frac{kk}{ff}+\frac{\mathfrak{A}}{f}+\frac{\mathfrak{B}}{ff}+\frac{(S+\mathfrak{C})(1+kk)}{f^3}+\frac{D(1+3kk)}{f^4}+\frac{E(1+6kk+k^4)}{f^5}+\frac{F(1+10kk+5k^4)}{f^6}+\text{etc.};$$

altera autem per $q$ multiplicata, qui factor in terminis minimis abit in $k$, praebet

$$\frac{2x}{f}=\frac{\mathfrak{B}}{f}+\frac{2(\mathfrak{C}+S)}{ff}+\frac{D(3+kk)}{f^3}+\frac{E(4+4kk)}{f^4}+\frac{F(5+10kk+k^4)}{f^5},$$

unde deducimus

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}+\frac{\mathfrak{B}}{2f}+\frac{\mathfrak{C}+S}{ff}+\frac{D(3+kk)}{2f^3}+\frac{E(4+4kk)}{2f^4}+\frac{F(5+10kk+k^4)}{2f^5}+\text{etc.}$$

$$p=f\left(1-\frac{\mathfrak{B}}{2}-\frac{\mathfrak{C}-S}{f}-\frac{D(3+kk)}{2ff}-\frac{E(4+4kk)}{2f^3}-\frac{F(5+10kk+k^4)}{2f^4}-\text{etc.}\right)$$

$$qq = kk + \mathfrak{A}f + \mathfrak{B}(1-kk) + \frac{(\mathfrak{C}+S)(1-kk)}{f} + \frac{D(1-k^4)}{ff} + \frac{E(1+2kk-3k^4)}{f^3} + \frac{F(1+5kk-5k^4-k^6)}{f^4}.$$

Tum autem formula irrationalis induit hanc formam

$$\frac{q\sin s}{p}\sqrt{\Big(f - S - \mathfrak{C} - \frac{D(3+k\cos s)}{f} - \frac{E(6+4k\cos s+kk(1+\cos^2 s))}{ff}}$$

$$- \frac{F(10+10k\cos s+5kk(1+\cos^2 s)+k^3\cos s(1+\cos^2 s))}{f^3}\Big),$$

unde concludimus

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\sin s}{p} - \frac{k\,d\varphi\sin s}{2ff}\Big(\mathfrak{C} + \frac{D(3+k\cos s)}{f} + \frac{E(6+4k\cos s+kk(1+\cos^2 s))}{ff} + \text{etc.}\Big).$$

Est vero etiam $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds\sin s}{p} + \frac{dp}{pp} - \frac{(pdq-qdp)}{pp}\cos s$, unde

$$\frac{q\sin s}{p}(d\varphi - ds) = \frac{k\,d\varphi\sin s}{2ff}\Big(\mathfrak{C} + \frac{D(3+k\cos s)}{f} + \frac{E(6+4k\cos s+kk(1+\cos^2 s))}{ff} + \frac{F(10+10k\cos s+kk(5+k\cos s)(1+\cos^2 s))}{f^3}\Big)$$

$$+ \frac{dp}{pp} - \frac{(pdq-qdp)\cos s}{pp},$$

ubi quidem haec differentialia ipsarum $dp$ et $dq$ non tam commode exprimere licet, quam ante. Quoties autem unico termino constat integrale $\int(Tv\,d\varphi + V\,dv)$, toties posterius membrum reduci potest ad formam per $k\sin s$ multiplicatam. Est autem in genere

$$\frac{dp}{pp} - \frac{(pdq-qdp)\cos s}{pp} = \frac{-Tv^3\,d\varphi}{2ffk}(2k + (1+kk)\cos s) - \frac{d\mathfrak{A}\cos s}{2k} - \frac{d\mathfrak{B}(k+\cos s)}{2fk} - \frac{d\mathfrak{C}(2k+(1+kk)\cos s)}{2ffk}$$

$$- \frac{dD(3k+k^3+(1+3kk)\cos s)}{2f^3k} - \frac{dE(4k+4k^3+(1+6kk+k^4)\cos s)}{2f^4k} - \frac{dF(5k+10k^3+k^5+(1+10kk+5k^4)\cos s)}{2f^5k} \text{ etc.},$$

quae expressio transmutatur in hanc formam

$$\frac{-(2k+(1+kk)\cos s)vv}{2ffk}\Big(Tv\,d\varphi + d\mathfrak{A} + \frac{d\mathfrak{B}}{v} + \frac{d\mathfrak{C}}{vv} + \frac{dD}{v^3} + \frac{dE}{v^4} + \frac{dF}{v^5} \text{ etc.}\Big)$$

$$+ \frac{vv\sin^2 s}{2ff}\left\{\begin{aligned} &d\mathfrak{A}\Big(1+\frac{f}{v}\Big) + \frac{d\mathfrak{B}}{v} - \frac{dD}{fvv}(1+kk) - \frac{dE}{ffvv}\Big(1+3kk+\frac{(1+kk)f}{v}\Big) \\ &- \frac{dF}{f^3vv}\Big(1+6kk+k^4+\frac{(1+3kk)f}{v}+\frac{(1+kk)ff}{vv}\Big)\end{aligned}\right\}.$$

At ex aequatione assumta est

$$d\mathfrak{A} + \frac{d\mathfrak{B}}{v} + \frac{d\mathfrak{C}}{vv} + \frac{dD}{v^3} + \text{etc.} = -Tv\,d\varphi - V\,dv + \frac{\mathfrak{B}dv}{vv} + \frac{2\mathfrak{C}\,dv}{v^3} \text{ etc.}$$

ita ut prius membrum superioris aequationis abeat in

$$+\frac{(2k+(1+kk)\cos s)}{2ffk}vv\,dv\Big(V - \frac{\mathfrak{B}}{vv} - \frac{2\mathfrak{C}}{v^3} - \frac{3D}{v^4} - \frac{4E}{v^5} - \frac{5F}{v^6} - \text{etc.}\Big).$$

Quare cum in terminis his minimis sit $dv = \frac{kd\varphi \sin s}{f} vv$, evidens est totam aequationem praecedentem dividi posse per sin $s$; reperitur enim

$$d\varphi - ds = \frac{d\varphi}{2f}\Big(\mathfrak{C} + \frac{D(3+k\cos s)}{f} + \frac{E(6+kk+4k\cos s + kk\cos^2 s)}{ff} + \frac{F(10+5kk+k(10+kk)\cos s + 5kk\cos^2 s + k^3\cos^3 s)}{f^3}\Big)$$

$$+ \frac{(2k+(1+kk)\cos s)}{2ffk} v^4 d\varphi \Big(V - \frac{\mathfrak{B}}{vv} - \frac{2\mathfrak{C}}{v^3} - \frac{3D}{v^4} - \frac{4E}{v^5} - \frac{5F}{v^6} - \text{etc.}\Big) +$$

$$\frac{vv \sin s}{2fk}\Big(d\mathfrak{A} + \frac{f}{v}(d\mathfrak{A} + \frac{d\mathfrak{B}}{f}) - \frac{(1+kk)}{fvv}(dD + \frac{dE}{v} + \frac{dF}{vv} + \text{etc.}) - \frac{(1+3kk)}{ffvv}(dE + \frac{dF}{v} + \text{etc.}) - \frac{(1+6kk+k^4)}{f^3 vv}(dF + \text{etc.})\Big)$$

atque haec est methodus generalis hujusmodi problemata tractandi, quoties formula $Tv d\varphi + V dv$ est integrabilis. Deinde etiam pro formula $\int Tv^3 d\varphi$, quam posuimus $= S$, sive sit integrabilis sive minus, poni poterit $\frac{S}{v^\lambda}$, pro numero dimensionum, quas $v$ in ea obtinet, unde solutio saepe commodior reddi potest, ad quod haec solutio pariter extenditur.

## Tertia solutio problematis propositi.

168. Instituantur omnia ut in solutione secunda § 159, sed ponatur

$$\int \frac{d\varphi \sin 2\varphi}{v} = \frac{Q}{v} \quad \text{erit} \quad v^4 d\varphi^2 = 2gL dt^2 \Big(f - \frac{3nQ}{v}\Big),$$

ac porro per integrationem

$$\frac{dv}{vv} \sqrt{\Big(f - \frac{3nQ}{v}\Big)} = d\varphi \sqrt{\Big(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - \frac{f}{vv} + \frac{2m + 3n\cos 2\varphi + 6nQ}{2v^3}\Big)}.$$

Hinc posito $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$, ut fiat

$$\frac{dv}{vv} \sqrt{\Big(f - \frac{3nQ}{v}\Big)} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} \sqrt{\Big(f - \frac{(3+q\cos s)(2m+3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2p}\Big)},$$

seu quia $Q$ est valde parvum,

$$\frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} \sqrt{\Big(1 - \frac{6nQ}{fp} - \frac{(2m+3n\cos 2\varphi)(3+q\cos s)}{2fp}\Big)},$$

statui debet

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{(3+kk)(2m+3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2f^3} \quad \text{et} \quad \frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} + \frac{(1+3kk)(2m+3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2f^4},$$

unde fit

$$p = f - \frac{(3+kk)(2m+3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{4f} \quad \text{et} \quad qq = kk + \frac{(1-k^4)(2m+3n\cos 2\varphi + 6nQ)}{2ff}.$$

Cum nunc sit $vdQ - Qdv = vd\varphi \sin 2\varphi$, ideoque

$$dQ = d\varphi \sin 2\varphi + \frac{Qdv}{v} = d\varphi \sin 2\varphi + \frac{kQvd\varphi \sin s}{f},$$

quia in terminis minimis est $dv = \frac{kvv\, d\varphi \sin s}{f}$, erit

$$\frac{dp}{pp} = \frac{-3nkQv d\varphi \sin s\,(3+kk)}{f^4}, \quad \frac{2q\,(pdq-qdp)}{p^3} = \frac{-3nkQv d\varphi \sin s\,(1+3kk)}{f^5},$$

ob $\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} - \frac{(pdq-qdp)\cos s}{pp} + \frac{qds \sin s}{p}$, habebimus

$$\frac{dv}{vv} = \frac{qds\sin s}{p} - \frac{3nQv d\varphi \sin s}{2f^4}(2k(3+kk)-(1+3kk)\cos s).$$

Est vero ex superioribus

$$\frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} - \frac{3nkQd\varphi\sin s}{f^3} - \frac{k(2m+3n\cos 2\varphi)(3+k\cos s)\,d\varphi\sin s}{4f^3},$$

unde concludimus

$$d\varphi - ds = \frac{d\varphi\,(2m+3n\cos 2\varphi)(3+k\cos s)}{4ff} - \frac{3nQv d\varphi}{2f^3 k}(2k(2+kk)-(1+5kk)\cos s).$$

Cum jam sit $\frac{Q}{v} = \frac{1}{f}\int d\varphi\,(\sin 2\varphi + \frac{1}{2}k\sin(2\varphi - s) + \frac{1}{2}k\sin(2\varphi+s))$, et proxime $d\varphi = ds$, erit

$$\frac{Q}{v} = \frac{-\cos 2\varphi}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi - s)}{2f} - \frac{k\cos(2\varphi+s)}{6f} \quad \text{et}$$

$$\frac{\cos 2\varphi + 2Q}{v} = \frac{-k\cos(2\varphi - s)}{2f} + \frac{k\cos(2\varphi+s)}{6f} = \frac{-k}{3f}(\cos 2\varphi\cos s + 2\sin 2\varphi \sin s),$$

hincque
$$p = f - \frac{m(3+kk)}{2f} - \frac{nk(3+kk)(\cos(2\varphi+s) - 3\cos(2\varphi - s))}{8f(1+k\cos s)},$$

$$qq = kk + \frac{m(1-k^4)}{ff} + \frac{nk(1-k^4)(\cos(2\varphi+s)-3\cos(2\varphi-s))}{4ff(1+k\cos s)}.$$

Invento valore ipsius $Q$, accuratius relatio inter $d\varphi$ et $ds$ definitur, indeque vera relatio inter $\varphi$ et $s$, qua cognita habebitur

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{vv\,d\varphi}{\sqrt{(1+\frac{n}{2ff}(3\cos 2\varphi + 3k\cos(2\varphi - s) + k\cos(2\varphi+s))}}, \quad \text{seu}$$

$$dt\sqrt{2fgL} = \frac{pp\,d\varphi}{(1+q\cos s)^2} - \frac{nd\varphi\,(3\cos 2\varphi + 3k\cos(2\varphi - s) + k\cos(2\varphi+s))}{4ff(1+k\cos s)^2}.$$

Verum haec solutio minus idonea videtur quam secunda.

169. **Problema.** (Fig 183.) Si corpus $N$ circa punctum quasi fixum $J$ non in eodem plano moveatur, ad quod, praeter vim quadratis distantiarum reciproce proportionalem, sollicitetur viribus exiguis quibuscunque, ejus motum tam in longitudinem quam in latitudinem definire.

**Solutio.** Referatur motus ad planum fixum $AJB$, in quo sumta recta fixa $JA$, sint coordinatae orthogonales $JX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ac ponatur distantia $JN = \sqrt{(xx+yy+zz)} = v$. Quibus positis sumtoque elemento temporis $dt$ constante, motus hujusmodi tribus aequationibus exprimetur:

$$ddx = -2gLdt^2\left(\frac{x}{v^3} + X\right)$$

$$ddy = -2gLdt^2\left(\frac{y}{v^3} + Y\right)$$

$$ddz = -2gLdt^2\left(\frac{z}{v^3} + Z\right),$$

ubi quantitates $X$, $Y$, $Z$ ut valde parvae sunt spectandae. Consideretur elementum $Nn$ seu directio motus, in qua nunc corpus movetur, quae cum puncto fixo $J$ continet planum, cujus intersectio cum plano assumto $AJB$ sit recta $J☊$, quae vocatur linea nodorum, ac terminus quidem ☊ nodus ascendens, ubi corpus supra planum $AJB$ ascendere incipit. Hic duae res notandae occurrunt, primo longitudo nodi ascendentis seu angulus $AJ☊ = \psi$ et inclinatio plani $☊JN$ ad planum fixum $AJB$, quae sit $= \omega$. Ex $Y$ ad $J☊$ ducatur normalis $Y☊$, junctaque $N☊$, quae etiam ad $J☊$ erit normalis, fiet angulus $Y☊N = \omega$. Statuatur nunc angulus $☊JN = \sigma$, erit $N☊ = v \sin\sigma$ et $J☊ = v\cos\sigma$, hincque $YN = v\sin\sigma\sin\omega = z$ et $☊Y = v\sin\sigma\cos\omega$, unde ob $XY☊ = AJ☊ = \psi$, concluditur $x = v\cos\sigma\cos\psi - v\sin\sigma\cos\omega\sin\psi$ et $y = v\cos\sigma\sin\psi + v\sin\sigma\cos\omega\cos\psi$. Quo autem facilius relationem inter hos angulos $\sigma$, $\omega$, $\psi$ eorumque differentialia investigemus, re ad trigonometriam sphaericam perducta, sit (fig. 183) arcus $A☊ = \psi$, $☊\omega = d\psi$, $☊N = \sigma$, angulus $B☊N = \omega$, $B\omega n = \omega + d\omega$, et $\omega n = \sigma + d\sigma$. Ducto $\omega\pi$ perpendiculo in $☊N$ erit $☊\pi = d\psi\cos\omega$, et ob $\omega Y = \pi N$ habebimus $\sigma - d\psi\cos\omega = \sigma + d\sigma - Nn$, unde fit $d\sigma = Nn - d\psi\cos\omega$. Tum vero est

$\sin\omega : \sin(\omega + d\omega) = \sin(\sigma - d\psi\cos\omega) : \sin\sigma$, seu $\sin\omega : \sin\omega + d\omega\cos\omega = \sin\sigma - d\psi\cos\sigma\cos\omega : \sin\sigma$,

hincque dividendo $\sin\omega : d\omega\cos\omega = \sin\sigma : d\psi\cos\sigma\cos\omega$, unde fit

$$d\omega\sin\sigma = d\psi\cos\sigma\sin\omega \quad \text{seu} \quad d\omega = \frac{d\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}.$$

His notatis resumamus nostras aequationes differentio-differentiales ex quibus concludimus (fig. 183)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2gLdt^2\left(D + \frac{2}{v} - 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)\right),$$

ubi est $Nn = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. At est angulus elementaris

$$NJn = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dv^2)}}{v} = d\sigma + d\psi\cos\omega,$$

unde concludimus

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + vv(d\sigma + d\psi\cos\omega)^2 = 2gLdt^2\left(2D + \frac{2}{v} - 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)\right).$$

Statuamus brevitatis ergo $d\sigma + d\psi\cos\omega = d\varphi$, ut sit

$$dv^2 + vvd\varphi^2 = 2gLdt^2\left(2D + \frac{2}{v} - 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)\right).$$

Tum vero ob $z = v\sin\sigma\sin\omega$ habebimus

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\sigma\cos\psi}{\sin\sigma\sin\omega} - \frac{\cos\omega\sin\psi}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos\sigma\sin\psi}{\sin\sigma\sin\omega} + \frac{\cos\omega\cos\psi}{\sin\omega},$$

unde per differentiationem ob $d\omega = \frac{d\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}$, colligimus

$$\frac{zdx - xdz}{zz} = \frac{-d\varphi\cos\psi}{\sin^2\sigma\sin\omega} \quad \text{et} \quad \frac{zdy - ydz}{zz} = \frac{-d\varphi\sin\psi}{\sin^2\sigma\sin\omega},$$

hincque porro $\quad zdx - xdz = -vvd\varphi\cos\psi\sin\omega$ et $zdy - ydz = -vvd\varphi\sin\psi\sin\omega$.

Est vero ex aequationibus principalibus:

$$zddx - xddz = 2gLdt^2(Zx - Xz) \quad \text{et} \quad zddy - yddz = 2gLdt^2(Zy - Yz),$$

quarum illa per $2(zdx - xdz)$, haec vero per $2(zdy - ydz)$ multiplicata et integrata dabit

$$(zdx - xdz)^2 = v^4 d\varphi^2\cos^2\psi\sin^2\omega = 4gLdt^2\int vvd\varphi\cos\psi\sin\omega(Xz - Zx),$$
$$(zdy - ydz)^2 = v^4 d\varphi^2\sin^2\psi\sin^2\omega = 4gLdt^2\int vvd\varphi\sin\psi\sin\omega(Yz - Zy),$$

quibus additis prodit

$$v^4 d\varphi^2\sin^2\omega = 4gLdt^2\int v^3 d\varphi\sin\omega(\sin\sigma\sin\omega(X\cos\psi + Y\sin\psi) - Z\cos\sigma).$$

At si illae aequationes differentientur, indeque differentiale ipsius $v^4 d\varphi^2\sin^2\omega$ eliminetur, obtinebimus

$$vd\varphi d\psi\sin\omega = 2gLdt^2\sin\sigma(\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega),$$

ita ut sit

$$d\psi = \frac{2gLdt^2\sin\sigma}{vd\varphi}(Y\cos\psi - X\sin\psi - Z\cot\omega).$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\int v^3 d\varphi\sin\omega(\sin\sigma\sin\omega(X\cos\psi + Y\sin\psi) - Z\cos\sigma) = S,$$

ut sit $v^4 d\varphi^2\sin^2\omega = 4gLdt^2(C + S)$, fietque

$$dv^2 = 4gLdt^2\left(D + \frac{1}{v} - \int(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{C - S}{vv\sin^2\omega}\right), \quad \text{seu}$$

$$dv^2(C + S) = v^4 d\varphi^2\sin^2\omega\left(D + \frac{1}{v} - \int(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{C \mp S}{vv\sin^2\omega}\right),$$

ac praeterea $\quad d\psi = \frac{v^3 d\varphi\sin\omega\sin\sigma}{2(C + S)}(\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega).$

Cum igitur $X$, $Y$, $Z$ sint quantitates valde parvae, erit etiam $S$ quantitas minima, et anguli $\psi$ et $\omega$ fere constantes, ita ut sit proxime $d\varphi = d\sigma$, accuratius autem $d\sigma = d\varphi - d\psi\cos\omega$. Denique vero erit

$$\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = \frac{v^3 d\varphi\cos\sigma}{2(C + S)}(\sin\omega(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega),$$

et aequationis hujus

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{(C + S)} = d\varphi\sin\omega\sqrt{\left(D + \frac{1}{v} - \frac{C - S}{vv\sin^2\omega} - \int(Xdx + Ydy + Zdz)\right)}$$

resolutio est instituenda ut ante docuimus.

170. **Coroll. 1.** Uti $\omega$ inclinatio orbitae et $\psi$ longitudo nodi ascendentis vocari solet, ita angulus ☊ $JN = \sigma$ argumentum latitudinis et angulus $\varphi$ longitudo in orbita appellatur, quae autem tantum ficta, cum tam linea nodorum quam inclinatio continuo mutetur.

171. **Coroll. 2.** Si vires exiguae ita fuerint comparatae, ut sit

$$\sin\omega\,(Y\cos\psi - X\sin\psi) - Z\cos\omega = 0,$$

tum ob $d\psi = 0$ et $d\omega = 0$, tam linea nodorum quam inclinatio nullam patitur mutationem, ideoque corpus $N$ in eodem perpetuo plano feretur.

172. **Coroll. 3.** Cum autem angulus in plano $AJB$ sumtus $AJY$ vocetur corporis longitudo, ea erit $= \psi + \text{Ang.tang}\,(\text{tang}\,\sigma\cos\omega)$, tum vero latitudo corporis, quae est angulus $YJN$, est angulus cujus sinus est $\frac{z}{v} = \sin\sigma\sin\omega$.

173. **Scholion.** Haec methodus motum corporis ad planum fixum reducendi illi multum anteferenda videtur, qua ipsa corporis longitudo seu angulus $AJY$ in calculum introducitur, quo pacto formulae satis intricatae redduntur. Hoc igitur incommodum hic maximam partem sustulimus, dum angulum $\sigma$, quo argumentum latitudinis denotatur, ac praeterea longitudinem in orbita seu angulum $\varphi$ induximus, quoniam hoc modo formulae $zdx - xdz$ et $zdy - ydz$ tam commode exprimuntur, unde etiam fit

$$ydx - xdy = -vv\,d\varphi\cos\omega \quad\text{atque}\quad yddx - xddy = 2gLdt^2\,(Yx - Xy).$$

Haec ergo per $2\,(ydx - xdy)$ multiplicata et integrata dabit

$$(ydx - xdy)^2 = 4gLdt^2 \int vv\,d\varphi\cos\omega\,(Xy - Yx) = v^4\,d\varphi^2\cos^2\omega,$$

quae etsi jam in praecedentibus contineatur, saepe ingentem usum praestat, uti in sequente problemate patebit. Hinc scilicet commode relatio inter $dt$ et $d\varphi$ desumi poterit. Deinde etiam vis hujus methodi in hoc consistit, quod elementum temporis $dt$ penitus e formulis integralibus exclusimus, quo deinceps commode ex calculo eliminari posset.

174. **Problema.** Si corpus $M$, cujus momenta inertiae respectu axium $JA$ et $JB$ sint aequalia, circa tertium axem $JC$ utcunque gyretur, ac circa id corpus sphaericum $N$ quomodocunque moveatur, hujus corporis $N$ motum definire.

**Solutio.** (Fig. 183.) Plano axium $JA$ et $JB$, quod quasi est corporis $M$ planum aequatoris, pro plano fixo assumto, sit $Maa$ momentum inertiae respectu axium $JA$ et $JB$, at $Mcc$ respectu axis $JC$. Pro motu ergo secundum problema praecedens definiendo habebimus ex § 128 has aequationes

$$ddx = \frac{-2g\,(M+N)\,xdt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3\,(4aa + cc)}{2vv} - \frac{15\,(aaxx + aayy + cczz)}{2v^4}\right),$$

$$ddy = \frac{-2g\,(M+N)\,ydt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3\,(4aa + cc)}{2vv} - \frac{15\,(aaxx + aayy + cczz)}{2v^4}\right),$$

$$ddz = \frac{-2g\,(M+N)\,zdt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3\,(2aa + 3cc)}{2vv} - \frac{15\,(aaxx + aayy + cczz)}{2v^4}\right),$$

quibus comparatis cum ante assumtis erit $L = M + N$ et

$$X = \frac{3x(4aa + cc)}{2v^5} - \frac{15x(aaxx + aayy + cczz)}{2v^7},$$

$$Y = \frac{3y(4aa + cc)}{2v^5} - \frac{15y(aaxx + aayy + cczz)}{2v^7},$$

$$Z = \frac{3z(2aa + 3cc)}{2v^5} - \frac{15z(aaxx + aayy + cczz)}{2v^7},$$

hinc ob $xdx + ydy + zdz = vdv$, erit

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{3(4aa + cc)(xdx + ydy)}{2v^5} + \frac{3(2aa + 3cc)zdz}{2v^5} - \frac{15dv(aaxx + aayy + cczz)}{2v^6}$$

$$= \frac{3(4aa + cc)dv}{2v^4} - \frac{3(aa - cc)zdz}{v^5} - \frac{15aadv}{2v^4} + \frac{15(aa - cc)zzdv}{2v^6}.$$

Ergo $\int(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{(aa - cc)}{2v^3} - \frac{3(aa - cc)zz}{2v^5}$, hincque

$$dv^2 + vvd\varphi^2 = 4gLdt^2\left(D + \frac{1}{v} + \frac{(cc - aa)}{2v^3} - \frac{3(cc - aa)zz}{2v^5}\right).$$

Cum nunc ex § praecedente sit $yddx - xddy = 0$, erit

$$ydx - xdy = -vvd\varphi\cos\omega = -Edt\sqrt{4gL} \quad \text{et} \quad vvd\varphi^2 = \frac{4gLEEdt^2}{vv\cos^2\omega}, \quad \text{hincque}$$

$$dv^2 = 4gLdt^2\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc - aa}{2v^3} - \frac{3(cc - aa)zz}{2v^5} - \frac{EE}{vv\cos^2\omega}\right) \quad \text{et}$$

$$dv^2 = \frac{v^4d\varphi^2\cos^2\omega}{EE}\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc - aa}{2v^3} - \frac{3(cc - aa)zz}{2v^5} - \frac{EE}{vv\cos^2\omega}\right), \quad \text{seu}$$

$$\frac{Edv}{vv} = d\varphi\cos\omega\sqrt{\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc - aa}{2v^3} - \frac{3(cc - aa)\sin^2\sigma\sin^2\omega}{2v^3} - \frac{EE}{vv\cos^2\omega}\right)}$$

atque $2Edt\sqrt{gL} = vvd\varphi\cos\omega$. Deinde vero habemus

$$v^4d\varphi^2\cos^2\psi\sin^2\omega = 12gL(aa - cc)dt^2\int\frac{xzd\varphi\cos\psi\sin\omega}{v^3} \quad \text{et}$$

$$v^4d\varphi^2\sin^2\psi\sin^2\omega = 12gL(aa - cc)dt^2\int\frac{yzd\varphi\sin\psi\sin\omega}{v^3},$$

quibus additis fit

$$v^4d\varphi^2\sin^2\omega = 12gL(aa - cc)dt^2\int\frac{d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega}{v}.$$

Cum porro sit $v^4d\varphi^2\cos^2\omega = 4gLEEdt^2$, erit differentiando

$$2v^4d\varphi^2d\omega\sin\omega\cos\omega + \sin^2\omega d.(v^4d\varphi^2) = 12gL(aa - cc)dt^2\cdot\frac{d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega}{v}$$

$$\text{et} \quad -2v^4d\varphi^2d\omega\sin\omega\cos\omega + \cos^2\omega.d(v^4d\varphi^2) = 0,$$

unde concluditur

$$2v^4 d\varphi^2 d\omega \sin\omega\cos\omega = 12gL(aa-cc)\,dt^2\cdot\frac{d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega\cos^2\omega}{v},\quad \text{seu}$$

$$d\varphi\, d\omega = \frac{6gL(aa-cc)\,dt^2\sin\sigma\cos\sigma\sin\omega\cos\omega}{v^5},\quad \text{ideoque}$$

$$d\omega = \frac{3(aa-cc)\,d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin\omega\cos^3\omega}{2EEv}\quad \text{et}\quad d\psi = \frac{d\omega\sin\sigma}{\cos\sigma\sin\omega} = \frac{3(aa-cc)\,d\varphi\sin^2\sigma\cos^3\omega}{2EEv}.$$

Initio igitur ob $aa-cc$ minimum, elementa $\psi$ et $\omega$ ut constantia spectantur, et cum sit $d\varphi = d\sigma + d\psi\cos\omega$, differentialia $d\varphi$ et $d\sigma$ pro aequalibus habentur. Ponatur jam $EE = F\cos^2\omega$ et $\frac{1}{2}(cc-aa)(1-3\sin^2\sigma\sin^2\omega) = G$, ut habeamus

$$\frac{Edv}{vv} = d\varphi\cos\omega\sqrt{\left(D+\frac{1}{v}-\frac{F}{vv}+\frac{G}{v^3}\right)}.$$

Ponatur nunc $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, fiatque $D + \frac{(1\pm q)}{p} - F\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^2 + G\left(\frac{1\pm q}{p}\right)^3 = 0$, ut sit

$$D+\frac{1}{p}-\frac{F(1+qq)}{pp}+\frac{G(1+3qq)}{p^3}=0\quad \text{et}\quad 1-\frac{2F}{p}+\frac{G(3+qq)}{pp}=0,$$

ubi cum $G$ sit valde parvum, sit $F = \frac{f}{2}+u$, ut prodeat valor prope verus $p=f$, eritque

$$EE = \frac{1}{2}f\cos^2\omega + u\cos^2\omega = \text{Constanti}.$$

Sit $\varepsilon$ valor medius inclinationis et $EE = \frac{1}{2}f\cos^2\varepsilon$, erit

$$u = \frac{f(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{2\cos^2\omega},\quad \text{atque}\quad 1-\frac{f}{p}-\frac{(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{\cos^2\omega}+\frac{G(3+kk)}{ff}=0,\quad \text{et hinc}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{f}-\frac{(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{f\cos^2\omega}+\frac{G(3+kk)}{f^3}.$$

Tum vero prior aequatio erit

$$D+\frac{1}{p}-\frac{f(1+qq)}{2pp}-\frac{(1+kk)(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{2f\cos^2\omega}+\frac{G(1+3kk)}{f^3}=0.$$

Sit constans $D=\frac{kk-1}{2f}$, eritque

$$\frac{qq}{pp}=\frac{kk}{ff}-\frac{(1+kk)(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{ff\cos^2\omega}+\frac{2G(1+3kk)}{f^4},\quad \text{ideoque}$$

$$p=f+\frac{f(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{\cos^2\omega}-\frac{G(3+kk)}{f}\quad \text{et}\quad qq=kk-\frac{(1-kk)(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{\cos^2\omega}+\frac{2G(1-k^4)}{ff},$$

unde formula irrationalis abit in

$$\frac{q\sin s}{p}\sqrt{\left(\frac{f}{2}+\frac{f(\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega)}{2\cos^2\omega}-\frac{G(3+k\cos s)}{f}\right)},$$

ut ob $E=\frac{\cos\varepsilon\sqrt{f}}{\sqrt{2}}$ sit

$$\frac{dv}{vv}=\frac{qd\varphi \sin s \cos\omega}{p \cos\varepsilon}\sqrt{\left(1+\frac{\cos^2\varepsilon-\cos^2\omega}{\cos^2\omega}-\frac{2G(3+k\cos s)}{ff}\right)}, \text{ seu}$$

$$\frac{dv}{vv}=\frac{q\sin s}{p}d\varphi\sqrt{\left(1-\frac{2G(3+k\cos s)\cos^2\omega}{ff\cos^2\varepsilon}\right)}=\frac{q\sin s}{p}\left(d\varphi-\frac{Gd\varphi(3+k\cos s)\cos^2\omega}{ff\cos^2\varepsilon}\right).$$

Per differentiationem autem obtinemus

$$\frac{dp}{pp}=\frac{3(cc-aa)d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1-2k\cos s+kk)}{f^3},$$

$$\frac{pdq-qdp}{pp}=\frac{3(cc-aa)d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(\cos s-2k+kk\cos s)}{f^3},$$

hincque concludimus

$$\frac{dv}{vv}=\frac{qds\sin s}{p}+\frac{3(cc-aa)d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1-kk)\sin^2 s}{f^3}$$

$$=\frac{qd\varphi\sin s}{p}-\frac{k(cc-aa)(1-3\sin^2\sigma\sin^2\omega)d\varphi(3+k\cos s)\cos^2\omega\sin s}{2f^3\cos^2\varepsilon},$$

ita ut sit

$$d\varphi-ds=\frac{3(cc-aa)d\varphi\sin\sigma\cos\sigma\sin^2\omega(1-kk)\sin s}{ffk}+\frac{(cc-aa)(1-3\sin^2\sigma\sin^2\omega)(3+k\cos s)d\varphi\cos^2\omega}{2ff\cos^2\varepsilon}.$$

Cum igitur in his terminis minimis liceat ponere $\omega=\varepsilon$, quae est inclinatio media, erit

$$d\varphi-ds=\frac{(cc-aa)(3+k\cos s)d\varphi}{2ff}-\frac{3(cc-aa)(3+k\cos s)d\varphi\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma}{2ff}+\frac{3(cc-aa)(1-kk)d\varphi\sin^2\varepsilon\sin s\sin\sigma\cos\sigma}{ffk},$$

ubi statuere licet $d\varphi=ds=d\sigma$. Tum vero habetur

$$p=\frac{f\cos^2\varepsilon}{\cos^2\omega}-\frac{(cc-aa)(1-3\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma)(3+kk)}{2f},$$

$$qq=\frac{kk\cos^2\varepsilon}{\cos^2\omega}+1-\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\omega}+\frac{(cc-aa)(1-3\sin^2\varepsilon\sin^2\sigma)(1-k^4)}{ff}$$

ac praeterea

$$d\psi=\frac{-3(cc-aa)(1+k\cos s)d\varphi\cos\varepsilon\sin^2\sigma}{ff},\quad d\omega=\frac{-3(cc-aa)(1+k\cos s)d\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\sigma\cos\sigma}{ff},$$

eritque $d\varphi=d\sigma+d\psi\cos\varepsilon$, ac tandem pro tempore

$$dt\sqrt{2fgL}=\frac{vvd\varphi\cos\omega}{\cos\varepsilon}=\frac{ppd\varphi\cos\omega}{\cos\varepsilon(1+q\cos s)^2},$$

quae formulae omnes in terminis minimis sine difficultate integrari possunt; postrema tantum formula majorem solertiam postulat. Ponamus enim ad abbreviandum $\frac{cc-aa}{ff}=n$ et evolutis productis sinuum et cosinuum adipiscemur

$$d\psi=-\tfrac{3}{2}nd\varphi\cos\varepsilon\left(1+k\cos s-\cos 2\sigma-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma-s)-\tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma+s)\right),$$

$$d\omega=-\tfrac{3}{2}nd\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left(\sin 2\sigma+\tfrac{1}{2}k\sin(2\sigma-s)+\tfrac{1}{2}k\sin(2\sigma+s)\right),$$

$d\varphi - ds =$

$$\tfrac{1}{2}nd\varphi\,(3+k\cos s) - \tfrac{3}{4}\,nd\varphi\sin^2\varepsilon\,\Big(3+k\cos s - 3\cos 2\sigma - \frac{(2-kk)}{2k}\cos(2\sigma - s) + \frac{2-3kk}{2k}\cos(2\sigma+s)\Big),$$

$$d\varphi - d\sigma = -\tfrac{3}{2}\,nd\varphi\cos^2\varepsilon\,\big(1+k\cos s - \cos 2\sigma - \tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma - s) - \tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma+s)\big).$$

Hic igitur totum negotium pendet ab integratione hujusmodi formulae $\int d\varphi\cos(\mu s+\nu\sigma)$, ad quam accurate evolvendam ponamus brevitatis gratia

$$d\varphi = ds + \alpha d\varphi + Pd\varphi \quad \text{et} \quad d\varphi = d\sigma + \beta d\varphi + Qd\varphi, \quad \text{ut sit}$$

$$\alpha = \tfrac{3}{2}n - \tfrac{9}{4}n\sin^2\varepsilon, \quad \beta = -\tfrac{3}{2}n\cos^2\varepsilon,$$

$$P = \tfrac{1}{2}nk\cos s - \tfrac{3}{4}\,n\sin^2\varepsilon\,\Big(k\cos s - 3\cos 2\sigma - \frac{(2-kk)}{2k}\cos(2\sigma - s) + \frac{2-3kk}{2k}\cos(2\sigma+s)\Big) \quad \text{et}$$

$$Q = -\tfrac{3}{2}n\cos^2\varepsilon\,\big(k\cos s - \cos 2\sigma - \tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma - s) - \tfrac{1}{2}k\cos(2\sigma+s)\big).$$

Quare cum hinc conficiatur $d\varphi = \dfrac{\mu ds + \nu d\sigma + d\varphi(\mu P + \nu Q)}{\mu + \nu - \alpha\mu - \beta\nu}$, erit

$$\int d\varphi\cos(\mu s + \nu\sigma) = \frac{\sin(\mu s + \nu\sigma)}{\mu + \nu - \alpha\mu - \beta\nu} + \int\frac{d\varphi\,(\mu P + \nu Q)\cos(\mu s + \nu\sigma)}{\mu + \nu - \alpha\mu - \beta\nu}.$$

Tum vero cum $\mu P + \nu Q$ habeat hujusmodi formam

$$A\cos s + B\cos 2\sigma + C\cos(2\sigma - s) + D\cos(2\sigma + s),$$

haec per $\cos(\mu s + \nu\sigma)$ multiplicata denuo in simplices cosinus evolvitur, quorum singuli praebent formulas similes integrandas. Qui etsi videntur ob parvitatem rejiciendi, tamen si in iis fiat $\mu + \nu = 0$, ob denominatorem $-\alpha\mu - \beta\nu$ minimum ad notabilem valorem exsurgere possunt.

175. **Coroll. 1.** Cum sit $d\omega = -\tfrac{3}{2}\,nd\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(\ldots)$ (vide ult. lin. pag. praec.) patet duobus casibus inclinationem orbitae nullam pati mutationem, altero quo $\varepsilon = 0$, seu corpus $N$ in ipso plano aequatoris $AJB$ movetur, altero quo $\varepsilon = 90^0$, seu corpus $N$ in plano ad aequatorem perpendiculari fertur; atque hoc casu etiam linea nodorum est fixa. Ceteris ergo paribus inclinatio obnoxia erit maximae variationi, quando inclinatio $\varepsilon$ est $45^0$.

176. **Coroll. 2.** Pro motu lineae nodorum invenimus longitudinem nodi ascendentis

$$\psi = \text{Const.} - \tfrac{3}{2}n\varphi\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}n\cos\varepsilon\,\big(k\!\int\! d\varphi\cos s - \!\int\! d\varphi\cos 2\sigma - \tfrac{1}{2}k\!\int\! d\varphi\cos(2\sigma - s) - \tfrac{1}{2}k\!\int\! d\varphi\cos(2\sigma + s)\big).$$

Pro motu autem lineae absidum erit longitudo absidis imae

$$\varphi - s = \text{Const.} + \tfrac{3}{2}n\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon)\varphi + \tfrac{1}{2}nk(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon)\int d\varphi\cos s$$

$$+ \tfrac{3}{4}n\sin^2\varepsilon\,\Big(3\!\int\! d\varphi\cos 2\sigma + \frac{2-kk}{2k}\int d\varphi\cos(2\sigma - s) - \frac{(2-3kk)}{2k}\int d\varphi\cos(2\sigma + s)\Big)$$

et pro argumento latitudinis $\sigma$ habemus $\varphi = \sigma + \psi\cos\varepsilon$.

177. **Coroll. 3.** Si partes integrales rejiciamus, innotescet vero proxime motus medius tam lineae nodorum quam lineae absidum, ac si $n = \frac{cc - aa}{ff}$ sit numerus positivus, linea nodorum regreditur, idque eo minus, quo major fuerit inclinatio. Linea autem absidum progreditur, quamdiu $\sin^2 \varepsilon < \frac{2}{3}$, seu $\varepsilon < 54^0 45'$; sin autem fuerit $\varepsilon > 54^0 45'$, etiam linea absidum regreditur.

178. **Coroll. 4.** Cum sit proxime $d\varphi = ds = d\sigma$, erunt integralium valores proximi

$$\int d\varphi \cos s = \sin s, \quad \int d\varphi \cos 2\sigma = \tfrac{1}{2} \sin 2\sigma, \quad \int d\varphi \cos (2\sigma - s) = \sin (2\sigma - s) \quad \text{et}$$

$$\int d\varphi \cos (2\sigma + s) = \tfrac{1}{3} \sin (2\sigma + s),$$

unde praeter motum medium utriusque lineae nodorum et absidum, anomaliae periodicae definiri possunt.

179. **Scholion.** Hae determinationes recte se habere sunt censendae, dummodo fractio $n = \frac{cc - aa}{ff}$ satis fuerit parva, ut termini quadrato $nn$ affecti pro nihilo haberi queant. Sin autem eveniat, ut haec fractio non sit adeo parva, tum jam superiores formulae accuratius evolvi deberent, ut termini per $nn$ multiplicati simul comprehenderentur; hoc autem modo in formulas nimis polixas incideremus. Verum hinc statim ii termini excludi poterunt, qui nullius plane momenti videbuntur, iis tantum retentis, qui per integrationem insignes coëfficientes adipiscuntur, cujusmodi est $\cos(2\sigma - 2s)$, unde per integrationem oritur

$$\int d\varphi \cos (2\sigma - 2s) = \frac{\sin(2\sigma - 2s)}{2\alpha - 2\beta} = \frac{2 \sin (2\sigma - 2s)}{3n\,(2 - 3\sin^2\varepsilon + 2\cos^2\varepsilon)},$$

qui terminus etsi ex ordine per $nn$ multiplicato nascitur, tamen ob denominatorem exiguum ad ordinem per $n$ multiplicatum elevatur. Deinde etiam si excentricitas $k$ fuerit exigua, per integrationes ulterius productas anguli absoluti satis notabiles exsurgere possunt. Scilicet integratio $\int d\varphi \cos(2\sigma - s)$ ducit ad formam

$$\frac{\sin (2\sigma - s)}{1 + \alpha - 2\beta} + \frac{\int d\varphi\, (2Q - P) \cos (2\sigma - s)}{1 + \alpha - 2\beta},$$

at in $2Q - P$ continetur membrum

$$\tfrac{3}{2} nk \cos^2\varepsilon \cos (2\sigma - s) - \frac{3n\,(2 - kk)}{8k} \sin^2\varepsilon \cos (2\sigma - s),$$

quod per $\cos (2\sigma - s)$ multiplicatum praebet quantitatem constantem

$$\tfrac{3}{4} nk \cos^2\varepsilon - \frac{3n\,(2 - kk)}{16k} \sin^2\varepsilon,$$

ita ut inde oritur angulus absolutus

$$\left(\tfrac{3}{4} nk \cos^2\varepsilon - \frac{3n\,(2 - kk)}{16k} \sin^2\varepsilon\right) \varphi$$

ad motum medium adjiciendus. Simili modo ex formula

$$\int d\varphi \cos(2\sigma + s) = \frac{\sin(2\sigma + s)}{3 - \alpha - 2\beta} + \frac{\int d\varphi (2Q + P) \cos(2\sigma + s)}{3 - \alpha - 2\beta},$$

ob $2Q + P$ complectentem terminum $(\frac{3}{2} nk \cos^2\varepsilon - \frac{3n(2-3kk)}{8k} \sin^2\varepsilon) \cos(2\sigma + s)$, nascetur angulus absolutus $(\frac{1}{4} nk \cos^2\varepsilon - \frac{n(2-3kk)}{16k} \sin^2\varepsilon)\varphi$. Cum deinde in motu lineae absidum hi anguli denuo per $\frac{3n(2-kk)}{8k} \sin^2\varepsilon$ et $\frac{-3n(2-3kk)}{8k} \sin^2\varepsilon$ multiplicari debeant, fieri potest, ut inde motus medius non parum afficiatur. Verum si hi termini alicujus sint momenti, etiam ipsas formulas principales accuratius evolvi oporteret, quod autem negotium hic suscipi non convenit, cum nondum satis constet, quibusnam casibus id utilitatem esset habiturum. Quod denique ad integrationem formulae

$$\int \frac{pp\, d\varphi \cos\omega}{\cos\varepsilon (1 + q \cos s)^2} = t \sqrt{2fgL}$$

attinet, in ea vires analyseos experiri oportet, ac tutissima quidem methodus videtur, postquam loco $d\varphi$ valor $ds + \alpha d\varphi + P d\varphi$ est positus, formulam $\frac{pp\, ds \cos\omega}{\cos\varepsilon (1 + q \cos s)^2}$ ita integrare, quasi $p$, $q$ et $\omega$ essent constantes, tum vero invento integrali correctiones ex harum quantitatum variabilitate oriundas investigare. Atque haec de motu duorum corporum se mutuo attrahentium sufficere videntur, ex quo ad considerationem trium corporum progrediamur.

---

## Caput VI.

### De motu trium corporum sphaericorum, se mutuo attrahentium in genere.

180. **Problema.** (Fig. 185.) Si tria corpora sphaerica $L$, $M$, $N$, se mutuo attrahentia moveantur in eodem plano, eorum motum per calculum definire.

**Solutio.** Elapso tempore $= t$ versentur corpora in $L$, $M$, $N$ in plano tabulae, in quo sumta recta fixa $OV$, ad quam eorum situs referatur, per puncta $L$, $M$, $N$ agantur rectae $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, ipsi $OV$ parallelae, simulque ad eam perpendicula $LP$, $MQ$, $NR$. Quodsi jam longitudinem cujusque corporis ex altero spectati per angulum a recta $OV$ in sensum $Vv$ sumtum aestimemus, statuamus

longitudinem corporis $M$ ex $L$ spectati $lLM = \zeta$
longitudinem corporis $N$ ex $M$ spectati $mMN = \eta$
longitudinem corporis $L$ ex $N$ spectati $nNL = \vartheta$,

qui postremus angulus $\vartheta$ in figura duobus rectis major est intelligendus. Atque iidem anguli duobus rectis vel aucti vel minuti exhibebunt longitudinem corporum $L$, $M$, $N$ ex $M$, $N$, $L$ spectatorum. Ponamus nunc distantias $LM = x$, $MN = y$ et $NL = z$, erunt coordinatae

$$OQ = OP + x\cos\zeta, \quad QM = PL + x\sin\zeta$$
$$OR = OQ + y\cos\eta, \quad RN = QM + y\sin\eta$$
$$OP = OR + z\cos\vartheta, \quad PL = RN + z\sin\vartheta$$

hincque colligimus

$$x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta = 0 \quad \text{et} \quad x\sin\zeta + y\sin\eta + z\sin\vartheta = 0$$

ac porro

$$x\sin(\zeta - \vartheta) + y\sin(\eta - \vartheta) = 0, \quad x\sin(\zeta - \eta) + z\sin(\vartheta - \eta) = 0,$$
$$y\sin(\eta - \zeta) + z\sin(\vartheta - \zeta) = 0,$$

$$\text{ideoque} \quad x : y : z = \sin(\eta - \vartheta) : \sin(\vartheta - \zeta) : \sin(\zeta - \eta),$$

unde relatio inter distantias et angulos ita commodissime exhibetur, ut sit

$$x = v\sin(\eta - \vartheta), \quad y = v\sin(\vartheta - \zeta), \quad z = v\sin(\zeta - \eta),$$

ubi $v$ denotat diametrum circuli triangulo $LMN$ circumscripti. Si jam massae corporum litteris cognominibus $L$, $M$, $N$ exprimantur, corpus $L$ a reliquis sollicitatur

$$\text{sec. } OP \text{ vi} = \frac{LM\cos\zeta}{xx} - \frac{LN\cos\vartheta}{zz} \quad \text{et} \quad \text{sec. } PL \text{ vi} = \frac{LM\sin\zeta}{xx} - \frac{LN\sin\vartheta}{zz},$$

corpus vero $M$ a reliquis sollicitatur

$$\text{sec. } OQ \text{ vi} = \frac{MN\cos\eta}{yy} - \frac{LM\cos\zeta}{xx} \quad \text{et} \quad \text{sec. } QM \text{ vi} = \frac{MN\sin\eta}{yy} - \frac{LM\sin\zeta}{xx}$$

et corpus $N$ a reliquis sollicitatur

$$\text{sec. } OR \text{ vi} = \frac{LN\cos\vartheta}{zz} - \frac{MN\cos\eta}{yy} \quad \text{et} \quad \text{sec. } RN \text{ vi} = \frac{LN\sin\vartheta}{zz} - \frac{MN\sin\eta}{yy},$$

unde sequentes aequationes adipiscimur

$$dd\,.\,OP = 2gdt^2\left(\frac{M\cos\zeta}{xx} - \frac{N\cos\vartheta}{zz}\right), \quad dd\,.\,PL = 2gdt^2\left(\frac{M\sin\zeta}{xx} - \frac{N\sin\vartheta}{zz}\right),$$

$$dd\,.\,OQ = 2gdt^2\left(\frac{N\cos\eta}{yy} - \frac{L\cos\zeta}{xx}\right), \quad dd\,.\,QM = 2gdt^2\left(\frac{N\sin\eta}{yy} - \frac{L\sin\zeta}{xx}\right),$$

$$dd\,.\,OR = 2gdt^2\left(\frac{L\cos\vartheta}{zz} - \frac{M\cos\eta}{yy}\right), \quad dd\,.\,RN = 2gdt^2\left(\frac{L\sin\vartheta}{zz} - \frac{M\sin\eta}{yy}\right),$$

ex quibus colligimus sequentes

$$dd.x\cos\zeta = 2gdt^2\left(-\frac{(L+M)\cos\zeta}{xx} + \frac{N\cos\eta}{yy} + \frac{N\cos\vartheta}{zz}\right), \quad dd.x\sin\zeta = 2gdt^2\left(-\frac{(L+M)\sin\zeta}{xx} + \frac{N\sin\eta}{yy} + \frac{N\sin\vartheta}{zz}\right),$$

$$dd.y\cos\eta = 2gdt^2\left(-\frac{(M+N)\cos\eta}{yy} + \frac{L\cos\vartheta}{zz} + \frac{L\cos\zeta}{xx}\right), \quad dd.y\sin\eta = 2gdt^2\left(-\frac{(M+N)\sin\eta}{yy} + \frac{L\sin\vartheta}{zz} + \frac{L\sin\zeta}{xx}\right),$$

$$dd.z\cos\vartheta = 2gdt^2\left(-\frac{(L+N)\cos\vartheta}{zz} + \frac{M\cos\zeta}{xx} + \frac{M\cos\eta}{yy}\right), \quad dd.z\sin\vartheta = 2gdt^2\left(-\frac{(L+N)\sin\vartheta}{zz} + \frac{M\sin\zeta}{xx} + \frac{M\sin\eta}{yy}\right),$$

quae porro transformantur in has

$$\text{I.}\quad 2dxd\zeta + xdd\zeta = 2gdt^2\left(\frac{N\sin(\eta-\zeta)}{yy} + \frac{N\sin(\vartheta-\zeta)}{zz}\right),$$

$$\text{II.}\quad ddx - xd\zeta^2 = 2gdt^2\left(-\frac{(L+M)}{xx} + \frac{N\cos(\eta-\zeta)}{yy} + \frac{N\cos(\vartheta-\zeta)}{zz}\right),$$

$$\text{III.}\quad 2dyd\eta + ydd\eta = 2gdt^2\left(\frac{L\sin(\vartheta-\eta)}{zz} + \frac{L\sin(\zeta-\eta)}{xx}\right),$$

$$\text{IV.}\quad ddy - yd\eta^2 = 2gdt^2\left(-\frac{(M+N)}{yy} + \frac{L\cos(\vartheta-\eta)}{zz} + \frac{L\cos(\zeta-\eta)}{xx}\right),$$

$$\text{V.}\quad 2dzd\vartheta + zdd\vartheta = 2gdt^2\left(\frac{M\sin(\zeta-\vartheta)}{xx} + \frac{M\sin(\eta-\vartheta)}{yy}\right),$$

$$\text{VI.}\quad ddz - zd\vartheta^2 = 2gdt^2\left(-\frac{(L+N)}{zz} + \frac{M\cos(\zeta-\vartheta)}{xx} + \frac{M\cos(\eta-\vartheta)}{yy}\right),$$

ex harum aequationum I, III et V colligimus hanc integralem

$$LMxxd\zeta + MNyyd\eta + LNzzd\vartheta = Cdt,$$

deinde ex I et II deducimus

$$d.(dx^2 + xxd\zeta^2) = 4gdt^2\left(-\frac{(L+M)dx}{xx} + \frac{N(dx\cos(\eta-\zeta) + xd\zeta\sin(\eta-\zeta))}{yy} + \frac{N(dx\cos(\vartheta-\zeta) + xd\zeta\sin(\vartheta-\zeta))}{zz}\right),$$

quae ita repraesentetur

$$\frac{d.(dx^2 + xxd\zeta^2)}{4gNdt^2} = -\frac{(L+M)dx}{Nxx} + \frac{d.x\cos(\eta-\zeta) + xd\eta\sin(\eta-\zeta)}{yy} + \frac{d.x\cos(\vartheta-\zeta) + xd\vartheta\sin(\vartheta-\zeta)}{zz},$$

similesque ex reliquis ortae erunt

$$\frac{d.(dy^2 + yyd\eta^2)}{4gLdt^2} = \frac{-(M+N)dy}{Lyy} + \frac{d.y\cos(\vartheta-\eta) + yd\vartheta\sin(\vartheta-\eta)}{zz} + \frac{d.y\cos(\zeta-\eta) + yd\zeta\sin(\zeta-\eta)}{xx},$$

$$\frac{d.(dz^2 + zzd\vartheta^2)}{4gMdt^2} = \frac{-(L+N)dz}{Mzz} + \frac{d.z\cos(\zeta-\vartheta) + zd\zeta\sin(\zeta-\vartheta)}{xx} + \frac{d.z\cos(\eta-\vartheta) + zd\eta\sin(\eta-\vartheta)}{yy}.$$

Addantur hae tres aequationes, et cum sit

$$x\sin(\eta-\zeta) + z\sin(\eta-\vartheta) = 0, \qquad x\sin(\vartheta-\zeta) + y\sin(\vartheta-\eta) = 0,$$
$$y\sin(\zeta-\eta) + z\sin(\zeta-\vartheta) = 0,$$

summa erit

$$-\frac{(L+M)dx}{Nxx} - \frac{(M+N)dy}{Lyy} - \frac{(L+N)dz}{Mzz} + \frac{d(x\cos(\eta-\zeta) + z\cos(\eta-\vartheta))}{yy} + \frac{d(x\cos(\vartheta-\zeta) + y\cos(\vartheta-\eta))}{zz}$$
$$+ \frac{d(y\cos(\zeta-\eta) + z\cos(\zeta-\vartheta))}{xx}.$$

At ex aequationibus $x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta = 0$ et $x\sin\zeta + y\sin\eta + z\sin\vartheta = 0$ colligimus

$$x\cos(\vartheta-\zeta) + y\cos(\vartheta-\eta) + z = 0, \qquad x\cos(\eta-\zeta) + z\cos(\eta-\vartheta) + y = 0,$$
$$y\cos(\zeta-\eta) + z\cos(\zeta-\vartheta) + x = 0,$$

quibus valoribus inductis consequimur

*

$$\frac{d.(dx^2+xx\,d\zeta^2)}{4gN\,dt^2}+\frac{d.(dy^2+yy\,d\eta^2)}{4gL\,dt^2}+\frac{d.(dz^2+zz\,d\vartheta^2)}{4gM\,dt^2}=\frac{-(L+M+N)\,dx}{Nxx}-\frac{(L+M+N)\,dy}{Lyy}-\frac{(L+M+N)\,dz}{Mzz},$$

hincque integrando

$$\frac{dx^2+xx\,d\zeta^2}{N}+\frac{dy^2+yy\,d\eta^2}{L}+\frac{dz^2+zz\,d\vartheta^2}{M}=4g\,(L+M+N)\,dt^2\,(D+\frac{1}{Nx}+\frac{1}{Ly}+\frac{1}{Mz}),\quad \text{seu}$$

$$LM\,(dx^2+xx\,d\zeta^2)+MN\,(dy^2+yy\,d\eta^2)+LN\,(dz^2+zz\,d\vartheta^2)=$$

$$4g\,(L+M+N)\,dt^2\,(E+\frac{LM}{x}+\frac{MN}{y}+\frac{LN}{z})$$

ita ut jam habeamus duas aequationes integrales. Praeterea autem notasse convenit esse

$$LM\,(x\,ddx+dx^2)+MN\,(y\,ddy+dy^2)+LN\,(z\,ddz+dz^2)=$$

$$2g\,(L+M+N)\,dt^2\,(2E+\frac{LM}{x}+\frac{MN}{y}+\frac{LN}{z}),$$

etiamsi hinc nulla via ad novam integrationem aperiatur. Cum igitur septem habeamus quantitates, scilicet tres distantias $x$, $y$, $z$, tres angulos $\zeta$, $\eta$, $\vartheta$ et tempus $t$, quarum relationem mutuam definiri oportet, ad hoc opus est sex aequationibus, ad quarum numerum complendum habemus primo has duas aequationes finitas

$$\text{I.}\quad x\cos\zeta+y\cos\eta+z\cos\vartheta=0,\qquad \text{II.}\quad x\sin\zeta+y\sin\eta+z\sin\vartheta=0,$$

deinde binas aequationes jam per integrationem erutas

$$\text{III.}\quad LMxx\,d\zeta+MNyy\,d\eta+LNzz\,d\vartheta=C\,dt \qquad \text{et}$$

$$\text{IV.}\quad LM\,(dx^2+xx\,d\zeta^2)+MN\,(dy^2+yy\,d\eta^2)+LN\,(dz^2+zz\,d\vartheta^2)=$$

$$4g\,(L+M+N)\,dt^2\,(E+\frac{LM}{x}+\frac{MN}{y}+\frac{LN}{z}).$$

Loco duarum reliquarum binae trium sequentium commodissime accipientur

$$\text{V.}\quad 2\,dx\,d\zeta+x\,dd\zeta=2gN\,dt^2\left(\frac{\sin(\eta-\zeta)}{yy}+\frac{\sin(\vartheta-\zeta)}{zz}\right),$$

$$\text{VI.}\quad 2\,dy\,d\eta+y\,dd\eta=2gL\,dt^2\left(\frac{\sin(\vartheta-\eta)}{zz}+\frac{\sin(\zeta-\eta)}{xx}\right),$$

$$\text{VII.}\quad 2\,dz\,d\vartheta+z\,dd\vartheta=2gM\,dt^2\left(\frac{\sin(\zeta-\vartheta)}{xx}+\frac{\sin(\eta-\vartheta)}{yy}\right),$$

quarum resolutio hoc modo tentanda videtur. Multiplicentur hae tres postremae aequationes seorsim per certas formulas differentiales, ita ut membra posteriora fiant integrabilia seorsim, priorum autem summa talis efficiatur. Ob

$$x:y:z=\sin(\eta-\vartheta):\sin(\vartheta-\zeta):\sin(\zeta-\eta),$$

prior conditio impletur si multiplicetur

$$\text{aequatio V. per } \frac{yz\sin(\vartheta-\zeta)\sin(\zeta-\eta)}{\sin^3(\vartheta-\zeta)-\sin^3(\zeta-\eta)}dP,$$

$$\text{aequatio VI. per } \frac{xz\sin(\zeta-\eta)\sin(\eta-\vartheta)}{\sin^3(\zeta-\eta)-\sin^3(\eta-\vartheta)}dQ,$$

$$\text{aequatio VII. per } \frac{xy\sin(\eta-\vartheta)\sin(\vartheta-\zeta)}{\sin^3(\eta-\vartheta)-\sin^3(\vartheta-\zeta)}dR;$$

tum enim integralia posteriorum membrorum fiunt

$$2gNPdt^2, \quad 2gLQdt^2, \quad 2gMRdt^2;$$

superest ergo, ut priorum membrorum aggregatum reddatur integrabile, quem in finem idoneos valores functionum $P$, $Q$, $R$ investigari convenit. Verum hic calculi subsidiis destituti istud negotium deserere cogimur.

181. **Coroll. 1.** Posito $\sin(\eta-\vartheta)=\frac{x}{v}$, $\sin(\vartheta-\zeta)=\frac{y}{v}$, $\sin(\zeta-\eta)=\frac{z}{v}$, aequationes V. VI. VII. in has abeunt formas

$$\text{V.} \quad d.(xxd\zeta)=\frac{2gNxdt^2}{v}\left(\frac{y}{zz}-\frac{z}{yy}\right),$$

$$\text{VI.} \quad d.(yyd\eta)=\frac{2gLydt^2}{v}\left(\frac{z}{xx}-\frac{x}{zz}\right),$$

$$\text{VII.} \quad d.(zzd\vartheta)=\frac{2gMzdt^2}{v}\left(\frac{x}{yy}-\frac{y}{xx}\right),$$

at $v$ ita per $x$, $y$, $z$ determinatur, ut sit

$$v=\frac{2xyz}{\sqrt{(2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4)}}.$$

182. **Coroll. 2.** Si ex illis aequationibus eliminemus $dt^2$, obtinebimus

$$\frac{2gdt^2}{v}=\frac{yyzzd.(xxd\zeta)}{Nx(y^3-z^3)}=\frac{xxzzd.(yyd\eta)}{Ly(z^3-x^3)}=\frac{xxyyd.(zzd\vartheta)}{Mz(x^3-y^3)}.$$

Quin etiam in plures alias formas has aequationes transfundere licet, neque tamen methodus patet hinc novam aequationem integralem eliciendi.

183. **Scholion 1.** Hoc igitur problema, cui vera determinatio omnium motuum coelestium innititur, vires analyseos superat, etiamsi corpora se mutuo attrahentia sphaerica et in eodem plano moveri assumsimus; quae ergo conditiones, si secus se haberent, atque imprimis si numerus corporum ternarium excederet, multo minus de solutione cogitare liceret; ex quo intelligitur in subsidium Astronomiae ingentem analyseos promotionem desiderari. Neque etiam in genere ulla via ad approximationes patet, quibus uti non licet, nisi vel unum trium corporum sit valde parvum, vel vis inde ad motum reliquorum perturbandum nata fuerit vehementer exigua. Si enim corpus $N$ evanescat, nostrae aequationes tantum ad has binas redeunt

$$LMxxd\zeta=Cdt \quad \text{et} \quad LM(dx^2+xxd\zeta^2)=4g(L+M)dt^2\left(E+\frac{LM}{x}\right),$$

quibus motus duorum corporum continetur, unde si massa $N$ sit valde parva, hinc idoneae approxi-

mationes peti poterunt. Deinde si corpus $N$ sit infinite remotum, ut distantiae $y$ et $z$ fiant infinitae, aequationum differentio-differentialium primo expositarum binae priores jam totum negotium conficiunt abeuntes in has formas:

$$2\,dx\,d\zeta + x\,dd\zeta = 0 \quad \text{et} \quad ddx - x\,d\zeta^2 = \frac{-2g\,(L+M)\,dt^2}{xx},$$

ita ut reliquas ne in computum quidem duci necesse sit, qui casus ex posterioribus aequationibus minus perspicitur, cum ibi reliquae quantitates praeter necessitatem calculo sint immixtae. Quare si in mundo ejusmodi casus existeret, ut trium corporum se mutuo attrahentium neque unius massa sit prae reliquis valde parva, neque unius distantia a reliquis vehementer magna, fateri cogimur, talem motum nobis fore imperscrutabilem: verum commode in mundo usu venit, ut hujusmodi casus a nobis nusquam deprehendatur, qua in re nostrae imbecillitati non parum consultum videtur. Quamobrem contenti simus in methodum inquisivisse, cujus beneficio proxime saltem motum trium corporum determinare valeamus, quando inter terna corpora se invicem attrahentia unum reperitur, cujus vis in reliqua sive ob massae parvitatem, sive ob ejus enormem distantiam, quasi evanescat, quippe qui solus casus relinquitur, in quo vires nostras experiri liceat.

184. **Scholion 2.** Cum igitur tam mundus alios motus non offerat, quam analysis ad alios investigandos non sit apta, nisi qui non multum a ratione motus in sectione conica recedant, omnem operam in inventione aberrationum ab hac motus lege collocari conveniet. Hanc ob rem motum regularem vocabimus, qui leges motus, quibus duo tantum corpora sphaerica se mutuo attrahentia ferri sunt inventa, perfecte sequitur, cujusmodi motus, etiamsi forte nusquam in mundo locum habeat, tamen, quoniam discrimen nusquam est valde magnum, aberrationes seu perturbationes motus regularis per approximationes definire conabimur. In proposito igitur problemate motum trium corporum $L$, $M$, $N$ ita comparatum assumamus, ut bina $M$ et $N$ respectu tertii $L$ motu fere regulari revolvantur, unde hoc commodi consequimur, ut dum perturbationes alterius definire studemus, alterius motum tanquam regularem spectare queamus; cum enim perturbationes ab hoc in illo productae per se sint valde parvae, sive hoc posterius regulariter moveatur, sive parumper a regularitate recedat, nullum discrimen in perturbatione illius orietur. Ita quando in perturbationes motus lunae a sole oriundas inquirere volumus, motum solis respectu terrae tanquam regularem spectabimus; ac vicissim, si errores in motu terrae ab actione lunae nati definiri debeant, qui terra ad quietem redacta in motum solis transferuntur, motum lunae tanquam regularem spectare licebit. Cum igitur propositis tribus corporibus unum semper in quiete considerari possit, problema ita tractabimus, ut binorum reliquorum unum motu regulari ferri censeatur, pro alteroque tantum perturbationes investigentur. Quod si praestiterimus, non amplius difficile erit, problemati pro corporibus quotcunque propositis satisfacere, quia enim perturbationes satis sunt exiguae, quantae a singulis seorsim producantur, assignavisse sufficiat, quae deinceps conjunctae omnes perturbationes ab omnibus simul ortas exhibebunt.

185. **Problema.** (Fig. 186.) Si corpus $N$ circa corpus $L$, quod in quiete spectamus, motu regulari feratur, tum vero in eodem plano corpus $M$ circa $L$ ita moveatur, ut ejus motus ab actione corporis $N$ perturbetur, hujus motus perturbationes assignare.

**Solutio.** Cum hic ad motum respectivum attendamus, corpore $L$ in quiete spectato, ductis rectis $LM$, $LN$ et $MN$, attractio mutua corporum $L$ et $M$ est $=\frac{L.M}{LM^2}$, corporum $L$ et $N=\frac{L.N}{LN^2}$, atque corporum $M$ et $N=\frac{M.N}{MN^2}$. Cum nunc corpus $L$ sollicitetur secundum $LM$ vi $=\frac{L.M}{LM^2}$, et secundum $LN$ vi $=\frac{L.N}{LN^2}$, hae vires in sensum oppositum et in ratione massarum mutatae binis reliquis corporibus applicari debent. Ductis ergo rectis $MT$ et $NV$ ipsis $NL$ et $ML$ parallelis, corpus $M$ praeter vires secundum $ML=\frac{L.M}{LM^2}$ et secundum $MN=\frac{M.N}{MN^2}$ sollicitari censendum est viribus secundum $ML=\frac{M.M}{LM^2}$ et secundum $MT=\frac{M.N}{LN^2}$; at corpus $N$ praeter vires secundum $NL=\frac{L.N}{LN^2}$ et secundum $NM=\frac{M.N}{MN^2}$, a viribus secundum $NL=\frac{N.N}{LN^2}$ et secundum $NV=\frac{M.N}{LM^2}$. Sumtis nunc duabus directionibus fixis altera $LA$, altera ad hanc normali, corpus $M$ sollicitabitur

$$\text{sec. } LQ \text{ vi } = \frac{-M(L+M)LQ}{LM^3} + \frac{M.N.MS}{MN^3} - \frac{M.N.LR}{LN^3},$$

$$\text{sec. } QM \text{ vi } = \frac{-M(L+M)QM}{LM^3} + \frac{M.N.SN}{MN^3} - \frac{M.N.RN}{LN^3}.$$

Corpus vero $N$ sollicitabitur

$$\text{sec. } LR \text{ vi } = \frac{-N(L+N)LR}{LN^3} - \frac{M.N.MS}{MN^3} - \frac{M.N.LQ}{LM^3},$$

$$\text{sec. } RN \text{ vi } = \frac{-N(L+N)RN}{LN^3} - \frac{M.N.SN}{MN^3} - \frac{M.N.QM}{LM^3}.$$

Ponamus jam coordinatas pro corpore $M$

$$LQ = x, \quad QM = y, \quad LM = \sqrt{(xx+yy)} = v,$$

pro corpore $N$ vero $\quad LR = \mathfrak{x}, \quad RN = \mathfrak{y}, \quad LN = \sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\mathfrak{y})} = \mathfrak{v},$

erit $MN = \sqrt{((\mathfrak{x}-x)^2+(\mathfrak{y}-y)^2)} = w$, et aequationes differentio-differentiales motum utriusque corporis exprimentes, posito elemento temporis $dt$ constante, erunt

$$\text{I.}\quad ddx = 2gdt^2\left(\frac{-(L+M)x}{v^3} + \frac{N(\mathfrak{x}-x)}{w^3} - \frac{N\mathfrak{x}}{\mathfrak{v}^3}\right),$$

$$\text{II.}\quad ddy = 2gdt^2\left(\frac{-(L+M)y}{v^3} + \frac{N(\mathfrak{y}-y)}{w^3} - \frac{N\mathfrak{y}}{\mathfrak{v}^3}\right),$$

$$\text{III.}\quad dd\mathfrak{x} = 2gdt^2\left(\frac{-(L+N)\mathfrak{x}}{\mathfrak{v}^3} - \frac{M(\mathfrak{x}-x)}{w^3} - \frac{Mx}{v^3}\right),$$

$$\text{IV.}\quad dd\mathfrak{y} = 2gdt^2\left(\frac{-(L+N)\mathfrak{y}}{\mathfrak{v}^3} - \frac{M(\mathfrak{y}-y)}{w^3} - \frac{My}{v^3}\right).$$

Cum autem motus corporis $M$ non adeo perturbari sumatur, hypothesis nostra exigit, ut termini $\frac{N}{ww}$ et $\frac{N}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$ sint prae $\frac{L+M}{vv}$ valde parvi, atque eodem jure termini $\frac{M}{ww}$ et $\frac{M}{vv}$ prae $\frac{L+N}{\mathfrak{v}\mathfrak{v}}$ valde exigui esse debent; quia alioquin determinatio motus vires calculi superaret.

Cum igitur motus corporis $N$ pro cognito habeatur, quantitates $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{v}$ tanquam functiones cognitae temporis $t$ spectari possunt, sicque tantum duae aequationes priores relinquuntur, ex quibus colligimus

$$y\,ddx - x\,ddy = 2g\,dt^2\left(\frac{N(\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y})}{w^3} - \frac{N(\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y})}{\mathfrak{v}^3}\right),\quad \text{seu}\quad = 2gN(\mathfrak{x}y - x\mathfrak{y})\,dt^2\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{\mathfrak{v}^3}\right),$$

$$\text{et}\quad 2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy = 4g\,dt^2\left(\frac{-(L+M)\,dv}{vv} - \frac{Nv\,dv}{w^3} + N(\mathfrak{x}\,dx + \mathfrak{y}\,dy)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{\mathfrak{v}^3}\right)\right).$$

Ponamus nunc pro motu corporis $M$ angulum $ALM = \varphi$, distantia existente $LM = v$, ut sit $x = v\cos\varphi$ et $y = v\sin\varphi$, hincque $y\,dx - x\,dy = -vv\,d\varphi$ et $dx^2 + dy^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2$. Porro pro motu corporis $N$ statuatur distantia $LN = u$, quae hactenus erat $= \mathfrak{v}$, et angulus $ALN = \vartheta$, ut sit $\mathfrak{x} = u\cos\vartheta$ et $\mathfrak{y} = u\sin\vartheta$, hincque

$$w = \sqrt{((u\cos\vartheta - v\cos\varphi)^2 + (u\sin\vartheta - v\sin\varphi)^2)} = \sqrt{(uu - 2uv\cos(\varphi - \vartheta) + vv)}$$

$$\text{et}\quad \mathfrak{x}y - x\mathfrak{y} = uv\sin(\varphi - \vartheta),\quad \text{atque}\quad \mathfrak{x}\,dx + \mathfrak{y}\,dy = u\,dv\cos(\varphi - \vartheta) - uv\,d\varphi\sin(\varphi - \vartheta).$$

Unde nostrae aequationes erunt

$$d.(vv\,d\varphi) = -2gNuv\,dt^2\sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

$$d.(dv^2 + vv\,d\varphi^2) = 4g\,dt^2\left(\frac{-(L+M)\,dv}{vv} - \frac{Nv\,dv}{w^3} + N(u\,dv\cos(\varphi - \vartheta) - uv\,d\varphi\sin(\varphi - \vartheta))\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right),$$

seu si differentialia secundi gradus non reformidemus,

$$2\,dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = -2gNu\,dt^2\sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\qquad \text{et}$$

$$ddv - v\,d\varphi^2 = -2g(L+M)\frac{dt^2}{vv} - 2gN\,dt^2\left(\frac{v}{w^3} - u\cos(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right),$$

ubi $u$ et $\vartheta$ tanquam quantitates per $t$ datae sunt spectandae, terminique per $N$ affecti tanquam valde parvi.

Verum illae aequationes ad integrationem magis sunt praeparatae, et posterior ob

$$w\,dw = v\,dv + u\,du - u\,dv\cos(\varphi - \vartheta) - v\,du\cos(\varphi - \vartheta) + uv(d\varphi - d\vartheta)\sin(\varphi - \vartheta),$$

transit in hanc formam

$$d.(dv^2 + vv\,d\varphi^2) = -4g(L+M)\,dt^2\frac{dv}{vv} - 4gN\,dt^2\left(\frac{dv\cos(\varphi - \vartheta) - v\,d\varphi\sin(\varphi - \vartheta)}{uu}\right)$$

$$+ 4gN\,dt^2\left(\frac{u\,du - v\,du\cos(\varphi - \vartheta) - uv\,d\vartheta\sin(\varphi - \vartheta) - w\,dw}{w^3}\right),$$

unde integrando quatenus licet obtinemus

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 4g(L+M)\,dt^2\left(D + \frac{1}{v}\right) - 4gN\,dt^2\left(\frac{v\cos(\varphi - \vartheta)}{uu} - \int\frac{v\,d\vartheta\sin(\varphi - \vartheta)}{uu} + 2\int\frac{v\,du\cos(\varphi - \vartheta)}{u^3}\right)$$

$$+ 4gN\,dt^2\left(\frac{1}{w} + \int\frac{du\,(u + v\cos(\varphi - \vartheta))}{w^3} - \int\frac{uv\,d\vartheta\sin(\varphi - \vartheta)}{w^3}\right),$$

sive

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 4g(L+M)\,dt^2\left(D + \frac{1}{v}\right) + 4gN\,dt^2\left(\frac{1}{w} - \frac{v\cos(\varphi - \vartheta)}{uu}\right)$$

$$+ 4gN\,dt^2\int du\left(\frac{u - v\cos(\varphi - \vartheta)}{w^3} - \frac{2v\cos(\varphi - \vartheta)}{u^3}\right)$$

$$- 4gN\,dt^2\int uv\,d\vartheta\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi - \vartheta).$$

Prior vero aequatio per $2vvd\varphi$ multiplicata et integrata dat

$$v^4 d\varphi^2 = 4g(L+M)Cdt^2 - 4gNdt^2 \int uv^3 d\varphi \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) \sin(\varphi - \vartheta).$$

Ponamus brevitatis gratia

$$\int uv^3 d\varphi \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) \sin(\varphi - \vartheta) = P, \qquad \int uv\, d\vartheta \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) \sin(\varphi - \vartheta) = Q,$$

$$\int du \left(\frac{u - v\cos(\varphi - \vartheta)}{w^3} - \frac{2v\cos(\varphi - \vartheta)}{u^3}\right) = R,$$

ut habeamus has aequationes

$$v^4 d\varphi^2 = 4gdt^2 (C(L+M) - NP)$$

$$dv^2 + vvd\varphi^2 = 4gdt^2 \left(D(L+M) + \frac{L+M}{v} + \frac{N}{w} - \frac{Nv\cos(\varphi - \vartheta)}{uu} + NR - NQ\right),$$

unde eliminando $4gdt^2$ nanciscimur

$$dv^2 \left(C(L+M) - NP\right) = v^4 d\varphi^2 \left(D(L+M) + \frac{L+M}{v} + \frac{N}{w} - \frac{Nv\cos(\varphi - \vartheta)}{uu} - NQ + NR - \frac{C(L+M)}{vv} + \frac{NP}{vv}\right).$$

Statuamus porro $\frac{N}{L+M} = n$, fietque

$$\frac{dv\sqrt{(C - nP)}}{vv} = d\varphi \sqrt{\left(D + \frac{1}{v} + \frac{n}{w} - \frac{nv\cos(\varphi - \vartheta)}{uu} - nQ + nR - \frac{C}{vv} + \frac{nP}{vv}\right)}$$

et $\qquad vvd\varphi = 2dt\sqrt{g}\,(L+M)(C - nP),$

ubi termini littera $n$ affecti ut minimi spectantur. Illa autem aequatio etiam hoc modo exhiberi potest

$$\frac{dv\sqrt{(C - nP)}}{vv} = d\varphi \sqrt{\left(D + \frac{1}{v} - \frac{C}{vv} - 2n\int \frac{Pdv}{v^3} - n\int \frac{vdv}{w^3} + n\int udv\cos(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\right)}.$$

Ponatur $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$ et $C = \frac{f}{2}$ atque $D = \frac{kk - 1}{2f}$, fietque $\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{npp\cos(\varphi - \vartheta)}{f(1 - qq)uu} + \frac{2nP}{fp}$ et

$$\frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} - \frac{2np\cos(\varphi - \vartheta)}{f(1 - qq)uu} + \frac{2n}{fw} - \frac{2nQ}{f} + \frac{2nR}{f} + \frac{2nP(1 + qq)}{fpp}$$

$$\text{et} \qquad \frac{dv\sqrt{(f - 2nP)}}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} \sqrt{\left(f - 2nP + \frac{2np^3\cos(\varphi - \vartheta)}{(1 - qq)(1 + q\cos s)uu}\right)},$$

$$\text{seu} \qquad \frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} \sqrt{\left(1 + \frac{2npp\cos(\varphi - \vartheta)}{(1 - qq)(1 + q\cos s)uu}\right)}.$$

Vel si nullam approximationem admittamus, erit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{npp\cos(\varphi - \vartheta)}{f(1 - qq)uu} + \frac{2nP}{fp},$$

$$\frac{qq}{pp} = \frac{kk}{ff} + \frac{2n}{fw} - \frac{2nQ}{f} + \frac{2nR}{f} - \frac{3np\cos(\varphi - \vartheta)}{f(1 - qq)uu} + \frac{npp\cos(\varphi - \vartheta)}{ff(1 - qq)uu} + \frac{2nP}{ffp} + \frac{2nPqq}{fpp},$$

hincque $\qquad \frac{dv\sqrt{(f - 2nP)}}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p} \sqrt{\left(f - 2nP + \frac{2np^3\cos(\varphi - \vartheta)}{(1 - qq)(1 + q\cos s)uu}\right)},$ seu

$$\frac{dv}{vv}=\frac{qd\varphi\sin s}{p}\sqrt{\left(1+\frac{2np^3\cos(\varphi-\vartheta)}{(f-2nP)(1-qq)(1+q\cos s)uu}\right)}.$$

Est autem
$$\frac{dv}{vv}=\frac{dp}{pp}-\frac{(pdq-qdp)}{pp}\cos s+\frac{qds\sin s}{p}.$$

Cum nunc sint $p$ et $q$ proxime constantes, erit

$$\frac{dp}{pp}=\frac{nf(d\varphi-d\vartheta)\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{2nfdu\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3}-\frac{2nuv^3d\varphi}{ff}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta),$$

$$\frac{2q}{p}\cdot\frac{(pdq-qdp)}{pp}=-\frac{2n}{fu^3}\left(vdv-udv\cos(\varphi-\vartheta)+uvd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)-\frac{(1+kk)uvd\varphi}{(1+k\cos s)^2}\sin(\varphi-\vartheta)\right)$$

$$-\frac{2n(1+kk)vd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{f(1+k\cos s)^2uu}+\frac{2nvd\vartheta\sin(\varphi-\vartheta)}{fuu}-\frac{4nvdu\cos(\varphi-\vartheta)}{fu^3}$$

$$+\frac{2n(d\varphi-d\vartheta)\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{4ndu\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3},$$

quibus valoribus substitutis, ob $dv=\frac{kvvd\varphi\sin s}{f}$ proxime, fit

$$\frac{dv}{vv}=\frac{qds\sin s}{p}+\frac{nv^3d\varphi\sin s\cos s}{fw^3}-\frac{nuv^3d\varphi\sin s}{ffw^3}(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)+k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s))$$

$$+\frac{nv^3d\varphi\sin^2s\sin(\varphi-\vartheta)}{ff(1-kk)uu}(3+3k\cos s-2kk+kk\cos^2s-k^3\cos s)-\frac{nvd\vartheta\sin^2s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{2nvdu\sin^2s\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3}.$$

Ex quibus colligimus

$$\frac{q(d\varphi-ds)}{p}=\frac{nv^3d\varphi\cos s}{fw^3}-\frac{nuv^3d\varphi}{ffw^3}\left(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)+k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\right)$$

$$-\frac{nkvd\varphi\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{nv^3d\varphi\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{ff(1-kk)uu}(3+3k\cos s-2kk+kk\cos^2s-k^3\cos s)$$

$$-\frac{nvd\vartheta\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}+\frac{2nvdu\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)u^3},$$

quae formula ita repraesentari potest:

$$\frac{q(d\varphi-ds)}{p}=\frac{nv^3d\varphi\cos s}{fw^3}-nd.\left(\frac{v\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{(1-kk)uu}\right)$$

$$-\frac{nuv^3d\varphi}{ff}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)+k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\right),$$

ita ut pro motu lineae absidum sit

$$\varphi-s=\text{Const.}-\frac{nfv\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{k(1-kk)uu}+\frac{n}{k}\int\frac{v^3d\varphi\cos s}{w^3}$$

$$-\frac{n}{fk}\int uv^3d\varphi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(2\sin s\sin(\varphi-\vartheta)+\cos s\cos(\varphi-\vartheta)+k\cos s\cos(\varphi-\vartheta-s)\right):$$

in quibus terminis minimis est $v=\frac{f}{1+k\cos s}$.

Denique quo haec ad tempus revocari queant, erit $vv d\varphi = dt \sqrt{2g(L+M)(f-2nP)}$, ita ut sit proxime $vv d\varphi = dt\sqrt{2fg(L+M)}$ et $ds = d\varphi$.

186. **Coroll. 1.** Si corpus $N$ motu regulari circa $L$ circumferatur, in orbita, cujus semiparameter $= b$, excentricitas $= e$ et anomalia vera $= r$, ut sit $u = \frac{b}{1+e\cos r}$, erit

$$d\vartheta = dr, \quad uu\,d\vartheta = dt\sqrt{2bg(L+N)} \quad \text{et} \quad du = \frac{euu\,d\vartheta \sin r}{b}.$$

Unde posito $\sqrt{\frac{b(L+N)}{f(L+M)}} = m$, erit proxime

$$uu\,d\vartheta = mvv\,d\varphi, \quad \text{seu} \quad d\vartheta = \frac{mvv\,d\varphi}{uu} = dr \quad \text{et} \quad du = \frac{mevv\,d\varphi \sin r}{b},$$

ita ut in superioribus formulis fractione $n$ affectis omnia elementa ad $d\varphi$ reducantur.

187. **Coroll. 2.** His differentialibus introductis etiam differentiale $dw$ ad $d\varphi$ perducemus, obtinebimus enim ob $dv = \frac{kvv\,d\varphi \sin s}{b}$ proxime

$$w\,dw = \frac{kvv\,d\varphi \sin s}{f}(v - u\cos(\varphi-\vartheta)) + \frac{mevv\,d\varphi \sin r}{b}(u - v\cos(\varphi-\vartheta)) + \frac{v\,d\varphi \sin(\varphi-\vartheta)}{u}(uu - mvv).$$

188. **Coroll. 3.** Ex relatione cognita, quae inter differentialia $d\varphi$, $d\vartheta$, $ds$, $dr$, $dv$ et $du$ locum habet, colligi poterunt valores formularum integralium $P$, $Q$ et $R$, unde semiparameter variabilis $p$ cum excentricitate $q$ accuratius definientur.

189. **Scholion 1.** Haec solutio per approximationes instituenda isti innititur fundamento, quod termini littera $n$ affecti sint valde parvi; quod duplici modo evenire potest, vel si ipse numerus $n$ fuerit minimus, dum inter quantitates $v$, $u$, $w$ non enormis inaequalitas versatur, vel si saltem termini $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ prae $\frac{1}{v}$ sint quam minimi, quod fieri potest, etiamsi $n$ sit numerus valde magnus. Ita si $L$ sit terra, $M$ luna, et $N$ sol, fractio $\frac{N}{L+M} = n$ quidem est maxima. Verum distantia terrae a sole $u$ tantopere superat distantiam lunae a terra $v$, ut termini $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ nihilominus sint perquam exigui prae $\frac{1}{v}$. At si $L$ sit terra, $M$ sol et $N$ luna, ut perturbationes motus solis apparentis a luna ortae investigentur, erit $n$ fractio minima, et distantiae $v$ et $w$ praemagnae respectu distantiae $u$; interim tamen quantitas $\frac{n}{u}$ prae $\frac{1}{v}$ tanquam evanescens est spectanda, hocque casu terminus $\frac{1}{w}$ prae $\frac{1}{u}$ rejici poterit. Quodsi porro $L$ sit sol, $M$ vero et $N$ duo quicunque planetae primarii, erit $n$ fractio minima, et quia distantiae $u$, $v$, $w$ non adeo sunt inaequales, ut una prae reliquis contemni queat, termini $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ utique prae $\frac{1}{v}$ rejici poterunt.

190. **Scholion 2.** Terminos autem $\frac{n}{w}$ et $\frac{n}{u}$ tam parvos prae $\frac{1}{v}$ esse oportet, ut termini inde nati per $nn$ affecti nullius futuri essent momenti, quemadmodum etiam in solutione hic exposita omnes terminos, qui altiores ipsius $n$ potestates essent complexuri, rejecimus. Sin autem etiam termini per $nn$ affecti attentionem mereantur, in solutione quidem omnia manerent, donec ad differen-

tialia quantitatum $p$ et $q$ eruenda descendimus, quae accuratius usque ad terminos per $nn$ affectos evolvi deberent, hoc autem modo in ambages inextricabiles incideremus. Verum hic labor etiam tum necessarius videtur, quando termini per $nn$ affecti per se spectati sunt minimi, quoniam inde per integrationem interdum termini multo majores nasci possunt; ita si in formula differentiali occurrat hujusmodi terminus $nnd\varphi\cos(\alpha+n\varphi)$, is quidem ob factorem $nn$ elidendus videri posset, sed per integrationem inde emergit terminus $n\sin(\alpha+n\varphi)$ ad eum ordinem pertinens, quem minime negligere volebamus. Ex quo perspicuum est hunc modum approximandi, quatenus hujusmodi termini in ordinibus negligendis occurrunt, maxime esse lubricum, propterea quod termini haud levis momenti excludantur. Atque hoc potissimum in motus lunae investigatione observandum est, ubi ob talem causam ejusmodi termini ingrediuntur, quorum valores a terminis quadrato $nn$ affectis vel adeo altioribus potestatibus pendent, qui cum nonnisi difficillime per theoriam eruantur, expedit eorum valores ex observationibus definire.

**191. Scholion 3.** Formulae nostrae pro $p$ et $q$ inventae ideo non parum intricatae prodierunt, quod in membro $\frac{nv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu}$ naturam quantitatis $v$ spectavimus, ejusque loco valorem $\frac{p}{1+q\cos s}$ substituimus, quod cum in formulis $Q$ et $R$ non fecerimus, etiamsi et hi ab $v$ pendeant, etiam ibi pari jure illi substitutioni supersedere poterimus. Statuamus ergo brevitatis gratia

$$\frac{1}{w}-\frac{v\cos(\varphi-\vartheta)}{uu}-Q+R=S \quad \text{et posito} \quad C=\frac{f}{2} \quad \text{et} \quad D=\frac{kk-1}{2f},$$

sequentes aequationes resolvendae proponuntur

$$vvd\varphi=dt\sqrt{2g}(L+M)(f-2nP) \quad \text{et}$$

$$\frac{dv\sqrt{(f-2nP)}}{vv}=d\varphi\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{v}+2nS-\frac{f}{vv}+\frac{2nP}{vv}\right)} \text{ (*)}.$$

Statuamus nunc $v=\frac{p}{1+q\cos s}$, et haec formula signo radicali implicata fit

$$\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{p}+2nS-\frac{f}{pp}+\frac{2nP}{pp}+\frac{2q\cos s}{p}-\frac{2fq\cos s}{pp}+\frac{4nPq\cos s}{pp}-\frac{fqq\cos^2 s}{pp}+\frac{2nPqq\cos^2 s}{pp}.$$

Evanescant primo termini per $\cos s$ affecti, eritque

$$1-\frac{f}{p}+\frac{2nP}{p}=0, \quad \text{seu} \quad p=f-2nP;$$

hoc modo illa formula abit in

(*) Si excentricitas $k$ evanescat, alio modo calculum tractari oportet; erit enim
$$\frac{1}{v}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\eta+\mathfrak{C}\cos^2\eta+\text{etc.} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{vv}=d\varphi\sqrt{(A+B\cos\eta+C\cos^2\eta+D\cos^3\eta+\text{etc.})}.$$
Cum nunc $dv$ factorem obtineat $\sin\eta$, necesse est, ut sit $A\pm B+C\pm D+E$ etc. $=0$, hinc $A+C+E+$ etc. $=0$ et $B+D+$ etc. $=0$. Simili modo poni debet $P=..+\cos\eta+\cos^2\eta+..$ et $S=..+\cos\eta+\cos^2\eta..$ Haec methodus aptior videtur illa, qua omnes termini ad sinus vel cosinus angulorum multiplorum ipsius $\eta=\varphi-\vartheta$ reducuntur.

$$\frac{kk-1}{f}+\frac{1}{p}+2nS-\frac{qq}{p}\cos^2 s.$$

Statuatur ergo $\frac{qq}{p}=\frac{kk-1}{f}+\frac{1}{p}+2nS$, eritque

$$\frac{dv\sqrt{p}}{vv}=\frac{qd\varphi\sin s}{\sqrt{p}},\quad \text{seu}\quad \frac{dv}{vv}=\frac{qd\varphi\sin s}{p}.$$

Cum ergo sit $\qquad p=f-2nP \quad$ et $\quad qq=1+\frac{(kk-1)p}{f}+2nSp,$

erit differentiando $\quad dp=-2ndP \quad$ et $\quad 2qdq=\frac{(kk-1)\,dp}{f}+2nSdp+2npdS,\quad$ hincque

$$\frac{dv}{vv}=\frac{dp}{pp}+\frac{qdp\cos s}{pp}-\frac{(kk-1)\,dp\cos s}{2fpq}-\frac{nSdp\cos s}{pq}-\frac{ndS\cos s}{q}+\frac{qds\sin s}{p},$$

unde colligitur $\quad \frac{q\,(d\varphi-ds)\sin s}{p}=\frac{dp}{p}\left(\frac{1}{v}-\frac{(kk-1)\cos s}{2fq}-\frac{nS\cos s}{q}\right)-\frac{ndS\cos s}{q},$

seu $\quad \frac{q\,(d\varphi-ds)\sin s}{p}=\frac{dp\,(\cos s+2q+qq\cos s)}{2ppq}-\frac{ndS\cos s}{q}.$

Est vero $\quad dS=\frac{-vdv+udv\cos(\varphi-\vartheta)-uvd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{w^3}-\frac{dv\cos(\varphi-\vartheta)}{uu}+\frac{vd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{uu},$

seu $\quad dS=\frac{-qvvd\varphi\sin s}{pw^3}(v-u\cos(\varphi-\vartheta))-\frac{uvd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{w^3}-\frac{qvvd\varphi\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{puu}+\frac{vd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)}{uu},$

quo valore substituto orietur

$$\frac{q(d\varphi-ds)\sin s}{p}=\frac{nv^3d\varphi\sin s\cos s}{pw^3}-\frac{nuvvd\varphi\sin s\cos s\cos(\varphi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)-\frac{nuvd\varphi\sin^2 s\sin(\varphi-\vartheta)}{(1+q\cos s)^2}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)(2+q\cos s),$$

quae divisa per $\frac{q\sin s}{p}$ praebebit

$$d\varphi-ds=\frac{nvvd\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3}-u\cos s\cos(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)-\frac{(2+q\cos s)\,u\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right),$$

sive hoc modo

$$d\varphi-ds=\frac{nvvd\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3}-u\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\left(\cos s\cos(\varphi-\vartheta)-\frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\right)\right),$$

ubi nullae plane approximationes sunt adhibitae. Tum vero erit

$$P=\int uv^3d\varphi\sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\quad\text{et}$$

$$S=-\int\frac{qv^3d\varphi\sin s}{pw^3}+\int\frac{quvvd\varphi\sin s\cos(\varphi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)-\int uvd\varphi\sin(\varphi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),$$

sive $\quad S=-\int\frac{qv^3d\varphi\sin s}{pw^3}+\int\frac{uvvd\varphi}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(q\sin s\cos(\varphi-\vartheta)-(1+q\cos s)\sin(\varphi-\vartheta)\Big).$

vel etiam $\quad S=-\int\frac{qv^3d\varphi\sin s}{pw^3}-\int\frac{uvvd\varphi}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\Big(\sin(\varphi-\vartheta)+q\sin(\varphi-\vartheta-s)\Big).$

Quibus valoribus integrabilibus definitis habebitur

$$p = f - 2nP, \quad q = \sqrt{\left(\frac{kkp}{f} + 1 - \frac{p}{f} + 2nSp\right)} \quad \text{et}$$

$$dt\sqrt{2g}(L+M)(f-2nP) = vvd\varphi = dt\sqrt{2gp}(L+M),$$

$$\text{existente } v = \frac{p}{1+q\cos s}, \quad dv = \frac{qvvd\varphi \sin s}{p} \quad \text{et} \quad w = \sqrt{(vv - 2vu\cos(\varphi - \vartheta) + uu)}.$$

Atque haec solutio praecedenti longe praeferenda videtur, cum quod nullis adhuc approximationibus sit restricta, tum vero quod ejus forma simplicior reperiatur.

192. **Problema.** (Fig. 187.) Si corpus $N$ circa corpus $L$, quod in quiete spectamus, motu regulari feratur, tum vero corpus $M$ non in eodem plano circa $L$ ita moveatur, ut ejus motus ab actione corporis $N$ perturbetur, definire has perturbationes.

**Solutio.** Ex corpore $M$, in planum orbitae a corpore $N$ descriptae demittatur perpendiculum $MP$, et ex $P$ ad rectam fixam $LA$ agatur normalis $PQ$, vocenturque coordinatae pro corpore $M$, $LQ = x$, $QP = y$ et $PM = z$, sitque distantia $LM = v = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. Tum vero pro corpore $N$ sint coordinatae $LR = \mathfrak{x}$, $RN = \mathfrak{y}$ et distantia $LN = u$. Posito ergo angulo $ALN = \vartheta$, erit $\mathfrak{x} = u\cos\vartheta$ et $\mathfrak{y} = u\sin\vartheta$. Deinde ponatur distantia $MN = w$, ut sit $w = \sqrt{((\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + zz)}$. Jam secundum directiones ternarum coordinatarum vires corpus $M$ sollicitantes resolvantur, et cum primo $M$ ad $L$ trahatur $\text{vi} = \frac{M(L+M)}{vv}$, hinc nascitur vis

$$\text{sec. } LQ = \frac{-M(L+M)x}{v^3}, \quad \text{sec. } QP = \frac{-M(L+M)y}{v^3}, \quad \text{sec. } PM = \frac{-M(L+M)z}{v^3}.$$

Deinde ad corpus $N$ urgetur $\text{vi} = \frac{MN}{ww}$, unde nascitur vis

$$\text{sec. } LQ = \frac{MN(\mathfrak{x} - x)}{w^3}, \quad \text{sec. } QP = \frac{MN(\mathfrak{y} - y)}{w^3}, \quad \text{sec. } PM = \frac{-MNz}{w^3}.$$

Denique cum corpus $L$ ad $N$ sollicitetur $\text{vi} = \frac{LN}{uu}$, hac rite in $M$ translata prodit vis

$$\text{sec. } LQ = \frac{-MN\mathfrak{x}}{u^3} \quad \text{et} \quad \text{sec. } QP = \frac{-MN\mathfrak{y}}{u^3}.$$

Ex his viribus formulae motum continentes ita se habebunt

$$ddx = -2gdt^2\left(\frac{(L+M)x}{v^3} - \frac{N(\mathfrak{x} - x)}{w^3} + \frac{N\mathfrak{x}}{u^3}\right),$$

$$ddy = -2gdt^2\left(\frac{(L+M)y}{v^3} - \frac{N(\mathfrak{y} - y)}{w^3} + \frac{N\mathfrak{y}}{u^3}\right),$$

$$ddz = -2gdt^2\left(\frac{(L+M)z}{v^3} - \frac{Nz}{w^3}\right).$$

Ponamus brevitatis gratia $\frac{N}{L+M} = n$, ut habeamus

$$ddx = -2g\,(L+M)\,dt^2\left(\frac{x}{v^3}+\frac{nx}{w^3}-n\mathfrak{x}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right),$$

$$ddy = -2g\,(L+M)\,dt^2\left(\frac{y}{v^3}+\frac{ny}{w^3}-n\mathfrak{y}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)\right),$$

$$ddz = -2g\,(L+M)\,dt^2\left(\frac{z}{v^3}+\frac{nz}{w^3}\right).$$

His cum solutione problematis § 169 comparatis, quod ibi erat $L$ hic nobis est $L+M$, ac praeterea

$$X = \frac{nx}{w^3} - nu\cos\vartheta\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),\quad Y = \frac{ny}{w^3} - nu\sin\vartheta\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),\quad Z = \frac{nz}{w^3}.$$

Sit nunc, solutionem secundum praecepta ibi data prosequendo, recta $L\Omega$ linea nodorum et $\Omega$ nodus ascendens, ponaturque angulus $AL\Omega = \psi$ et inclinatio praesens orbitae a corpore $M$ descriptae ad planum orbitae $N = \omega$; tum vocetur angulus $\Omega LM = \sigma$, eritque

$$x = v\,(\cos\sigma\cos\psi - \sin\sigma\sin\psi\cos\omega),\quad y = v\,(\cos\sigma\sin\psi + \sin\sigma\cos\psi\cos\omega)\ \text{ et }\ z = v\sin\sigma\sin\omega,$$

erit $d\omega = \frac{d\psi\cos\sigma\sin\omega}{\sin\sigma}$, atque fiat $d\sigma + d\psi\cos\omega = d\varphi$, ut sit $\varphi$ longitudo corporis $M$ in sua orbita. Quibus positis erit

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2g\,(L+M)\,dt^2\left(\frac{kk-1}{f}+\frac{2}{v}-2\int(Xdx+Ydy+Zdz)\right)$$

$$\text{et}\qquad v^4\,d\varphi^2\cos^2\omega = 4g\,(L+M)\,dt^2\int vv\,d\varphi\cos\omega\,(Xy-Yx)$$

$$\text{atque}\qquad d\psi = \frac{2g\,(L+M)\,dt^2\sin\sigma}{v\,d\varphi}\,(Y\cos\psi + X\sin\psi - Z\cot\omega).$$

Cum autem sit

$$xdy - ydx = vv\,d\varphi\cos\omega,\quad xdz - zdx = vv\,d\varphi\cos\psi\sin\omega,\quad ydz - zdy = vv\,d\varphi\sin\psi\sin\omega,$$

$$\text{erit}\qquad dx = \frac{xdz}{z} - \frac{vv\,d\varphi\cos\psi\sin\omega}{z},\qquad dy = \frac{ydz}{z} - \frac{vv\,d\varphi\sin\psi\sin\omega}{z}$$

$$\text{et}\qquad \frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma\cos\sigma}{\sin\sigma} + \frac{d\psi\cos\sigma\cos\omega}{\sin\sigma} = \frac{dv}{v} + \frac{d\varphi\cos\sigma}{\sin\sigma}.$$

Pro reductione formularum datarum habemus primo

$$Xy - Yx = nu\,(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),\quad\text{seu}$$

$$Xy - Yx = nuv\,(\cos\sigma\sin(\vartheta-\psi) - \sin\sigma\cos\omega\cos(\vartheta-\psi))\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right).$$

Deinde est

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{nv\,dv}{w^3} - nu\,dv\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)(\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta) - \sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta))$$

$$+ nuv\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta)),$$

atque

$$v^4\,d\varphi^2 \sin^2\omega = -4ng\,(L+M)\,dt^2 \int uv^3\,d\varphi \sin\sigma \sin^2\omega \cos(\psi-\vartheta)\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),$$

$$v^4\,d\varphi^2 \cos^2\omega = -4ng\,(L+M)\,dt^2 \int uv^3\,d\varphi \cos\omega\,(\cos\sigma \sin(\psi-\vartheta) + \sin\sigma\cos\omega\cos(\psi-\vartheta))\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),$$

unde colligendo fit

$$v^4\,d\varphi^2 = -4ng\,(L+M)\,dt^2 \int uv^3\,d\varphi\,(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta))\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right).$$

Ponamus jam brevitatis gratia

$$\int uv^3\,d\varphi\,(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta))\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) = P,$$

$$\int\frac{udv}{w^3} - \int udv\,(\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta) - \sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta))\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right)$$
$$+ \int uv\,d\varphi\,(\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta))\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) = Q,$$

eritque $$v^4\,d\varphi^2 = 2g\,(L+M)\,dt^2\,(f-2nP)$$

et $$dv^2 + v^2\,d\varphi^2 = 2g\,(L+M)\,dt^2\left(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - 2nQ\right),$$

unde fit $$dv^2\,(f-2nP) = v^4\,d\varphi^2\left(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - 2nQ - \frac{f}{vv} + \frac{2nP}{vv}\right)$$

et $$\frac{dv}{vv}\sqrt{(f-2nP)} = d\varphi\sqrt{\left(\frac{kk-1}{f} + \frac{2}{v} - 2nQ - \frac{f}{vv} + \frac{2nP}{vv}\right)}.$$

Quare si ut supra ponamus $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, obtinebimus

$$p = f - 2nP, \qquad qq = 1 + \frac{(kk-1)\,p}{f} - 2nQp \qquad \text{et} \qquad \frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi\sin s}{p},$$

ac porro $$\frac{q\,(d\varphi - ds)\sin s}{p} = \frac{dp\,(\cos s + 2q + qq\cos s)}{2ppq} + \frac{ndQ\cos s}{q}.$$

Postea vero reperimus

$$d\psi = \frac{2ng\,(L+M)\,udt^2\sin\sigma\sin(\psi-\vartheta)}{vd\varphi}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right),$$

et ob $2g\,(L+M)\,dt^2 = \frac{v^4\,d\varphi^2}{p}$ erit

$$d\psi = \frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\sin(\psi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{d\omega}{\sin\omega} = \frac{nuv^3\,d\varphi\cos\sigma\sin(\psi-\vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right).$$

Praeterea ex his valoribus nanciscimur

$$w = \sqrt{\left(vv + uu - 2uv\,(\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta) - \sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta))\right)}.$$

Ponamus nunc brevitatis gratia

$$\cos\sigma\cos(\psi-\vartheta) - \sin\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta) = \cos\lambda,$$
$$\sin\sigma\cos(\psi-\vartheta) + \cos\sigma\cos\omega\sin(\psi-\vartheta) = \sin\mu,$$

ut sit $P = \int uv^3 d\varphi \sin\mu \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$, $Q = \int \frac{vdv}{w^3} + \int (uud\varphi \sin\mu - udv \cos\lambda)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$.

Cum jam sit $dp = -2nuv^3 d\varphi \sin\mu \left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$, erit

$$\frac{q(d\varphi - ds)\sin s}{p} = -\frac{nuv^3 d\varphi \sin\mu (\cos s + 2q + qq\cos s)}{ppq}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) + \frac{nv\,dv \cos s}{qw^3}$$
$$+ \frac{nuv\,d\varphi \sin\mu \cos s}{q}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{nu\,dv\cos\lambda\cos s}{q}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

seu $\frac{q(d\varphi - ds)}{p} = -\frac{nuv^3 d\varphi \sin s \sin\mu}{pp}(2 + q\cos s)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) + \frac{nv^3 d\varphi \cos s}{pw^3} - \frac{nuvv\,d\varphi \cos s\cos\lambda}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$,

estque $w = \sqrt{(vv + uu - 2uv\cos\lambda)}$, unde patet $\lambda$ denotare angulum *MLN*. Cum ergo sit $d\sigma = d\varphi - d\psi\cos\omega$, erit

$$d\sigma = d\varphi - \frac{nuv^3 d\varphi \sin\sigma\cos\omega \sin(\psi - \vartheta)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) \quad \text{et}$$

$$ds = d\varphi - \frac{nv^3 d\varphi \cos s}{qw^3} + \frac{nuv^3 d\varphi \sin s \sin\mu}{pq}(2 + q\cos s)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) + \frac{nuvv\,d\varphi \cos s \cos\lambda}{q}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right);$$

tum vero ob $dv = \frac{qvv'd\varphi \sin s}{p}$ fit

$$dQ = \frac{qv^3 d\varphi \sin s}{pw^3} + uv\,d\varphi\left(\sin\mu - \frac{qv\cos\lambda \sin s}{p}\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

unde per integrationem valor ipsius $Q$ colligi debet. Denique pro ratione temporis habemus

$$dt\sqrt{2g}(L + M) = \frac{vv\,d\varphi}{\sqrt{p}}.$$

Quodsi jam motus corporis $N$ sit regularis ponaturque $u = \frac{b}{1 + e\cos r}$, erit

$$dt\sqrt{2g}(L + N) = \frac{uud\vartheta}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad du = \frac{euu\,d\vartheta \sin r}{b};$$

quare posito $\sqrt{\frac{L+M}{L+N}} = \frac{1}{m}$, fit $\frac{1}{m} = \frac{vv\,d\varphi\sqrt{b}}{uud\vartheta\sqrt{p}}$, hinc $d\vartheta = \frac{mvv\,d\varphi\sqrt{b}}{uu\sqrt{p}}$ et

$$du = \frac{mevv\,d\varphi \sin r\sqrt{b}}{b\sqrt{p}} = \frac{mevv\,d\varphi \sin r}{\sqrt{bp}} \quad \text{et} \quad dr = d\vartheta.$$

193. **Coroll. 1.** Cum termini littera $n$ affecti sint minimi, primo his terminis penitus neglectis habebimus $p = f$, $q = k$, $ds = d\varphi$, $v = \frac{f}{1 + k\cos s}$, $d\sigma = d\varphi$ et $d\psi = 0$, $d\omega = 0$, quibus valoribus corpori $N$ motus regularis inducitur.

194. **Coroll. 2.** Deinde hi ipsi valores in terminis littera $n$ affectis adhibeantur, ex quibus per integrationem primo quantitates $P$ et $Q$, tum vero anguli $s$, $\sigma$, $\psi$ et $\omega$ investigentur, quibus inventis erit accuratius $p = f - 2nP$ et $q = \sqrt{\left(\frac{kkp}{f} + \frac{2nP}{f} - 2nQp\right)}$, hincque $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$.

195. **Coroll. 3.** Porro hi valores correcti in formulas integrales introducantur, ac denuo tam quantitates $P$ et $Q$ quam anguli $s$, $\sigma$, $\psi$ et $\omega$ quaerantur, qui valores cum vero sint propiores, etiam quantitates $p$, $q$ et $v$ indeque et $w$ accuratius cognoscentur, unde similis operatio ad majorem consensum cum veritate obtinendum suscipi poterit.

196. **Scholion 1.** Hinc intelligitur istum calculum ob formularum complicationem non solum esse operosissimum, sed etiam alia via singulas harum formularum partes integrandi non patet, nisi ut eae in simplices sinus vel cosinus evolvantur, et integrationes omnes ad hujusmodi terminos $\int d\varphi \cos \xi$ perducantur, ubi relatio inter $d\varphi$ et $d\xi$ proxime saltem detur. Quodsi enim fuerit $d\xi = d\varphi(\alpha + \beta \cos x + \text{etc.})$, ubi terminus $\alpha$ sequentes plurimum superet, ob

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\alpha} - \frac{\beta d\varphi \cos x}{\alpha} - \text{etc.}, \quad \text{fit} \quad \int d\varphi \cos \xi = \frac{1}{\alpha} \sin \xi - \frac{\beta}{\alpha} \int d\varphi \cos x \cos \xi \text{ etc.},$$

$$\text{at} \quad \int d\varphi \cos x \cos \xi = \tfrac{1}{2} \int d\varphi \cos(\xi - x) + \tfrac{1}{2} \int d\varphi \cos(\xi + x),$$

ita ut hic similis ratio integrationis sit adhibenda. Verum si eveniat, ut ipse numerus $\alpha$ sit perquam exiguus, hoc modo parum proficimus, hocque casu si fuerit $x = \mathfrak{b}\xi + \mathfrak{B}$, integrari oporteret hujusmodi formulam

$$\frac{d\xi \cos \xi}{\alpha + \beta \cos(\mathfrak{b}\xi + \mathfrak{B}) + \gamma \cos(\mathfrak{c}\xi + \mathfrak{C}) \text{ etc.}},$$

in qua coëfficientes $\beta$ et $\gamma$ prae $\alpha$ non sint exigui, sed potius valde magni. Quare si hujusmodi casus occurrant, ista consueta integrandi methodus minime ad scopum est accommodata. Praeterea quantitas irrationalis $w = \sqrt{(vv + uu - 2vu \cos \lambda)}$ maximum affert obstaculum, nisi insignis inaequalitas inter distantias $v$ et $u$ adsit, ita ut fractio $\frac{1}{w^3}$ facile in seriem valde convergentem transmutari possit. Ob has tantas difficultates optandum esset, ut geometrae potius in alias methodos integrandi, quae non ad evolutionem in simplices sinus cosinusve adstringerentur, inquirerent, quod negotium si minus successerit, cognitio motuum coelestium non tam ob defectum Mechanicae, quam ob sufficientem Analyseos promotionem arceri est censenda.

197. **Scholion 2.** Quando autem resolutio formulae irrationalis $w$ in seriem convergentem minus commode succedit, quemadmodum imprimis usu venit, quando perturbatio motus cujusdam planetae ab actione alius planetae vel etiam cometae oriunda definiri debet, ob calculi defectum vix alia via relinquitur, nisi ut pro singulis temporis momentis perturbationes ex formulis differentialibus definiantur, ac deinceps in unam summam colligantur. Planeta scilicet vel cometa assumitur, nisi alter planeta adesset, sectionem conicam circa solem secundum regulas Keplerianas esse descriptur tum vero quasi singulis temporis momentis vis perturbans accedere concipitur, ubi quanta mutatio tam in ipsa orbita, quam in motu inde efficiatur, determinari oportet; id quod, quia tempus minimum accipiatur, ipsae formulae differentiales ostendent. Quodsi deinceps has perturbationes momentaneas in unam summam colligamus, evidens est conclusionem eo fore certiorem, quo minores fuerint temporis particulae, quamquam etiam hinc errores accumulari sunt censendi.

## Caput VII.

### De perturbatione motus momentanea a vi quacunque sollicitante oriunda.

198. **Problema.** (Fig. 188.) Si corpus, dum circa aliud corpus motu regulari sectionem conicam esset descripturum, per exiguum temporis intervallum a corpore quodam tertio in orbitae suae plano sito sollicitetur, determinare motus perturbationem momentaneam.

**Solutio.** Mente primum removeamus corpus perturbans et consideremus motum corporis $M$, qualis spectaretur ex corpore $L$, dum haec duo corpora $L$ et $M$ sola existerent ac se mutuo attraherent in ratione reciproca duplicata distantiarum. Describet ergo corpus $M$ sectionem conicam $BM$, cujus alter focus erit in $L$, sitque $B$ punctum orbitae ab $L$ minime distans, seu absis ima, cujus longitudo a directione fixa $LA$ computata, sit angulus $ALB = \alpha$. Orbitae vero vocetur semiparameter $= p$ et excentricitas $= q$, erit absidis imae distantia $LB = \frac{p}{1 + q}$; absidis vero summae distantia ab $L = \frac{p}{1 - q}$, unde fit axis transversus $= \frac{2p}{1 - qq}$, cujus semissis $\frac{p}{1 - qq}$ ponatur $= r$. Versetur jam corpus, cujus motum investigamus, in $M$, sitque angulus $BLM = s$, qui ejus anomalia vera appellatur, et distantia $LM = v$, erit $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$; ipsa vero longitudo a directione fixa $LA$ computata sit angulus $ALM = \varphi$, erit utique $\varphi = \alpha + s$ et $\varphi - s = \alpha$. Quodsi jam tempusculo $dt$ corpus ab $M$ in $m$ progredi sumamus, et litterae $L$ et $M$ massas corporum denotent, erit

$$vv\,ds = dt\sqrt{2gp\,(L + M)}, \qquad \text{ideoque} \quad dt\sqrt{2gp\,(L + M)} = \frac{pp\,ds}{(1 + q\cos s)^2},$$

ita ut sit angulus elementaris tempusculo $dt$ confectus

$$MLm = d\varphi = ds = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp\,(L + M)},$$

ubi quidem litterae $L$ et $M$ massas ita denotare sunt intelligendae, ut $\frac{L}{vv}$ exprimat vim absolutam, qua corpora in distantia $= v$ ad $L$ attrahuntur, posita gravitate absoluta $= 1$ in superficie terrae, ubi grave uno minuto secundo per altitudinem $= g$ delabi assumitur, ut tempus $t$ in minutis secundis exprimatur. At quantitates $L$ et $M$ etiam ex tempore periodico colligere licet. Cum enim quantitates $p$ et $q$ sint constantes, erit

$$\int \frac{ds}{(1 + q\cos s)^2} = \frac{1}{(1 - qq)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.cos}\,\frac{q + \cos s}{1 + q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1 - qq)(1 + q\cos s)},$$

erit integrando:

$$t\sqrt{2gp\,(L + M)} = \frac{pp}{(1 - qq)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.cos}\,\frac{q + \cos s}{1 + q\cos s} - \frac{ppq\sin s}{(1 - qq)(1 + q\cos s)},$$

seu ob $\frac{p}{1 - qq} = r$ habebitur

$$t\sqrt{2g\,(L + M)} = r\sqrt{r}\,.\,\text{Arc.cos}\,\frac{q + \cos s}{1 + q\cos s} - qr\sqrt{p}\cdot\frac{\sin s}{1 + q\cos s},$$

ubi $t$ denotat tempus, quo corpus $M$ ab abside ima $B$ anomaliam veram $BLM = s$ absolvit. Quare si totum tempus periodicum vocetur $= \Theta$ min. sec. posito $s = 360^0 = 2\pi$, obtinebitur

$$\Theta \sqrt{2g(L+M)} = 2\pi r \sqrt{r}, \quad \text{ita ut sit} \quad \sqrt{2g(L+M)} = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\Theta}.$$

His definitis ponamus dum corpus in $M$ versatur, unde motu assignato ulterius esset progressurum, quasi subito in $N$ existere corpus in plano orbitae cujus massa $= N$, voceturque distantia $LN = u$, angulus $ALN = \vartheta$, sitque distantia $MN = \sqrt{(uu - 2uv\cos(\varphi - \vartheta) + vv)} = w$ brevitatis gratia. Ob actionem hujus corporis $N$, cujus effectum tantum pro tempusculo $dt$ hic definire statuimus, corpus $M$ tempusculo $dt$ non in $m$ sed in $\mu$ perveniet, ejusque motus ita perturbabitur, ut, si corpus $N$, elapso tempusculo $dt$ subito iterum tolleretur, aliam deinceps orbitam esset descripturum, a priori infinite parum recedentem, puta $\beta\mu$, pro qua statuamus longitudinem absidis imae $AL\beta = \alpha + d\alpha$, semiparametrum $= p + dp$, excentricitatem $= q + dq$, et semiaxem transversum $= r + dr$. Nunc autem elapso tempusculo $dt$ erit anomalia vera $= \beta L\mu$, quas mutationes momentaneas ex problemate § 185 ac praecipue ejus scholio § 191 colligamus. Ponamus ergo, ut ibi, brevitatis gratia $\frac{N}{L+M} = n$, tum vero

$$dP = uv^3 d\varphi \sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) \quad \text{et}$$

$$dS = -\frac{qv^3 d\varphi \sin s}{pw^3} + \frac{q}{p} uvv\, d\varphi \sin s \cos(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) - uv\, d\varphi \sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

atque § 191 invenimus fore, posito $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$,

I. $vv\,d\varphi = dt\sqrt{2g(L+M)}\,(f - 2nP)$, II. $dv = \frac{qvv\,d\varphi \sin s}{p}$,

III. $p = f - 2nP$, IV. $\frac{qq}{p} = \frac{kk-1}{f} + \frac{1}{p} + 2nS$,

$$\text{V.}\quad d\varphi - ds = \frac{nvv\,d\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3} - u\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\cos s\cos(\varphi - \vartheta) + \frac{(2 + q\cos s)\sin s\sin(\varphi - \vartheta)}{1 + q\cos s}\right)\right),$$

ubi $f$ denotat semiparametrum et $k$ excentricitatem pro initio temporis $t$. Quoniam igitur hic istud initium in principio tempusculi $dt$ constituimus, erit nobis $f = p$ et $k = q$, litterae autem $p$ et $q$ denotant earundem valores jam variatos $p + dp$ et $q + dq$, at $d\varphi$ angulum $ML\mu$. Ex quo colligimus

$$dp = -2n\,dP, \quad \text{et} \quad d\cdot\frac{1 - qq}{p} = -2n\,dS = d\cdot\frac{1}{r}, \quad \text{atque}$$

$$vv\,d\varphi = dt\sqrt{2g(L+M)}\,(p + dp), \quad \text{seu} \quad = dt\left(\sqrt{p} + \frac{dp}{2\sqrt{p}}\right)\sqrt{2g(L+M)}.$$

Variationes ergo tempusculo $dt$ productae ita se habebunt:

1. semiparameter $p$ augmentum capit $dp$, ut sit

$$dp = -2nuv^3 d\varphi \sin(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right);$$

2. semiaxis transversus $r$, ob $\frac{dr}{rr} = 2ndS$, augmentum capit $dr$, ut sit

$$dr = \frac{-2nqrrv^3\,d\varphi\,\sin s}{pw^3} + 2nrruv\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{qv}{p}\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - \sin(\varphi-\vartheta)\right);$$

3. pro variatione excentricitatis $q$ habemus

$$\frac{-2q\,dq}{p} - \frac{(1-qq)\,dp}{pp} = -2\,ndS, \quad \text{seu} \quad \frac{2qdq}{p} = 2ndS + \frac{2n(1-qq)\,dp}{pp},$$

unde fit

$$dq = \frac{-nv^3\,d\varphi\,\sin s}{w^3} + \frac{nuv^3\,d\varphi}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - (2\cos s + q + q\cos^2 s)\sin(\varphi-\vartheta)\Big);$$

4. angulus autem elementaris $d\varphi$ tempusculo $dt$ descriptus omissa particula infinite parva, ita definitur

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp}\,(L+M),$$

ubi si tempusculo $dt$ valor notabilis tribuatur, quantitatibus $p$ et $v$ valor medius inter eos, quos initio et fine obtinent, assignari poterit;

5. denique cum sit $\varphi - s = \alpha$, variatio momentanea ipsius $\alpha$ erit

$$d\alpha = \frac{nvv\,d\varphi}{q}\left(\frac{v\cos s}{w^3} - u\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\cos s\cos(\varphi-\vartheta) + \frac{(2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)}{1+q\cos s}\right)\right),$$

vel etiam

$$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi}{q}\left(\frac{\cos s}{w^3} - \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big((1+q\cos s)\cos s\cos(\varphi-\vartheta) + (2+q\cos s)\sin s\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right).$$

Posset hinc etiam variatio in distantia $v$ facta definiri, sed cum semper sit $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, praestat quovis tempore ipsam distantiam $v$ definiri. Omnes ergo perturbationes momentaneae tempusculo $dt$ productae ita determinabuntur:

1. Angulus elementaris interea confectus $d\varphi$ fit

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp}\,(L+M).$$

2. Semiparameter orbitae $p$ accipiet augmentum $dp$, ut sit

$$dp = -2nuv^3\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\sin(\varphi-\vartheta).$$

3. Semiaxis transversus orbitae $r = \frac{p}{1-qq}$ accipiet augmentum $dr$, ut sit

$$dr = \frac{2nrrvv\,d\varphi}{p}\left(\frac{-qv\sin s}{w^3} + u\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big(q\sin s\cos(\varphi-\vartheta) - (1+q\cos s)\sin(\varphi-\vartheta)\Big)\right),$$

sive $$dr = \frac{-2nrrvv\,d\varphi}{p}\left(\frac{qv\sin s}{w^3} + u\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\Big(\sin(\varphi-\vartheta) + q\sin(\varphi-\vartheta-s)\Big)\right).$$

4. Excentricitas $q$ incrementum $dq$ capiet, ut sit

$$dq = nv^3 d\varphi \left( \frac{-\sin s}{w^3} + \frac{u}{p} \left( \frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) \left( (1 + q\cos s) \sin s \cos(\varphi - \vartheta) - (2\cos s + q + q\cos^2 s) \sin(\varphi - \vartheta) \right) \right).$$

5. Longitudo absidis $\alpha$ capiet augmentum $d\alpha$, ut sit

$$d\alpha = \frac{nv^3 d\varphi}{q} \left( \frac{\cos s}{w^3} - \frac{u}{p} \left( \frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) \left( (1 + q\cos s) \cos s \cos(\varphi - \vartheta) + (2 + q\cos s) \sin s \sin(\varphi - \vartheta) \right) \right).$$

Ex binis postremis formulis colligur fore

$$dq\cos s + qd\alpha \sin s = -2nuvvd\varphi \left( \frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) \sin(\varphi - \vartheta) = \frac{dp}{v} \quad \text{et}$$

$$dq\sin s - qd\alpha\cos s = nv^3 d\varphi \left( -\frac{1}{w^3} + \frac{u}{p} \left( \frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3} \right) \left( (1 + q\cos s) \cos(\varphi - \vartheta) - q\sin s \sin(\varphi - \vartheta) \right) \right),$$

quarum illa ex differentiatione aequalitatis $\frac{1}{v} = \frac{1 + q\cos s}{p}$ sequitur, ob $\frac{dv}{vv} = \frac{qd\varphi \sin s}{p}$ et $d\varphi - ds = d\alpha$, fit enim $dq\cos s + qd\alpha \sin s = \frac{dp}{v}$.

199. **Coroll. 1.** Ob actionem ergo corporis $N$ singulis momentis elementa sectionis conicae immutantur, ac si id subito annihilaretur, corpus $M$ secundum ea elementa, quae ultimo momento locum habuerint, moveri perget motu regulari.

200. **Coroll. 2.** Parameter nullam patitur mutationem, si fuerit vel $\sin(\varphi - \vartheta) = 0$, vel $w = u$. Illo casu corpus $N$ cum corporibus $L$ et $M$ in directum est situm, ideoque ex $L$ cum $M$, vel in oppositione vel conjunctione conspicitur; hic vero casus locum habet, ubi fuerit $\cos(\varphi - \vartheta) = \frac{v}{2u}$.

201. **Coroll. 3.** Si fuerit $\varphi - \vartheta = 0$ et $u > v$, erit $w = u - v$, et perturbationes momentaneae praeter $dp = 0$ inveniuntur:

$$dr = 2nrrvvd\varphi \cdot \frac{q\sin s}{p} \left( \frac{1}{ww} - \frac{1}{uu} \right), \quad dq = nvvd\varphi \sin s \left( \frac{1}{ww} - \frac{1}{uu} \right), \quad d\alpha = \frac{-nvvd\varphi\cos s}{q} \left( \frac{1}{ww} - \frac{1}{uu} \right).$$

202. **Coroll. 4.** Eodem porro casu, quo $\varphi - \vartheta = 0$, si sit $u < v$, ac propterea $w = v - u$, erunt perturbationes momentaneae:

$$dr = -2nrrvvd\varphi \cdot \frac{q\sin s}{p} \left( \frac{1}{ww} + \frac{1}{uu} \right), \quad dq = -nvvd\varphi \sin s \left( \frac{1}{ww} + \frac{1}{uu} \right), \quad d\alpha = \frac{nvvd\varphi\cos s}{q} \left( \frac{1}{ww} + \frac{1}{uu} \right).$$

203. **Coroll. 5.** Sin autem sit $\varphi - \vartheta = 180^0$, erit $\cos(\varphi - \vartheta) = -1$ et $w = v + u$, unde praeter $dp = 0$ reliquae perturbationes erunt

$$dr = 2nrrvvd\varphi \cdot \frac{q\sin s}{p} \left( -\frac{1}{ww} + \frac{1}{uu} \right), \quad dq = nvvd\varphi \sin s \left( -\frac{1}{ww} + \frac{1}{uu} \right), \quad d\alpha = \frac{-nvvd\varphi\cos s}{q} \left( -\frac{1}{ww} + \frac{1}{uu} \right).$$

204. **Coroll. 6.** Casu vero, quo fit $w = u$, ubi etiam $dp = 0$, reliquae perturbationes momentaneae sunt:

$$dr = \frac{-2nqrrv^3 d\varphi \sin s}{pu^3}, \quad dq = \frac{-nv^3 d\varphi \sin s}{u^3}, \quad d\alpha = \frac{nv^3 d\varphi \cos s}{qu^3}.$$

205. **Scholion 1.** Quando ergo motus corporis perturbantis $N$ constat, ut ad singula temporis momenta ejus locus assignari possit, tum ope nostrarum formularum perturbationes singulis momentis productae assignari poterunt. Haec autem temporis momenta, etsi in calculo infinite parva sunt assumta, tamen plerumque satis notabilia temporis intervalla, veluti horae, dies, quin etiam hebdomades eorum loco assumi licet, siquidem his intervallis exiguae mutationes oriuntur, vel potius quamdiu mutationes tempori fuerint proxime proportionales. Quatenus enim eae a ratione temporis recedunt, eatenus tempus in minores partes secari oportet. Ita hae formulae commode adhiberi poterunt, si quaestio fuerit, quantum motus cujuspiam planetae principalis ab actione alius planetae vel cometae perturbetur, siquidem utriusque motus in idem fere planum incidat. Ex eodem fonte Celeb. Clairaut perturbationem motus cometae jam appariturі, qui retro annis 1682 et 1607 fuerat observatus, feliciter determinavit, quod negotium etsi summopore laboriosum, eo felicius successit, quod perturbatio tantum, quoad in vicinia planetarum Jovis ac Saturni versabatur cometa, fuerat effecta.

206. **Scholion 2.** Expressiones inventae in alias formas transfundi possunt introducendo angulos trianguli $LMN$. Si enim ponamus hos angulos $MLN = \varphi - \vartheta = z$, $LMN = y$ et $LNM = x$, ut sit $x + y + z = 180^0$, erit $u = \frac{v \sin y}{\sin x}$ et $w = \frac{v \sin z}{\sin x}$, quibus valoribus introductis ob

$$d\varphi = \frac{dt}{vv} \sqrt{2gp}\,(L + M) \quad \text{et} \quad v = \frac{p}{1 + q\cos s},$$

reperiuntur variationes tempusculo $dt$ productae:

1. pro variatione semiparametri $p$,

$$dp = \frac{-2nv\,d\varphi \sin^2 x}{\sin^2 y \sin^2 z}(\sin^3 y - \sin^3 z);$$

2. pro variatione semiaxis transversi $r$,

$$dr = \frac{-2nrr\,d\varphi \sin^2 x}{p \sin^2 y \sin^2 z}\big((1 + q\cos s)(\sin^3 y - \sin^3 z) + q \sin s\,(\sin^2 y \cos y + \sin^2 z \cos z)\big);$$

vel etiam hoc modo

$$dr = \frac{-2nrr\,d\varphi \sin^2 x}{p \sin^2 y \sin^2 z}(\sin^3 y - \sin^3 z + q \sin^2 y \sin(y + s) - q \sin^2 z \sin(z - s));$$

3. pro variatione excentricitatis $q$,

$$dq = \frac{-n\,d\varphi \sin^2 x}{\sin^2 y \sin^2 z}\left(\sin s\,(\sin^2 y \cos y + \sin^2 z \cos z) + \frac{(2\cos s + q + q\cos^2 s)}{1 + q\cos s}(\sin^3 y - \sin^3 z)\right);$$

4. pro variatione longitudinis absidum $\alpha$,

$$d\alpha = \frac{n\,d\varphi \sin^2 x}{q \sin^2 y \sin^2 z}\left(\cos s\,(\sin^2 y \cos y + \sin^2 z \cos z) - \frac{\sin s\,(2 + q\cos s)(\sin^3 y - \sin^3 z)}{1 + q\cos s}\right).$$

Cum hae formulae non parum sint complicatae, quovis casu oblato non tam facile dici potest, utrum hae variationes fuerint positivae, an negativae? antequam veros earum valores evolverimus. Interim quia ex istis formulis variationes casu $\varphi - \vartheta = z = 0$ colligere haud licet, priores formae in praxi anteferendae videntur.

207. **Scholion 3.** Effectus corporis $N$ in motu corporis $M$ perturbando est ceteris paribus maximus, si vel distantia $MN = w$, vel $LN = u$ fuerit minima, hoc est si corpus $N$ vel ad $M$ vel ad $L$ proxime accedat; priori autem casu effectus major erit quam posteriori, quoniam $w$ tantum in denominatore nostrarum formularum inest, $u$ vero etiam numeratores afficit. Quodsi igitur $L$ sit sol, $M$ planeta quidam primarius et $N$ cometa in plano orbitae planetae decurrens, motus quidem planetae maxime turbabitur, quando cometa ad eum proxime accedit; verum etiam dum cometa prope solem praeterit, perturbatio erit eo major, quo vicinior fiat soli et quo major fuerit ejus massa. Ita cometae non solum in perigaeo motum terrae perturbant, sed etiam in perihelio. Ceterum si fieri posset, ut alterutra distantiarum $w$ et $u$ prorsus in nihilum abiret, formulae nostrae omni usu destituerentur, quandoquidem perturbationes fuerint infinitae. Casus hic locum esset habiturus, si corpus $N$ subito alteri corporum $L$ vel $M$ ita jungeretur, ut in unum coalesceret, qui etsi per formulas nostras inexplicabilis videtur, tamen in se est facillimus, propterea quod dum duo tantum aderunt corpora, motus erit regularis, in sectione conica procedens, quanquam haec sectio conica diversa erit ab illa, quae ante accessionem massae $N$ fuerit descripta. Atque hic casus, etsi nonnisi per miraculum locum habere potest, dum massa alterius corporum $L$ vel $M$ augeretur, expendi meretur.

208. **Problema.** Si dum corpora $L$ et $M$ se mutuo attrahentia motu regulari feruntur, alterius vel utriusque massa subito augeatur vel minuatur, definire motum subsecuturum.

**Solutio.** Hactenus ergo corpus $M$ ex $L$ visum descripserit sectionem conicam $BM$, cujus semiparameter sit $= p$, excentricitas $= q$ et longitudo absidis $ALB = \alpha$; nunc autem sit corporis $M$ longitudo $ALM = \varphi$ et distantia $LM = v$, erit anomalia vera $BLM = \varphi - \alpha = s$ et $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$; tum vero expositis horum corporum massis per litteras $L$ et $M$, tempusculo $dt$ describeretur angulus elementaris $MLm = d\varphi = ds = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp\,(L+M)}$. Jam hoc momento perpendatur corporis $M$ situs ac motus; situs quidem cum distantia $LM = v$, tum angulo $ALM = \varphi$ definitur, ac motus primo directione seu angulo $BML$, tum vero celeritate ipsa per $Mm$ determinatur. Sit ergo angulus $BML = \eta$ et celeritas in $M = \vartheta$, ita ut jam hae quatuor quantitates $v$, $\varphi$, $\eta$ et $\vartheta$ tanquam datae sint spectandae, ex quibus praecedentia motus elementa definiri debent, ac primo quidem dum corporum massae sunt $L$ et $M$, deinde vero dum massae sunt mutatae, puta $L'$ et $M'$. Primo igitur habemus

$$\tang \eta = \frac{v\,d\varphi}{dv}, \quad \text{sed ob} \quad v = \frac{p}{1 + q\cos s} \quad \text{est} \quad dv = \frac{pq\,ds\sin s}{(1 + q\cos s)^2},$$

quia ergo est $ds = d\varphi$, erit

$$\tang \eta = \frac{v\,(1 + q\cos s)^2}{pq\sin s} = \frac{1 + q\cos s}{q\sin s}.$$

Deinde hinc est $Mm = \frac{v\,d\varphi}{\sin\eta} = \frac{v\,d\varphi}{1 + q\cos s}\sqrt{(1 + 2q\cos s + qq)}$, ideoque celeritas

$$\vartheta = \frac{Mm}{dt} = \frac{Mm}{vv\,d\varphi}\sqrt{2gp\,(L+M)} = \frac{\sqrt{2gp\,(L+M)\,(1 + 2q\cos s + qq)}}{v\,(1 + q\cos s)}, \quad \text{seu} \quad = \frac{\sqrt{2gp\,(L+M)}}{v\sin\eta}.$$

unde colligimus $p = \frac{\varepsilon\varepsilon vv \sin^2\eta}{2g(L+M)}$, hincque $1 + q\cos s = \frac{p}{v} = \frac{\varepsilon\varepsilon v \sin^2\eta}{2g(L+M)} = q \sin s \operatorname{tang} \eta$. Quocirca erit

$$q\cos s = \frac{\varepsilon\varepsilon v \sin^2\eta}{2g(L+M)} - 1 \quad \text{et} \quad q \sin s = \frac{\varepsilon\varepsilon v \sin\eta\cos\eta}{2g(L+M)},$$

unde pro anomalia vera colligitur $\operatorname{tang} s = \frac{\varepsilon\varepsilon v \sin\eta\cos\eta}{\varepsilon\varepsilon v \sin^2\eta - 2g(L+M)}$, hincque ipsa excentricitas

$$q = \frac{\sqrt{(\varepsilon^4 vv \sin^2\eta - 4g(L+M)\varepsilon\varepsilon v \sin^2\eta + 4gg(L+M)^2)}}{2g(L+M)}.$$

Quare si nunc massae corporum $L$ et $M$ subito in $L'$ et $M'$ fuerint mutatae, his illarum loco positis hae formulae ostendent elementa orbitae deinceps descriptae, quae elementa sint: 1) semiparameter $= p'$, 2) excentricitas $= q'$ et 3) longitudo absidis imae $= \alpha'$, ita ut posita 4° anomalia vera $= s'$, sit $\alpha' = \varphi - s'$. Nunc ergo iterum ex statu praecedente elidantur litterae $\varepsilon$ et $\eta$, scilicet

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2gp(L+M)(1+2q\cos s+qq)}}{p}, \quad \sin\eta = \frac{1+q\cos s}{\sqrt{(1+2q\cos s+qq)}}, \quad \cos\eta = \frac{q\sin s}{\sqrt{(1+2q\cos s+qq)}},$$

eritque pro elementis variatis

$$p' = \frac{p(L+M)}{L'+M'}, \quad 1+q'\cos s' = \frac{p(L+M)}{v(L'+M')}, \quad q'\sin s' = \frac{(L+M)q\sin s}{L'+M'}$$

et $d\varphi = ds' = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp'(L'+M')}$. Nova ergo elementa ita pendent a praecedentibus, ut sit

$$\frac{L+M}{L'+M'} = \frac{p'}{p} = \frac{1+q'\cos s'}{1+q\cos s} = \frac{q'\sin s'}{q\sin s},$$

ideoque quantitates $p$, $1+q\cos s$ et $q\sin s$ in ratione reciproca massarum immutentur.

209. **Coroll. 1.** Si ergo massae $L$ et $M$ in $L'$ et $M'$ mutentur, dum corpus $M$ in abside ima versatur, ob $s=0$, erit etiam $s'=0$, sicque linea absidum nullam patitur mutationem, tum vero erit

$$\frac{1+q'}{1+q} = \frac{L+M}{L'+M'}, \quad \text{ideoque} \quad q' = \frac{L+M}{L'+M'}q + \frac{L+M}{L'+M'} - 1, \quad \text{seu} \quad q' = \frac{p'}{p}q + \frac{p'-p}{p},$$

unde excentricitas vel crescit vel decrescit, semper autem parameter $2p$ in ratione reciproca massarum mutatur.

210. **Coroll. 2.** Si mutatio massarum eveniat, dum corpus $M$ per absidem summam transit, qua $p$ abeat in $p'$, ob $s = 180°$ et $s' = 180°$, linea absidum non mutatur, sed excentricitas ita mutatur ut sit

$$\frac{p'}{p} = \frac{1-q'}{1-q}, \quad \text{ideoque} \quad q' = \frac{p'}{p}q + \frac{p-p'}{p}.$$

211. **Coroll. 3.** Si eadem mutatio oriatur dum $s = 90°$, erit

$$\frac{p'}{p} = 1 + q'\cos s' = \frac{q'\sin s'}{q},$$

unde si $\frac{p'}{p} = \lambda$, habebitur

$$q'\sin s' = \lambda q \quad \text{et} \quad q'\cos s' = \lambda - 1, \quad \text{ideoque} \quad q' = \sqrt{(\lambda\lambda qq + (\lambda - 1)^2)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} s' = \frac{\lambda q}{\lambda - 1}.$$

Si mutatio eveniat dum $s = 270^0$, erit

$$q'\sin s' = -\lambda q \quad \text{et} \quad q'\cos s' = \lambda - 1, \quad \text{ideoque} \quad q' = \sqrt{(\lambda\lambda qq + (\lambda - 1)^2)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} s' = \frac{-\lambda q}{\lambda - 1}.$$

212. **Coroll. 4.** Posito ergo $p' = \lambda p$, casu $s = 0$, erit

$$q' = \lambda q + \lambda - 1 \quad \text{et semiaxis transversus} \quad r' = \frac{p}{2(q+1) - \lambda(q+1)^2} = \frac{r(1-q)}{2 - \lambda(1+q)}.$$

Casu $s = 180^0$, ob $q' = \lambda q - \lambda + 1$ fit

$$r' = \frac{p}{2(1-q) - \lambda(1-q)^2} = \frac{r(1+q)}{2 - \lambda(1-q)}.$$

Casu $s = 90^0$, ob $q' = \sqrt{(\lambda\lambda qq + (\lambda - 1)^2)}$ fit

$$r' = \frac{p}{2 - \lambda(1+qq)} = \frac{r(1-qq)}{2 - \lambda(1+qq)}.$$

Casu $s = 270^0$ eadem mutatio in axe transverso oritur.

213. **Coroll. 5.** Si tempus periodicum prius ante mutationem sit $\Theta$, et post mutationem $= \Theta'$, ob $\Theta = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{2g(L+M)}}$ et $\Theta' = \frac{2\pi r'\sqrt{r'}}{\sqrt{2g(L'+M')}}$, erit

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{r'\sqrt{r'}}{r\sqrt{r}}\sqrt{\frac{L+M}{L'+M'}} = \frac{r'\sqrt{\lambda r'}}{r\sqrt{r}},$$

unde ex variatione axis transversi variatio in tempore periodico orta definiri potest.

214. **Scholion 1.** Si secundum opinionem, quam Newtonus erat amplexus, massa solis ob lucis emissionem continuo imminueretur, hinc mutatio in motu planetarum facta definiri posset. Foret enim $L + M$ quantitas variabilis, qua posita $= S$, erit

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gpS} \quad \text{et} \quad \frac{S}{S+dS} = \frac{p+dp}{p} = \frac{1 + q\cos s + d.q\cos s}{1 + q\cos s} = \frac{q\sin s + d.q\sin s}{q\sin s} = 1 - \frac{dS}{S}.$$

In hac autem variatione anomalia vera $s$ eatenus tantum mutari est censenda, quatenus linea absidum mutatur; unde posita longitudine absidis imae $\varphi - s = \alpha$, erit $ds = -d\alpha$. Ne autem haec consideratio moram facessat, praestabit hunc casum ex primis principiis evolvisse. Habemus ergo

$$\text{I.} \quad 2dvd\varphi + vdd\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \text{II.} \quad ddv - vd\varphi^2 = \frac{-2gSdt^2}{vv},$$

quarum illa dat $vvd\varphi = Cdt$, seu $d\varphi = \frac{Cdt}{vv}$, unde haec fiet

$$ddv = \frac{CCdt^2}{v^3} - \frac{2gSdt^2}{vv},$$

ubi $S$ spectari debet tanquam functio temporis $t$. Quae aequatio quantumvis resolutu difficilis

videatur, tamen solutio ex formulis superioribus petita ipsi satisfacere deprehenditur. Posito enim

$$v = \frac{p}{1 + q\cos s}, \quad \text{fit primo} \quad p = \frac{bC}{S}, \quad \text{tum vero}$$

$$dq\cos s + qd\alpha\sin s = -\frac{dS}{S}(1 + q\cos s) \quad \text{et} \quad dq\sin s - qd\alpha\cos s = -\frac{dS}{S}q\sin s,$$

unde colligitur $d\alpha = \frac{-dS\sin s}{Sq}$ et $dq = \frac{-dS}{S}(\cos s + q)$, hincque porro

$$dv = \frac{qdt\sin s}{p}\sqrt{2gbC}.$$

Denique ob $d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gbC}$ fiet

$$ds = \frac{dt\sqrt{2gbC}}{vv} + \frac{dS\sin s}{Sq},$$

unde saltem variationes momentaneae innotescunt.

215. **Scholion 2.** Solutio hujus problematis suppeditat quoque enodationem quaestionis, qua motus planetae, si forte a quapiam causa ictum acceperit, quem deinceps erit prosecuturus, determinatur. Quemcunque enim motum ante ictum habuerit, si per ictum planetae $M$ imprimatur celeritas $= \vartheta$ secundum directionem $Mm$, ut sit angulus $LMB = \eta$ et distantia $LM = v = \frac{p}{1 + q\cos s}$, post ictum erit semiparameter $p = \frac{\vartheta\vartheta vv\sin^2\eta}{2g(L+M)}$, excentricitas vero $q$ et anomalia vera $s$ per has aequationes definientur

$$q\cos s = \frac{\vartheta\vartheta v\sin^2\eta}{2g(L+M)} - 1 \quad \text{et} \quad q\sin s = \frac{\vartheta\vartheta v\sin\eta\cos\eta}{2g(L+M)},$$

tum vero erit post ictum $d\varphi = ds = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}$, unde sectio conica cum ratione motus innotescit. Verum revertamur ad perturbationem motus planetarum investigandam, quae ab attractione tertii cujusdam corporis efficitur, quando hoc corpus extra planum orbitae est situm. Quanquam autem istud corpus quovis momento tanquam quiescens spectamus, ejus tamen loca successiva in plano quodam per $L$ transeunte sita assumamus, quod planum tanquam fixum consideremus, cujus respectu planum orbitae planetae ob actionem continuo mutetur.

216. **Problema.** (Fig. 189.) Si corpus $M$, quod ad $L$ attractum motu regulari esset progressurum, a tertio quodam corpore $N$ extra planum motus sito attrahatur, determinare perturbationem motus momentaneam.

**Solutio.** Referat tabula planum, in quo corpus $N$ perpetuo versetur, in eodem simul perpetuo existente corpore $L$, cujus respectu motum corporis $M$ definiri oportet. Sit $LA$ recta quaedam fixa, ac nunc quidem elapso tempore $= t$ versetur corpus perturbans in $N$, posito angulo $ALN = \vartheta$ et distantia $LN = u$; corpus vero, cujus motus quaeritur, sit extra planum $ALN$ in $M$, unde si corpus $N$ abesset, motu regulari in orbita quadam $BM$ esset progressurum, cujus elementa sequenti modo denotentur. Primo sit $L☊$ intersectio ejus orbitae cum plano $ALN$, et longitudo nodi ascendentis

$AL☊ = \psi$, atque inclinatio orbitae ad planum $ALN = \omega$. Deinde ipsius orbitae $BM$ sit semiparameter $= p$, excentricitas $= q$ et semiaxis transversus $r = \frac{p}{1-qq}$. Nunc autem sit anomalia vera $BLM = s$, eritque distantia $LM = v = \frac{p}{1+q\cos s}$. Ponatur porro angulus $☊LM = \sigma$, qui vocatur argumentum latitudinis, erit pro abside ima $B$ angulus $☊LB = \sigma - s$, ac posita longitudine corporis $M$ in orbita propria $= \varphi$, erit, uti supra § 192 vidimus, $d\varphi = d\sigma + d\psi\cos\omega$. Hinc denique quaerantur duo anguli $\lambda$ et $\mu$, ut sit

$$\cos\sigma\cos(\vartheta-\psi) + \sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi) = \cos\lambda \quad \text{et} \quad \sin\sigma\cos(\vartheta-\psi) - \cos\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi) = \sin\mu,$$

erit $\lambda =$ angulo $MLN$, unde fiet distantia $MN = \sqrt{(vv + uu - 2uv\cos\lambda)}$, quae vocetur $= w$. Hunc in finem quaeratur angulus $\nu$, ut sit $\tang\nu = \frac{v\sin\lambda}{u - v\cos\lambda}$, eritque $w = \frac{v\sin\lambda}{\sin\nu}$. Quodsi nunc ponamus brevitatis gratia

$$\frac{N}{L+M} = n \quad \text{et} \quad uv^3 d\varphi\sin\mu\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = dP,$$

$$\frac{qv^3 d\varphi\sin s}{pw^3} + uv\,d\varphi\left(\sin\mu - \frac{qv\cos\lambda\sin s}{p}\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = dQ,$$

erit primo $d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp(L+M)}$, ac perturbationes ab actione corporis $N$ tempusculo $dt$ productae ex § 192 sequenti modo se habere reperiuntur:

Primo pro variatione semiparametri $p$ est $dp = -2nuv^3 d\varphi\sin\mu\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)$.

Deinde pro excentricitatis $q$ variatione ob $\frac{qq-1}{p} = \frac{kk-1}{f} - 2nQ$, erit differentiando

$$\frac{2q\,dq}{p} + \frac{(1-qq)\,dp}{pp} = \frac{-2nqv^3 d\varphi\sin s}{pw^3} - 2nuv\,d\varphi\left(\sin\mu - \frac{qv\cos\lambda\sin s}{p}\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

unde fit $\quad dq = \frac{-nv^3 d\varphi\sin s}{w^3} + npuv\,d\varphi\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{\cos\lambda\sin s}{1+q\cos s} - \frac{(2\cos s + q + q\cos^2 s)\sin\mu}{(1+q\cos s)^2}\right),$

quae reducitur ad hanc formam

$$dq = nv^3 d\varphi\left(\frac{-\sin s}{w^3} + \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left[(1+q\cos s)\cos\lambda\sin s - (2\cos s + q + q\cos^2 s)\sin\mu\right]\right).$$

Hinc cum sit $\frac{qq-1}{p} = -\frac{1}{r}$, erit $\frac{dr}{rr} = -2n\,dQ$; erit pro variatione semiaxis transversi $r$

$$dr = \frac{-2nqrrv^3 d\varphi\sin s}{pw^3} - 2nrruv\,d\varphi\left(\sin\mu - \frac{q\cos\lambda\sin s}{1+q\cos s}\right)\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

seu $\quad dr = \frac{2nrrvv\,d\varphi}{p}\left(\frac{-qv\sin s}{w^3} + u\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)(q\cos\lambda\sin s - (1+q\cos s)\sin\mu)\right).$

Praeterea consecuti sumus

$$ds = d\varphi - \frac{nv^3\,d\varphi\cos s}{qw^3} + \frac{nuvv\,d\varphi}{q}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)\left(\cos\lambda\cos s + \frac{(2+q\cos s)\sin\mu\sin s}{1+q\cos s}\right),$$

ubi cum $\varphi - s$ denotet longitudinem absidis imae $B$ in orbita, si ea dicatur $= \alpha$, erit $d\alpha = d\varphi - ds$,

seu $$d\alpha = \frac{nv^3\,d\varphi}{q}\left(\frac{\cos s}{w^3} - \frac{u}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right)((1+q\cos s)\cos\lambda\cos s + (2+q\cos s)\sin\mu\sin s)\right).$$

Denique pro variatione orbitae respectu plani $ALN$ invenimus primo pro longitudine nodi ☊

$$d\psi = \frac{-nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

deinde pro variatione inclinationis $\omega$

$$d\omega = \frac{d\psi\sin\omega}{\tang\sigma} = \frac{-nuv^3\,d\varphi\cos\sigma\sin\omega\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

tum vero pro variatione anguli ☊$LM = \sigma$ habemus $d\sigma = d\varphi - d\psi\cos\omega$, ac proinde

$$d\sigma = d\varphi + \frac{nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right),$$

seu cum $\varphi - \sigma$ designet longitudinem nodi ☊ in orbita, si ea dicatur $= \beta$, erit

$$d\beta = \frac{-nuv^3\,d\varphi\sin\sigma\cos\omega\sin(\vartheta-\psi)}{p}\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right).$$

Tandem vero ob $v = \frac{p}{1+q\cos s}$, erit $dv = \frac{qvv\,d\varphi\sin s}{p}$. Quare cum ex dato tempusculo $dt$ habeatur

$$d\varphi = \frac{dt}{vv}\sqrt{2gp}\,(L+M),$$

hinc omnes perturbationes momentaneae pro tempusculo $dt$ obtinentur. Quod quo facilius ad calculum revocetur, fingamus corpus $M$ circa $L$ in distantia $= c$ circulum describere, in eoque tempusculo $dt$ angulum $d\zeta$ absolvere, eritque

$$d\zeta = \frac{dt}{c\sqrt{c}}\sqrt{2g}\,(L+M).$$

Unde cum detur angulus $d\zeta$ ex motu medio erit

$$dt\sqrt{2g}\,(L+M) = cd\zeta\sqrt{c}, \quad \text{ideoque} \quad d\varphi = \frac{cd\zeta\sqrt{cp}}{vv}.$$

217. **Coroll. 1.** Anguli $\lambda$ et $\mu$ ita per trigonometriam sphaericam exhiberi possunt. In superficie sphaerica (Fig. 190) centro $L$ descripta sint $A$, $M$, $N$, ☊ puncta, per quae rectae $LA$, $LM$, $LN$, $L$☊ transeant, erit $AN = \vartheta$, $A$☊ $= \psi$, ☊$N = \vartheta - \psi$, ☊$M = \sigma$ et $M$☊$N = \omega$, fietque $MN = \lambda$, ac continuato arcu $M$☊ retro in $O$, ut $OM$ sit quadrans, si ex $O$ per $N$ itidem ducatur quadrans $ONR$, erit $NR = \mu$.

218. **Coroll. 2.** Ducto arcu $MR$, quia ad utrumque quadrantem est normalis, resolvatur triangulum sphaericum $☊ MN$, in quo dantur latera $☊ M = \sigma$, $☊ N = \vartheta - \psi$ et angulus $M ☊ N = \omega$, inventoque latere $MN$ cum angulo $☊ MN$, erit $\lambda = MN$ et $\sin \mu = \sin \lambda \cos ☊ MN$.

219. **Coroll. 3.** Loco tempusculi $dt$ spatium non solum aliquot horarum sed etiam saepe dierum capi potest, nisi positio corporis $N$ ratione ipsius $M$ citissime varietur. Tum ex motu medio pro hoc temporis spatio colligatur angulus $d\zeta$, indeque erit $vv d\varphi = c d\zeta \sqrt{cp}$, quem valorem in singulis perturbationibus momentaneis substitui oportet.

220. **Scholion.** Ex his principiis perturbationes motus cujusque planetae principalis definiri poterunt, quatenus ab actione alius planetae vel etiam cometae oriuntur; ad planetas autem secundarios, seu satellites, haec methodus minus commode accommodari potest, quandoquidem assumsimus, remoto corpore perturbante, motum futurum esse regularem; hinc itaque perturbationes in motu lunae, quae forte ab actione cujusdam planetae vel cometae proficiscuntur, determinare nequeunt. Sin autem ipse sol ut corpus perturbans consideretur, sine cujus actione luna motum regularem esset habitura, inaequalitates motus lunae hinc concludere licebit, sed quia actio solis est perennis, collectio perturbationum momentanearum conclusionem nimis lubricam reddit. Maximum autem usum haec methodus praestabit, si actio cujuspiam cometae in motum planetae principalis, per cujus viciniam cometa transit, investigari debeat: quoniam enim actio cometae non diutius manet sensibilis, quam dum ejus distantia a planeta fuerit valde parva, omnino superfluum foret, totam actionem, quam cometa per totum suum tempus periodicum exerit, exquirere velle, quem in finem integralia nostrarum formularum exhiberi opus esset. Sufficiet igitur per breve tempus effectum cometae in orbita cujuspiam planetae perturbanda cognovisse, id quod ope formularum differentialium haud difficulter praestabitur. Casus autem, quibus cometae ad planetas tam prope accedunt, ut perturbationem notabilem efficere queant, vehementer raro accidunt. Ac si cometa anni 1682 secundum praedictionem Cel. Clairaut hoc anno 1759 revertatur, phaenomena imprimis singularia in motu terrae ab ejus actione expectari possent, propterea quod in satis exigua a terra distantia praeterlabatur. Operae ergo pretium erit, ope formularum traditarum in perturbationem motus terrae ejusque orbitae, ab actione hujus cometae oriundam, inquirere, ut deinceps, quando elementa motus istius cometae accuratius erunt definita, ad hoc exemplum plenior investigatio suscipi possit.

---

## Digressio,

### qua effectus Cometae A. 1759 expectati in motu terrae perturbando investigatur.

I. Primo quidem assumo hunc cometam secundum eadem elementa latum iri, quae pro ejus apparitione A. 1682 sunt determinata. Etsi enim ob actionem Jovis et Saturni ejus tempus periodicum quasi biennio fuit retardatum, ob eandemque rationem ejus reliqua motus elementa haud leves mutationes subiisse probabile, tamen quia de eorum valore praesente nihil certi constat, antequam

ex ipso ejus motu ea denuo definire licuerit, elementis superioris revolutionis utar. Posita ergo media terrae a sole distantia = 100000, statuam pro hoc cometa

| | | |
|---|---|---|
| 1. Distantiam perihelii a sole | = | 58328 |
| 2. Semiparametrum | = | 116656 |
| 3. Nodum ascendentem | | $1^s\,21^0\,16'$ |
| Nodum descendentem | | $7^s\,21^0\,16'$ |
| 4. Distantiam nodi desc. a perih. | | $71^0\,36'$ |
| 5. Inclinationem ad eclipticam | | $17^0\,56'$ |
| 6. Longitudinem perihelii | | $10^s\,2^0\,52'$. |

Motus autem hujus cometae est retrogradus, et a nodo ascendente ad perihelium, indeque ad nodum descendentem pergit.

II. Qui hunc cometam primum mense Januario hujus anni 1759 viderant, suspicantur eum die 14. Martii per perihelium suum transiisse, ex quo postquam per nodum descendentem fuerit progressus, ad terram proxime accedet. Nodum descendentem autem attinget circa d. 14 Aprilis, unde post hoc tempus loca cometae colligi conveniet. At ex mea theoria motus cometarum elapsis $\delta$ diebus post transitum per perihelium habetur $l\,(t + \frac{1}{3}t^3) = l\,\delta + 8{,}4362521$, unde anomalia vera seu angulus a perihelio confectus definitur, quae si vocetur $= \zeta$, erit distantia ejus a sole $= \frac{58328}{\cos^2 \frac{1}{2}\zeta}$.

III. Posito ergo cometam ipso meridie die 14 Martii per perihelium transiisse, die 14 Aprilis et sequentibus loca cometae ita se habebunt:

| Diebus a perihelio | A. 1759 | Anomalia vera | ejus semissis | distantia a sole | distantia a nodo descend. |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | April. $14^d$ | $71^0\ 37'$ | $35^0\ 49'$ | 88705 | $0^0\ \ 1'$ |
| 32 | 15 | 72 56 | 36 28 | 90187 | 1 20 |
| 33 | 16 | 74 13 | 37 7 | 91731 | 2 37 |
| 34 | 17 | 75 28 | 37 44 | 93254 | 3 52 |
| 35 | 18 | 76 41 | 38 21 | 94838 | 5 5 |
| 36 | 19 | 77 51 | 38 55 | 96349 | 6 15 |
| 37 | 20 | 78 58 | 39 29 | 97916 | 7 22 |
| 38 | 21 | 80 3 | 40 2 | 99493 | 8 29 |
| 39 | 22 | 81 7 | 40 34 | 101070 | 9 31 |
| 40 | 23 | 82 8 | 41 4 | 102611 | 10 32 |
| 41 | 24 | 83 8 | 41 34 | 104200 | 11 32 |
| 42 | 25 | 84 6 | 42 3 | 105782 | 12 30 |
| 43 | 26 | 85 2 | 42 31 | 107360 | 13 26 |
| 44 | 27 | 85 57 | 42 58 | 108931 | 14 21 |
| 45 | 28 | 86 50 | 43 25 | 110550 | 15 14 |
| 46 | 29 | 87 42 | 43 51 | 112155 | 16 6 |
| 47 | 30 | 88 32 | 44 16 | 113745 | 16 56 |
| 48 | Maji 1 | 89 21 | 44 41 | 115380 | 17 45 |
| 49 | 2 | 90 8 | 45 4 | 116925 | 18 32 |
| 50 | 3 | 90 54 | 45 27 | 118517 | 19 18 |
| 51 | 4 | 91 39 | 45 50 | 120150 | 20 3 |
| 52 | 5 | 92 23 | 46 12 | 121754 | 20 47 |
| 53 | 6 | 93 5 | 46 34 | 123401 | 21 29 |

IV. Nunc quoque ad singulos hos dies loca terrae ex sole visa ex tabulis colligamus, simulque distantias ejus a nodo descendente orbitae cometae, qui cadit in $7^s\,21^0\,16'$ notemus. Pro hoc autem tempore erat locus perihelii terrae in $3^s\,8^0\,39'$, cujus ergo distantia a nodo descendente est $=4^s\,12^0\,37'$.

| A. 1759 | Distantia terrae a sole | Longitudo terrae | Dist. terrae a nodo desc. |
|---|---|---|---|
| Aprilis 14[d] | 100400 | $6^s\ 23^0\ 13'$ | $0^s\ 28^0\ 3'$ |
| 15 | 100420 | 6 24 11 | 27 5 |
| 16 | 100450 | 25 10 | 26 6 |
| 17 | 100480 | 26 9 | 25 7 |
| 18 | 100510 | 27 7 | 24 9 |
| 19 | 100540 | 28 6 | 23 10 |
| 20 | 100565 | 29 4 | 22 12 |
| 21 | 100590 | 7 0 3 | 21 13 |
| 22 | 100620 | 1 1 | 20 15 |
| 23 | 100650 | 1 59 | 19 17 |
| 24 | 100675 | 2 58 | 18 18 |
| 25 | 100700 | 3 56 | 17 20 |
| 26 | 100725 | 4 55 | 16 21 |
| 27 | 100750 | 5 53 | 15 23 |
| 28 | 100775 | 6 51 | 14 25 |
| 29 | 100800 | 7 49 | 13 27 |
| 30 | 100825 | 8 47 | 12 29 |
| Maji 1 | 100850 | 9 45 | 11 31 |
| 2 | 100875 | 10 43 | 10 33 |
| 3 | 100900 | 11 41 | 9 35 |
| 4 | 100925 | 12 40 | 8 36 |
| 5 | 100950 | 13 38 | 7 38 |
| 6 | 100975 | 14 36 | 6 40 |

V. Pro orbita terrae porro sumitur semiaxis transversus $=100000$ et excentricitas $=0{,}0169$, unde fit semiparameter $=97144$. His elementis constitutis patet circa dies 27 et 28 Aprilis cometam terrae fore proximum. Investigemus ergo perturbationes ab actione cometae oriundas in motu terrae ab 25 Aprilis usque ad 30 ejusdem, et constituamus quina intervalla spatio 24 horarum aequalia, ita tempus $dt$ unum diem, et ex motu terrae medio $d\zeta$ angulum $59'\,8''$ denotet, unde elementum $d\varphi$ definiri debet. Cum autem terra continuo propius ad nodum descendentem progrediatur, dum cometa ab eo recedit, angulus $d\varphi$ negative capiendus est.

VI. Repraesentet ergo (Fig. 190) tabula planum orbitae cometae, in quo sit $L$ sol, $A$ perihelium cometae, a quo per arcum parabolicum $AN$ progrediatur. $BM\Omega$ vero sit orbita terrae a perihelio $B$ per $M$ ad nodum $\Omega$ progredientis, cujus motus respectu cometae ut retrogradus spectari debet, et portio $BM\Omega$ supra orbitam cometae versabitur. Erit ergo angulus $BL\Omega=132^0\,27'$ et inclinatio orbitae terrae ad orbitam cometae $\omega=17^0\,56'$. Quodsi nunc terra haereat in $M$, cometa vero in $N$, erit $LM=$ ... $LN=u$, $MN=w$, $BLM=-s$, $ALN=\vartheta$, $AL\Omega=\psi=71^0\,36'$ et $\Omega LN=\vartheta-\psi$; porro $\Omega LM=\sigma$, atque $r=100000$, $p=97144$ et $q=0{,}0169$. Denique positis massis solis, terrae et cometae $L$, $M$, $N$, sit $\frac{N}{L+M}=n$, unde calculi perturbationum pro singulis intervallis diurnis ita se habebunt:

**Calculus pro intervallo a 25 ad 26 Aprilis.**

Cum sit $p = 97144$, $q = 0{,}0169$, $r = 100000$ et $\varpi = 17^\circ\, 56'$, erit $v = 100700$, $u = 105782$, $☊ LM = \sigma = 17^\circ\, 20'$, $s = -115^\circ\, 17'$, $\vartheta - \psi = 12^\circ\, 30'$. Nunc ob $c = 100000$, ob $d\varphi = \frac{-cd\zeta\sqrt{cp}}{vv}$ et $d\zeta = 3548''$ colligitur

| | |
|---|---|
| $lcp = 9{,}9874160$ | $lc\sqrt{cp} = 9{,}9937080$ |
| $l\sqrt{cp} = 4{,}9937080$ | $ld\zeta = 3{,}5499836$ |
| $lc = 5{,}0000000$ | $13{,}5436916$ |
| $lc\sqrt{cp} = 9{,}9937080$ | $lvv = 10{,}0060590$ |
| $lv = 5{,}0030295$ | $l - d\varphi = 3{,}5376326$ |
| | $4{,}6855749$ |
| | $l - d\varphi = 8{,}2232075.$ |

Erit ergo pro terminis, ubi $d\varphi$ angulum denotat, $d\varphi = -3449''$, at pro terminis, ubi in partibus radii exprimi debet, $d\varphi = -0{,}016719$. Pro angulis autem $\lambda$ et $\mu$ calculus ita se habebit:

| | |
|---|---|
| $l\cos(\vartheta - \psi) = 9{,}9895815$ | $l\sin(\vartheta - \psi) = 9{,}3353368$ |
| $l\cos\sigma = 9{,}9798158$ | $l\cos\omega = 9{,}9783702$ |
| $l\sin\sigma = 9{,}4741146$ | $l\cos\omega\sin(\vartheta - \psi) = 9{,}3137070$ |
| $9{,}9693973$ | $l\sin\sigma = 9{,}4741146$ |
| $9{,}4636961$ | $l\cos\sigma = 9{,}9798158$ |
| | $8{,}7878216$ |
| | $9{,}2935228$ |
| $+0{,}93196$ | $+0{,}29087$ |
| $+0{,}06135$ | $-0{,}19657$ |
| $\cos\lambda = +0{,}99331$ | $\sin\mu = 0{,}09430$ |
| $\lambda = 6^\circ, 38'$ | $\mu = 5^\circ, 25'.$ |

Hinc pro distantia $LN = \varpi = \frac{v\sin\lambda}{\sin\nu}$ existente $\tang\nu = \frac{v\sin\lambda}{u - v\cos\lambda}$.

| | |
|---|---|
| $lv = 5{,}0030295$ | $u = 105782$ |
| $l\sin\lambda = 9{,}0626386$ | $v\cos\lambda = 100026$ |
| $l\cos\lambda = 9{,}9970829$ | $u - v\cos\lambda = 5756$ |
| $lv\sin\lambda = 4{,}0656681$ | $lv\sin\lambda = 4{,}0656681$ |
| $lv\cos\lambda = 5{,}0001124$ | $l(u - v\cos\lambda) = 3{,}7601208$ |
| $l\sin\nu = 9{,}9524188$ | $l\tang\nu = 10{,}3055473$ |
| $l\varpi = 4{,}1132493$ | $\nu = 63^\circ, 40'$ |
| $lc = 5{,}0000000$ | $\varpi = 12979$ |
| $l\frac{c}{\varpi} = 0{,}8867507$ | $lu = 5{,}0244118$ |
| $l\frac{c^3}{\varpi^3} = 2{,}6602521$ | $l\frac{c}{u} = 9{,}9755882$ |
| $\frac{c^3}{\varpi^3} = 457{,}354$ | $l\frac{c^3}{u^3} = 9{,}9267646$ |
| | $\frac{c^3}{u^3} = 0{,}84482,$ |

ergo $\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 456,509$ et $lc^3\left(\frac{1}{w^3} - \frac{1}{u^3}\right) = 2,6594494$.

Cum nunc sit

$$dp = -\frac{2nuv^3}{c^3} d\varphi \sin\mu\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right)$$

reperietur variatio semiparametri $p$;

$$l\frac{v^3}{c^3} = 0,0090885$$
$$lu = 5,0244118$$
$$l\sin\mu = 8,9749624$$
$$l\ldots = 2,6594494$$
$$l - d\varphi = 8,2232075$$
$$4,8911196$$

erit ergo

$$dp = 2n.77825$$

seu $dp = 155650\,n$.

Unde si massa cometae aequalis esset massae terrae, foret $n = \frac{1}{227000}$, ideoque proxime $dp = \frac{2}{3}$; sin autem cometa massam haberet Jovi aequalem, foret $n = \frac{1}{1033}$, ideoque $dp = 151$, qui effectus intervallo unius diei productus satis esset notabilis, cum sit $p = 97144$, ideoque abiret in 97295, suique parte $\frac{1}{643}$ augeretur.

Pro variatione semiaxis transversi $r = 100000$ habemus hanc formulam:

$$dr = -\frac{2nqrr}{p} \cdot \frac{v^3}{c^3} \cdot \frac{c^3}{w^3} \cdot d\varphi \sin s - \frac{2nrruv}{c^3} d\varphi\left(\sin\mu - \frac{qv}{p}\cos\lambda\sin s\right)\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right)$$

cujus formulae calculus ita se habet:

$$lqr^2 = 8,2278867$$
$$lp = 4,9874160$$
$$3,2404707$$
$$l\frac{v^3}{c^3} = 0,0090885$$
$$l\frac{c^3}{w^3} = 2,6602521$$
$$l - d\varphi = 8,2232075$$
$$l - \sin s = 9,9562678$$
$$4,0892866$$

pars I $= -2n.12283$

pars II $= +2n.89456$

$dr = +2n.77173$

$dr = +154346n$

$$\sin\mu = 0,09430$$
$$l\frac{q}{p} = 3,2404707$$
$$lv = 5,0030295$$
$$l\cos\lambda = 9,9970829$$
$$l - \sin s = 9,9562678$$
$$8,1968509$$
$$-\frac{qv}{p}\cos\lambda\sin s = +0,01573$$
$$\ldots\ldots\quad 0,11003$$
$$l\ldots\ldots\quad 9,0415111$$
$$lu = 5,0244118$$
$$l\frac{v}{c} = 0,0030295$$
$$l - d\varphi = 8,2232075$$
$$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2,6594494$$
$$4,9516093.$$

Semiaxis ergo transversus fere par augmentum accipit atque semiparameter, atque hac actione tempus periodicum augetur in ratione 1 ad $1+2,31519n$, seu annus augmentum capiet

$$=845n \text{ dierum} = 18280n \text{ hor.} = 1096800n \text{ min.},$$

unde si cometa terrae esset aequalis, augmentum anni hinc natum foret $=4', 50''$.

Pro excentricitate $q$, cum sit $p=(1-qq)r$, erit

$$qq = 1-\frac{p}{r} \quad \text{et} \quad 2qdq = \frac{-rdp+pdr}{rr} = -\frac{dp}{r}+\frac{pdr}{rr};$$

fiat ergo hic calculus

| | | | |
|---|---|---|---|
| $ldp =$ | 5,1921491 | $lp =$ | 4,9874160 |
| $lqr =$ | 3,2278867 | $ldr =$ | 5,1884954 |
| | 1,9642624 | | 10,1759114 |
| | $-92,100n$ | $lqn =$ | 8,2278867 |
| | | | 1,9480247 |
| | | | $+88,720n$ |

ergo $dq = -46,05n + 44,36n = -1,69n$,

unde patet excentricitatem fere nullam pati mutationem, nisi massa cometae plurimum superet massam terrae; si sit aequalis massae Jovis, fiet $dq=-0,00164$ et $q+dq=0,01426$, unde aequatio centri valde imminueretur.

Pro variatione perihelii in orbita, si ponamus angulum $☊LB=\alpha$, formula supra inventa ita exprimatur

$$d\alpha = \frac{nv^3d\varphi}{qc^3}\left(\frac{c^3\cos s}{w^3}-\frac{u}{p}\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right)\left((1+q\cos s)\cos\lambda\cos s+(2+q\cos s)\sin\mu\sin s\right)\right),$$

quae ergo ita evolvetur ob $1+q\cos s=\frac{p}{v}$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $lp =$ | 4,9874160 | $2+q\cos s =$ | 1,96469 |
| $lv =$ | 5,0030295 | $l(2+q\cos s) =$ | 0,2933161 |
| $l(1+q\cos s) =$ | 9,9843865 | $l\sin\mu =$ | 8,9749624 |
| $l\cos\lambda =$ | 9,9970829 | $l\sin s =$ | $-9,9562678$ |
| $l\cos s =$ | $-9,6305243$ | | $-9,2245463$ |
| | $-9,6119937$ | | |

pars postrema $=-0,40925-0,16770=-0,57695$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l$ partis postr. $=$ | $-9,7611382$ | $l\frac{c^3}{w^3} =$ | 2,6602521 |
| $l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) =$ | $+2,6594494$ | $l\cos s =$ | $-9,6305243$ |
| $lu =$ | 5,0244118 | | $-2,2907764$ |
| | $-7,4449994$ | $l$ aggr. $=$ | 1,9612787 |
| $lp =$ | 4,9874160 | $l\frac{v^3}{c^3} =$ | 0,0090885 |
| | $-2,4515834$ | $ld\varphi =$ | $-3,5376326$ |
| pars post. $=$ | $+286,803$ | | $-5,5079998$ |
| pars prior $=$ | $-195,333$ | $lq =$ | 8,2278867 |
| aggreg. $=$ | $+91,470$ | | $-7,2801131$ |

ergo erit $d\alpha = -19059570n$ min. sec.

Cum igitur angulus $\alpha$ minuatur, perihelium in orbita secundum seriem signorum promovebitur: et quidem hoc die, si cometa terrae esset aequalis, per 84″.

Porro pro variatione nodi ☊ posito angulo $AL☊ = \psi$, erit

$$d\psi = -\frac{nu}{p}\cdot\frac{v^3}{c^3}\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right)d\varphi \sin\sigma \sin(\vartheta-\psi)$$

et pro variatione inclinationis $d\omega = \frac{d\psi \sin\omega}{\text{tang}\,\sigma}$;

calculus ergo instituatur ut sequitur:

$l\frac{u}{p} =$ 0,0369958
$l\frac{v^3}{c^3} =$ 0,0090885
$l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) =$ 2,6594494
$ld\varphi = -$ 3,5376326
$l\sin\sigma =$ 9,4741146
$l\sin(\vartheta-\psi) =$ 9,3353368
— 5,0526177

ergo $d\psi = +$ 112880$n$ min. sec.
$ld\psi =$ 5,0526177
$l\sin\omega =$ 9,4884240
4,5410417
$l\,\text{tang}\,\sigma =$ 9,4942988
$ld\omega =$ 5,0467429
ergo $d\omega = +$ 111364$n$ min. sec.

unde linea nodorum $L☊$ in orbita cometae promovetur angulo $d\psi = 112880n$ min. sec. et inclinatio orbitae terrestris augetur angulo $d\omega = 111364n$ min. sec., quae mutationes circiter 170 vicibus sunt minores ea, quam linea absidum terrae experitur.

### Calculus pro intervallo a 26 ad 27 Aprilis.

Cum sit $p = 97144$; $q = 0{,}0169$; $r = 100000$, et $\omega = 17^0, 56'$, erit $v = 100725$; $u = 107360$; $☊LM = \sigma = 16^0, 21'$; $s = -116^0, 16'$; $\vartheta - \psi = 13^0, 26'$. Nunc pro $d\varphi$ inveniendo

$lv =$ 5,0031373

$lcd\zeta\sqrt{cp} =$ 13,5436916
$lvv =$ 10,0062746
$l - d\varphi =$ 3,5374170
4,6855749
$l - d\varphi =$ 8,2229919

priori valore in mutatione angulorum, posteriori longitudinum est utendum.

Nunc pro angulis $\lambda$ et $\mu$ inveniendis erit

$l\cos(\vartheta-\psi) =$ 9,9879525
$l\cos\sigma =$ 9,9820721
$l\sin\sigma =$ 9,4494849
9,9700246
9,4374374

$l\sin(\vartheta-\psi) =$ 9,3660750
$l\cos\omega =$ 9,9783702
9,3444452
$l\sin\sigma =$ 9,4494849
$l\cos\sigma =$ 9,9820721
8,7939301
9,3265173

$$\begin{array}{rl} & +0{,}93331 \\ & +0{,}06222 \\ \cos\lambda = & 0{,}99553 \\ \lambda = & 5^0, 25' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & +0{,}27380 \\ & -0{,}21209 \\ \sin\mu = & 0{,}06171 \\ \mu = & 3^0, 32', \end{array}$$

unde distantia $MN = w$ ita invenitur

$$\begin{array}{rl} lv = & 5{,}0031373 \\ l\sin\lambda = & 8{,}9749624 \\ l\cos\lambda = & 9{,}9980563 \\ lv\sin\lambda = & 3{,}9780997 \\ lv\cos\lambda = & 5{,}0011936 \\ l\sin\nu = & 9{,}9040529 \\ lw = & 4{,}0740468 \\ l\frac{c}{w} = & 0{,}9259532 \\ l\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7778596 \\ \frac{c^3}{w^3} = & 599{,}597 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} u = & 107360 \\ v\cos\lambda = & 100275 \\ u - v\cos\lambda = & 7085 \\ lv\sin\lambda = & 3{,}9780997 \\ l(u - v\cos\lambda) = & 3{,}8503399 \\ l\,\mathrm{tang}\,\nu = & 10{,}1277598 \\ \nu = & 53^0, 18' \\ w = & 11859 \\ lu = & 5{,}0308425 \\ l\frac{c}{u} = & 9{,}9691575 \\ l\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}9074725 \\ \frac{c^3}{u^3} = & 0{,}8081. \end{array}$$

ergo $\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 598{,}789$ et $l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}7772738.$

Pro variatione parametri $p$:

$$\begin{array}{rl} l\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0094179 \\ lu = & 5{,}0308425 \\ l\sin\mu = & 8{,}7897867 \\ l\ldots\ldots & 2{,}7772738 \\ l - d\varphi = & 8{,}2229919 \\ & 4{,}8303128 \end{array}$$

erit ergo

$$dp = 2n \,.\, 67657$$

seu $dp = +135314n$

minor quam die praecedente.

Pro variatione semiaxis transversi $r$:

$$\begin{array}{rl} l\frac{qrr}{p} = & 3{,}2404707 \\ l\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0094119 \\ l\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}7778596 \\ l - d\varphi = & 8{,}2229919 \\ l - \sin s = & 9{,}9526685 \\ & 4{,}2034026 \\ \text{pars I} = & -2n \,.\, 15963 \\ \text{pars II} = & +2n \,.\, 83696 \\ dr = & +2n \,.\, 67733 \\ dr = & 135466n \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l\frac{q}{p} = & 3{,}2404707 \\ lv = & 5{,}0031373 \\ l\cos\lambda = & 9{,}4980563 \\ l - \sin s = & 9{,}9526685 \\ & 8{,}1943328 \\ -\frac{qv}{p}\cos\lambda\sin s = & +0{,}01564 \\ \sin\mu = & 0{,}06171 \\ \ldots\ldots & 0{,}07735 \\ l\ldots\ldots & 8{,}8884603 \\ lu = & 5{,}0308425 \\ l\frac{v}{c} = & 0{,}0031373 \\ l - d\varphi\,(\,) = & 1{,}0002657 \\ & 4{,}9227058 \end{array}$$

Pro excentricitatis $q$ variatione,

$$\begin{aligned} ldp &= 5,1313428 \\ lqr &= 3,2278867 \\ & \phantom{=} 1,9034541 \\ & \phantom{=} -80,067 \\ & \phantom{=} +79,681 \\ 2dq &= -0,386n \quad \text{et} \quad dq = -0,193n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lp &= 4,9874160 \\ ldr &= 5,1318304 \\ & \phantom{=} 0,1192464 \\ lqrr &= 8,2278867 \\ & \phantom{=} 1,9013597 \end{aligned}$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$\begin{aligned} lp &= 4,9874160 \\ lv &= 5,0031373 \\ l(1+q\cos s) &= 9,9842787 \\ l\cos\lambda &= 9,9980563 \\ l\cos s &= -9,6459619 \\ & \phantom{=} -9,6282969 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2+q\cos s &= 1,96445 \\ l(2+q\cos s) &= 0,2932409 \\ l\sin\mu &= 8,7897867 \\ l\sin s &= -0,9526685 \\ & \phantom{=} -9,0356961 \end{aligned}$$

pars postrema $= -0,42491 - 0,10857 = -0,53348$

$$\begin{aligned} l\,\text{part. postr.} &= -9,7271181 \\ l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) &= 2,7772738 \\ lu &= 5,0308425 \\ & \phantom{=} -7,5352344 \\ lp &= 4,9874160 \\ & \phantom{=} -2,5478184 \end{aligned}$$

pars posterior $= +353,85$

pars prior $= -265,35$

aggreg. $= +88,50$

$$\begin{aligned} l\frac{c^3}{w^3} &= 2,7778596 \\ l\cos s &= -9,6459619 \\ & \phantom{=} -2,4238215 \\ l\,\text{aggr.} &= 1,9469433 \\ l\frac{v^3}{c^3} &= 0,0094119 \\ ld\varphi &= -3,5374170 \\ & \phantom{=} -5,4937722 \\ lq &= 8,2278867 \\ & \phantom{=} -7,2658859. \end{aligned}$$

Ergo $d\alpha = -18445310n$ min. sec.

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$\begin{aligned} l\frac{u}{p} &= 0,0434265 \\ l\frac{v^3}{c^3} &= 0,0094119 \\ l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) &= 2,7772738 \\ ld\varphi &= -3,5374170 \\ l\sin\sigma &= 9,4494849 \\ l\sin(\vartheta - \psi) &= 9,3660750 \\ & \phantom{=} -5,1830891 \end{aligned}$$

Ergo $d\psi = +152436n$ min. sec.

$$\begin{aligned} ld\psi &= +5,1830891 \\ l\sin\omega &= 9,4884240 \\ l\cos\sigma &= 0,5325872 \\ & \phantom{=} +6,2041003 \end{aligned}$$

ergo $d\omega = +1599927n$ min. sec.

**Calculus pro intervallo a 27 ad 28 Aprilis.**

Cum sit $p = 97144$, $q = 0{,}0169$; $r = 100000$, et $\omega = 17^0, 56'$, erit $v = 100750$; $u = 108931$; $\sigma = 15^0, 23'$, $s = -117^0, 14'$; $\vartheta - \psi = 14^0, 21'$.

$lv = 5{,}0032451$

$lu = 5{,}0371515$

$lp = 4{,}9874160$

$l\frac{u}{p} = 0.0497355$

$lcd\zeta\sqrt{cp} = 13{,}5436916$

$lvv = 10{,}0064902$

$l - d\varphi = \phantom{-}3{,}5372014$

$\phantom{l - d\varphi = } 4{,}6855749$

$l - d\varphi = 8{,}2227763$

Hinc pro angulis $\lambda$ et $\mu$

$l\cos(\vartheta - \psi) = 9{,}9862340;$

$l\cos\sigma = 9{,}9841548$

$l\sin\sigma = 9{,}4236974$

$9{,}9703888$

$9{,}4099314$

$+ 0{,}93409$

$+ 0{,}06255$

$\cos\lambda = 0{,}99664$

$\lambda = 4^0, 42'$

$l\sin(\vartheta - \psi) = 9{,}3941794$

$l\cos\omega = 9{,}9783702$

$9{,}3725496$

$l\sin\sigma = 9{,}4236974$

$l\cos\sigma = 9{,}9841548$

$8{,}7962470$

$9{,}3567044$

$+ 0{,}25700$

$- 0{,}22735$

$\sin\mu = 0{,}02965$

$l\sin\mu = 8{,}4720247,$

unde colligitur distantia $w$

$lv = 5{,}0032451$

$l\sin\lambda = 8{,}9134881$

$l\cos\lambda = 9{,}9985372$

$lv\sin\lambda = 3{,}9167332$

$lv\cos\lambda = 5{,}0017823$

$l\sin\nu = 9{,}8425548$

$lw = 4{,}0741784$

$l\frac{c}{w} = 0{,}9258216$

$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}7774648$

$\frac{c^3}{w^3} = 599{,}05$

$u = 108931$

$v\cos\lambda = 100411$

$u - v\cos\lambda = 8520$

$lv\sin\lambda = 3{,}9167332$

$l(u - v\cos\lambda) = 3{,}9304396$

$l\tang\nu = 9{,}9862936$

$\nu = 44^0, 6'$

$l\frac{c}{u} = 9{,}9628485$

$l\frac{c^3}{u^3} = 9{,}8885455$

$\frac{c^3}{u^3} = 0{,}7706$

$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 598{,}27$

$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}7768972$

Pro variatione parametri $p$:

$$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0097353$$
$$lu = 5{,}0371515$$
$$l\sin\mu = 8{,}4720247$$
$$l\ldots = 2{,}7768972$$
$$l - d\varphi = -8{,}2227763$$
$$+4{,}5185851$$

Ergo

$$dp = 2n\,.\,33005$$

seu $dp = +66010n$

$$ldp = 4{,}8196097 + ln.$$

Pro variatione semiaxis transversi $r$:

$$l\frac{qrr}{p} = 3{,}2404707$$
$$l(v^3 : c^3) = 0{,}0097353$$
$$l(c^3 : w^3) = 2{,}7774648$$
$$ld\varphi = -8{,}2227763$$
$$l\sin s = -9{,}9489752$$
$$+4{,}1994223$$

$$\text{pars I} = -2n\,.\,15828$$
$$\text{pars II} = +2n\,.\,49547$$
$$dr = +2n\,.\,33719$$
$$dr = +67438n$$

$$l\frac{q}{p} = 3{,}2404707$$
$$lv = 5{,}0032451$$
$$l\cos\lambda = 9{,}9985372$$
$$l\sin s = -9{,}9489752$$
$$-8{,}1912282$$
$$+0{,}01553$$
$$\sin\mu = 0{,}02965$$
$$\ldots\ldots\ 0{,}04518$$
$$l\ldots\ 8{,}6549462$$
$$lu = 5{,}0371515$$
$$l\frac{v}{c} = 0{,}0032451$$
$$ld\varphi(\ldots) = -0{,}9996735$$
$$-4{,}6950163$$

Pro variatione excentricitatis $q$:

$$ldp = 4{,}8196097$$
$$lqr = 3{,}2278867$$
$$1{,}5917230$$
$$-39{,}059n$$
$$+38{,}764n$$
$$2dq = -0{,}295n \quad \text{et} \quad dq = -0{,}148n.$$

$$lp = 4{,}9874160$$
$$ldr = 4{,}8289047$$
$$9{,}8163207$$
$$lqrr = 8{,}2278867$$
$$1{,}5884340$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$lp = 4{,}9874160$$
$$lv = 5{,}0032451$$
$$l(1+q\cos s) = 9{,}9841709$$
$$l\cos\lambda = 9{,}9985372$$
$$l\cos s = -9{,}6605005$$
$$-9{,}6432086$$

$$2+q\cos s = 1{,}96421$$
$$l(2+q\cos s) = 0{,}2931857$$
$$l\sin\mu = 8{,}4720247$$
$$l\sin s = -9{,}9489752$$
$$-8{,}7141856$$

pars postrema $= -0{,}43975 - 0{,}05178 = -0{,}49153.$

$l$ part. postr. $= -9{,}6915500$

$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}7768972$

$l - \frac{u}{p} = -0{,}0497355$

$2{,}5181827$

pars posterior $= +329{,}748$

pars prior $= -274{,}136$

aggreg. $= +55{,}612$

$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}7774648$

$l\cos s = -9{,}6605005$

$-2{,}4379653$

$l$ aggr. $= 1{,}7451685$

$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0097353$

$l - d\varphi = -3{,}5372014$

$l\frac{1}{q} = 1{,}7721133$

$-7{,}0642185$

Ergo $da = -11593600n$ min. sec.

Pro variatione nodi et inclinationis:

$l\frac{u}{p} = 0{,}0497355$

$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0097353$

$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}7768972$

$ld\varphi = -3{,}5372014$

$l\sin\sigma = 9{,}4236974$

$l\sin(\vartheta - \psi) = 9{,}3941794$

$-5{,}1914462$

Ergo $d\psi = +155398n$ min. sec.

$ld\psi = 5{,}1914462$

$l\sin\omega = 9{,}4884240$

$4{,}6798702$

$l\tang\sigma = 9{,}4395426$

$5{,}2403276$

ergo $d\omega = 173911n$ min. sec.

**Calculus pro intervallo a 28 ad 29 Aprilis.**

Hic erit $v = 100775$; $u = 110550$; $\sigma = 14^0\,25'$; $s = -118^0\,12'$ et $\vartheta - \psi = 15^0 14'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$lv = 5{,}0033528$

$lu = 5{,}0435587$

$lp = 4{,}9874160$

$l\frac{u}{p} = 0{,}0561427$

$lcd\zeta\sqrt{cp} = 13{,}5436916$

$lvv = 10{,}0067056$

$ld\varphi = -3{,}5369860$

$4{,}6855709$

$ld\varphi = -8{,}2225609$

nunc pro angulis $\lambda$ et $\mu$

$l\cos(\vartheta - \psi) = 9{,}9844660$

$l\cos\sigma = 9{,}9861045$

$l\sin\sigma = 9{,}3961499$

$9{,}9705705$

$9{,}3806159$

$+0{,}93448$

$+0{,}06224$

$\cos\lambda = 0{,}99672$

$\lambda = 4^0\,38'$

$l\sin(\vartheta - \psi) = 9{,}4195436$

$l\cos\omega = 9{,}9783702$

$9{,}3979138$

$l\sin\sigma = 9{,}3961499$

$l\cos\sigma = 9{,}9861045$

$8{,}7940637$

$9{,}3840183$

$+0{,}24022$

$-0{,}24211$

$\sin\mu = -0{,}00189$

$l\sin\mu = -7{,}2764618$

unde colligitur distantia $MN = w$ hoc modo

$$lv = 5{,}0033528$$
$$l \sin \lambda = 8{,}9072975$$
$$l \cos \lambda = 9{,}9985784$$
$$lv \sin \lambda = 3{,}9106503$$
$$lv \cos \lambda = 5{,}0019312$$
$$l \sin \nu = 9{,}7974640$$
$$lw = 4{,}1131863$$
$$l\frac{c}{w} = 0{,}8868136$$
$$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}6604408$$
$$\frac{c^3}{w^3} = 457{,}55$$

$$u = -110550$$
$$v \cos \lambda = 100446$$
$$\ldots\ldots = 10104$$
$$lv \sin \lambda = 3{,}9106503$$
$$l\ldots\ldots = 4{,}0044933$$
$$l \tang \nu = 9{,}9061570$$
$$\nu = 38^0\, 51'$$
$$l\frac{c}{u} = 9{,}9564413$$
$$l\frac{c^3}{u^3} = 9{,}8693239$$
$$\frac{c^3}{u^3} = 0{,}740.$$
$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 456{,}81$$
$$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}6597356$$

Pro variatione parametri $p$:

$$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0100584$$
$$lu = 5{,}0435587$$
$$l \sin \mu = -7{,}2764618$$
$$l\ldots\ldots = 2{,}6597356$$
$$ld\varphi = -9{,}2225609$$
$$+3{,}2123754$$

Ergo $dp = -2n\,.\,1631$

seu $dp = -3262n$

$$ldp = -3{,}5134054$$

Pro variatione semiaxis transversi $r$:

$$l\frac{qrr}{p} = 3{,}2404707$$
$$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0100584$$
$$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}6604408$$
$$ld\varphi = -8{,}2225609$$
$$l \sin s = -9{,}9451255$$
$$+4{,}0786563$$
$$\text{pars I} = -2n\,.\,11985$$
$$\text{pars II} = +2n\,.\,11478$$
$$dr = -2n\,.\,507$$

seu $dr = -1014n$

$$ldp = -3{,}5134054$$
$$lqr = 3{,}2278867$$
$$-0{,}2855187$$
$$+1{,}9298$$
$$-0{,}5829$$
$$2\,dq = +1{,}3469n \quad \text{et} \quad dq = +0{,}6735n.$$

$$l\frac{q}{p} = 3{,}2404707$$
$$lv \cos \lambda = 5{,}0019312$$
$$l \sin s = -9{,}9451255$$
$$-8{,}1875274$$
$$\ldots\ldots + 0{,}01540$$
$$\sin \mu = -0{,}00189$$
$$\ldots\ldots\ 0{,}01351$$
$$l\ldots\ldots\ 8{,}1306553$$
$$lu = 5{,}0435587$$
$$l\frac{v}{c} = 0{,}0033528$$
$$ld\varphi = -8{,}2225609$$
$$l\left(\frac{c^3}{v^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}6597356$$
$$-4{,}0598633$$
$$lp = 4{,}9874160$$
$$ldr = 3{,}0060380$$
$$-7{,}9934540$$
$$lqrr = 8{,}2278867$$
$$-9{,}7655673$$

Pro variatione anguli $\Omega LB = \alpha$:

$$
\begin{aligned}
lp &= 4{,}9874160\\
lv &= 5{,}0033528\\
l(1+q\cos s) &= 9{,}9840632\\
l\cos\lambda &= 9{,}9985784\\
l\cos s &= -9{,}6744485\\
&\phantom{=}\ -9{,}6570901
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2+q\cos s &= 1{,}96397\\
l(2+q\cos s) &= 0{,}2931349\\
l\sin\mu &= -7{,}2764618\\
l\sin s &= -9{,}9451255\\
&\phantom{=}\ +7{,}5147222
\end{aligned}
$$

$$\text{pars postrema} = -0{,}45404 + 0{,}00327 = -0{,}45077$$

$$
\begin{aligned}
l\text{ partis postr.} &= -9{,}6539550\\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) &= +2{,}6597356\\
l\frac{u}{p} &= 0{,}0561427\\
&\phantom{=}\ -2{,}3698333\\
\text{pars post.} &= +234{,}33\\
\text{pars prior} &= -216{,}21\\
\text{aggreg.} &= +\ 18{,}12
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
l\frac{c^3}{w^3} &= 2{,}6604408\\
l\cos s &= -9{,}6744485\\
&\phantom{=}\ -2{,}3348893\\
l\,\text{aggr.} &= 1{,}2581582\\
l\frac{v^3}{c^3} &= 0{,}0100584\\
ld\varphi &= -3{,}5369860\\
l\frac{1}{q} &= 1{,}7721133\\
&\phantom{=}\ -6{,}5773159.
\end{aligned}
$$

Ergo $d\alpha = -3778470n$ min. sec.

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$
\begin{aligned}
l\frac{u}{p} &= 0{,}0561427\\
l\frac{v^3}{c^3} &= 0{,}0100584\\
l\ldots &= 2{,}6597356\\
ld\varphi &= -3{,}5369860\\
l\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) &= 8{,}8156935\\
l-d\psi &= -5{,}0786162
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{Ergo}\quad d\psi &= +119840n \text{ min. sec.}\\
ld\psi &= +5{,}0786162\\
l\sin\omega &= 9{,}4884240\\
l\cot\sigma &= 0{,}5899546\\
&\phantom{=}\ +5{,}1569948\\
\text{ergo}\quad d\omega &= 143550n \text{ min. sec.}
\end{aligned}
$$

### Calculus pro intervallo a 29 ad 30 Aprilis.

Hic erit $v = 100800$; $u = 112155$; $\sigma = 13^\circ\,23'$, $s = -119^\circ\,10'$ et $\vartheta - \psi = 16^\circ\,6'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$$
\begin{aligned}
lv &= 5{,}0034605\\
lu &= 5{,}0498200\\
lp &= 4{,}9874160\\
l\frac{u}{p} &= 0{,}0624040
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
lcd\zeta\sqrt{cp} &= 13{,}5436916\\
lvv &= 10{,}0069210\\
ld\varphi &= -\ 3{,}5367706\\
&\phantom{=}\ \ 4{,}6855749\\
ld\varphi &= -\ 8{,}2223455
\end{aligned}
$$

nunc pro angulis $\lambda$ et $\mu$

$$
\begin{array}{rl}
l\cos(\vartheta-\psi) = & 9{,}9826236 \\
l\cos\sigma = & 9{,}9879223 \\
l\sin\sigma = & 9{,}3666036 \\
 & 9{,}9705459 \\
 & 9{,}3492272 \\
 & +0{,}93443 \\
 & +0{,}06137 \\
\cos\lambda = & 0{,}99580 \\
\lambda = & 5^0\,15'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
l\sin(\vartheta-\psi) = & 9{,}4429728 \\
l\cos\omega = & 9{,}9783702 \\
 & 9{,}4213430 \\
l\sin\sigma = & 9{,}3666036 \\
l\cos\sigma = & 9{,}9879223 \\
 & 8{,}7879466 \\
 & 9{,}4092653 \\
 & +0{,}22347 \\
 & -0{,}25660 \\
\sin\mu = & -0{,}03313 \\
l\sin\mu = & -8{,}5203525,
\end{array}
$$

unde colligitur distantia $MN = w$

$$
\begin{array}{rl}
lv = & 5{,}0034605 \\
l\sin\lambda = & 8{,}9614288 \\
l\cos\lambda = & 9{,}9981743 \\
lv\sin\lambda = & 3{,}9648893 \\
lv\cos\lambda = & 5{,}0016348 \\
l\sin\nu = & 9{,}7899880 \\
lw = & 4{,}1749013 \\
l\frac{c}{w} = & 0{,}8250987 \\
l\frac{c^3}{w^3} = & 2{,}4752961 \\
\frac{c^3}{w^3} = & 298{,}74 \\
\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3} = & 298{,}03
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
u = & 112155 \\
v\cos\lambda = & 100377 \\
\ldots\ldots & 11778 \\
lv\sin\lambda = & 3{,}9648893 \\
l\ldots\ldots & 4{,}0710715 \\
l\,\mathrm{tang}\,\nu = & 9{,}8938178 \\
\nu = & 38^0\,4' \\
l\frac{c}{u} = & 9{,}9501800 \\
l\frac{c^3}{u^3} = & 9{,}8505400 \\
\frac{c^3}{u^3} = & 0{,}7088 \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}4742600.
\end{array}
$$

Pro variatione semiparametri $p$:

$$
\begin{array}{rl}
l\frac{v^3}{c^3} = & 0{,}0103815 \\
l\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = & 2{,}4742600 \\
lu = & 5{,}0498200 \\
l\sin\mu = & -8{,}5203525 \\
ld\varphi = & -8{,}2223455 \\
 & +4{,}2771595
\end{array}
$$

Ergo $dp = -2n\,.\,18930$

seu $dp = -37860\,n$

et $ldp = -4{,}5781895$

Pro variatione semiaxis transversi $r$:

$$l\frac{qrr}{p} = 3,2404707$$
$$l\frac{v^3}{c^3} = 0,0103815$$
$$l\frac{c^3}{w^3} = 2,4752961$$
$$ld\varphi = -8,2223455$$
$$l\sin s = -9,9411166$$
$$+3,8896104$$

$$\text{pars I} = -2n.7756$$
$$\text{pars II} = -2n.10052$$
$$dr = -2n.17808$$
seu $$dr = -35616n$$

$$l\frac{q}{p} = 3,2404707$$
$$lv\cos\lambda = 5,0016348$$
$$l\sin s = -9,9411166$$
$$-8,1832221$$
$$l\cos s = -9,6878425$$
$$\frac{-qv\cos\lambda\sin s}{p} = +0,01525$$
$$\sin\mu = -0,03313$$
$$\text{aggreg.} \quad -0,01788$$
$$l\,\text{aggreg.} = -8,2523675$$
$$l\frac{u}{c} = 5,0532805$$
$$l - d\varphi = 8,2223455$$
$$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2,4742600$$
$$-4,0022535.$$

Quia ex $p$ et $r$ datur $q = \sqrt{\left(1 - \frac{p}{r}\right)}$, non opus est quaerere $dq$.

Pro variatione anguli ☊$LB = \alpha$:

$$lp = 4,9874160$$
$$lv = 5,0034605$$
$$l(1+q\cos s) = 9,9839555$$
$$l\cos\lambda = 9,9981743$$
$$l\cos s = -9,6878425$$
$$-9,6699723$$

$$2 + q\cos s = 1,96373$$
$$l(2+q\cos s) = 0,2930751$$
$$l\sin\mu = -8,5203525$$
$$l\sin s = -9,9411166$$
$$+8,7545442$$

$$\text{pars postrema} = \frac{-0,46771}{+0,05683} = -0,41088$$

$$l\,\text{part. postr.} = -9,6137150$$
$$l - \frac{u}{p} = -0,0624040$$
$$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2,4742600$$
$$+2,1503790$$

$$\text{pars posterior} = +141,38$$
$$\text{pars prior} = -145,59$$
$$\text{aggreg.} = -4,21$$

$$l\frac{c^3}{w^3} = 2,4752961$$
$$l\cos s = -9,6878425$$
$$-2,1631386$$
$$l\,\text{aggr.} = -0,6242821$$
$$l\frac{v^3}{c^3} = 0,0103815$$
$$ld\varphi = -3,5367706$$
$$l\frac{1}{q} = 1,7721133$$
$$+5,9435475$$

Erit ergo $$d\alpha = +878107n \text{ min. sec.}$$

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$l\frac{u}{p} = 0,0624040$$
$$l\frac{v^3}{c^3}\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = 2,4846415$$
$$ld\varphi = -3,5367706$$
$$l\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) = 8,8095764$$
$$-4,8933925$$

ergo $d\psi = +78234n$ min. sec.

$$ld\psi = 4,8933925$$
$$l\sin\omega = 9,4884240$$
$$l\cot\sigma = 0,6213187$$
$$ld\omega = 5,0031352$$

ergo $d\omega = +100724n$ min. sec.

**Calculus pro intervallo a 30 Aprilis ad 1 Maji.**

Hic erit $v = 100825$; $u = 113745$; $\sigma = 12^0\,29'$; $s = -120^0\,8'$ et $\vartheta - \psi = 16^0\,56'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$$lv = 5,0035682$$
$$lu = 5,0559323$$
$$lp = 4,9874160$$
$$l\frac{u}{p} = 0,0685163$$

$$lcd\zeta\sqrt{cp} = 13,5436916$$
$$lvv = 10,0071364$$
$$ld\varphi = -3,5365552$$
$$4,6855749$$
$$ld\varphi = -8,2221301.$$

Nunc pro angulis $\lambda$ et $\mu$

$$l\cos(\vartheta-\psi) = 9,9807505$$
$$l\cos\sigma = 9,9896095$$
$$l\sin\sigma = 9,3347665$$
$$9,9703600$$
$$9,3155170$$
$$+0,93403$$
$$+0,05990$$
$$\cos\lambda = +0,99393$$
$$\lambda = 6^0\,38'$$

$$l\sin(\vartheta-\psi) = 9,4642790$$
$$l\cos\omega = 9,9783702$$
$$9,4426492$$
$$l\sin\sigma = 9,3347665$$
$$l\cos\sigma = 9,9896095$$
$$8,7774157$$
$$9,4322587$$
$$+0,20678$$
$$-0,27055$$
$$\sin\mu = -0,06377$$
$$l\sin\mu = -8,8046164,$$

unde colligitur distantia $MN = w$

$$lv = 5,0035682$$
$$l\cos\lambda = 9,9973554$$
$$l\sin\lambda = 9,0414852$$
$$lv\cos\lambda = 5,0009236$$
$$lv\sin\lambda = 4,0450534$$
$$l\sin\nu = 9,8019735$$
$$lw = 4,2430799$$
$$l\frac{c}{w} = 0,7569201$$
$$l\frac{c^3}{w^3} = 2,2707603$$
$$\frac{c^3}{w^3} = 186,536$$

$$u = 113745$$
$$v\cos\lambda = 100213$$
$$u - v\cos\lambda = 13532$$
$$lv\sin\lambda = 4,0450534$$
$$l(u - v\cos\lambda) = 4,1313620$$
$$l\tang\nu = 9,9136914$$
$$\nu = 39^0\,20'$$
$$l\frac{c}{u} = 9,9440677$$
$$l\frac{c^3}{u^3} = 9,8322031$$
$$\frac{c^3}{u^3} = 0,680.$$

ergo $\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 185,856$ et $l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2,2691700.$

Pro variatione semiparametri $p$:

$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0107046$
$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}2691700$
$lu = 5{,}0559323$
$l \sin\mu = -8{,}8046164$
$ld\varphi = -8{,}2221301$
$+ 4{,}3625534$

Ergo
$dp = -2n \,.\, 23044$
seu $dp = -46088n$

Pro variatione semiaxis transversi $r$:

$l\frac{qrr}{p} = 3{,}2404707$
$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0107046$
$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}2707603$
$ld\varphi = -8{,}2221301$
$l \sin s = -9{,}9369456$
$+ 3{,}6810113$

pars I $= -2n \,.\, 4797{,}5$
pars II $= -2n \,.\, 17308$
$dr = -2n \,.\, 22105$
$dr = -44210n$

$l\frac{q}{p} = 3{,}2404707$
$lv \cos\lambda = 0{,}0009236$
$l \sin s = -9{,}9369456$
$- 8{,}1783399$
$+ 0{,}01508$
$\sin\mu = -0{,}06377$
$\ldots\ldots = -0{,}04869$
$l\ldots\ldots = -8{,}6874398$
$lu = 5{,}0559323$
$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}2691700$
$ld\varphi = -8{,}2221301$
$l\frac{v}{c} = 0{,}0035682$
$+ 4{,}2382404$

Pro variatione anguli $☊ LB = \alpha$:

$lp = 4{,}9874160$
$lv = 5{,}0035682$
$l(1 + q\cos s) = 9{,}9838478$
$l\cos\lambda = 9{,}9973554$
$l\cos s = -9{,}7007158$
$- 9{,}6819190$

$2 + q\cos s = 1{,}9635$
$l(2 + q\cos s) = 0{,}2930309$
$l\sin\mu = -8{,}8046164$
$l\sin s = -9{,}9369456$
$+ 9{,}0345929$

$$\text{pars postrema} = \frac{-0{,}48075}{+0{,}10829} = -0{,}37246.$$

$l$ part. postr. $= -9{,}5710796$
$l\frac{u}{p} = 0{,}0685163$
$l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}2691700$
$l$ part. post. $= -1{,}9087659$
pars posterior $= +81{,}052$
pars prior $= -89{,}676$
aggreg. $= -8{,}624$

$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}2707603$
$l\cos s = -9{,}6819190$
$l$ part. I $= -1{,}9526793$
$l$ aggreg. $= -0{,}9357087$
$l\frac{v^3}{c^3} = 0{,}0107046$
$ld\varphi = -3{,}5365552$
$l\frac{1}{q} = 1{,}7721133$
$+ 6{,}2550818$

Ergo $d\alpha = + 1799210n$ min. sec.

Pro variatione nodi et inclinationis

$$l\frac{u}{p} = 0{,}0685163$$
$$lv^3\left(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{u^3}\right) = 2{,}2798746$$
$$ld\varphi = -3{,}5365552$$
$$l\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) = 8{,}7990455$$
$$l - d\psi = -4{,}6839916$$

Ergo
$$d\psi = +48305\,n \text{ min sec.}$$
$$ld\psi = 4{,}6839916$$
$$l\sin\omega = 9{,}4884240$$
$$l\cos\sigma = 0{,}6548430$$
$$ld\omega = 4{,}8272586$$
$$d\omega = 67183\,n \text{ min. sec.}$$

**Calculus pro intervallo a 1 ad 2 Maji.**

Hic erit $v = 100850$; $u = 115380$; $\sigma = 11^0\,31'$, $s = -121^0\,6'$, et $\vartheta - \psi = 17^0\,45'$, unde pro $d\varphi$ inveniendo

$$lv = 5{,}0036759$$
$$lu = 5{,}0621305$$
$$lp = 4{,}9874160$$
$$l\frac{u}{p} = 0{,}0747145$$

$$lcd\zeta\sqrt{cp} = 13{,}5436916$$
$$lvv = 10{,}0073518$$
$$ld\varphi = -3{,}5363398$$
$$4{,}6855749$$
$$ld\varphi = -8{,}2219147.$$

Nunc pro angulis $\lambda$ et $\mu$

$$l\cos(\vartheta-\psi) = 9{,}9788175$$
$$l\cos\sigma = 9{,}9911670$$
$$l\sin\sigma = 9{,}3002758$$
$$9{,}9699845$$
$$9{,}2790933$$

$$+0{,}93322$$
$$+0{,}05791$$
$$\cos\lambda = 0{,}99113$$
$$\lambda = 7^0\,38'$$

$$l\sin(\vartheta-\psi) = 9{,}4841066$$
$$l\cos\omega = 9{,}9783702$$
$$9{,}4624768$$
$$l\sin\sigma = 9{,}3002758$$
$$l\cos\sigma = 9{,}9911670$$
$$8{,}7627526$$
$$9{,}4536438$$
$$+0{,}19015$$
$$-0{,}28421$$
$$\sin\mu = -0{,}09406$$
$$l\sin\mu = -8{,}9734050$$

unde colligitur distantia $MN = w$:

$$lv = 5{,}0036759$$
$$l\cos\lambda = 9{,}9961343$$
$$l\sin\lambda = 9{,}1233061$$
$$lv\cos\lambda = 4{,}9998102$$
$$lv\sin\lambda = 4{,}1269820$$
$$l\sin\nu = 9{,}8166521$$
$$lw = 4{,}3103299$$
$$l\frac{c}{w} = 0{,}6896701$$
$$l\frac{c^3}{w^3} = 2{,}0690103$$
$$\frac{c^3}{w^3} = 117{,}22$$
$$\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3} = 116{,}75$$

$$u = 115380$$
$$v\cos\lambda = 99956$$
$$u - v\cos\lambda = 15424$$
$$lv\sin\lambda = 4{,}1269820$$
$$l(u - v\cos\lambda) = 4{,}1881970$$
$$l\tan\nu = 9{,}9387850$$
$$\nu = 40^0\,58'$$
$$l\frac{c}{u} = 9{,}9378695$$
$$l\frac{c^3}{u^3} = 9{,}8136085$$
$$\frac{c^3}{u^3} = 0{,}65$$

et $l\left(\frac{c^3}{w^3} - \frac{c^3}{u^3}\right) = 2{,}0665868.$

Pro variatione semiparametri $p$:

$l\frac{v^3}{c^3} = \phantom{-}0,0110277$
$l\ldots = \phantom{-}2,0665868$
$lu = \phantom{-}5,0621305$
$l\sin\mu = -8,9734050$
$ld\varphi = -8,2219147$
$+4,3350647$

Ergo
$dp = -2n.21630$
seu $dp = -43260n$

Pro variatione semiaxis $r$:

$l\frac{qrr}{p} = \phantom{-}3,2404707$
$l\frac{v^3}{c^3} = \phantom{-}0,0110277$
$l\frac{c^3}{w^3} = \phantom{-}2,0690103$
$ld\varphi = -8,2219147$
$l\sin s = -9,9326092$
$+3,4750326$

$\text{pars I} = -2n.\ 2985,6$
$\text{pars II} = -2n.17900$
$dr = -2n.20886$
$dr = -41772n$

$l\frac{q}{p} = \phantom{-}3,2404707$
$lv\cos\lambda = \phantom{-}4,9998102$
$l\sin s = -9,9326092$
$-8,1728901$
$+0,01489$
$\sin\mu = -0,09406$
$-0,07917$
$l\ldots = -8,8985606$
$l\frac{uv}{c} = \phantom{-}5,0658064$
$ld\varphi = -8,2219147$
$l\ldots = \phantom{-}2,0665868$
$+4,2528685$

Pro variatione anguli $☊LB = \alpha$:

$lp = \phantom{-}4,9874160$
$lv = \phantom{-}5,0036759$
$l(1+q\cos s) = \phantom{-}9,9837401$
$l\cos\lambda = \phantom{-}9,9961343$
$l\cos s = -9,7130983$
$-9,6929727$

$2+q\cos s = \phantom{-}1,9633$
$l(2+q\cos s) = \phantom{-}0,2929867$
$l\sin\mu = -8,9734050$
$l\sin s = -9,9326092$
$+9,1990009$

$$\text{pars postrema} = \begin{matrix}-0,49314\\+0,15812\end{matrix} = -0,33502.$$

$l\,\text{part. postr.} = -9,5250707$
$l\ldots = \phantom{-}2,0665868$
$l\frac{u}{p} = \phantom{-}0,0747145$
$-1,6662720$
$\text{pars posterior} = +46,373$
$\text{pars prior} = -60,549$
$\text{aggreg.} = -14,176$

$l\frac{c^3}{w^3} = \phantom{-}2,0690103$
$l\cos s = -9,7130983$
$-1,7821086$
$l\,\text{aggreg.} = -1,1515537$
$l\frac{v^3}{c^3} = \phantom{-}0,0110277$
$ld\varphi = -3,5365398$
$l\frac{1}{q} = \phantom{-}1,7721133$
$+6,4712345$

Ergo $d\alpha = +2959610\,n$ min. sec.

Pro variatione nodi et inclinationis:

$$l\frac{u}{p}\left(\frac{c^3}{w^3}-\frac{c^3}{u^3}\right) = \phantom{-}2,1413013$$
$$l\frac{v^3}{c^3} = -0,0110277$$
$$ld\varphi = -3,5365398$$
$$l\sin\sigma\sin(\vartheta-\psi) = \phantom{-}8,7843824$$
$$-4,4732512$$

ergo $d\psi = +29734\,n$ min. sec.

$$ld\psi = 4,4732512$$
$$l\sin\omega = 9,4889240$$
$$l\cot\sigma = 0,6908912$$
$$4,6525664$$

ergo $d\omega = 44933\,n$ min. sec.

---

## Conclusio.

Cum variationes inventae sint admodum notabiles, simili modo tam ante terminum 25 Aprilis quam post 2 Maj. definiri debent. Quas igitur computavi hic simul aspectui exponam:

| Intervallum Aprilis | $dp$ | $dr$ | $da$ | $d\psi$ | $d\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 — 16 | | | | | |
| 16 — 17 | | | | | |
| 17 — 18 | | | | | |
| 18 — 19 | | | | | |
| 19 — 20 | | | | | |
| 20 — 21 | + 45310$n$ | + 144570$n$ | − 4937360$n$ | + 8903$n$ | + 6717$n$ |
| 21 — 22 | | | | | |
| 22 — 23 | | | | | |
| 23 — 24 | | | | | |
| 24 — 25 | | | | | |
| 25 — 26 | + 155650$n$ | + 154346$n$ | − 19059570$n$ | + 112880$n$ | + 111364$n$ |
| 26 — 27 | + 135314$n$ | + 135466$n$ | − 18445310$n$ | + 152436$n$ | + 159996$n$ |
| 27 — 28 | + 66010$n$ | + 67438$n$ | − 11593600$n$ | + 155398$n$ | + 173911$n$ |
| 28 — 29 | − 3262$n$ | − 1014$n$ | − 3778470$n$ | + 119840$n$ | + 143550$n$ |
| 29 — 30 | − 37860$n$ | − 35616$n$ | + 878107$n$ | + 78234$n$ | + 100724$n$ |
| 30 — 1 Maj. | − 46088$n$ | − 44210$n$ | + 1799210$n$ | + 48305$n$ | + 67183$n$ |
| 1 — 2 | − 43260$n$ | − 41772$n$ | + 2959610$n$ | + 29734$n$ | + 44933$n$ |
| 2 — 3 | | | | | |
| 3 — 4 | | | | | |
| 4 — 5 | | | | | |
| 5 — 6 | | | | | |
| 6 — 7 | − 19031$n$ | − 17736$n$ | + 1554230$n$ | + 3608$n$ | + 9506$n$ |

Si certiores essemus de elementis motus hujus cometae, operae pretium esset hunc calculum ulterius tam in antecedentia quam consequentia extendere; nunc autem sufficiat conjectura tantum perturbationes in motu terrae ortas crassa minerva colligere.

*De variatione parametri.*

Semiparameter $p$ usque ad 28 Aprilis augetur, tum vero iterum minuitur; verumtamen augmenta multum praevalent. Videtur autem totum augmentum exsurgere ad $700000\,n$, unde cum ante cometae adventum fuerit semiparameter $p = 97144$, is deinceps erit $= 97144 + 700000\,n$. Quare si massa cometae aequalis esset massae terrae, ob $n = \frac{1}{200000}$, fieret is $= 97144 + 3\frac{1}{2}$; ac si massa cometae ad massam terrae rationem $= m : 1$ habere ponatur, in postremum erit semiparameter $= 97144 + \frac{7m}{2}$.

*De variatione axis transversi.*

Semiaxis transversus $r$, qui ante cometae adventum sumtus est $= 100000$, fere similes mutationes patitur, quae autem aliquantillum erunt minores, ita ut augmentum totum aestimari queat quasi $= 690000\,n$, et semiaxis post discessum cometae $= 100000 + 690000\,n$. Hinc posita ratione massae cometae ad massam terrae $= m : 1$, erit semiaxis in posterum $= 100000 + \frac{69m}{20}$.

*De variatione excentricitatis.*

Cum sit in genere excentricitas $q = \sqrt{\left(1 - \frac{p}{r}\right)}$, eaque ante cometae adventum fuerit $= 0{,}0169$,

erit ea deinceps $\quad = \sqrt{\left(1 - \frac{97144 - 3{,}5m}{100000 + 3{,}45m}\right)} = \sqrt{(0{,}01856 - 0{,}0000015m)}$,

ideoque fiet excentricitas $\quad = 0{,}0169 - 0{,}000044m$

hoc est aliquanto minor quam ante. Quare si massa cometae centies superaret massam terrae, ut esset $m = 100$, foret excentricitas $= 0{,}0125$, maximaque solis aequatio multo minor esset futura.

*De variatione anni solaris.*

Ob auctum axem transversum quantitas anni solaris augebitur in ratione

$$1 : \left(1 + \frac{69m}{2000000}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 : 1 + \frac{207m}{4000000}.$$

Cum igitur ante adventum cometae annus fuerit $365^d\,5^h\,49' = 525949'$, annus in posterum augmentum capiet $= 27m$ min. primorum. Dum ergo cometa esset terrae aequalis, annus 27 min. primis produceretur, fieretque $= 365^d\,6^h\,16'$. Ac si cometa adeo centies terram superaret, anni quantitas augmentum caperet 45 horarum, qui effectus sane foret stupendus.

*De variatione lineae absidum.*

Usque ad diem 29 Aprilis linea absidum maxime promovetur, tum vero iterum repellitur; sed promotio plurimum praevalet atque ad minimum $100000000\,n$ aestimanda videtur. Hinc si ut hactenus massa cometae $m$ vicibus major ponatur, quam massa terrae, ab actione cometae linea absidum orbitae terrae per spatium $500\,m$ min. sec. promovebitur. Ergo si cometa terrae esset aequalis, haec promotio esset $= 8'\,20''$, sin autem centies esset major, foret ea $13^0\,23'\,20''$.

*

*De variatione lineae nodorum et inclinationis.*

Linea nodorum seu intersectio $L☊$ ab actione cometae super ejus orbita ad minimum promovebitur per spatium $950000\,n$ min. sec. et inclinatio fere tantundem augebitur: unde utraque perturbatio erit $47\frac{1}{2}m$ min. sec., quae eo minus est dubia, cum actio cometae perpetuo augmenta producat.

Fig. 191. Consideremus haec elementa in coelo, sitque $☊C$ via cometae, $☊♎♋$ ecliptica ante adventum cometae, erit angulus $♎☊C = 17^0\ 56' = ☊$, et arcus $☊♎ = 51^0\ 16'$, per $♎$ vero transibit aequator $Æ♎Q$ faciens cum ecliptica angulum $Æ♎♋ = 23^0\ 28\frac{1}{2}'$. Post effectum autem cometae sit circulus $\varepsilon o\lambda\omega$ ecliptica secans priorem in $o$, erit $☊\omega = d\psi$ et $C\omega o = ☊ + d\omega$. Ducatur arculus $\omega u$ ad $☊o$ normalis, erit $☊u = d\psi \cos ☊$ et $\omega u = d\psi \sin ☊$; ponatur tantisper $☊o = z$, erit $\sin z : \sin(z - d\psi \cos ☊) = \sin(☊ + d\omega) : \sin ☊$, unde fit $\operatorname{tang} z = \frac{d\psi \sin ☊}{d\omega}$. Quia ergo $d\omega = d\psi$, erit $l \operatorname{tang} z = l \sin ☊ = 9{,}4884240$, ac propterea $z = ☊o = 17^0\ 7'$; tum vero ob $o \sin z = d\psi \sin ☊$ erit $o = \frac{d\psi \sin ☊}{\sin z} = 1{,}0512 d\psi = 50m$ min. sec., ob $d\psi = d\omega = 47\frac{1}{2}m$. Cum ergo sit $♎o = -34^0\ 9'$, ecliptica quasi gyratur circa punctum ♏ $4^0\ 9'$ per angulum $50m$ min. sec., ita ut punctum solstitiale ♋ magis ab aequatore removeatur et obliquitas eclipticae augeatur. Ducta $♎\mu$ ad $o\omega$ normali, erit $♎\mu = -50m \sin 34^0\ 9'$,

hincque $$♎\lambda = \frac{-50m \,.\, \sin 34^0\ 9'}{\sin 23^0\ 28\frac{1}{2}'}, \quad \text{et} \quad \mu\lambda = \frac{-50m \,.\, \sin 34^0\ 9'}{\operatorname{tang} 23^0\ 28\frac{1}{2}'}.$$

Unde si obliquitas eclipticae pristina vocetur $= \varepsilon$ et nova $= \varepsilon + d\varepsilon$, erit

$$\sin \varepsilon : \sin(\varepsilon + d\varepsilon) = \sin(-34^0\ 9' - \mu\lambda) : \sin - 34^0\ 9' \quad \text{seu} \quad d\varepsilon = 50m \cos 34^0\ 9' = 41m \text{ sec.}$$

et cum sit $\mu\lambda = -63m$ sec. puncta aequinoctialia super ecliptica per $63m$ sec. promota erunt censenda, super aequatore autem per spatium $70m$ sec. In latitudine igitur stellarum, quarum longitudo est ♌ $4^0\ 9'$, iste effectus maxime spectabitur, dum stellarum borealium latitudo minuetur, australium vero augebitur particula $50m$ sec. In stellis vero sub longitudine ♒ $4^0\ 9'$ sitis contrarium eveniet.

Si massa cometae multum superet massam terrae, hae perturbationes ad enormem quantitatem exsurgere poterunt, ita ut effectum non solum in Astronomia, sed etiam in vita communi simus sensuri. Quin etiam, cum de elementis orbitae cometae non simus satis certi, error in eam partem incidere posset, ut omnes hae perturbationes multo adeo majores essent proditurі, quam hic invenimus. Omnino autem etiamsi ob errores has perturbationes minui oporteret, et massa cometae minor esset quam terrae, tamen ab hoc tempore novam quasi epocham constitui conveniet, pro qua novae tabulae solares ante omnia essent condendae, quod negotium nonnisi pluribus elapsis annis perfici poterit. Lunares autem tabulae multo majorem ac difficiliorem emendationem requisiturae videntur.

# XII.

## Solutio duorum problematum, Astronomiam mechanicam spectantium.

---

1. **Problema.** (Fig. 192). Si corpus sphaeroidicum ex materia homogenea conflatum, attrahatur ad centrum virium $O$, cujus vis sit reciproce proportionalis quadratis distantiarum, invenire mediam directionem, secundum quam hoc corpus urgebitur.

**Solutio.** Repraesentet circulus $AGBH$ sectionem hujus corporis per ejus centrum $C$ ad axem normaliter factam, seu sit iste circulus planum aequatoris hujus corporis sphaeroidici propositi, in plano tabulae exhibitum, et recta $EF$, quae huic plano normaliter insistere concipienda est, referat axem corporis, cujus idcirco poli sint in $E$ et $F$. Ponatur radius aequatoris $CA = CB = a$, semissis axis $CE = CF = b$. Sit centrum virium ubicunque situm in $O$, unde ad planum aequatoris demittatur perpendiculum $OD$; per $D$ et centrum $C$ agatur recta $DACB$, huicque diameter perpendicularis $GH$. Vocetur distantia $CD = f$ et $OD = g$, ita ut sit $\sqrt{(ff + gg)}$ distantia centri virium $O$ a centro corporis $C$. Jam consideretur corporis quaecunque particula $M$, unde ad planum aequatoris demittatur perpendicularis $MQ$, et per $Q$ diametro $AB$ normalis ducatur corda $NPN'$. Vocentur nunc coordinatae $CP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$; per $P$ quoque axi $EF$ parallela agatur recta $RPR'$, et per $M$ ipsi $NN'$ parallela $MRM'$, atque per $R$ trajiciatur $TR$ ipsi $DC$ parallela, erit

$$DT = PR = QM = z, \quad MR = PQ = y, \quad TR = DP = f - x \quad \text{et} \quad TO = g - z.$$

Hinc fiet $TM = \sqrt{((f-x)^2 + yy)}$, et distantia puncti $M$ a centro virium $O$, nempe recta

$$MO = \sqrt{(yy + (f-x)^2 + (g-z)^2)},$$

quae brevitatis gratia ponatur $= v$. Urgebitur ergo punctum $M$ in directione $MO$ vi acceleratrice, quadrato $v^2$ reciproce proportionali; sit ergo haec vis $= \frac{kk}{vv}$, qua punctum $M$ in directione $MO$ sollicitatur. Resolvatur haec vis secundum directiones $Mm$ ipsi $DO$ parallelam, et $MT$, eritque vis

in directione $Mm = \frac{kk(g-z)}{v^3}$, et vis in directione $MT = \frac{kk\sqrt{(yy+(f-x)^2)}}{v^3}$, quae ulterius resolvatur secundum directiones $M\mu$ ipsi $RT$ vel $CD$ parallelam, et $MR$, eritque vis in directione $M\mu = \frac{kk(f-x)}{v^3}$, et vis in directione $MR = \frac{kky}{v^3}$. Sicque quodlibet punctum $M$ tribus urgetur viribus secundum directiones ternis coordinatis $x$, $y$, $z$ parallelas, nimirum:

$$\text{secundum directionem } Mm, \text{ vi} = \frac{kk(g-z)}{v^3},$$

$$\text{secundum directionem } M\mu, \text{ vi} = \frac{kk(f-x)}{v^3},$$

$$\text{secundum directionem } MR, \text{ vi} = \frac{kky}{v^3}.$$

Sumta jam $RM' = RM$ consideretur punctum $M'$, quod iisdem coordinatis definietur, quibus punctum $M$, nisi quod sit $y$ negativa; erit enim demisso ex $M'$ in planum aequatoris perpendiculo $M'Q'$, $CP = x$, $PQ' = -y$ et $Q'M' = z$; unde punctum $M'$, quia ejus distantia ab $O$ quoque est $= v$, urgebitur his viribus:

$$\text{secundum directionem } M'm' = \frac{kk(g-z)}{v^3},$$

$$\text{secundum directionem } M'\mu' = \frac{kk(f-x)}{v^3},$$

$$\text{secundum directionem } M'R = \frac{kky}{v^3}.$$

Quodsi ergo haec duo puncta junctim considerentur, vires in directionibus $MR$ et $M'R$ se mutuo destruent, et reliquae revocabuntur ad binas sequentes in puncto $R$ applicatas

$$\text{secundum directionem } Rr, \text{ vis} = \frac{2kk(g-z)}{v^3},$$

$$\text{secundum directionem } RT, \text{ vis} = \frac{2kk(f-x)}{v^3}.$$

Sumantur jam in inferiori hemisphaerio bina puncta $M''$ et $M'''$ his respondentia, ita ut sit $QM'' = Q'M''' = QM$, ideoque $PR' = PR$, eritque pro his punctis coordinata $z$ negativa. Ponatur eorum distantia a centro virium $O$

$$\sqrt{(yy+(f-x)^2+(g+z)^2)} = u,$$

atque ex istis binis punctis nascentur hae duae vires

$$\text{sec. directionem } R'r', \text{ vis} = \frac{2kk(g+z)}{u^3},$$

$$\text{sec. directionem } R'T', \text{ vis} = \frac{2kk(f-x)}{u^3}.$$

Fiat nunc abscissa $x$ negativa, seu capiatur $CP' = CP$, atque ex reliquis coordinatis definiantur simili modo quaterna puncta $M^{IV}$, $M^{V}$, $M^{VI}$ et $M^{VII}$, ponaturque

$$\sqrt{(yy + (f+x)^2 + (g-z)^2)} = (v) \quad \text{et} \quad \sqrt{(yy + (f+x)^2 + (g+z)^2)} = (u),$$

ac puncta haec quatuor praebebunt sequentes vires

$$\text{sec. directionem } R''r'', \quad \text{vis} = \frac{2kk(g-z)}{(v)^3},$$

$$R''T, \quad \text{vis} = \frac{2kk(f+x)}{(v)^3},$$

$$R'''r''', \quad \text{vis} = \frac{2kk(g+z)}{(u)^3},$$

$$R'''T', \quad \text{vis} = \frac{2kk(f+x)}{(u)^3}.$$

Omnia ergo haec octo puncta, in singulis corporis octantibus similiter posita, conjunctim has praebebunt vires, quibus corpus sollicitabitur:

$$\text{sec. directionem } PR, \quad \text{vis} = 2kkg(v^{-3} + u^{-3}) - 2kkz(v^{-3} - u^{-3}),$$

$$P'R'', \quad \text{vis} = 2kkg((v)^{-3} + (u)^{-3}) - 2kkz((v)^{-3} - (u)^{-3}),$$

$$Ss, \quad \text{vis} = 2kkf(v^{-3} + (v)^{-3}) - 2kkx(v^{-3} - (v)^{-3}),$$

$$S's', \quad \text{vis} = 2kkf(u^{-3} + (u)^{-3}) - 2kkx(u^{-3} - (u)^{-3}).$$

Quemadmodum ergo hae vires sunt natae ex puncto $M$ in primo sphaeroidis octante quadranti $ACG$ sursum imminente assumto: si omnia istius octantis puncta hoc modo colligantur, prodibunt vires, quibus totum sphaeroides sollicitatur, eaeque jam habebuntur reductae ad binas directiones, quarum alterae axi $EF$, alterae diametro aequatoris $AB$ sint parallelae.

Quo autem hae vires facilius colligi queant, eae, quae directiones habent parallelas, primo summari, tum vero earum momentum exprimi debet. Ita vires $PR$ et $P'R''$ dabunt

$$\text{vim } Yy = 2kkg(v^{-3} + u^{-3} + (v)^{-3} + (u)^{-3}) - 2kkz(v^{-3} - u^{-3} + (v)^{-3} - (u)^{-3}),$$

ejusque momentum respectu centri $C$ seu axis $GH$ sumtum erit

$$Yy \,.\, CY = 2kkgx(v^{-3} + u^{-3} - (v)^{-3} - (u)^{-3}) - 2kkxz(v^{-3} - u^{-3} - (v)^{-3} + (u)^{-3}).$$

Deinde vis $Ss$ et $S's'$ coalescent in unam vim

$$Xx = 2kkf(v^{-3} + u^{-3} + (v)^{-3} + (u)^{-3}) - 2kkx(v^{-3} + u^{-3} - (v)^{-3} - (u)^{-3}),$$

cujus momentum respectu ejusdem axis $GH$ erit

$$Xx \,.\, CX = 2kkfz(v^{-3} + (v)^{-3} - u^{-3} - (u)^{-3}) - 2kkxz(v^{-3} - (v)^{-3} - u^{-3} + (u)^{-3}).$$

Tribuatur nunc puncto $M$ massa elementaris $dxdydz$, per eamque singulae istae expressiones multiplicentur et integratione ter debito modo instituta prodibunt tam vires totales $Yy$ et $Xx$ ex attractione

totius sphaeroidis oriundae, quam earum momenta $Yy.CY$ et $Xx.CX$; quae deinceps in unam vim toti attractioni aequivalentem conjungi poterunt. Quo autem hae integrationes commodius absolvi possint, transformemus formulas $v^{-3}$, $u^{-3}$, $(v)^{-3}$ et $(u)^{-3}$ in series, quae, si distantia centri virium $\sqrt{(ff+gg)}$, quam ponamus $= h$, a centro sphaeroidis $C$ fuerit valde magna, convergant. Cum igitur sit $v = \sqrt{(hh - 2fx - 2gz + yy + xx + zz)}$, erit

$$v^{-3} = \frac{1}{h^3} + \frac{3fx + 3gz}{h^5} - \frac{3yy - 3xx - 3zz}{2h^5} + \frac{15ffxx + 30fgxz + 15ggzz}{2h^7},$$

$$u^{-3} = \frac{1}{h^3} + \frac{3fx - 3gz}{h^5} - \frac{3yy - 3xx - 3zz}{2h^5} + \frac{15ffxx - 30fgxz + 15ggzz}{2h^7},$$

$$(v)^{-3} = \frac{1}{h^3} - \frac{3fx + 3gz}{h^5} - \frac{3yy - 3xx - 3zz}{2h^5} + \frac{15ffxx - 30fgxz + 15ggzz}{2h^7},$$

$$(u)^{-3} = \frac{1}{h^3} - \frac{3fx - 3gz}{h^5} - \frac{3yy - 3xx - 3zz}{2h^5} + \frac{15ffxx + 30fgxz + 15ggzz}{2h^7}.$$

Hinc igitur erit vis tota $Yy$ ex attractione totius sphaeroidis orta

$$Yy = \frac{8kkg}{h^3}\int dx\,dy\,dz\left(1 - \frac{3yy - 3xx - 9zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right),$$

et vis tota $Xx$ pro toto sphaeroide orta

$$Xx = \frac{8kkf}{h^3}\int dx\,dy\,dz\left(1 - \frac{3yy - 9xx - 3zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right).$$

Deinde vero erunt momenta totalia

$$Yy.CY = \frac{24kkfg}{h^5}\int xx\,dx\,dy\,dz - \frac{120kkfg}{h^7}\int xxzz\,dx\,dy\,dz,$$

$$Xx.CX = \frac{24kkfg}{h^5}\int zz\,dx\,dy\,dz - \frac{120kkfg}{h^7}\int xxzz\,dx\,dy\,dz.$$

Quoniam triplici integratione opus est, ponantur primo $x$ et $z$ constantes, ut obtineantur vires ex elementis secundum rectas $RM$ sitis oriunda, eritque

$$Yy = \frac{8kkg}{h^3}\int y\,dx\,dz\left(1 - \frac{yy - 3xx - 9zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right),$$

$$Xx = \frac{8kkf}{h^3}\int y\,dx\,dz\left(1 - \frac{yy - 9xx - 3zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right),$$

$$Yy.CY = \frac{24kkfg}{h^5}\int xxy\,dx\,dz - \frac{120kkfg}{h^7}\int xxzzy\,dx\,dz,$$

$$Xx.CX = \frac{24kkfg}{h^5}\int zzy\,dx\,dz - \frac{120kkfg}{h^7}\int xxzzy\,dx\,dz.$$

Concipiatur jam recta $RM$ usque ad superficiem sphaeroidis producta, atque $y$ determinari debebit ex aequatione locali pro hac superficie sphaeroidica, inter coordinatas $x$, $y$ et $z$ expressa

quae est $yy = aa - xx - \frac{aazz}{bb}$. Ponatur nunc $z$ constans, ut integrationes pateant ad sectiones sphaeroidis parallelas aequatori secundum $MR$ factas: hunc in finem ponatur $\sqrt{\left(aa - \frac{aazz}{bb}\right)} = p$, ut $p$ sit radius hujus sectionis, atque integrationem eousque extendi oportebit, donec fiat $x = p$. Sit $\frac{aa}{bb} = n$, eritque pro hoc casu

$$\text{vis } Yy = \int \frac{8kkgdz}{h^3} \int dx \left(1 - \frac{aa - 2xx + (n-9)zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) \sqrt{(pp - xx)},$$

$$\text{vis } Xx = \int \frac{8kkfdz}{h^3} \int dx \left(1 - \frac{aa - 8xx + (n-3)zz}{2hh} + \frac{15ffxx + 15ggzz}{2h^4}\right) \sqrt{(pp - xx)},$$

$$\text{momentum } Yy \,.\, CY = \int \frac{24kkfgdz}{h^5} \int xxdx \sqrt{(pp - xx)} - \int \frac{120kkfgdz}{h^7} \int xxzzdx \sqrt{(pp - xx)},$$

$$\text{momentum } Xx \,.\, CX = \int \frac{24kkfgdz}{h^5} \int zzdx \sqrt{(pp - xx)} - \int \frac{120kkfgdz}{h^7} \int xxzzdx \sqrt{(pp - xx)}.$$

Posita autem ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, si post integrationem fiat $x = p$, erit

$$\int dx \sqrt{(pp - xx)} = \frac{1}{4}\pi pp, \qquad \int xxdx \sqrt{(pp - xx)} = \frac{1}{16}\pi p^4,$$

quibus valoribus substitutis erit

$$\text{vis } Yy = \int \frac{2\pi kkgppdz}{h^3}\left(1 - \frac{aa - \frac{1}{2}pp + (n-9)zz}{2hh} + \frac{\frac{15}{4}ffpp + 15ggzz}{2h^4}\right),$$

$$\text{vis } Xx = \int \frac{2\pi kkfppdz}{h^3}\left(1 - \frac{aa - 2pp + (n-3)zz}{2hh} + \frac{\frac{15}{4}ffpp + 15ggzz}{2h^4}\right),$$

$$\text{mom. } Yy \,.\, CY = \int \frac{3\pi kkfgp^4}{2h^5} dz - \int \frac{15\pi kkfgp^4zz}{2h^7} dz,$$

$$\text{mom. } Xx \,.\, CX = \int \frac{6\pi kkfgppzz}{h^5} dz - \int \frac{15\pi kkfgp^4zz}{2h^7} dz.$$

Est autem $pp = aa - nzz = aa - \frac{aazz}{bb}$, uti assumsimus, erit ergo $aa = nbb$ et $pp = n(bb - zz)$. Instituatur nunc ultima integratio, ac ponatur $z = b$, quoniam est

$$\int ppdz = n\int dz(bb - zz) = \frac{2}{3}nb^3, \qquad \int p^4dz = nn\int dz(bb - zz)^2 = \frac{8}{15}nnb^5,$$

$$\int ppzzdz = n\int zzdz(bb - zz) = \frac{2}{15}nb^5, \qquad \int p^4zzdz = nn\int zzdz(bb - zz)^2 = \frac{8}{105}nnb^7,$$

integralia quaesita ita se habebunt

$$\text{vis } Yy = \frac{2\pi kkg}{h^3}\left(\frac{2}{3}nb^3 - \frac{3nb^5}{5hh} - \frac{2nnb^5}{5hh} - \frac{nnb^5ff + nb^5gg}{h^4}\right),$$

$$\text{vis } Xx = \frac{2\pi kkf}{h^3}\left(\frac{2}{3}nb^3 - \frac{nb^5}{5hh} - \frac{4nnb^5}{5hh} + \frac{nnb^5ff + nb^5gg}{h^4}\right),$$

$$\text{mom. } Yy \,.\, CY = \frac{4\pi nnkkb^5fg}{5h^5} - \frac{4\pi nnkkb^7fg}{7h^7},$$

$$\text{mom. } Xx \,.\, CX = \frac{4\pi nkkb^5fg}{5h^5} - \frac{4\pi nnkkb^7fg}{7h^7},$$

Massa autem totius sphaeroidis est $= \frac{4}{3}\pi aab = \frac{4}{3}\pi nb^3$, quae si dicatur $= M$, eaque in formulas inventas introducatur, reperietur

$$\text{vis } Yy = \frac{Mkkg}{h^3}\left(1 - \frac{9bb}{10hh} - \frac{3aa}{5hh} + \frac{3aaff}{2h^4} + \frac{3bbgg}{2h^4}\right),$$

$$\text{vis } Xx = \frac{Mkkf}{h^3}\left(1 - \frac{3bb}{10hh} - \frac{6aa}{5hh} + \frac{3aaff}{2h^4} + \frac{3bbgg}{2h^4}\right),$$

$$\text{mom. } Yy \,.\, CY = \frac{3Mkkaafg}{5h^5} - \frac{3Mkkaabbfg}{7h^7},$$

$$\text{mom. } Xx \,.\, CX = \frac{3Mkkbbfg}{5h^5} - \frac{3Mkkaabbfg}{7h^7}.$$

Neglectis ergo in viribus $Yy$ et $Xx$ terminis praeter primum omnibus, erit

$$CY = \frac{3aaf}{5hh} \quad \text{et} \quad CX = \frac{3bbg}{5hh},$$

sicque cognitis punctis $Y$ et $X$, in quibus applicatae sunt concipiendae vires $Yy$ et $Xx$, quarum directiones sunt axi sphaeroidis $CE$ et diametro aequatoris $BCA$ respective parallelae, innotescet media directio virium, quibus totum corpus ad centrum virium $O$ sollicitatur. Ad hoc perficiendum concipiatur (fig. 194) sectio sphaeroidis per ejus axem $ECF$ facta, in cujus plano situm sit centrum virium $O$, et $AB$ sit diameter aequatoris in eodem plano ducta, erit $CE = CF = b$, $CA = CB = a$, $CD = f$, $OD = g$ et $CO = \sqrt{(ff + gg)} = h$, atque tang $DCO = \frac{g}{f}$. Cum jam directiones binarum virium $Xx$ et $Yy$ se mutuo in $z$ intersecent, media directio earum per punctum $z$ transibit. Transit vero etiam per centrum virium $O$, eritque ergo haec media directio $zO$. Quantum autem a centro $C$ distet, fiat haec proportio

$$CD\,(f) : DO\,(g) = CY\left(\frac{3aaf}{5hh}\right) : Yt\left(\frac{3aag}{5hh}\right);$$

erit ergo
$$zt = Yt - CX = \frac{3(aa - bb)g}{5hh} = Cc \quad \text{proxime.}$$

Media ergo directio virium corpus sollicitantium transit non per centrum $C$, sed per axis

punctum inferius quodpiam $c$, ut sit $Cc = \frac{3(aa-bb)g}{5hh}$, atque haec directio $cO$ per centrum virium $O$ transibit. Denique tota haec vis erit proxime $cO = \frac{Mkk}{hh}$, seu accuratius: $cO = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(2gg-ff)}{10h^4}\right)$, unde actio vis centripetae determinari poterit. Q. E. I.

2. **Coroll. 1.** Nisi ergo corpus sit sphaericum seu $a = b$, neque directio vis, qua id versus centrum virium $O$ sollicitatur, per centrum corporis $C$, quod simul est ejus centrum gravitatis, transit, neque vis ipsa $cO$ quadrato distantiae $CO$ amplius est reciproce proportionalis.

3. **Coroll. 2.** Cum igitur motus corporis progressivus perinde se habeat, ac si ipsi in centro gravitatis $C$ applicata esset vis aequalis ipsi

$$cO = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(2gg-ff)}{10h^4}\right),$$

et in directione ipsi $cO$ parallela, haec vis neque per punctum $O$ transibit, neque quadratis distantiarum $CO$ erit reciproce proportionalis. Quamobrem semita corporis non erit ellipsis, in cujus altero foco sit punctum $O$: haecque aberratio eo erit notabilior, quo magis figura sphaeroidica a sphaerica discrepet.

4. **Coroll. 3.** Hoc quoque casu axis $EF$ non situm sibi parallelum tenebit, sed a momento vis sollicitantis continuo declinabitur. Quoniam vero momenta $Yy \cdot CY$ et $Xx \cdot CX$ sunt inter se contraria, illud praevalebit si $a > b$, ideoque vis $cO$ momentum ad axem $EF$ versus situm $ef$ inclinandum erit $= \frac{3Mkkfg(aa-bb)}{5h^5}$. Interim tamen haec vis, quia per axem transit, motum vertiginis non afficiet.

5. **Coroll. 4.** Sit nunc angulus, quo axis sphaeroidis $ECF$ ad rectam $CO$ inclinatur, $ECO = \varphi = COD$, et manente distantia $CO = h$, erit $CD = f = h \sin\varphi$ et $OD = g = h\cos\varphi$. Hinc itaque erit intervallum $Cc = \frac{3(aa-bb)\cos\varphi}{5h}$, denotante $a$ semidiametrum aequatoris $AC$, et $b$ semiaxem sphaeroidis $CE$.

6. **Coroll. 5.** Angulo porro hoc $ECO = \varphi$ loco rectarum $f$ et $g$ introducto, erit vis, qua sphaeroides in puncto $c$ ad centrum virium $O$ sollicitatur,

$$= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{10hh}\right),$$

seu ob $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ et $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, erit haec vis

$$= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(1+3\cos 2\varphi)}{20hh}\right).$$

7. **Coroll. 6.** Si haec vis in directione parallela centro gravitatis $C$ concipiatur applicata, eaque resolvatur secundum directiones $CO$, et $C\gamma$ ad $CO$ in plano $ECO$ normalem, reperietur

$$\text{vis } CO = \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{3(aa-bb)(1+3\cos 2\varphi)}{20hh}\right) \text{ et vis } C\gamma = \frac{Mkk}{hh} \cdot \frac{3(aa-bb)\sin 2\varphi}{10hh}.$$

8. **Coroll. 7.** Ob illam igitur vim $CO$, quatenus quadratis distantiarum $CO$ non exacte est reciproce proportionalis, orbita, quam centrum $C$ describet, aliquantum ab elliptica discrepabit; alterius autem vis $C\gamma$ effectus in hoc consistet, ut punctum $C$ non in eodem plano moveatur.

9. **Coroll. 8.** Momentum denique, quo haec vis pollet ad axem corporis $EF$ inclinandum et in situm $ef$ compellendum erit

$$=\frac{2Mkk(aa-bb)\sin\varphi\cos\varphi}{5h^3}=\frac{Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{5h^3}.$$

Est itaque ceteris paribus reciproce ut cubus distantiae $CO$. Ratione anguli $ECO=\varphi$ vero hoc momentum erit maximum, si hic angulus $ECO$ fiat semirectus.

10. **Scholion 1.** Cum igitur ex observationibus summa cura ab Illustris Academiae Regiae Parisinae Membris tam in Gallia quam in Lapponia et America institutis certissime evictum sit figuram terrae non esse sphaericam, sed sphaeroidicam compressam, cujus axis per polos ductus minor sit quam diameter aequatoris, hinc non levis mutatio tam in motu terrae quam in axis positione oriri debet. Quae ut definiri possit, non solum veram rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris determinari oportet, sed etiam utriusque quantitatem absolutam, quod sequenti modo non difficulter fieri poterit. Sit semidiameter aequatoris $=a$, et semiaxis per polos ductus $=b$, ponatur $b:a=1:1+\varpi$, ut sit $a=b+\varpi b$, erit $\varpi$ fractio valde parva. Sit in quapiam terrae regione elevatio poli $=p$, erit quantitas gradus meridiani in hac regione

$$=0{,}017453292\left(b+\frac{1}{2}\varpi b-\frac{3}{2}\varpi b\cos 2p\right),$$

$$\text{seu}=\frac{b+\frac{1}{2}\varpi b-\frac{3}{2}\varpi b\cos 2p}{57{,}29577951}.$$

Gradus vero secundum longitudinem in circulo aequatori parallelo mensuratus erit

$$=0{,}017453292\left(b+\frac{3}{2}\varpi b-\frac{1}{2}\varpi b\cos 2p\right)\cos p.$$

Cum jam in Gallia sub elevatione poli 49° 21′ 24″ mensura gradus in meridiano inventa sit 57183 hexapedarum parisinarum; hinc deducitur sequens aequatio

$$b+0{,}7087569\,.\,\varpi b=3276344\tfrac{1}{2}.$$

Sub circulo autem polari ab Illustri Praeside nostro de Maupertuis gradus meridiani definitur 57438 hexapedarum, pro elevatione poli 66° 30′ („19′ 34″"), unde sequitur haec aequatio:

$$b+1{,}5229976\varpi b=3290955,$$

ex quibus duabus aequatoribus invenitur

$$\varpi b = 17943 \text{ hexaped. paris.}, \; b = 3263626, \text{ ac propterea } a = 3281570 \text{ *)}.$$

Erit ergo semiaxis terrae $b = 3263626$ hexaped. paris. et semidiameter aequatoris $a = 3281570$ hexaped. paris. illiusque numeri ad hunc ratio proxime erit ut 182 ad 183, ita ut sit $\varpi = \frac{1}{182}$ et $a = \frac{183}{182} b$.

11. **Scholion 2.** Definita ergo figura et quantitate terrae, si vim, qua ad solem urgetur, spectamus, primum ejus orbita aliquantillum ab elliptica recedet, quia vis, qua centrum terrae ad centrum solis sollicitatur, non perfecte est quadratis distantiarum reciproce proportionalis. Erit autem ob $a = \left(1 + \frac{1}{182}\right) b$, $aa = \left(1 + \frac{1}{91}\right) bb$ proxime; ideoque vis, qua centrum terrae $C$ ad solem pellitur, fiet $= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{(1 + 3\cos 2\varphi) bb}{607 hh}\right)$ proxime. Cum autem posita parallaxi solis horizontali sub polis terrae $= 10''$, sit $\frac{b}{h} = \sin 10''$, ideoque $\frac{bb}{hh} = 0{,}00000000235$, erit haec vis $= \frac{Mkk}{hh}\left(1 - \frac{(1 + 3\cos 2\varphi)}{258249300000}\right)$, cujus differentia ab $\frac{Mkk}{hh}$ tantilla est, ut ejus effectus omnino sentiri nequeat. Tum vero adest vis, qua terra de plano eclipticae detorquetur, cujus directio ad hoc planum normalis et sursum, seu boream versus terram sollicitans erit $= \frac{Mkk}{hh} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{129124650000}$, quae maxima est quando sol proxime ad polum arcticum accedit, ubi fit $\varphi = 66\frac{1}{2}^0$ ac

$$\sin 2\varphi = \sin 47^0 = 0{,}7313537;$$

sole autem in tropico capricorni versante, pari vi terra de ecliptica deorsum urgebitur; cum autem et haec vis sit minima, effectus erit imperceptibilis. Momentum autem, quo axis terrae inclinatur, polusque soli propior ab eo detorquetur, erit $= \frac{Mkk(aa - bb)\sin 2\varphi}{5h^3} = \frac{Mkkbb \sin 2\varphi}{455 h^3}$. Quia vero effectus minimus ab hac vi oriundus in accuratissimis observationibus animadverti potest, eam negligere non licebit.

12. **Scholion 3.** Terra deinde quoque ad lunam attrahitur, verum haec vis prae illa, qua ad solem urgetur, tam est exigua, ut in motu terrae vix perceptibilem alterationem efficiat. Quanquam ergo haec vis ad lunam tendens, ob figuram terrae sphaeroidicam, quadratis distantiarum non est reciproce proportionalis, sed ab hac proportione aliquantum recedit, tamen multo minus effectus inde in motu terrae oriundus ullo modo observabilis esse poterit. Aliter vero se res habet in illa vi, qua terra de plano eclipticae detruditur, quae ob lunae vicinitatem multo major est simili illa vi a sole orta. Sit enim distantia lunae a terra $= H$, et vis attractiva acceleratrix $= \frac{KK}{HH}$, erit vis lunae ad terram de plano eclipticae depellendam tendens $= \frac{3MKK(aa - bb)\sin 2\varphi}{10 H^4}$; vis solis autem similem

*) *Script. autogr. ad marg.* Sub aequatore lat. $1^0$ : 56725 tois. $b - \varpi b = 3250103$, et ex circ. polari $\varpi b = 16192$, $b = 3266295$, $a = 3282487$, ergo

$$a : b = 203 : 202 \quad , \quad a : b = 201 : 200.$$

effectum edens $= \frac{3Mkk(aa-bb)\sin 2\varphi}{10h^4}$. Erit ergo vis lunae ad vim solis in similibus positionibus ut $\frac{KK}{H^4}$ ad $\frac{kk}{h^4}$. Verum ex aestu maris Newtonus conclusit esse vim lunae ad mare movendum ad similem vim solis ut 4 ad 1, quam rationem quidem Cel. Dan. Bernoulli multo minorem statuit, scilicet ut 5 : 2. Vires autem illae ad mare movendum sunt ut $\frac{KK}{H^3}$ ad $\frac{kk}{h^3}$; facto ergo $\frac{KK}{H^3} = \frac{4kk}{h^3}$, prodibit vis lunae ad terram de plano eclipticae deturbandam ad vim solis ut $\frac{4}{H}$ ad $\frac{1}{h}$, hoc est ut $4h$ ad $H$, quae ratio proxime erit ut 1333 ad 1, siquidem ponamus $h = 20000$ semid. terrae et $H = 60$; quare haec vis lunae plus quam millies excedit similem vim solis, ejusque ergo effectus non erit negligendus. Tum vero vis lunae ad axem terrae inclinandum impensa erit $= \frac{MKK(aa-bb)\sin 2\varphi}{5H^3}$, quae propterea secundum Newtonum quadruplo major esse deberet quam vis solis; atque ex hoc fonte tam praecessio aequinoctiorum, quam nutatio quaepiam axis terrae sequi debet, quem utrumque effectum, quantum principia Mechanicae etiamnunc cognita id permittunt, determinare conabor.

13. **Problema II.** (Fig. 195). Determinare motum axis terrae, quatenus is a vi solis perturbatur, seu nutationem axis terrae a vi solis oriundam definire.

**Solutio.** Concipiamus centrum terrae in $C$ quiescere, solemque in ellipsi circa id revolvi; ad praesens enim propositum perinde est, sive motum annuum soli tribuamus sive terrae. Repraesentet ergo planum tabulae planum eclipticae, sitque $AOB$ orbita, in qua sol moveri videtur; sit $A$ ejus apogaeum, $B$ perigaeum, et post tempus quodpiam $t$ sol ex apogaeo pervenerit in situm $O$; vocetur semiaxis transversus orbitae solaris $= c$, excentricitas $= n$, erit $CA = (1+n)c$ et $CB = (1-n)c$. Anomalia autem vera tempori $t$ respondens, seu angulus $ACO$ sit $= v$, et anomalia media $= u$, distantia $CO = z$. Hoc autem tempore axis terrae teneat situm $CE$, ita ut sumto $E$ pro polo boreali sit $CE = b$. Ex $E$ in planum eclipticae demittatur perpendiculum $EP$, ductaque $CP$ vocentur anguli $ACP = \vartheta$ et $ECP = \varphi$, erit $EP = b\sin\varphi$ et $CP = b\cos\varphi$. Jam axis $EC$ cum directione $ECO$ facit angulum $ECO$, ad quem inveniendum ex $P$ in $CO$ demittatur perpendiculum $PQ$, eritque et $EQ$ ad $CO$ perpendicularis. Cum jam sit ang. $OCP = v - \vartheta$, erit $PQ = b\cos\varphi\sin(v-\vartheta)$ et $CQ = b\cos\varphi\cos(v-\vartheta)$, unde fit $\frac{CQ}{CE} = \cos OCE = \cos\varphi\cos(v-\vartheta)$, qui est ille ipse angulus, quem superius $= \varphi$ vocavimus. Erit autem

$$\sin OCE = \sqrt{(1-\cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta))} \quad \text{et} \quad \sin 2\,OCE = 2\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\sqrt{(1-\cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta))}.$$

Quoniam erit momentum vis solis ad hunc angulum $OCE$ augendum

$$= \frac{2Mkk(aa-bb)\cos\varphi\cos(v-\vartheta)\sqrt{(1-\cos^2\varphi\cos^2(v-\vartheta))}}{5z^3},$$

pro quo brevitatis gratia scribatur $Mp$. Ducatur $TEt$ normalis ad $CE$, eritque $Et$ directio, secundum quam punctum $E$ ab ista vi detorquebitur. Quantum autem detorqueatur, cognoscetur ex momento inertiae totius terrae, respectu axis ad $CE$ normalis, hoc est respectu diametri aequatoris. Si igitur terra ex materia homogenea statuatur composita, respectu axis per aequatorem ducti reperitur momentum inertiae $= \frac{1}{5}M(aa+bb)$. Quodsi jam angulus $OCE$ brevitatis gratia ponatur $= s$,

mutatio ita erit comparata, ut tempusculo $dt$ fiat

$$\frac{2dds}{dt^2} = \frac{Mp}{\frac{1}{5}(aa+bb)M} = \frac{5p}{aa+bb}, \text{ ita ut sit } dds = \frac{5pdt^2}{2(aa+bb)}.$$

At est $p = \frac{2kk(aa-bb)\sin s\cos s}{5z^3}$, ergo $dds = \frac{kkdt^2(aa-bb)\sin s\cos s}{(aa+bb)z^3}$. Capiatur ergo $Ee$ tantum, ut sit ang. $ECe = dds$, erit $e$ punctum, in quod polus $E$ tempusculo $dt$ detorqueretur, si ante quievisset. Cum autem polo motus jam impressus concipi debeat, is ita erit comparatus, ut, si a nullis viribus urgeretur, uniformiter secundum circulum maximum esset progressurus. Quantum ergo hic motus a vi illa solis afficiatur, sequenti modo determinari poterit.

Concipiatur (fig. 196) in superficie sphaerae $AO$ ecliptica, in eaque polus $E$, sumto $A$ pro apogaeo solis. Ducatur $ER$ ad $AO$ normalis, erit $AR = \vartheta$ et $ER = \varphi$. Progrediatur motu jam concepto polus $E$ tempusculo $dt$ in $e$, erit $Rr = d\vartheta$ et $eG = d\varphi$, atque si motu uniformi secundum circulum maximum progrederetur, perveniret sequenti tempusculo in $e'$, ut esset $rr' = d\vartheta + 2d\varphi d\vartheta \operatorname{tang}\varphi$ et $e'g = d\varphi - d\vartheta^2 \sin\varphi\cos\varphi$, quarum formularum demonstrationem deinceps tradam. Jam capiatur $AO = \nu$, junganturque circulo maximo puncta $O$ et $e'$, erit arcus $Oe' = s$, sumto puncto $e'$ pro primo $E$, et $r'O$ seu $RO = \nu - \vartheta$, atque $r'e' = RE = \varphi$, unde erit $\cos s = \cos\varphi\cos(\nu-\vartheta)$, at erit $\sin Oe'r' = \frac{\sin(\nu-\vartheta)}{\sin s}$, seu $\operatorname{tang} Oe'r' = \frac{\operatorname{tang}(\nu-\vartheta)}{\sin\varphi}$, et $\cos Oe'r' = \frac{\sin\varphi\cos(\nu-\vartheta)}{\sin s}$. Nunc quia polus in hoc circulo $Oe'$ pellitur, capiatur

$$e'\varepsilon = dds = \frac{kkdt^2(aa-bb)\sin s\cos s}{(aa+bb)z^3},$$

eritque $\varepsilon$ punctum, ad quod polus fine alterius tempusculi $dt$ reperietur; ducatur perpendiculum $\varepsilon\varrho$, et $e'\gamma$ ad $\varepsilon\varrho$ normalis, erit

$$\varepsilon\gamma = \frac{kkdt^2(aa-bb)\cos s\sin\varphi\cos(\nu-\vartheta)}{(aa+bb)z^3} \quad \text{et} \quad e'\gamma = \frac{kkdt^2(aa-bb)\cos s\sin(\nu-\vartheta)}{(aa+bb)z^3} = r'\varrho\cos\varphi,$$

ita ut sit

$$r'\varrho = \frac{kkdt^2(aa-bb)\sin(\nu-\vartheta)\cos(\nu-\vartheta)}{(aa+bb)z^3}.$$

At est $r\varrho = d\vartheta + dd\vartheta = rr' - r'\varrho$ et $e'g + \varepsilon\gamma = d\varphi + dd\varphi$, unde fit

$$dd\vartheta = 2d\varphi d\vartheta \operatorname{tang}\varphi - \frac{kkdt^2(aa-bb)\sin(\nu-\vartheta)\cos(\nu-\vartheta)}{(aa+bb)z^3},$$

$$dd\varphi = -d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{kkdt^2(aa-bb)\sin\varphi\cos\varphi\cos^2(\nu-\vartheta)}{(aa+bb)z^3},$$

quibus aequationibus motus poli $E$ continetur, ita ut ex iis ad quodvis tempus positio axis $CE$ definiri queat.

Quodsi vero loco temporis $t$ anomaliam mediam $u$ in calculum introducamus, reperietur $kkdt^2 = 2c^3du^2$, sicque simul quantitas $kk$ ex calculo egreditur, eritque ergo

$$dd\vartheta = 2\,d\vartheta\,d\varphi \text{ tang } \varphi - \frac{2c^3\,du^2\,(aa - bb)\sin(v - \vartheta)\cos(v - \vartheta)}{(aa + bb)\,z^3},$$

$$dd\varphi = -\,d\vartheta^2 \sin\varphi\cos\varphi + \frac{2c^3\,du^2\,(aa - bb)\sin\varphi\cos\varphi\cos^2(v - \vartheta)}{(aa + bb)\,z^3}.$$

Posita autem anomalia media $= u$, quae anomaliae verae $ACO = v$ respondeat, ponatur anomalia excentrica $= r$, erit

$$u = r + n\sin r, \qquad \cos v = \frac{n + \cos r}{1 + n\cos r},$$

$$z = c\,(1 + n\cos r), \qquad du = dr\,(1 + n\cos r) = \frac{z\,dr}{c},$$

$$\sin v = \frac{\sin r\sqrt{(1 - nn)}}{1 + n\cos r}, \quad \text{et} \quad dv = \frac{dr\sqrt{(1 - nn)}}{1 + n\cos r} = \frac{du\sqrt{(1 - nn)}}{(1 + n\cos r)^2}.$$

Cum jam $du$ sit constans, erit introducendo $r$

$$ddr\,(1 + n\cos r) - n\,dr^2\sin r = 0 \quad \text{seu} \quad ddr = \frac{n\,dr^2\sin r}{1 + n\cos r},$$

ideoque habebuntur hae duae aequationes

$$dd\vartheta = 2\,d\vartheta\,d\varphi \text{ tang } \varphi - \frac{2(aa - bb)\,dr^2\sin(v - \vartheta)\cos(v - \vartheta)}{(aa + bb)(1 + n\cos r)},$$

$$dd\varphi = -\,d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2(aa - bb)\,dr^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2(v - \vartheta)}{(aa + bb)(1 + n\cos r)},$$

multiplicetur prior per $d\vartheta\cos^2\varphi$ et posterior per $d\varphi$, ambaeque addantur, prodibit

$$d\vartheta\,dd\vartheta\cos^2\varphi + d\varphi\,dd\varphi - d\varphi\,d\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{2(aa - bb)\,dr^2\cos\varphi\cos(v - \vartheta)(d\varphi\sin\varphi\cos(v - \vartheta) - d\vartheta\cos\varphi\sin(v - \vartheta))}{(aa + bb)(1 + n\cos r)},$$

cujus pars prior est integrabilis; fiet enim

$$\frac{1}{2}d\varphi^2 + \frac{1}{2}d\vartheta^2\cos^2\varphi = \frac{2\,(aa - bb)\,du^2}{aa + bb}\int\frac{\cos\varphi\cos(v - \vartheta)(d\varphi\sin\varphi\cos(v - \vartheta) - d\vartheta\cos\varphi\sin(v - \vartheta))}{(1 + n\cos r)^3}$$

Ponatur $\frac{aa - bb}{aa + bb} = m$, eritque

$$dd\vartheta = 2\,d\vartheta\,d\varphi \text{ tang } \varphi - \frac{m\,du^2\sin 2(v - \vartheta)}{(1 + n\cos r)^3}, \quad \frac{dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} + d\vartheta^2 = \frac{m\,du^2\,(1 + \cos 2(v - \vartheta))}{(1 + n\cos r)^3}.$$

Quo clarius perspiciamus, quemadmodum has aequationes tractari conveniat, assumamus primo axem $CE$ plano eclipticae normaliter insistere; et quia hoc casu angulus $OCE$ est rectus, momentum vis inclinantis evanescit: quare si axis in hoc situ semel quieverit, in eodem perpetuo persistet. Id quod etiam ex aequationibus inventis intelligitur; cum enim sit $\cos\varphi = 0$ et $\text{tang}\,\varphi = \infty$, prior aequatio dat $d\vartheta\,d\varphi = 0$, et altera $dd\varphi = 0$, quibus satisfit si $d\varphi = 0$, seu si axis $CE$ perpetuo ad planum eclipticae maneat perpendicularis.

Ponamus nunc axem in ipsum planum eclipticae incidere; et quia is ab momento vis solis de hoc plano non depellitur, perpetuo erit $\varphi = 0$, atque motus axis ex priori aequatione sola determinabitur, quae hoc casu abit in $dd\vartheta = \frac{-m du^2 \sin 2(v-\vartheta)}{(1+n\cos r)^3}$.

Sit primo orbita circularis, seu $n=0$ et $v=u$, erit $dd\vartheta + m du^2 \sin 2(u-\vartheta) = 0$. Fingatur $d\vartheta = \alpha du \cos 2(u-\vartheta) + P du$, erit

$$dd\vartheta = -2\alpha du^2 \sin 2(u-\vartheta) + 2\alpha du d\vartheta \sin 2(u-\vartheta) + dP du, \quad \text{seu}$$

$$dd\vartheta = -2\alpha du^2 \sin 2(u-\vartheta) + \alpha\alpha du^2 \sin 4(u-\vartheta) + 2\alpha P du^2 \sin 2(u-\vartheta) + dP du = -m du^2 \sin 2(u-\vartheta).$$

Fiat ergo $\alpha = \frac{1}{2}m$, ut sit $\frac{1}{4}mm du \sin 4(u-\vartheta) + m P du \sin 2(u-\vartheta) + dP = 0$. Ponatur $P = \frac{1}{16}mm \cos 4(u-\vartheta) + Q$, ob $du - d\vartheta = du - \frac{1}{2}m du \cos 2(u-\vartheta) - \frac{1}{16}mm du \cos 4(u-\vartheta) - Q du$, erit

$$dP = -\frac{1}{4}mm du \sin 4(u-\vartheta) + \frac{1}{8}m^3 du \sin 4(u-\vartheta)\cos 2(u-\vartheta) + \frac{1}{64}m^4 du \sin 4(u-\vartheta)\cos 4(u-\vartheta)$$
$$+ \frac{1}{4}mm Q du \sin 4(u-\vartheta) + dQ$$
$$= -\frac{1}{4}mm du \sin 4(u-\vartheta) - \frac{1}{16}m^3 du \sin 2(u-\vartheta)\cos 4(u-\vartheta) - m Q du \sin 2(u-\vartheta),$$

unde apparet $Q$ habiturum esse coefficientem $m^3$, ideoque ejus valorem tam fore exiguum, ut rejici queat. Erit ergo vero proxime

$$d\vartheta = \frac{1}{2}m du \cos 2(u-\vartheta) + \frac{1}{16}mm du \cos 4(u-\vartheta),$$

hincque integrando ponatur

$$\vartheta = C + \frac{1}{4}m \sin 2(u-\vartheta) + \frac{1}{64}mm \sin 4(u-\vartheta) + R,$$

eritque
$$d\vartheta = \frac{1}{2}m du \cos 2(u-\vartheta) + \frac{1}{16}mm du \cos 4(u-\vartheta) + dR,$$
$$-\frac{1}{2}m d\vartheta \cos 2(u-\vartheta) - \frac{1}{16}mm d\vartheta \cos 4(u-\vartheta),$$

quo valore substituto habebitur

$$dR = \frac{1}{4}mm du \cos^2 2(u-\vartheta) + \frac{1}{16}m^3 du \cos 2(u-\vartheta)\cos 4(u-\vartheta) + \frac{1}{256}m^4 du \cos^2 4(u-\vartheta),$$

seu
$$dR = \frac{1}{8}mm du + \frac{1}{8}mm du \cos 4(u-\vartheta) + \frac{1}{32}m^3 du \cos 2(u-\vartheta)$$
$$+ \frac{1}{32}m^3 du \cos 6(u-\vartheta) + \frac{1}{512}m^4 du + \frac{1}{512}m^4 du \cos 8(u-\vartheta),$$

ergo $R = \frac{1}{8}mmu + \frac{1}{512}m^4 u + \frac{1}{32}mm \sin 4(u-\vartheta)$. Consequenter habebitur

$$\vartheta = C + \frac{1}{4}m \sin 2(u-\vartheta) + \frac{3}{64}m^2 \sin 4(u-\vartheta) + \frac{1}{8}m^2 u.$$

Potest autem hoc casu aequatio proposita $dd\vartheta + mdu^2 \sin 2(u - \vartheta) = 0$ absolute integrari, si multiplicetur per $2(du - d\vartheta)$, ut sit

$$2du\,dd\vartheta - 2d\vartheta\,dd\vartheta + 2mdu^2(du - d\vartheta)\sin 2(u - \vartheta) = 0,$$

erit enim $2dud\vartheta - d\vartheta^2 = Cdu^2 + mdu^2 \cos 2(u - \vartheta)$, vel posito $u - \vartheta = s$, seu $\vartheta = u - s$, habebitur $du^2 - ds^2 = Cdu^2 + mdu^2 \cos 2s$, seu $ds^2 = du^2(\alpha - m\cos 2s)$, hincque $du = \frac{ds}{\sqrt{(\alpha - m\cos 2s)}}$, ubi $\alpha$ est constans a motu axis ipsi primum impresso pendens. Quoniam igitur assumimus, si momentum vis solis, seu littera $m$ evanescat, axem esse quieturum, posito $m = 0$, erit $ds = du$, ideoque $\alpha = 1$, ita ut sit $du = \frac{ds}{\sqrt{(1 - m\cos 2s)}}$, ex qua aequatione promotionem axis a vi solis oriundam definiri oportet. Cum jam sit $m$ fractio valde parva, erit

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - m\cos 2s)}} = 1 + \frac{1}{2}m\cos 2s + \frac{1.3}{2.4}m^2\cos^2 2s + \frac{1.3.5}{2.4.6}m^3\cos^3 2s + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}m^4\cos^4 2s + \text{etc.}$$

Potestatibus autem $\cos 2s$ ad cosinus angulorum multiplorum reductis, fiet

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(1 - m\cos 2s)}} = &+ 1 \quad + \frac{1}{2}m\cos 2s + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}m^2\cos 4s + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}m^3\cos 6s + \frac{1}{8}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}m^4\cos 8s\\ &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}m^2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}m^3 + \frac{4}{8}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}m^4\\ &+ \frac{3}{8}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}m^4\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Integrando ergo habebitur

$$u = g + \left(1 + \frac{3}{16}m^2 + \frac{105}{1024}m^4\right)s + \frac{1}{4}m\left(1 + \frac{15}{32}m^2\right)\sin 2s + \frac{3}{64}m^2\left(1 + \frac{35}{48}m^2\right)\sin 4s$$
$$+ \frac{5}{384}m^3\sin 6s + \frac{35}{8192}m^4\sin 8s,$$

rejiciantur termini, in quibus $m$ ultra duas obtinet dimensiones, eritque

$$u = g + u - \vartheta + \frac{3}{16}m^2u - \frac{3}{16}m^2\vartheta + \frac{1}{4}m\sin 2(u - \vartheta) + \frac{3}{64}m^2\sin 4(u - \vartheta),$$

seu $$\vartheta = g + \frac{3}{16}m^2u + \frac{1}{4}m\sin 2(u - \vartheta) + \frac{3}{64}m^2\sin 4(u - \vartheta),$$

axis ergo durante quavis solis revolutione modo progredietur, modo regredietur per arcum $= \frac{1}{2}m$; ita ut si $m = \frac{1}{200}$, hoc spatium futurum sit $= \frac{1}{400} = 0^0, 14 = 8' 24''$. Tum vero qualibet revolutione solis, seu singulis annis, axis in ecliptica progredietur per spatium $= \frac{3}{16}m^2 . 360^0$, quod ergo, si $m = \frac{1}{200}$, erit $= \frac{3.360^0}{16.40000} = 6''$.

Aliter autem res se habebit, si axis terrae ad eclipticam fuerit inclinatus; tum enim posita orbita solis circulari, ut sit $n = 0$ et $v = u$, manente $\vartheta = u - s$, hae duo habebuntur aequationes resolvendae

$$dds = 2(ds - du)\,d\varphi \tang \varphi + mdu^2\sin 2s,$$

$$\frac{dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} + (du - ds)^2 = mdu^2(1 + \cos 2s).$$

Multiplicetur aequatio prior per $2qds$ et posterior per $-dq$, ambaeque invicem addantur, erit

$$\left.\begin{array}{l} 2q\,ds\,dds - 4q\,ds\,(ds - du)\,d\varphi \tang\varphi \\ \frac{-dq\,dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - dq\,(du - ds)^2 \end{array}\right\} = 2mq\,du^2 ds \sin 2s - m\,du^2 dq - m\,du^2 dq \cos 2s$$

et partem posteriorem integrando fiet

$$C - mq\,du^2 - mq\,du^2 \cos 2s = \int\left(\begin{array}{l} 2q\,ds\,dds - 4q\,ds\,(ds - du)\,d\varphi \tang\varphi \\ \frac{-dq\,dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - dq\,(du - ds)^2 \end{array}\right).$$

Sit nunc $q = \cos^2\varphi$, erit $dq = -2d\varphi \sin\varphi\cos\varphi$, ideoque

$$C du^2 - m du^2 \cos^2\varphi\,(1 + \cos 2s) = \int\left(\begin{array}{l} 2ds\,dds \cos^2\varphi - 4ds\,(ds - du)\,d\varphi \sin\varphi\cos\varphi \\ + 2d\varphi\,dd\varphi + 2(du - ds)^2\,d\varphi \sin\varphi\cos\varphi \end{array}\right)$$
$$= \int(2d\varphi\,dd\varphi + 2ds\,dds \cos^2\varphi - 2ds^2 d\varphi \sin\varphi\cos\varphi + 2du^2 d\varphi \sin\varphi\cos\varphi)$$
$$= d\varphi^2 + ds^2 \cos^2\varphi - du^2 \cos^2\varphi.$$

Quocirca erit $\quad C du^2 = d\varphi^2 + (ds^2 - du^2)\cos^2\varphi + m du^2 \cos^2\varphi\,(1 + \cos 2s).$

Si jam sumamus casu, quo $m = 0$, axem quiescere, ut sit $ds = du$ et $d\varphi = 0$, fiet $C = 0$ et $\frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} = du^2 - ds^2 - m du^2\,(1 + \cos 2s)$, hincque

$$du = \sqrt{\frac{ds^2 + \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi}}{1 - m\,(1 + \cos 2s)}}.$$

Verum constantem $C$ potius convenit definiri ex statu quopiam axis initiali. Si igitur assumamus principia, ubi axis primum a vi solis comitari coepit, fuisse angulum $s = u - \vartheta = \varepsilon$, et inclinationem $\varphi = \gamma$; in hoc statu motum axis nullum statui oportet, seu erit $d\vartheta = 0$ et $d\varphi = 0$, ideoque $ds = du$, quibus substitutis fiet $C du^2 = m du^2 \cos^2\gamma\,(1 + \cos 2\varepsilon)$, unde hanc obtinemus aequationem

$$m du^2 \cos^2\gamma\,(1 + \cos 2\varepsilon) = d\varphi^2 + ds^2 \cos^2\varphi - du^2 \cos^2\varphi + m du^2 \cos^2\varphi\,(1 + \cos 2s),$$

ex qua oritur

$$du^2 = \frac{d\varphi^2 + ds^2 \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + m\cos^2\gamma\,(1 + \cos 2\varepsilon) - m\cos^2\varphi\,(1 + \cos 2s)}.$$

Quoniam inclinatio $\varphi$ minime a primitiva $\gamma$ discrepat, ponatur $\varphi = \gamma + \omega$, erit $\omega$ quantitas minima, et $d\omega$ prae $ds$ pro evanescente haberi potest. Fiet ergo $d\varphi = d\omega$ et $\cos\varphi = \cos\gamma - \omega\sin\gamma$, atque $\cos^2\varphi = \cos^2\gamma - \omega\sin 2\gamma$, quo valore substituto erit

$$du^2 = \frac{d\omega^2 + ds^2\cos^2\gamma - \omega\,ds^2 \sin 2\gamma}{\cos^2\gamma - \omega\sin 2\gamma + m\cos 2\varepsilon + m\omega\sin 2\gamma - m\cos^2\gamma\cos 2s + m\omega\sin 2\gamma\cos 2s},$$

seu $$du^2 = \frac{ds^2}{1 - m\cos 2s + \frac{m\cos 2\varepsilon + m\omega\sin 2\gamma}{\cos^2\gamma - \omega\sin 2\gamma}} + \frac{d\omega^2}{\cos^2\gamma + m\cos 2\varepsilon - \omega\sin 2\gamma - m\cos^2\gamma\cos 2s},$$

vel approximando sit $\frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2\gamma} = \alpha$, erit

$$du^2 = \frac{ds^2}{1 + m\alpha - m\cos 2s + 2m(1+\alpha)\omega \operatorname{tang}\gamma} + \frac{d\omega^2}{\cos^2\gamma + m\cos 2\varepsilon - \omega\sin 2\gamma - m\cos^2\gamma\cos 2s},$$

seu $$du^2 = \frac{ds^2}{1+m\alpha} + \frac{m\,ds^2\cos 2s}{(1+m\alpha)^2} + \frac{mm\,ds^2\cos^2 2s}{(1+m\alpha)^3} - \frac{2m(1+\alpha)\,\omega\,ds^2\operatorname{tang}\gamma}{(1+m\alpha)^2} + \frac{d\omega^2}{\cos^2\gamma + m\cos 2\varepsilon}.$$

Ponatur $\omega = A\cos 2\varepsilon - A\cos 2s$, quo posito $s = \varepsilon$ fiat $\varphi = \gamma$, erit $d\omega = 2A\,ds\sin 2s$ et $dd\omega = 2A\,dds\sin 2s + 4A\,ds^2\cos 2s$. At ob $dd\varphi = dd\omega$ et $\sin\varphi = \sin\gamma + \omega\cos\gamma$, erit

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sin\gamma\cos\gamma + \omega\cos 2\gamma,$$

$$\text{et}\quad \frac{dd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{dd\omega}{\sin\gamma\cos\gamma} - \frac{\omega\,dd\omega\cos 2\gamma}{\sin^2\gamma\cos^2\gamma} = -(du-ds)^2 + m\,du^2(1+\cos 2s).$$

Ergo habebitur

$$-(du-ds)^2\sin\gamma\cos\gamma + m\,du^2\sin\gamma\cos\gamma\,(1+\cos 2s) = 2A\,dds\sin 2s + 4A\,ds^2\cos 2s.$$

At prior aequatio dat

$$dds = 4A\,(ds-du)\,ds\sin 2s\left(\operatorname{tang}\gamma + \frac{\omega}{\cos^2\gamma}\right) + m\,du^2\sin 2s,$$

quo valore ibi substituto fiet

$$-(du-ds)^2\sin\gamma\cos\gamma + m\,du^2\sin\gamma\cos\gamma\,(1+\cos 2s) = 8AA(ds-du)\,ds\sin^2 2s\left(\operatorname{tang}\gamma + \frac{\omega}{\cos^2\gamma}\right)$$
$$+ 2Am\,du^2\sin^2 2s + 4A\,ds^2\cos 2s.$$

At ex superiori aequatione est

$$du^2 = \frac{ds^2}{1+m\alpha} + \frac{m^2 ds^2}{2(1+m\alpha)^3} + \frac{m\,ds^2\cos 2s}{(1+m\alpha)^2} - \frac{2\alpha m(1+\alpha)A\,ds^2\sin\gamma\cos\gamma}{(1+m\alpha)^2}$$
$$+ \frac{2m(1+\alpha)A\,ds^2\operatorname{tang}\gamma\cos 2s}{(1+m\alpha)^2} + \frac{2AA\,ds^2}{(1+m\alpha)\cos^2\gamma} - \frac{2AA\,ds^2\cos 4s}{(1+m\alpha)\cos^2\gamma} + \frac{mm\,ds^2\cos 4s}{2(1+m\alpha)^3}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .



# ASTRONOMIA.

# XIII.

## Nouvelles Tables astronomiques pour calculer la place du soleil.

(Exhib. 1744 Apr. 9.)

---

§ 1. Parmi les Tables astronomiques qui servent à calculer les places des corps célestes, ce sont celles du soleil qui passent pour les plus exactes; tant parce que les observations sont les plus communes, et demandent moins d'appareil que celles des autres astres, que principalement à cause de la régularité du mouvement du soleil qui est moins assujetti à des inégalités que les planètes. Aussi ne peut-on ni observer exactement les lieux des planètes, ni les calculer par des tables astronomiques, sans savoir la place du soleil. De sorte que si les tables solaires sont peu exactes, celles des planètes ne sauraient jamais être d'accord avec le ciel, quand même elles seraient les plus parfaites. La perfection de la théorie du soleil doit donc être le principal objet des astronomes, et avant qu'on n'y soit parvenu, on ne saurait espérer une connaissance exacte du mouvement des planètes.

§ 2. Les astronomes ayant de tous temps reconnu cette nécessité et travaillé à la perfection des tables du soleil, on s'étonnera d'abord que j'entreprends ici une chose qui paraît être achevée depuis longtemps. Mais on n'a qu'à regarder et à comparer ensemble les diverses tables astronomiques dont on se sert aujourd'hui, pour s'assurer du degré d'imperfection qui y règne encore: leur dissension assez considérable donnera suffisamment à connaître qu'on est encore bien éloigné du plus haut degré de perfection qu'on doit souhaiter, quoiqu'on ne puisse pas nier, qu'il ne s'en trouve parmi elles quelques unes qui soient de beaucoup meilleures que les autres, et qui demandent fort peu de changements pour les rendre parfaites.

§ 3. Pour faire voir cette différence qui se trouve entre les tables astronomiques par rapport au soleil, je commencerai par celles de Keppler, nommées rudolfines, parce que celles-ci sont les premières qui aient été construites sur la véritable théorie du mouvement elliptique dont l'illustre Keppler est l'auteur. Les fondements, sur lesquels les tables du soleil sont bâties, se réduisent

aux sept points suivants: le premier est la précession des équinoxes; le second, la durée d'une année, ou le mouvement moyen pendant un temps donné; le troisième, la longitude moyenne du soleil à une époque donnée, p. ex. le dernier décembre 1700 vieux style, à midi, sous le méridien de Londres; le quatrième, le lieu de l'apogée du soleil au même temps; le cinquième, le mouvement de l'apogée pendant un temps donné; le sixième, l'excentricité de l'orbite du soleil, ou la plus grande équation; le septième enfin, l'obliquité de l'écliptique.

§ 4. De la table ci-jointe*), on verra d'un coup d'oeil la dissension des plus grands astronomes sur chacun des sept points mentionnés. La précession des équinoxes est supposée la plus petite par Street qui n'a fait reculer l'équinoxe par an que de 48″. M. Cassini la croit plus grande que les autres, savoir de 51″ 25‴ 48$^{IV}$ par an. Keppler met 51″ et les Anglais après Street précisément 50″. Cette différence fort petite et presque imperceptible dans un petit nombre d'années, devient pourtant très considérable pendant un long temps. La première étoile du Belier, dont la longitude au commencement de ce siècle était 29° 0′ 10″, doit avoir eu, du temps d'Hipparque, c'est à dire 150 ans avant J.-C. des longitudes bien différentes, à savoir: selon Street 4° 20′ 10″, selon Flamsteed 3° 18′ 30″, selon de la Hire 2° 55′ 23″, selon les tables rudolfines 2° 47′ 40″ et selon Cassini 2° 22′ 24″. Il y a lieu de s'étonner qu'une différence de 2° ne puisse être décidée par les observations que les anciens astronomes nous ont laissées, d'autant plus que chacun des astronomes nommés se flatte d'avoir Hipparque et Ptolémée de son côté. Il est pourtant incontestable que la précession marquée par Street est trop petite, et il semble que la théorie des réfractions qui lui manquait, y ait beaucoup de part. La dissension des autres ne monte pas à un degré entier, et les observations de temps si reculés sont trop grossières pour décider cette question. Cependant il me semble, que ceux qui donnent à la précession des équinoxes plus de 50″ par an, la supposent trop grande, car, quoique les observations d'Hipparque, rapportées par Ptolémée, confirment leur sentiment, pourtant toutes les autres observations anciennes donnent à peine 50″ par an; et il est assez vraisemblable que Flamsteed a deviné la véritable source de cette diversité.

§ 5. Le second article est d'une bien plus grande importance, car c'est de là que dépend la durée d'une année tropique moyenne, si intéressante dans la chronologie et dans la vie commune. Pour faire voir plus clairement les différents sentiments des auteurs à cet égard, j'ai ajouté dans la table les différentes quantités d'un an qui découlent des mouvements moyens. Par là on voit d'abord que les tables de Street nous donnent l'année la plus longue, et celles de La Hire la plus courte, la différence étant de 10″ 48‴ qui, pendant mille ans monte à trois heures, et en 8000 ans à un jour entier. Mais comme les autres tables sont plus récentes et fondées sur des observations plus exactes, il faut croire que Street aura fait l'année trop longue, et de La Hire trop courte. Flamsteed est d'accord avec Keppler, et nous sommes obligés de croire que Cassini, Brent et Leadbetter ne l'auraient pas fait plus courte qu'eux, s'ils n'avaient pas trouvé de plus fortes

*) Elle manque.

raisons. Brent tient justement le milieu entre Cassini et Leadbetter, et peut-être que par cela même il approche le plus de la vérité.

§ 6. Comme le système de l'almanach grégorien et protestant est fondé sur la durée d'une année que l'on a supposée de $365^j\, 5^h\, 49'\, 12''$, et par conséquent trop grande, voyons comment on devrait arranger les années bissextiles pour demeurer d'accord avec le soleil, si l'année de Brent était la véritable; pour cet effet, changeons les $5^h\, 48'\, 54''\, 43'''$ en tierces, et nous aurons $1256083'''$; mais un jour, ou 24 heures, donnent $5184000'''$. De là formons la fraction $\frac{5184000}{1256083}$ dont le dénominateur montre combien d'années bissextiles il faut mettre pendant 5184000 ans. Mais comme ces nombres sont trop grands pour en tirer quelque usage, cherchons des fractions exprimées en plus petits nombres, dont la valeur approche pourtant de la proposée autant qu'il est possible. J'ai donné pour cette sorte de réductions, une méthode très aisée dans un tome des Commentaires de St.-Pétersbourg *) qui n'est pas encore imprimé. D'après cette méthode, il faut premièrement faire la même opération que si nous voulions chercher le plus grand commun diviseur des deux nombres qui composent la fraction: de cette sorte

| | | |
|---|---|---|
| 1256083 | 5184000<br>5024332 | 4 |
| 159668 | 1256083<br>1117676 | 7 |
| 138407 | 159668<br>138407 | 1 |
| 21261 | 138407<br>127566 | 6 |
| 10841 | 21261<br>10841 | 1 |
| 10420 | 10841<br>10420 | 1 |
| 421 | 10420<br>842<br>2000<br>1684 | 24 |
| 316 | 421<br>316 | 1 |
| 105 | 316<br>315 | 3 |
| | 1 | |

De toutes ces opérations je ne prends que les quotiens, et les ayant rangés de suite, j'en forme les fractions suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 7, & 1, & 6, & 1, & 1, & 24, \\ \frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{29}{7}, & \frac{33}{8}, & \frac{227}{55}, & \frac{260}{63}, & \frac{487}{118}. \end{array}$$

Ces fractions sont formées ainsi qu'il suit: je multiplie chaque numérateur par le nombre superposé; le produit, plus le numérateur précédent, donne le numérateur suivant; et de la même façon on trouve les dénominateurs. Toutes ces fractions approchent si fort de la proposée qu'il est impos-

*) Comment. IX. p. 98.

sible d'en trouver aucune qui, exprimée en plus petits nombres, en soit plus approchante. Ensuite, il faut remarquer que ces fractions approchent d'autant plus, qu'elles sont plus éloignées du commencement. Ainsi, la seconde marque qu'il faut toujours en 4 ans faire une année bissextile, ce qui donne le calendrier julien. La dernière fraction qui est très exacte, montre qu'il faudrait, pendant l'espace de 487 ans, établir 118 années bissextiles. Mais parce qu'on est accoutumé de se conformer aux nombres quaternaires et qui soient divisibles par 100, mettons à la place du dernier exposant 20, et la fraction suivante, encore plus approchante de la vérité sera $\frac{10000}{2423}$, qui marque que, dans l'espace de 100 siècles, on ne doit établir que 2423 années bissextiles, et partant qu'on doit, dans l'almanach julien, changer 77 ans bissextiles en communs, au lieu que l'almanach grégorien n'en change que 75 ans.

§ 7. Ce en quoi les tables diffèrent sur le troisième article, est peu considérable, et cela vient de la différence qui se trouve dans le lieu de l'apogée, de sorte que, si les tables étaient d'accord sur la place de l'apogée, elle ne manqueraient point de l'être aussi sur la longitude moyenne à une époque donnée, comme de 1700. Mais les sentiments sont bien différents sur le lieu de l'apogée, et il se trouve presque un degré entier de différence entre les tables de Street et celles de La Hire; les autres ne diffèrent à peine que d'un demi-degré entre elles. Cette différence sur un point de l'écliptique qu'on ne voit point, et qu'on ne trouve que par un long calcul des observations, est peu considérable. Car une petite faute tant dans le calcul, que dans les observations produit une grande différence dans la détermination de l'apogée, et on ne saurait être sûr par rapport à cet article, à moins qu'on n'aît des observations beaucoup plus exactes que celles qu'on a pu faire jusqu'ici. Aussi, une petite faute dans le lieu de l'apogée n'importe guère dans la détermination de la place du soleil, pourvu que l'équation du centre ne s'écarte pas trop de la vérité.

§ 8. Le mouvement de l'apogée est la chose la plus incertaine dans l'astronomie, et il y a plus de sujet de s'étonner que les astronomes aient osé décider là-dessus, qu'il n'y en a d'être surpris de leurs dissensions. Nous avons déjà vu que, malgré la dernière exactitude avec laquelle on fait à présent les observations, on peut pourtant se tromper d'un demi-degré dans la place de l'apogée, d'où il sera aisé de conclure à quelle précision on se peut assurer du lieu de l'apogée par les observations anciennes. Mais pour s'apercevoir du mouvement de l'apogée, il faut comparer ensemble deux places que l'apogée a tenues à des temps distants de plusieurs siècles. Or je crois que je n'avance rien de trop, quand je dis qu'on ne peut pas conclure, des observations faites avant dix siècles, la place de l'apogée à trois degrés près, et partant on ne peut pas savoir son mouvement pendant 100 ans à 18′ ou 20′ près. C'est pourquoi, bien qu'on sache que l'apogée s'éloigne de plus en plus de l'équinoxe, on n'a pourtant aucune raison de soutenir qu'il avance pendant un siècle de 1° 45′ plutôt que de 1° 25′. Les observations ne décidant donc rien sur cet article, il conviendra de s'en tenir à la théorie qui ne nous découvre aucune cause capable de faire changer l'apogée par rapport aux étoiles fixes: il sera le plus raisonnable de ne donner à l'apogée d'autre mouvement que celui des étoiles fixes, comme Street et Flamsteed ont soutenu. Par conséquent, ayant vu que la précession des équinoxes ne peut être supposée plus grande que de 1° 23′ 20″ pendant un siècle, je donnerai le même mouvement à l'apogée, qui tenant le milieu entre le mou-

vement le plus vite de Leadbetter et le plus lent de Wurzelbaur, ne peut pas différer sensiblement de la vérité.

§ 9. L'équation du centre du soleil, qui dépend de l'excentricité de l'orbite de la terre, est infailliblement trop grande dans les tables rudolphines, comme Flamsteed et d'autres ont fait voir très clairement. Les plus nouvelles tables ne diffèrent pas beaucoup entre elles sur cet article, à l'exception de celles de Louville qui la donnent sans contredit trop petite, et le sentiment de Wurzelbaur, qui soutient que la plus grande équation croît tous les siècles d'une minute, est aussi dénué de fondement qu'il est contraire aux observations. Car, à en croire les Anciens, nous devrions plutôt soutenir que l'équation va en diminuant. Or, pour déterminer la plus grande équation, non seulement on a besoin d'observations bien plus exactes que celles que l'antiquité nous pourrait fournir, mais il faut aussi avoir égard à une certaine circonstance, à laquelle personne n'a encore fait attention, et que j'expliquerai plus amplement dans la suite. L'omission de cette circonstance fait qu'on ne peut pas être sûr à une demi-minute près, quand même les observations seraient les plus exactes.

§ 10. Quant à l'obliquité de l'écliptique, il n'y a presque aucun doute qu'elle ne soit de 23° 29′ 0″. Kepler et Street l'ont supposée de 23° 30′, mais n'ayant point assez connu les réfractions, on ne pouvait pas attendre d'eux une plus grande précision. M. Cassini la fait encore plus petite de 18″, se fondant sur son hypothèse que l'obliquité diminue chaque siècle d'une minute, ce qui ne me paraît pas encore assez démontré; car quoique les Anciens l'aient cru bien plus grande, il ne faut pas tant regarder aux conclusions qu'ils ont tirées de leurs observations, qu'aux observations mêmes. Et Flamsteed a fait voir très évidemment que l'obliquité de l'écliptique ne résulte pas plus grande des observations de Tycho Brahe que de ses propres observations, et il démontre le même accord par des observations plus anciennes, de sorte qu'on peut être assuré que, depuis plus de trois siècles, l'obliquité de l'écliptique a toujours été la même, de 23° 29′ et peut-être encore de quelque peu de secondes. Savoir, si elle n'a pas été plus grande du temps de Ptolémée, ou à une époque plus reculée encore, c'est une question très difficile à décider, les observations de ces temps-là n'ayant pas à beaucoup près l'exactitude qu'une telle discussion demande, et parce que les Anciens ne savaient rien des réfractions qu'il faut retrancher des hauteurs observées. Non seulement leurs hauteurs du soleil étaient trop grandes, d'où s'ensuivait une fausse obliquité de l'écliptique, mais ils augmentaient encore de trop leurs hauteurs, à cause de la parallaxe qu'ils croyaient presque vingt fois plus grande qu'elle n'est en effet. Toutes ces réflexions nous confirment que nous ne devons point hésiter de supposer constamment l'obliquité de l'écliptique de 23° 29′ 0″.

§ 11. Toutes ces dissensions ne viennent que de l'inexactitude des observations sur lesquelles chacun des astronomes a fondé ses tables, et on peut presque soutenir, que ces astronomes-là seuls ont fourni les meilleures tables, qui ont été en état de faire les plus exactes observations. Car tous, ils reconnaissent la même théorie du mouvement des planètes que Kepler a découverte et que Newton a mise dans tout son jour. Ils se servent cependant de méthodes différentes pour déterminer la place de l'apogée et l'excentricité de l'orbite de la terre, mais cela vient de la grande

difficulté de résoudre ce problème, et les méthodes différentes ne sont que des approximations plus ou moins heureuses, ce qui est la cause de la diversité des conclusions, déduites des observations. Pour résoudre ce même problème, je n'emploierai aucune approximation, ayant trouvé une méthode, par le moyen de laquelle on peut, avec toute la rigueur géométrique, déterminer la position et l'espèce de l'ellipse dans laquelle la terre ou une autre planète se meut autour du soleil, et pour cela je n'ai besoin que de trois observations. J'ai expliqué cette méthode tout au long dans le VII tome des Commentaires de l'Académie de St.-Pétersbourg, d'où je ne traduirai ici que le précis de la règle, après que j'aurai fait une remarque qui sera d'une importance d'autant plus grande, qu'on approchera de la parfaite connaissance du mouvement et de l'orbite de la terre.

§ 12. L'hypothèse de la gravitation universelle satisfait si exactement à tous les mouvements célestes, et principalement à celui de la lune, qu'on ne peut plus douter que la terre ne soit aussi bien attirée vers la lune que la lune l'est vers la terre. De cette réaction, l'effet de la pesanteur vers le soleil sera un peu altéré, et comme on peut à peu près regarder la terre et la lune conjointement comme un seul corps par rapport au soleil, ce ne sera plus le centre de la terre qui décrit autour du soleil une ellipse, mais ce sera à peu près le centre de gravité commun de la terre et de la lune. Par conséquent, les tables astronomiques, qui sont construites sur la nature du mouvement dans une ellipse, ne sauraient pas marquer le mouvement du centre de la terre, mais plutôt celui du centre de gravité commun de la terre et de la lune; et les tables solaires seront d'autant plus parfaites qu'elles seront plus d'accord avec le vrai mouvement du centre de gravité commun de la terre et de la lune.

§ 13. Pour déterminer ce centre de gravité, il faut savoir le rapport qui existe entre la masse de la terre et celle de la lune. Par les observations astronomiques on a bien trouvé que le diamètre de la terre surpasse celui de la lune de plus de trois fois et demie, mais ne sachant point si la matière qui compose la lune est de la même densité que celle de la terre, on n'en saurait rien conclure. Newton s'est servi des phénomènes du flux et du reflux de la mer pour décider cette question, et il a fait voir que la quantité de la matière de la terre est à celle de la lune comme 39 est à 1. (Fig. 197). Soit donc $T$ le centre de la terre, $L$ celui de la lune, et le centre de gravité commun se trouvera dans la droite $TL$. Supposons qu'il soit en $G$, et les règles de statique nous donneront cette proportion: comme $TG$ est à $LG$, ainsi la masse de la lune est à la masse de la terre, ou bien $TG:LG = 1:39$ et partant $TG:TL = 1:40$. Mais la distance moyenne de la lune à la terre contient 60 demi-diamètres de la terre; donc posant le demi-diamètre de la terre $TA = 1$, nous aurons $TL = 60$, et partant $TG = 1\frac{1}{2}$, ou l'intervalle qui se trouve entre le centre de la terre $T$ et le centre de gravité $G$ sera égal aux trois quarts du diamètre de la terre.

§ 14. (Fig. 198). Ce sera donc ce centre de gravité $G$, et non le centre de la terre $T$, qui décrit autour du soleil une ellipse selon les règles découvertes par Kepler et démontrées par Newton. C'est pourquoi, pour connaître la différence entre ces deux points, il faut avoir égard aux différentes phases de la lune. Commençons par la nouvelle lune, et il est clair qu'alors le centre de la terre $T$ est plus éloigné du soleil que le centre de gravité G, de l'intervalle $GT = 1\frac{1}{2}$

demi-diamètres de la terre. Mais le lieu du soleil sera le même, soit que le spectateur se trouve en $T$ ou en $G$. Et partant, aux nouvelles lunes, les tables solaires, qui montrent le mouvement du centre de gravité $G$, nous donneront le vrai lieu du soleil; mais la distance au soleil $GS$ sera marquée trop petite de l'espace $GT = 1\frac{1}{2}$. Pour avoir donc la distance véritable du centre de la terre au soleil, il faut ajouter à la distance trouvée dans les tables l'intervalle $GT = 1\frac{1}{2}$. On suppose communément dans les tables la distance moyenne de 100000 parties, et prenant 10 secondes pour la parallaxe horizontale du soleil, ces 100000 parties égaleront 20626 demi-diamètres de la terre. Disons donc: comme 20626 sont à 100000, ainsi $1\frac{1}{2}$ sera à la partie $GT$ qu'il faut ajouter à la distance $SG$ exprimée par 100000, et l'on trouvera $GT = 7{,}2722$ de ces parties dont la distance moyenne contient 100000. Et quoique la distance $GS$ soit quelquefois plus grande ou plus petite que 100000, cependant la différence est si minime, qu'on peut toujours se servir de cette quantité $GT = 7{,}2722$. Et comme les logarithmes des grands nombres qui diffèrent si peu entre eux, ont leurs différences proportionnelles à celles des nombres mêmes, il faudra ajouter au logarithme de la distance $SG$, trouvé dans les tables et exprimé en six figures décimales, le nombre 31, pour avoir le logarithme de la distance $TS$.

§ 15. (Fig. 199). Le contraire arrive aux pleines lunes, car alors le centre de la terre $T$ est plus proche du soleil que le centre de gravité $G$, et partant, dans ce cas, il faut diminuer la distance $SG$ donnée par les tables, de l'intervalle $GT = 7{,}2722$, ou, ce qui revient au même, il faut soustraire du logarithme de la distance $SG$ trouvé dans les tables, le nombre 31, supposé que ces logarithmes soient exprimés en six figures décimales; de sorte que le logarithme de la distance moyenne soit 5,000000. A l'égard de la place du soleil dans l'écliptique, elle sera la même, soit qu'on suppose l'observateur en $T$ ou en $G$, de sorte que dans les pleines lunes aussi bien que dans les nouvelles lnnes, le lieu du soleil n'aura besoin d'aucune correction.

§ 16. (Fig. 200). Dans toutes les autres phases de la lune le lieu du soleil sera différent, vu du centre de la terre $T$ et du centre de gravité $G$, et alors le lieu du soleil trouvé dans les tables doit être corrigé. Supposons que la lune se trouve au premier quartier $L$, ou qu'ôtant le lieu du soleil de celui de la lune, le reste soit 3 signes ou $90^0$, et l'on verra que le centre de la terre $T$ sera plus avancé dans l'écliptique $Gg$ que le centre de gravité $G$, et partant il faudra ajouter quelque chose à la longitude du soleil trouvée dans les tables, et parce que le demi-diametre de la terre soutend dans son orbite un arc de $10''$, l'intervalle $GT$ comportera $15''$, et par conséquent il faudra ajouter $15''$ à la place du soleil trouvée dans les tables, pour avoir le vrai lieu du soleil vu du centre de la terre. De là il est clair aussi qu'au dernier quartier, (Fig. 201) il faut ôter $15''$ du lieu du soleil trouvé; et dans ces deux cas, la distance du soleil à la terre n'aura besoin d'aucune correction, parce que les deux centres $G$ et $T$ sont également éloignés du soleil.

§ 17. (Fig. 202). Voyons maintenant, quelles corrections il faudra employer en toute autre place de la lune. Soit la lune en $L$, éloignée du soleil de l'angle $LGS$, et le centre de gravité $G$ étant dans la circonférence de l'ellipse $Gg$; le centre de la terre $T$ sera hors de l'ellipse. Il sera donc plus éloigné du soleil que le point $G$, et partant, à la distance $SG$ que marquent les tables, il faudra ajouter l'intervalle $Tg$ qui sera à $TG$ comme le cosinus de l'angle $LGS$ est au sinus total;

c'est pourquoi on doit ajouter au logarithme de la distance trouvée dans les tables, la quantité $\frac{\cos LGS}{\sin \text{tot.}}\cdot 31$. Ensuite, la longitude de la terre *TS* sera aussi plus grande que celle du centre de gravité *GS*, la différence étant $= GSg$, ou à l'arc *Gg* qui, s'il était égal à l'intervalle *TG*, serait de $15''$, et par conséquent, la correction qu'on doit ajouter, dans ce cas, au lieu du soleil trouvé dans les tables est $=\frac{\sin LGS}{\sin \text{tot.}}\cdot 15''$. De là nous obtiendrons deux tables pour corriger la place du soleil trouvée dans les tables solaires, dont l'une servira à corriger le lieu du soleil, et l'autre à corriger le logarithme de la distance de la terre au soleil.

§ 18. Pour se servir donc de ces tables, il faut savoir pour chaque temps proposé le lieu de la lune, ce qui demanderait bien du calcul, si on le voulait avoir exactement. Mais comme ces corrections sont fort petites, et qu'il suffit de savoir la place de la lune à 5 degrés près, on pourra se contenter de la longitude moyenne, l'erreur qui en peut résulter ne montant qu'à une seconde. A plus forte raison suffira-t-il aussi d'employer la longitude moyenne du soleil et de la soustraire de la longitude moyenne de la lune pour se servir de cette différence*) dans les tables I et II. Pour cet effet, je joindrai à la table des mouvements moyens du soleil une table de la distance moyenne entre la lune et le soleil, pour m'en servir d'abord**) dans ces tables. Au reste, ces corrections sont si petites, que dans le calcul ordinaire, on pourrait bien s'en passer, parce qu'on ne regarde presque pas à une faute de $15''$, tant dans les observations que dans le calcul. Mais, outre que par là les erreurs des tables ordinaires s'augmentent et peuvent devenir sensibles, on doit convenir que, plus on arrive à une grande exactitude, et moins on pourra négliger ces corrections. Et comme tous les Astronomes aspirent à de parfaites tables solaires, ils ne pourront être satisfaits que par le moyen de ces corrections. Ce sera donc sur ce fondement que j'établirai les tables suivantes que je vais proposer, et quoiqu'elles ne puissent guère être de la dernière exactitude par la faute des observations qui me serviront de base, pourtant elles pourront servir de modèle, et il sera aisé d'y mettre la dernière main, quand on sera en état de faire des observations sans faute.

§ 19. Cette réflexion sur le mouvement du centre de gravité de la terre et de la lune nous conduit à une autre irrégularité dans le mouvement de la terre, dont personne ne s'est encore aperçu et qui paraîtra extrêmement paradoxe. Elle consiste en ce que le centre de la terre ne demeure pas toujours dans le plan de l'écliptique, de sorte que selon la dernière précision, on devrait aussi accorder quelque latitude au soleil. Car, comme c'est le centre de gravité commun de la terre et de la lune, qui se meut dans le plan de l'écliptique autour du soleil, le centre de la terre ne sera dans le même plan que quand la lune sera sans aucune latitude. Mais la plus grande latitude de la lune étant de $5^0$, la lune pourra s'écarter du plan de l'écliptique de 5 demi-diamètres de la terre, et par conséquent, le centre de la terre s'en écartera 40 fois moins, ce qui équivaudra à une huitième partie de son rayon, et ne produira dans la terre qu'une latitude de $1''\,15'''$. Donc parce que la terre pourrait être vue du soleil avec une latitude de $1''\,15'''$, le soleil aura réciproquement la même latitude. Mais il n'y a pas à espérer qu'on puisse jamais s'apercevoir de cette petite irrégularité.

*) Rédaction primitive d'Euler: *pour entrer avec la difference etc.*

**) Rédaction primitive: *pour entrer avec elle d'abord etc.*

§ 20. Ayant fait ces remarques, je retourne à mon dessein par rapport aux tables solaires qui seront parfaites, si elles nous donnent le vrai lieu du centre du soleil tel qu'il doit paraître du centre de gravité commun de la terre et de la lune, avec la vraie distance de ce centre de gravité au soleil. Si nous avions déjà de telles tables, alors il n'y faudrait ajouter que les deux tables de corrections que je viens de donner, pour trouver le vrai lieu du soleil vu du centre de la terre, comme les Astronomes le demandent. Pour parvenir à ce but, il faut, avant toutes choses, chercher des observations du soleil qui soient les plus exactes possible. Or, parce qu'on conclut la longitude du soleil de sa déclinaison qu'on trouve par la hauteur méridienne, il est clair que, plus les observations seront faites à proximité des équinoxes, plus on sera sûr de la longitude. Mais on pourra se tromper considérablement dans ces observations, si elles sont faites vers les solstices, parce qu'alors une petite erreur dans la déclinaison, en cause une très considérable dans la longitude. Les observations faites aux mois de mars, avril, août et septembre seront donc les plus propres à mon dessein; car aux mois de février et d'octobre, le soleil est encore trop bas à midi, pour ne pas se tromper dans la réfraction.

§ 21. Les bonnes observations sont extrêmement rares, et on en trouve à peine sur lesquelles on puisse se fier, surtout quand il s'agit de corriger les tables; car on doit premièrement observer la hauteur méridienne du soleil à quelques secondes près, ce qui est déjà une chose extrêmement délicate. Ensuite, ayant trouvé la hauteur, il faut y ajouter la parallaxe et en retrancher la réfraction, sur la valeur de laquelle les Astronomes ne sont pas encore tout-à-fait d'accord: les Anglais diffèrent des Français d'environ 15″ pour les hauteurs de 30° à 40°. De la hauteur méridienne, ainsi corrigée par rapport à la parallaxe et à la réfraction, il faut soustraire la hauteur de l'équateur, ou le complément de l'élévation du pôle, pour avoir la déclinaison du soleil; mais il y a peu d'endroits, où l'on soit sûr de l'élévation du pôle à une minute près. Enfin, il faut savoir l'obliquité de l'écliptique pour déterminer la longitude du soleil par sa déclinaison. De là il est clair, que si l'on se trompe dans la hauteur observée, dans la réfraction, dans la hauteur du pôle, et enfin dans l'obliquité de l'écliptique, seulement de quelque secondes dans chacun de ces éléments, il doit en résulter une erreur assez considérable dans la longitude du soleil.

§ 22. Ayant bien considéré toutes ces difficultés, il m'a paru presque impossible de trouver des observations assez exactes pour entreprendre la détermination de l'orbite de la terre. Cependant, ayant rencontré quelques observations de cette espèce dans l'Uranoscopie de Leadbetter, observations dont cet auteur assure qu'elles avaient été faites avec un instrument qui égalait un quart-de-cercle de 270 pieds de rayon, j'ai cru que je pourrais avec avantage me servir de ces observations pour mon dessein. Il donne ces observations déjà corrigées tant par rapport à la parallaxe que par rapport à la réfraction. Il suppose l'élévation de l'équateur de 38° 28′ et l'obliquité de l'écliptique de 23° 29′, et il en tire le lieu du soleil; mais dans ce calcul il se trompe, de sorte que je me vois obligé de déterminer les longitudes par le calcul suivant

| | A. 1727 Mars 9 | A. 1726 Avril 29 | A. 1726 Juillet 13 | A. 1726 Sept. 8 |
|---|---|---|---|---|
| Hauteur du soleil | 38° 12′ 56″ | 56° 6′ 16″ | 58° 24′ 34″ | 39° 59′ 55″ |
| Elévation de l'écliptique | 38 28 0 | 38 28 0 | 38 28 0 | 38 28 0 |
| Déclinaison du soleil | 0 15 4 | 17 37 16 | 19 56 34 | 1 31 55 |
| Lieu du soleil | 11ˢ 29° 22′ 12″ | 1ˢ 19° 26′ 11″ | 4ˢ 1° 8′ 6″ | 5ˢ 26° 9′ 12″ |

M. Leadbetter trouve pour le juillet 1′ de moins, et pour le septembre 1′ de plus, ce qui est une faute d'autant plus considérable, qu'il emploie lui-même ces observations pour déterminer le lieu de l'apogée du soleil et l'excentricité de l'orbite.

§ 23. Ces observations étant faites au midi vrai, il faut les réduire au temps moyen par la correction du temps. Les jours se rapportent au vieux style de l'almanach julien qui est le plus convenable aux calculs astronomiques, et ces observations sont faites à Londres. Ayant fait cette correction du temps, nous aurons les observations suivantes:

| | Longit. du ☉, vu du centre de la terre |
|---|---|
| A. 1726 Avril 29, $0^h - 4'$ | 1ˢ 19° 26′ 11″ |
| 1726 Juillet 13, 0 + 6 | 4 1 8 6 |
| 1726 Sept. 8, 0 — 6 | 5 26 9 12 |
| 1727 Mars 9, 0 + 8 | 11 29 22 12 |

Quand même ces observations seraient les plus exactes possible, les tables ne doivent pas les montrer, parce que ce sont les lieux du soleil vus du centre de la terre; mais les tables doivent montrer ceux qu'on verrait du centre de gravité commun de la terre et de la lune. Pour avoir donc les places du soleil que les tables doivent marquer pour ces temps proposés, il faut les réduire au centre de gravité par le moyen de la table I, en se servant des opérations contraires à celles qui y sont ordonnées. Pour cet effet, j'ai calculé le mouvement moyen de la lune de celui du soleil et je l'ai trouvé ainsi qu'il suit:

| Observation | Distance entre la lune et le soleil | Correction |
|---|---|---|
| I | 3ˢ 18° 59′ 29″ | ôtez 14″ |
| II | 10 3 22 55 | ajoutez 12 |
| III | 9 8 9 11 | ajoutez 15 |
| IV | 11 6 59 16 | ajoutez 5 |

Et partant les places du soleil vu du centre de gravité commun de la terre et de la lune seront

| Temps moyen à Londres | Lieux du soleil vu du centre de gravité |
|---|---|
| A. 1726 Avril 29, $0^h - 4'$ | 1ˢ 19° 25′ 57″ |
| 1726 Juillet 13, 0 + 6 | 4 1 8 18 |
| 1726 Sept. 8, 0 − 6 | 5 26 9 27 |
| 1727 Mars 9, 0 + 8 | 11 29 22 17 |

§ 24. Pour déterminer l'orbite du soleil, c'est à dire son excentricité, le lieu de l'apogée et l'anomalie moyenne pour un temps donné, trois observations sont suffisantes, et partant, de ces quatre observations, j'omettrai la seconde faite au mois de juillet. La règle que j'ai donnée pour cet effet dans le tome VII des Commentaires de St.-Pétersbourg, revient à celle-ci: Soit

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | l'anomalie | moyenne | au temps | de la | I | observation |
| $x+m$ | « | « | « | « | II | « |
| $x+n$ | « | « | « | « | III | « |

et puisque les intervalles du temps entre les observations sont donnés, on connaîtra les différences $m$ et $n$ par les tables du mouvement moyen du soleil de l'apogée. Ensuite soit

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | l'anomalie | vraie | au temps | de la | I | observation |
| $z+f$ | « | « | « | « | II | « |
| $z+g$ | « | « | « | « | III | « |

Ici les différences $f$ et $g$ seront déterminées par les différences entre les places du soleil, après en avoir retranché la précession des équinoxes. Enfin soit

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | l'anomalie | excentrique | au temps | de la | I | observation |
| $Q$ | « | « | « | « | II | « |
| $R$ | « | « | « | « | III | « |

et soit $v:1$ comme l'excentricité de l'orbite à la distance moyenne, ou comme la distance des foyers au grand axe.

§ 25. Ayant trouvé les valeurs $m$, $n$, $f$ et $g$, soit $\frac{m-f}{n-g}=\alpha$, et l'on trouvera la valeur de $P$ à peu près

$$\operatorname{tang} P=\frac{\sin\frac{m+f}{2}-\alpha\sin\frac{n+g}{2}}{\sin.\text{v}.\frac{m+f}{2}-\alpha\sin.\text{v}.\frac{n+g}{2}}$$

et ensuite

$$v=\frac{m-f}{4\sin\frac{m+f}{4}\cos\left(P+\frac{m+f}{4}\right)},$$

d'où l'on aura aussi à peu près

$$Q=P+\frac{f+m}{2}\quad\text{et}\quad R=P+\frac{g+n}{2}.$$

Pour trouver les valeurs véritables, soit

$$M=\frac{f+m}{2}-\frac{v^2}{8}\sin 2Q+\frac{v^2}{8}\sin 2P,\qquad N=\frac{g+n}{2}-\frac{v^2}{8}\sin 2R+\frac{v^2}{8}\sin 2P$$

et mettant à présent $\frac{m-M}{n-N}=\alpha$, on aura

$$\operatorname{tang} P=\frac{\sin M-\alpha\sin N}{\sin.\text{v}.M-\alpha\sin.\text{v}.N}$$

et après $Q = P + M$ et $R = P + N$. Outre cela, on aura

$$v = \frac{m - M}{2 \sin \frac{1}{2} M . \cos (P + \frac{1}{2} M)},$$

et enfin

$$x = P + v \sin P, \quad z = P - v \sin P + \frac{v^2}{4} \sin 2P,$$

d'où l'on connaîtra aisément l'orbite et l'inégalité du mouvement du soleil.

§ 26. Appliquons ces opérations aux trois observations tirées du livre de Leadbetter, qui sont:

| | |
|---|---|
| A. 1726 Avril 29, $0^h - 4'$ | $1^s\ 19^0\ 25'\ 57''$ |
| 1726 Sept. 8, 0 — 6 | 5 26 9 27 |
| 1727 Mars 9, 0 + 8 | 11 29 22 17 |

de là nous aurons, par la différence des temps et par la différence des lieux du soleil, en retranchant la précession des équinoxes:

$m = 4^s\ 10^0\ 5'\ 56''$

$n = 10\ \ 9\ 29\ 22$

$f = 4\ \ 6\ 43\ 12$

$g = 10\ \ 9\ 55\ 36$

$m - f = 0\ \ 3\ 22\ 44$

$-(n - g) = 0\ \ 0\ 26\ 14$

$\frac{m-f}{2} = 1\ 41\ 22 = 6082''$

$\frac{n-g}{2} = -13\ \ 7 = -787''$

$\frac{m+f}{2} = 4^s\ 8^0 24'\ 34''$

$\frac{n+g}{2} = 10\ \ 9\ 42\ 29$

$l \frac{m-f}{2} = 3{,}7840464$

$l. - \frac{(n-g)}{2} = 2{,}8959748$

$l. - \alpha = 0{,}8880716$

$\sin \frac{m+f}{2} = \sin 51^0 35' 26''$

$\sin . v . \frac{m+f}{2} = 1 + \cos 51^0 35' 26''$

$\sin \frac{n+g}{2} = -\sin 50\ 17\ 31$

$\sin . v . \frac{n+g}{2} = \sin . v . 50\ 17\ 31$

$l. - \sin \frac{n+g}{2} = 9{,}8861012$

$l. - \alpha = 0{,}8880716$

$l. \alpha \sin \frac{n+g}{2} = 0{,}7741728$

$-\alpha \sin \frac{n+g}{2} = -5{,}945285$

$\sin \frac{m+f}{2} = 0{,}783591$

le numérateur $= -5{,}161694$

$l. \sin v \cdot \frac{n+g}{2} = 9{,}5576563$

$l. \alpha = 0{,}8880716$

$l. - \alpha \sin . v \cdot \frac{n+g}{2} = 0{,}4457279$

$-\alpha \sin . v \cdot \frac{n+g}{2} = 2{,}790796$

$\sin . v \cdot \frac{m+f}{2} = 1{,}621277$

le dénominateur $= 4{,}412073$

donc $\log P = -1{,}169902$

Par conséquent $-P = 49^0 28' 37''$

ou $P = 10^s\ 10\ 31\ 23$

$\frac{f+m}{2} = 4\ \ 8\ 24\ 34$

$Q = 2^s\ 18^\circ 55' 57''$

$\frac{g+n}{2} = 10\ \ 9\ 42\ 29$

$R = 8\ 20\ 13\ 52$

$\frac{m+f}{4} = 64\ 12\ 17$

$P + \frac{m+f}{4} = 14\ 43\ 40$

$l \sin \frac{m+f}{4} = 9{,}9544136$

$l \cos (P + \frac{m+f}{4}) = 9{,}9854914$

$l2 = 0{,}3010300$

10,2409350

Pour réduire ce sinus en sec.

ôtez 4,6855749

5,5553601

$l \frac{m-f}{2} = 3{,}7840464$

on aura $lv = 8{,}2286863$

d'où $lv^2 = 6{,}4573726$

$l8 = 0{,}9030900$

$l \frac{v^2}{8} = 5{,}5542826$

Pour la réduction des sinus

en secondes, otez 4,6855749

0,8687077

$2P = 8^s 21^\circ\ 2'\ 46''$

$\sin 2P = - \sin 81\ \ 2\ 46$

$2Q = 5^s\ 7^\circ 51' 54''$

$\sin 2Q = \sin 22\ \ 8\ \ 6$

$2R = 5^s\ 10^\circ 27' 44''$

$\sin 2R = \sin 19\ 32\ 16$

$\frac{v^2}{8} \sin 2P = -7'',30$

$\frac{v^2}{8} \sin 2Q = +2{,}78$

$\frac{v^2}{8} \sin 2R = +2{,}47$

donc $M = 4^s\ 8^\circ 24' 24''$

et $N = 10\ \ 9\ 42\ 19$

et partant $m - M = +1\ 41\ 32 = 6092''$

$n - N = -0\ 12\ 57 = -777$

$l(m-M) = 3{,}7847599$

$l.-(n-N) = 2{,}8904210$

$l.-\alpha = 0{,}8943389$

$\sin M = \sin 51^\circ 35' 36''$

$\sin v. M = 1 + \cos 51\ 35\ 36$

$\sin N = -\sin 50\ 17\ 41$

$\sin v. N = \sin. v. 50\ 17\ 41$

$l.-\sin N = 9{,}8861187$

$l.-\alpha = 0{,}8943389$

$l\alpha \sin N = 0{,}7804576$

$-\alpha \sin N = 6{,}031950$

$\sin M = 0{,}783621$

le numérateur $= -5{,}248329$

$l \sin v. N = 9{,}5577011$

$l.-\alpha = 0{,}8943389$

$l.-\alpha \sin v. N = 0{,}4520400$

$-\alpha \sin v. N = 2{,}831653$

$\sin v. M = 1{,}621239$

le dénominateur $= 4{,}452892$

donc $-\text{tang}\, P = 1{,}17863$

et $-P = 49^\circ 41' 15''$

ou $P = 10^s\ 10\ 18\ 45$

$\frac{1}{2} M = 64\ 12\ 12$

$P + \frac{1}{2} M = 14\ 30\ 57$

$l \sin \frac{1}{2} M = 9{,}9544085$

$l \cos (P + \frac{1}{2} M) = 9{,}9859105$

$l2 = 0{,}3010300$

$10{,}2413490$

ôtez $4{,}6855749$

$5{,}5557741$

$l(m - M) = 3{,}7847599$

$lv = 8{,}2289858$

et $v = 0{,}0169428$

Pour convertir les sinus en secondes, de $lv = 8{,}2289858$

retranchez $4{,}6855749$

$lv = 3{,}5434109$

$\sin P = - \sin 49^\circ 41' 15''$

$l. - \sin P = 9{,}8822553$

$lv = 3{,}5434109$

$l. - v \sin P = 3{,}4256662$

et partant $v \sin P = - 44' 24'',8 = - 2664'',8$

$lv^2 = 6{,}4579716$

$l4 = 0{,}6020600$

$l \frac{v^2}{4} = 5{,}8559116$

ôtez $4{,}6855749$

reste $1{,}1703367$

$\sin 2P = - \sin 80^\circ 37' 30''$

$l. - \sin 2P = 9{,}9941602$

$l \frac{v^2}{4} = 1{,}1703367$

$1{,}1644969$

$- \frac{v^2}{4} \sin 2P = 14'',6$

Or $P = 10^s 10^\circ 18' 45''$

$+ v \sin P = \quad - 44 \quad 25$

Par conséquent l'anomalie moyenne $x = 10 \quad 9 \quad 34 \quad 20$

$- v \sin P + \frac{v^2}{4} \sin 2P = \quad + 44 \quad 10$

et l'anomalie vraie $z = 10 \quad 11 \quad 2 \quad 55$

et l'équation $= \quad 1 \quad 28 \quad 35$

La longitude vraie du soleil au moment de la I observat. $1 \quad 19 \quad 25 \quad 57$

la longitude moyenne $1 \quad 17 \quad 57 \quad 22$

ôtez l'anomalie moyenne $x = 10 \quad 9 \quad 34 \quad 20$

restera la longitude de l'apogée $= 3 \quad 8 \quad 23 \quad 2$

et la plus grande équation $= \quad 1 \quad 56 \quad 29$

§ 27. Ayant trouvé ces déterminations pour le temps de la première observation, nous en pourrons déduire les mêmes observations pour tout autre temps donné, par exemple pour le midi du dernier décembre 1700.

| | Longitude moyenne du soleil | | | | Anomalia moyenne du soleil | | | | Lieu de l'apogée du soleil | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1726 Avril 29 — 4′ | $1^s$ | $17^\circ$ | $57'$ | $22''$ | $10^s$ | $9^\circ$ | $34'$ | $20''$ | $3^s$ | $8^\circ$ | $23'$ | $2''$ |
| ajoutez 4′ | | | | 10 | | | | 10 | | | | |
| A. 1726 Avril 29 midi | 1 | 17 | 57 | 32 | 10 | 9 | 34 | 30 | 3 | 8 | 23 | 2 |
| ôtez 29 jours | 0 | 28 | 35 | 2 | 0 | 28 | 34 | 58 | | | | 4 |
| A. 1726 Avril | 0 | 19 | 22 | 30 | 9 | 10 | 59 | 32 | 3 | 8 | 22 | 58 |
| ôtez l'Avril | 2 | 28 | 42 | 29 | 2 | 28 | 42 | 17 | | | | 12 |
| A. 1726 commencement | 9 | 20 | 40 | 1 | 6 | 12 | 17 | 15 | 3 | 8 | 22 | 46 |
| ôtez 5 ans | 11 | 29 | 47 | 30 | 11 | 29 | 43 | 20 | | | 4 | 10 |
| A. 1721 commencement | 9 | 20 | 52 | 31 | 6 | 12 | 33 | 55 | 3 | 8 | 18 | 36 |
| ôtez 20 ans | 0 | 0 | 9 | 6 | 11 | 29 | 52 | 26 | | | 16 | 40 |
| A. 1701 commencement | 9 | 20 | 43 | 25 | 6 | 12 | 41 | 29 | 3 | 8 | 1 | 56 |

§ 28. Ces déterminations que nous venons de trouver, diffèrent trop des autres tables, pour oser les donner pour parfaites, et il semble que M. Leadbetter ait grand tort, tant en louant si fort son instrument, qu'en rapportant ses observations. Il faudra donc appliquer quelques corrections à ces déterminations. Pour cet effet, je me servirai des places du soleil que Flamsteed a tirées, non pas des hauteurs méridiennes, mais des ascensions droites, cette méthode me paraissant plus sûre, parce qu'elle n'est pas troublée par les réfractions, et principalement parce qu'on peut trouver les lieux du soleil, pendant qu'il n'est pas fort éloigné des solstices, ce qui ne peut pas se pratiquer par les déclinaisons. Ces observations, faites vers les solstices, nous montreront le plus exactement la longitude moyenne du soleil et le lieu de l'apogée, parce que, dans ces saisons, l'équation du centre est fort petite. Ayant ainsi établi plus sûrement le mouvement moyen et le lieu de l'apogée, les observations faites vers les équinoxes serviront à déterminer la plus grande équation. Ces observations tirées des ascensions droites sont les suivantes

| | | | Lieu du soleil | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1689 | Décembre | 17 | $9^s$ | $6^0$ | $34'$ | $4''$ |
| 1690 | Mars | 7 | 11 | 27 | 21 | 48 |
| | Mars | 14 | 0 | 4 | 17 | 18 |
| | Juin | 16 | 3 | 5 | 5 | 7 |
| | Septembre | 15 | 6 | 2 | 45 | 37 |
| 1691 | Mars | 10 | 0 | 0 | 5 | 37 |

§ 29. Pour satisfaire à ces observations autant qu'il est possible, j'ai trouvé qu'il faut établir pour le midi du dernier Décembre 1700 vieux style à Londres

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| la longitude moyenne du soleil | $9^s$ | $20^0$ | $43'$ | $45''$ |
| le lieu de l'apogée . . . . . | 3 | 7 | 43 | 39 |
| l'anomalie moyenne . . . . . | 6 | 13 | 0 | 6 |
| et la plus grande équation . . | | 1 | 56 | 10. |

Ces déterminations comparées avec celles des autres tables tiennent tellement le milieu, qu'on ne saurait presque pas douter de leur justesse. Ensuite, par des raisons ci-dessus alléguées, je supposerai la précession des équinoxes pendant 100 ans de $1^0\,23'\,20''$ ou de $50''$ par an, et l'apogée demeurera fixe par rapport aux étoiles fixes, ou s'éloignera de l'équinoxe du printemps de $50''$ par an. Pour le mouvement moyen du soleil pendant 100 ans, je compterai $45'\ 30''$, d'où suit la quantité d'une année tropique de $365^j\ 5^h\ 48'\ 55''\ 10'''$. De ces hypothèses, j'ai tiré les tables solaires ci-jointes que j'ai en même temps réduites au méridien de Berlin, gardant pourtant le vieux style.

§ 30. Quoiqu'il soit si difficile de faire et de trouver des observations assez exactes pour y asseoir les tables, je crois pourtant que ces tables que j'ai l'honneur de présenter ici seront le moins sujettes à de nouvelles corrections. Elle tiennent le milieu entre les autres tables dont j'ai fait l'énumération, et il est certain que, dans les miennes il se trouve aussi bien des erreurs, tant en excès qu'en défaut. Mais surtout la correction que je tire du lieu de la lune, prouve suffisamment, que sans elle il serait impossible de parvenir à une parfaite harmonie sur cet article, quand même les observations seraient exactes à des secondes près. Car, en négligeant l'effet de la lune, l'intervalle entre deux observations faites dans les mêmes points de l'orbite, nous peut paraître une

fois de 30″ trop grand, une autre fois de 30″ trop petit, selon la position de la lune aux moments des observations. Cette différence, qui peut monter à une minute entière, doit produire une diversité très considérable tant dans la place de l'apogée, que dans l'excentricité; et il semble que c'est la véritable raison, par laquelle certains astronomes ont trouvé l'équation du centre du soleil trop grande, et d'autres trop petite. La place de l'apogée doit être par cette raison encore moins sûre, car une erreur d'une minute dans les observations, en produit bien une d'un demi degré dans le lieu de l'apogée, comme nous avons vu en faisant le calcul sur les observations de Leadbetter. Par là on voit donc plus clairement encore, qu'on ne peut avoir aucune raison de donner à l'apogée un mouvement différent de celui des étoiles fixes, comme j'ai avancé là haut.

§ 31. Pour faire voir l'usage de ces tables, calculons le lieu du soleil vu du centre de la terre, pour le midi vrai du 17 Décembre A. 1689 à Londres. Premièrement, il faut réduire ce temps apparent au temps moyen en y ajoutant 2′. 9″ qui est l'équation du temps; ensuite, comme ces tables sont faites pour le méridien de Berlin, il faut ajouter la différence des méridiens qui est de 54′, de sorte que le temps proposé sera: A. 1689 Décembre 17ʲ + 56′ 9″. Le calcul se fera donc ainsi qu'il suit:

| | Long. moy. du ☉ | | | | Anomalie moy. | | | | Dist. de la ☽ au ☉ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1681 | 9ˢ | 20° | 32′ | 26″ | 6ˢ | 13° | 5′ | 26″ | 8ˢ | 10° | 43′ | 44″ |
| 8 | 0 | 0 | 3 | 39 | 11 | 29 | 56 | 59 | 11 | 11 | 22 | 0 |
| Décembre | 10 | 29 | 12 | 22 | 10 | 29 | 11 | 36 | 3 | 21 | 43 | 35 |
| 17ʲ | 0 | 16 | 45 | 22 | 0 | 16 | 45 | 20 | 6 | 27 | 14 | 34 |
| 56′ 9″ | | | 2 | 18 | | | 2 | 18 | | | 28 | 26 |
| | 9 | 6 | 36 | 7 | 5 | 29 | 1 | 39 | 6 | 11 | 32 | 19 |
| ôtez | | | 2 | 1 | | | | | | | | |
| lieu du ☉ | 9 | 6 | 34 | 6 | *l*. dist. ☉ = 4,992600 | | | | | | | |
| correction | | | | —2 | ôtez 30 | | | | | | | |
| vrai lieu du ☉ | 9 | 6 | 34 | 4 | *l*. dist. ☉ = 4,992570 | | | | | | | |

d'où l'on voit que cette place du soleil s'accorde parfaitement avec l'observation de Flamsteed rapportée au § 28.

§ 32. Soit proposé le midi du 7 Mars 1690 à Londres. L'équation du temps était 8′ 28″ à ajouter, qui avec la différence des méridiens donne A. 1690 Mars 7ʲ 1ʰ 2′ 28″.

| | Longit. moyenne | | | | Anom. moyenne | | | | Dist. de la ☽ au ☉ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1681 | 9ˢ | 20° | 32′ | 26″ | 6ˢ | 13° | 5′ | 26″ | 8ˢ | 10° | 43′ | 44″ |
| 9 | 11 | 29 | 49 | 19 | 11 | 29 | 41 | 49 | 3 | 20 | 59 | 23 |
| Mars | 1 | 28 | 9 | 11 | 1 | 28 | 9 | 3 | 11 | 29 | 15 | 15 |
| 7ʲ | 0 | 6 | 53 | 59 | 0 | 6 | 53 | 58 | 2 | 25 | 20 | 7 |
| 1ʰ 2′ 28″ | | | 2 | 34 | | | 2 | 34 | | | 31 | 43 |
| | 11 | 25 | 27 | 29 | 8 | 17 | 52 | 50 | 2 | 26 | 50 | 12 |
| ajoutez | | 1 | 54 | 3 | | | | | | | | |
| Lieu du ☉ | 11 | 27 | 21 | 32 | *l*. dist. = 4,998577 | | | | | | | |
| Correction | | | | + 15 | ajoutez 2 | | | | | | | |
| Vrai lieu du ☉ | 11 | 27 | 21 | 47 | *l*. dist. ☉ = 4,998579 | | | | | | | |

ici l'on trouve aussi un parfait accord à une seconde près.

§ 33. Soit proposé le midi du 14 Mars 1690 à Londres, époque pour laquelle l'équation du temps se trouve 6′ 19″ à ajouter, et partant le temps moyen à Berlin sera A. 1690 Mars 14ʲ 60′ 19″, donc en prenant de l'exemple précédent le mouvement moyen jusqu'au mois de Mars, nous aurons

| | Longit. moyenne | | | | Anom. moyenne | | | | Dist. de la ☽ au ⊙ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1690 | | | | | | | | | | | | |
| Mars | 11ˢ | 18⁰ | 30′ | 56″ | 8ˢ | 10⁰ | 56′ | 18″ | 0ˢ | 0⁰ | 58′ | 22″ |
| 14ʲ | 0 | 13 | 47 | 57 | 0 | 13 | 47 | 55 | 5 | 20 | 40 | 14 |
| 60′ 19″ | | | 2 | 28 | | | 2 | 28 | | | 30 | 37 |
| | 0 | 2 | 21 | 21 | 9 | 24 | 46 | 41 | 5 | 22 | 9 | 23 |
| ajoutez | | 1 | 55 | 52 | | | | | | | | |
| lieu du ⊙ | 0 | 4 | 17 | 13 | log. de la dist. = 4,999455 | | | | | | | |
| correction | | | | + 2 | retranchez 31 | | | | | | | |
| Vrai lieu du ⊙ | 0 | 4 | 17 | 15 | log. de la dist. = 4,999424 | | | | | | | |

où la différence de 3″ est peu considérable.

§ 34. Considérons le midi vrai du 16 Juin 1690 à Londres, où l'équation du temps est 2′ 12′ à ajouter, de sorte que le temps réduit à nos tables sera A. 1690 Juin 16ʲ 56′ 12″

| | Longit. moyenne | | | | Anom. moyenne | | | | Dist. de la ☽ au ⊙ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1690 | 9ˢ | 20⁰ | 21′ | 45″ | 6ˢ | 12⁰ | 47′ | 15″ | 0ˢ | 1⁰ | 43′ | 7″ |
| Juin | 4 | 28 | 49 | 57 | 4 | 28 | 49 | 37 | 1 | 10 | 48 | 10 |
| 16ʲ | | 15 | 46 | 13 | | 15 | 46 | 11 | 6 | 15 | 3 | 7 |
| 56′ 12″ | | | 2 | 18 | | | 2 | 18 | | | 28 | 27 |
| | 3 | 5 | 0 | 13 | 11 | 27 | 25 | 21 | 7 | 28 | 2 | 51 |
| ajoutez | | | 5 | 7 | | | | | | | | |
| lieu du ⊙ | 3 | 5 | 5 | 20 | *l.* de la dist. = 5,007269 | | | | | | | |
| correction | | | | — 12 | retranchez 17 | | | | | | | |
| Vrai lieu du ⊙ | 3 | 5 | 5 | 8 | *l.* de la dist. = 5,007252 | | | | | | | |

ici la différence n'est que d'une seconde.

§ 35. Cherchons aussi le lieu du soleil pour le 15 Septembre A. 1690 midi vrai à Londres. L'équation du temps étant 8′ 30″ à ôter, ce temps sera à Berlin A. 1690 Septembre 15ʲ 45′ 30″

| | Longit. moyenne | | | | Anom. moyenne | | | | Dist. de la ☽ au ⊙ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1690 | 9ˢ | 20⁰ | 21′ | 45″ | 6ˢ | 12⁰ | 47′ | 15″ | 0ˢ | 1⁰ | 43′ | 7″ |
| Septembre | 7 | 29 | 30 | 43 | 7 | 29 | 30 | 10 | 2 | 22 | 21 | 7 |
| 15ʲ | 0 | 14 | 47 | 5 | 0 | 14 | 47 | 3 | 6 | 2 | 51 | 40 |
| 45′ 30″ | | | 1 | 52 | | | 1 | 52 | | | 23 | 6 |
| | 6 | 4 | 41 | 25 | 2 | 27 | 6 | 20 | 8 | 27 | 19 | 0 |
| ôtez | | 1 | 55 | 52 | | | | | | | | |
| lieu du ⊙ | 6 | 2 | 45 | 33 | log. dist. = 5,000485 | | | | | | | |
| correction | | | | — 15 | — 2 | | | | | | | |
| Vrai lieu du ⊙ | 6 | 2 | 45 | 18 | log. dist. = 5,000383 | | | | | | | |

ici se trouve une différence de 19″ qui demanderait bien encore une correction des tables, si nous pouvions compter sur la sûreté de l'observation; mais ces 19 secondes ne comportant dans l'ascen-

sion droite que 17″, et dans le temps seulement une seconde. Si nous supposions la plus grande équation de 1° 56′ 0″, le calcul s'approcherait de l'observation de 10″, de sorte que la différence se réduirait à 9″, et alors, dans l'exemple du § 32, la différence serait de 10″, et dans celui du § 33 de 13″. Dans les autres exemples l'accord demeurerait le même.

§ 36. Examinons aussi la dernière observation de Flamsteed faite en 1691 le 10 Mars. L'équation du temps était 7′ 40″ à ajouter, d'où nous obtenons le temps proposé

A. 1691 Mars $10^j\, 1^h\, 1'\, 40''$

| | Longit. moyenne | | | | Anom. moyenne | | | | Dist. de la ☽ au ☉ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1681 | $9^s$ | $20^0$ | $32'$ | $26''$ | $6^s$ | $13^0$ | $5'$ | $26''$ | $8^s$ | $10^0$ | $43'$ | $44''$ |
| 10 | 11 | 29 | 34 | 59 | 11 | 29 | 26 | 39 | 8 | 0 | 36 | 47 |
| Mars | 1 | 28 | 9 | 11 | 1 | 28 | 9 | 3 | 11 | 29 | 15 | 15 |
| $10^j$ | 0 | 9 | 51 | 23 | 0 | 9 | 51 | 22 | 4 | 1 | 54 | 27 |
| $1^h\ 1'\ 40''$ | | | 2 | 32 | | | 2 | 32 | | | 31 | 0 |
| | 11 | 28 | 10 | 31 | 8 | 20 | 35 | 2 | 8 | 13 | 1 | 13 |
| ajoutez | | 1 | 54 | 59 | | | | | | | | |
| lieu du ☉ | 0 | 0 | 5 | 30 | log. dist. = 4,998920 | | | | | | | |
| correction | | | | — 15 | — 9 | | | | | | | |
| Vrai lieu | 0 | 0 | 5 | 15 | log. dist. = 4,998911 | | | | | | | |

Ici la différence monte à 22″ et elle deviendrait encore plus grande, si nous diminuions la plus grande équation de 10″; et par conséquent, la raison cesse qui aurait pu nous engager à diminuer l'équation du centre du soleil.

§ 37. Parce qu'il y a quelques observations qui s'accordent parfaitement avec le calcul, et d'autres qui s'en écartent d'environ 20″, il sera à propos de faire une telle compensation, afin que l'aberration ne surpasse, dans aucun des cas examinés, 10 ou 12 secondes; car il n'est pas à présumer que toutes les fautes soient ramassées dant une ou deux observations, tandis que les autres seraient entièrement exactes. Supposons donc qu'il y eût aussi dans les premières observations quelques fautes, et pour accommoder les tables autant que possible aux observations, je trouve que cela peut se faire le plus convenablement, en ajoutant 10″ à la longitude moyenne et 6′ 10″ aux anomalies moyennes pour les époques marquées, et qu'il ne faut rien changer dans la table des équations, de sorte que la plus grande équation demeure 1° 56′ 10″. En faisant ces corrections, on trouvera pour les temps des observations de Flamsteed les lieux du soleil suivants:

| | | | Lieux observés | | | | Lieux calculés | | | | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 1689 | Décembre | 17 | $9^s$ | $6^0$ | $34'$ | $4''$ | $9^s$ | $6^0$ | $34'$ | $2''$ | + 2″ |
| 1690 | Mars | 7 | 11 | 27 | 21 | 48 | 11 | 27 | 21 | 58 | — 10 |
| | Mars | 14 | 0 | 4 | 17 | 18 | 0 | 4 | 17 | 26 | — 8 |
| | Juin | 16 | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 5 | 5 | 6 | + 1 |
| | Septembre | 15 | 6 | 2 | 45 | 37 | 6 | 2 | 45 | 27 | + 10 |
| 1691 | Mars | 10 | 0 | 0 | 5 | 37 | 0 | 0 | 5 | 27 | + 10 |

§ 38. Si Flamsteed, en faisant ces observations, ne s'était pas trompé d'une seconde entièr en temps dans les ascensions droites, on pourrait assurer que ces corrections doivent être parfaite

ment d'accord avec la vérité. C'est donc sur ces corrections que j'ai dressé les tables solaires ci-jointes, et j'espère qu'elles satisferont aux observations plus exactement, qu'aucunes autres, pourvu qu'on ne néglige pas la correction tirée du lieu de la lune. Au reste, ces tables sont construites sur le méridien de Berlin selon le vieux style, au temps courant astronomique, comme les tables de Street ou de Flamsteed. J'ai aussi calculé de nouveau la table des équations de 5 à 5 degrés, ayant remarqué que celles, dont on se sert communément, sont fausses en quelques endroits de 2 ou 3 secondes. Les époques avant J.-C. ont été rangées, comme on le fait pour les logarithmes négatifs, en mettant 10001 pour la première année de J.-C. afin qu'on puisse soustraire autant d'années qu'on voudra. Par exemple, si l'on voulait calculer un lieu du soleil pour l'an 158 avant J.-C., on n'a qu'à ôter ce nombre de 10001, et chercher le reste 9843 dans les tables, en prenant l'époque 9801 et en y ajoutant 42 ans. Faisons le calcul pour cette même année, le 26 Septembre $22^h\ 30'$, temps auquel Hipparque a supposé que l'équinoxe était arrivé:

| | Longit. moyenne | | | | Anomalie moyenne | | | | Dist. de la ☽ au ⊙ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. 9801 | $9^s$ | $6^0$ | $17'$ | $12''$ | $6^s$ | $25^0$ | $2'$ | $52''$ | $10^s$ | $9^0$ | $32'$ | $10''$ |
| 40 | | | 18 | 12 | 11 | 29 | 44 | 52 | 8 | 26 | 50 | 2 |
| 2 | 11 | 29 | 31 | 20 | 11 | 29 | 29 | 40 | 8 | 19 | 14 | 47 |
| Septembre | 7 | 29 | 30 | 43 | 7 | 29 | 30 | 10 | 2 | 22 | 21 | 7 |
| 26$^j$ | 0 | 25 | 37 | 37 | 0 | 25 | 37 | 34 | 10 | 16 | 57 | 33 |
| $22^h$ | | | 54 | 13 | | | 54 | 13 | | 11 | 10 | 29 |
| $30'$ | | | 1 | 14 | | | 1 | 14 | | | 15 | 14 |
| | 6 | 2 | 10 | 31 | 3 | 20 | 20 | 35 | 5 | 16 | 21 | 22 |
| retranchez | | 1 | 49 | 42 | | | | | | | | |
| | 6 | 0 | 20 | 49 | | | | | | | | |
| ajoutez | | | | 3 | | | | | | | | |
| Vrai lieu du ⊙ | 6 | 0 | 20 | 52 | | | | | | | | |

Ainsi l'équinoxe est arrivé 9 heures plus tôt qu'Hipparque n'a cru, ce qui est très probable à cause des réfractions et de l'élévation du pôle dont les unes n'étaient absolument pas connues, et l'autre ne l'était pas assez précisément.



XV.

# De emendatione tabularum lunarium per observationes Eclipsium lunae.

---

§ 1. Tabulae lunares, quas ex theoria derivavi, correctione indigent ex observationibus petenda. Etsi enim motus medius tam lunae quam anomaliae et nodi pro dato temporis intervallo, nisi id forte nimis sit magnum, satis accurate cognoscatur, tamen hae res pro data quadam epocha minus certae sunt habendae, quoniam ex ipsa inaequalitate motus lunae concluduntur, quae si alia statuatur, ac vulgo assumi solet, utique non exiguam variationem inducere valet. Praeterea vero ipsa excentricitas orbitae lunaris, a qua aequatio prima cum quarta et quinta pendet, nondum satis exacte definita videtur, cum in ipsa solis orbita, cujus excentricitas determinatu longe est facilior, non parvum discrimen tabulas solares distinguat. Excentricitas autem orbitae lunae ex maximis differentiis locorum lunae observatorum a locis mediis ad eadem tempora collectis, definiri solet; quae methodus certa esset, si aberratio lunae a loco medio a sola excentricitate proficisceretur: verum cum etiam in eclipsibus, ubi pleraeque reliquarum inaequalitatum evanescunt, anomalia solis non parum lunae locum afficiat, hujus effectum ante cognitum esse oporteret, quam ex discrepantiis maximis locorum lunae observatorum et mediorum aequationem excentricitatis maximam concludere liceat.

§ 2. Aequatio autem lunae, quae ab anomalia solis media, seu ab ejus distantia a terra oritur, imprimis a vera solis a terra distantia pendet, atque parallaxi solis horizontali proxime est proportionalis. Hinc Newtonus, qui parallaxin solis horizontalem 10″ assumit, maximam lunae aequationem annuam statuit 11′49″. Cassinus autem eam aliquanto minorem assumit. Ego vero, recentissimas Astronomorum Parisiensium decisiones secutus, quibus parallaxis solis horizontalis quasi $12\frac{1}{2}''$ est inventa, maximam aequationem lunae annuam 12′53″ constitui. In syzygiis autem ea ob aequationes VI et VII augetur 19″, ita ut his lunae positionibus maxima aequatio annua mihi fiat 13′12″. Quod si ergo parallaxis solis horizontalis nondum satis accurate sit detecta, etiam haec aequatio lunae annua correctione opus habebit; unde vicissim, si eam ex observationibus lunae exacte definire

licuerit, inde vera parallaxis solis horizontalis concludi poterit, haecque certissima videtur via ad cognitionem verae parallaxis solis horizontalis perveniendi.

§ 3. Deinde mihi quidem eo magis ad observationes confugiendum est, si tabulas meas lunares perficere velim, quod ad aequationes septem loci lunae exhibitas adhuc adjici debet octava, cujus argumentum obtinetur, si a dupla distantia solis a luna subtrahatur dupla anomalia lunae excentrica. Calculum enim ex theoria instituens facile perspexi, hanc aequationem tantam fieri, ut sine errore rejici nequeat, sed ad ejus quantitatem definiendam tam prolixi et molesti calculi mihi subeundi fuissent, ut ad hunc laborem suscipiendum me determinare non potuerim. Eo autem me facilius supersedere posse sum arbitratus, quoniam haec ipsa inaequalitas ex observationibus concludi posset, in quo si quidem reliquae aequationes sint cognitae, non admodum errari poterit. Cum enim ostenderim, hanc correctionem sinui anguli, qui remanet, si dupla anomalia lunae excentrica a dupla distantia solis a luna subtrahatur, esse proportionalem, ea maxima erit, si iste angulus residuus fuerit rectus; quod in syzygiis evenit, si anomalia lunae excentrica fuerit vel $45^0$, vel $135^0$, vel $225^0$, vel $315^0$. Quando autem ipsa aequatio elliptica est maxima, illa aequatio evanescit; unde investigatio maximae aequationis ellipticae ab ista aequatione etiamnum incognita non impeditur. Siquidem Tabulis lunae Cassinianis fidem adhibeamus, is hanc inaequalitatem jam animadvertit, eamque, ubi maxima est, statuit $4'$, quae in sex prioribus signis ad locum lunae addi, in sex posterioribus vero ab eo subtrahi debeat.

§ 4. Ne autem multitudo aequationum correctionem tabularum mearum per observationes instituendam impediat, conveniet ejusmodi tantum observationes in hunc finem adhiberi, quae in syzygiis sint institutae; tum enim, ob distantiam solis a luna vel $0^0$, vel $180^0$, omnes aequationes ad duas tantum reducuntur, quarum altera ab anomalia lunae media, altera ab anomalia solis media pendet: quae binae, si fuerint per observationes emendatae, simul omnes aequationum tabulae, quae ad lunae positionem quamcunque spectant, inde corrigi poterunt. Condantur enim ex meis tabulis istae binae ad syzygias accomodatae tabulae, atque in ea, quae ab anomalia solis media pendet, aequatio maxima erit $13'12''$, in altera vero, cujus argumentum est anomalia lunae media, maxima aequatio erit $5^0 1' 44''$. Quae si observationibus debito modo collatis major minorve reperiatur, in eadem ratione aequationes tabularum I, IV et V augeri minuive debebunt. Simili modo, si aequatio solaris maxima deprehendatur major minorve quam $13'12''$, aequationes tabularum II, VI et VII proportionaliter immutandae erunt.

§ 5. Cum autem nullae observationes lunae in syzygiis factae sint certiores, quam eae, quae ex eclipsibus lunae deducuntur, ex quibus quemadmodum loca lunae accurate concludi oporteat, deinceps docebo: Colligantur tot hujusmodi loca lunae ex accuratissimis eclipsium lunae observationibus, quot quidem intervallo unius duorumve seculorum ultimorum obtineri possunt. Quo plures enim hujusmodi loca lunae in subsidium vocantur, eo magis conclusiones, quae inde formantur, veritati erunt consentaneae. Neque tamen ad nimis antiquas observationes regredi velim, cum quod eae non satis studiose sint institutae, tum vero imprimis, quod locus lunae medius pro nimis magno temporis spatio non satis cognitus videtur. Collecto ergo ingenti hujusmodi observationum lunae numero, ad singularum momenta computentur lunae loca media, simulque ob usum infra indican-

dum loca nodi media; eaque per tabulam aequationum ab anomalia solis pendentium corrigantur, ut prodeant lunae loca jam ob actionem solis correcta, quae amplius nulla alia correctione praeter eam, quae ab anomalia lunae media pendet, indigeant.

§ 6. Hoc labore expedito notentur differentiae inter loca lunae vera, seu ex observationibus conclusa, et loca modo computata; quae differentiae mox erunt affirmativae, mox negativae. Tum quaeratur maxima differentia tam affirmativa quam negativa, quas proxime tum evenisse manifestum est, cum aequatio ab anomalia lunae media pendens fuerit maxima, tam addenda quam subtrahenda. Inter tot enim lunae observationes probabile est quasdam existere, in quibus aequatio ab anomalia media lunae pendens fuerit fere maxima, tam addenda quam subtrahenda. Etiamsi enim haec loca aliquot gradibus distent ab iis punctis, ubi aequatio est maxima; tamen quia aequatio circa haec puncta non notabiliter variatur, error ultra aliquot minuta secunda exsurgere nequit. Quin etiam si binae notatae maximae differentiae in eandem anni tempestatem incidant, incertitudo aequationis primae solaris jam adhibitae conclusionem non afficiet: quare si numerus observationum fuerit satis grandis, expediet eas binas maximas differentias, alteram affirmativam, alteram negativam elegisse, quae vel in eandem anni tempestatem incidant, vel saltem ejusmodi temporibus sint factae, quibus aequatio solaris proxime fuerit eadem: ut discrimen tantum utriusque aequationis solaris in computum veniat, quod si fuerit parvum, non differret, etiamsi maxima aequatio solaris notabiliter abhorreat a veritate.

§ 7. Cum autem hoc modo binae maximae differentiae inter loca lunae observata et computata fuerint erutae, addantur ambae in unam summam, cujus semissis aequabitur aequationi maximae ab anomalia lunae pendenti, quae si fuerit $5^0\,1'\,44''$, tabulae meae correctionum I, IV et V erunt veritati conformes: si quidem utrique loco maxima aequatio respondeat; sin autem luna aliquantillum ab his punctis abfuerit, tum illa differentiarum semisumma aliquanto minor erit quam aequatio maxima, ex quo facile usu venire potest, ut aequatio maxima aliquot minutis secundis major sit, quam hoc modo prodit; fieri autem nequit, ut sit minor. Error tamen ultra aliquot minuta secunda exsurgere nequit. Hincque si ad illam semisummam aliquot minuta secunda addantur, aequatio maxima satis exacte erit cognita: quae si discrepet a nostra $5^0\,1'\,44''$, facile erit tabulas nostras I, IV et V emendare, easque omnibus numeris absolutas efficere.

§ 8. Inventa autem aequatione maxima, quia ea binis illis observationibus, quibus maximum discrimen est deprehensum, convenire debet, si ea in altera addatur, in altera subtrahatur a loco lunae computato, ipse locus observatus resultare debebit utrinque. Quodsi secus eveniat, id indicio erit loca lunae media non recte fuisse assumta, hincque error corrigi poterit; ita ut ad haec tempora lunae locus medius innotescat. Cum igitur motum medium cognitum assumamus, saltem ad non nimis magnum temporis intervallum, hoc modo loca lunae media ad singulas epochas, quae in tabulis habentur, emendari poterunt. Atque hae correctiones recte se habebunt, si prior lunae aequatio ab anomalia media solis pendens recte se habeat: haec enim si fuerit erronea, tantumdem correctio illa locorum mediorum a veritate discrepabit. Sin autem forte acciderit, ut binae illae electae observationes prope solis apogaeum vel perigaeum sint positae, tum ob ipsam aequationem solarem minimam hinc nullus error in determinationem locorum mediorum redundabit. Verum si aequatio solaris fer-

sit maxima, praestabit correctionem locorum mediorum tantisper differre, donec ipsa haec aequatio solaris exactius fuerit definita.

§ 9. Si in memoratis illis duabus observationibus aequatio ab anomalia media lunae pendens revera esset maxima, hinc pro iis temporibus anomalia lunae media exacte innotesceret; quia vero anomalia media facile aliquot gradibus ab ea, cui aequatio maxima respondet, discrepare potest, haec via minus est tuta. Hancobrem praestabit inter omnes collectas observationes eas seligere, quae a locis computatis minime differant: et cum hujus generis sine dubio plures occurrant, ex his eas eligere, quibus aequatio solaris proxime aequalis fuerit ei, quae pro locis illis binis prioribus erat inventa. Tum locus lunae medius huic observationi assignatus corrigatur eo modo, quem ante indicavimus; etiamsi enim hic modus per se non est tutus, tamen ob aequalitatem aequationum solarium hic nullum errorem parit. Tum discrimen inter locum lunae computatum sicque correctum et locum observatum dabit aequationem convenientem ab anomalia media lunae pendentem, quae cum sit parva, et anomalia lunae fere vel 0°, vel 180°, ea ab aequatione nobis adhuc incognita non afficietur. Innotescet ergo ex quantitate hujus aequationis anomalia media huic observationis tempori conveniens.

§ 10. Quodsi hoc modo anomalia media lunae unicuidem temporis momento respondens fuerit inventa, nisi forte simili modo pro alio quopiam tempore anomalia lunae media determinari queat, ex motu anomaliae, seu motu apogaei jam satis exacte cognito anomalia lunae media ad quodvis tempus assignari poterit. Atque cum simul ex aequatione maxima inventa tabula aequationum ab anomalia lunae media pendentium corrigi queat, si deinceps in aliis anni tempestatibus ejusmodi eligantur observationes, quibus aequatio ab anomalia lunae media pendens vel propemodum nulla, vel fere maxima conveniat, quoniam his casibus aequatio etiamnunc incognita fere evanescit, hinc loca lunae media per hanc jam aequationem corrigendo, ex eorum dissensu ab observationibus tam longitudo media lunae quam aequatio ab anomalia solis pendens definiri poterit. Hocque eo facilius praestabitur, si observationes mensibus Martio et Septembri institutae inter se conferantur; quia enim utraque tempestate aequatio solaris fit maxima, priori subtrahenda, altera addenda, hinc ipsa maxima aequatio solaris facile eruitur. Vel eligantur observationes circa solstitia factae ejusmodi, ut pro iis anomalia lunae media sit prope 0°, vel 90°, vel 180°, vel 270°, et quia his temporibus nostra tabula aequationum solarium non sensibiliter a veritate discrepat, vera longitudo lunae media ad quodvis tempus cognoscetur.

§ 11. Correctis autem hoc pacto tabulis tam mediorum motuum quam aequationum tum a lunae tum a solis anomalia media pendentium, quaerantur ex collecta observationum copia ejusmodi lunae loca, quibus anomalia media lunae fere est 45°, vel 135°, vel 225°, vel 315°; quippe quibus aequatio etiamnum incognita fit maxima, pro hisque temporibus ex tabulis ante correctis computentur lunae loca, quorum discrimen ab observatis indicabit aequationem maximam incognitam: pro tabula, cujus argumentum est dupla distantia solis a luna, demta dupla lunae anomalia excentrica. Nisi autem ejusmodi observationes suppetant, quibus haec aequatio exacte fit maxima; ex cognita aequatione cuivis argumento hujus tabulae respondente ipsa aequatio maxima colligetur. Sunt enim hae aequationes proxime ut sinus anomaliae lunae excentricae bis sumtae, unde si aequatio haec pro qualibet anomalia excentrica habeatur, simul non solum maxima, sed etiam integra haec tabula facile construetur.

§ 12. Neque vero ex eclipsibus lunaribus tam plane loca lunae derivare licet, ut nulla circumspectione sit opus. Momentum enim verae oppositionis, quo centrum lunae secundum longitudinem revera centro solis opponitur, ex observationis circumstantiis nonnisi satis molestò calculo derivatur. Observari autem in quaque eclipsi solent principium ac finis, inter quae momenta medium capiendo non oppositionis verae, sed maximae obscurationis tempus prodit, quod idem tempus, si vel initii vel finis observatio deficiat, ex binis aequalibus phasibus ante ac post maximam obscurationem observatis medium sumendo reperitur. Quodsi ergo horologium accuratissime fuerit vel ad tempus verum, vel ad medium accomodatum, ejusque beneficio tam initium quam finis eclipseos, vel binae phases aequales notentur, inde verum eclipsis tempus medium seu maximae obscurationis momentum cognoscetur. Si igitur pro hoc ipso momento locus solis computetur, ejus punctum oppositum non quidem dabit lunae longitudinem, sed tamen locus lunae pro eodem tempore non difficulter definiri potest.

§ 13. Facillime quidem veroque satis prope locus lunae momento mediae eclipseos sequenti modo definitur. Repraesentet (Fig. 203.) recta ☊$C$ eclipticam, ☊$P$ orbitam centri lunae, ita ut sit ☊ nodus lunae ascendens. Tum computetur pro momento mediae eclipseos locus solis, cujus punctum oppositum sit $C$, simulque colligatur ex tabulis lunaribus locus nodi ☊ pro eodem momento, ut habeatur distantia puncti $C$ a nodo. Etsi enim tabulae pro nodo quoque correctione forte indigeant, tamen tuto assumere licet, eas non tantopere a veritate abhorrere, ut error inde pro nostro scopo oriundus ullam attentionem mereatur. Si enim error in loco nodi commissus vel ad integrum gradum assurgeret, cum tamen vix ad 2 minuta assurgere queat, in loco lunae non ultra $15''$ aberraretur. Deinde cum motus solis sit tardissimus, assumamus tempore totius eclipsis centrum umbrae in eodem puncto $C$ haesisse, quae quidem assumtio nimis est libera, sed deinceps errorem ex ea ortum investigemus.

§ 14. Initio porro eclipsis ponamus centrum lunae fuisse in $L$, fine vero eclipsis in $l$, quae puncta in recta ☊$P$ posita ita erunt comparata, ut utraque distantia $CL$ vel $Cl$ aequalis sit summae radiorum umbrae et lunae. Quare centrum lunae ab initio eclipsis ad finem usque spatium $Ll$ in sua orbita descripsisse erit censendum; quod cum factum sit motu uniformi, tempore mediae eclipsis centrum lunae in puncto $P$ extitisse necesse est, ita ut sit $PL = Pl$. Ex quo manifestum est rectam $CP$ in orbitam lunae fore perpendicularem. Si igitur simili modo punctum $C$ ad orbitam lunarem reducatur, quo vulgo locus lunae ad eclipticam reduci solet, quod fiet si longitudo nodi ☊ a longitudine puncti $C$ subtrahatur, atque residuum tamquam argumentum latitudinis in tabula reductioni lunae quaeratur, et aequatio respondens prout titulus tabulae prae se fert, ad locum puncti $C$ vel addatur, vel inde subtrahatur, prodibit locus puncti $P$ in orbita lunae, ubi centrum lunae tempore mediae eclipseos versabatur. Hinc ergo invenitur pro isto temporis momento locus lunae in orbita qui cum loco lunae ex tabulis computato, neglecta scilicet reductione ad eclipticam, convenire deberet si quidem tabulae essent perfectae.

§ 15. Hic autem non solum motus centri umbrae $C$ rationem praetermisimus, sed etiam sphaericitatis nullam habuimus rationem. Quem utrumque defectum ut suppleamus, repraesentet (Fig. 20… in superficie sphaerica circulus ☊$C$ eclipticam, et alter circulus ☊$P$ orbitam lunae; sitque in figura ☊ nodus ascendens, cujus locum, etsi est variabilis, tamen ob motus tarditatem summam, quamdiu

eclipsis durat, pro fixo habere poterimus. Initio igitur eclipsis fuerit centrum umbrae in $A$, et centrum lunae in $L$, in fine autem sit centrum umbrae in $a$, et centrum lunae in $l$, erunt intervalla $AL$ et $al$ aequalia semisummae diametrorum umbrae ac lunae. Quodsi jam ob utrumque motum uniformem, spatia $Aa$ et $Ll$ bisecentur in $C$ et $O$, exhibebit $C$ locum centri umbrae, et $O$ locum centri lunae ipso medio eclipseos tempore. Demittatur quoque ex $C$ in orbitam lunae perpendiculum $CP$, moxque patebit puncta $O$ et $P$ esse diversa, eorumque distantiam determinabimus.

§ 16. Sit angulus ☊ seu inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam $=\alpha$, quam in eclipsibus constat esse $=5^0\,17'$, ac pro medio eclipsis tempore ponatur ☊$C=a$, ☊$O=x$; deinde sit tempore dimidio eclipsis spatium a centro umbrae percursum $CA=Ca=m$, et spatium a luna emensum $OL=Ol=n$, erit ☊$A=a-m$, ☊$a=a+m$, ☊$L=x-n$ et ☊$l=x+n$, hinc ex triangulo sphaerico $A$☊$L$ reperitur

$$\cos AL=\cos\alpha\sin(a-m)\sin(x-n)+\cos(a-m)\cos(x-n)$$

atque triangulum $a$☊$l$ praebebit

$$\cos al=\cos\alpha\sin(a+m)\sin(x+n)+\cos(a+m)\cos(x+n)$$

Cum igitur sit $AL=al$, erit

$$\cos\alpha\sin(a-m)\sin(x-n)+\cos(a-m)\cos(x-n)=\cos\alpha\sin(a+m)\sin(x+n)+\cos(a+m)\cos(x+n).$$

Ex qua aequatione arcus ☊$O=x$ definiri potest.

§ 17. Si nunc pro sinubus et cosinubus summae et differentiae arcuum substituantur eorum valores, terminique se destruentes omittantur, sequens prodibit aequatio:

$$\sin a\cos x\sin m\cos n+\cos a\sin x\cos m\sin n=\cos\alpha\,(\sin a\cos x\cos m\sin n+\cos a\sin x\sin m\cos n)$$

quae ob $\frac{\sin a}{\cos a}=\operatorname{tang} a$, $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tang} x$, $\frac{\sin m}{\cos m}=\operatorname{tang} m$ et $\frac{\sin n}{\cos n}=\operatorname{tang} n$ transit in hanc formam

$$\operatorname{tang} a\operatorname{tang} m+\operatorname{tang} x\operatorname{tang} n=\cos\alpha\operatorname{tang} a\operatorname{tang} n+\cos\alpha\operatorname{tang} x\operatorname{tang} m$$

ex qua proinde reperitur

$$\operatorname{tang} x=\frac{\operatorname{tang} a\,(\cos\alpha\operatorname{tang} n-\operatorname{tang} m)}{\operatorname{tang} n-\cos\alpha\operatorname{tang} m}.$$

Quia vero arcus $m$ est minimus, et $n$ ultra aliquot gradus non ascendit, erit sine errore $\operatorname{tang} m:\operatorname{tang} n=m:n$, hoc est ut motus horarius centri umbrae seu solis ad motum horarium lunae. Hac ergo ratione cognita erit

$$\operatorname{tang} x=\frac{\operatorname{tang} a\,(n\cos\alpha-m)}{n-m\cos\alpha}=\operatorname{tang}\text{☊}O.$$

§ 18. Est vero ex triangulo ☊$CP$ ad $P$ rectangulo tang ☊$P=\operatorname{tang} a\cos\alpha$; unde patet punctum $O$ non in punctum $P$ incidere, ideoque modum ante traditum, locum lunae tempore medio eclipsis investigandi, a veritate recedere. Ex formula autem inventa pro tempore mediae eclipsis locus lunae in orbita invenietur, si modo constet distantia ☊$C=a$ (quae obtinetur si locus nodi a longitudine centri umbrae, quod centro solis est oppositum, subtrahatur, quae differentia argumen-

tum latitudinis appelletur) et ratio motuum horariorum $m$ et $n$. Quia vero discrimen inter $\Omega C = a$ et $\Omega O = x$ est minimum, hoc ipsum definiamus, ut pateat, quantum a longitudine centri umbrae $C$ subtrahi debeat, quo prodeat locus puncti $O$, seu locus centri lunae in sua orbita tempore mediae eclipsis. Erit ergo

$$\operatorname{tang}(\Omega C - \Omega O) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} x}$$

et quia $x$ proxime ipsi $a$ aequalis est, neglecto discrimine minimo erit

$$\operatorname{tang}(\Omega C - \Omega O) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang}^2 a} = (\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} x)\cos^2 a.$$

§ 19. Substituto ergo valore pro $\operatorname{tang} x$ ante invento erit

$$\operatorname{tang}(\Omega C - \Omega O) = \frac{(m+n)(1-\cos a)\operatorname{tang} a \cos^2 a}{n - m\cos a}.$$

Jam ob $\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}$, $1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2} a$ et $\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$ erit

$$\operatorname{tang}(\Omega C - \Omega O) = \frac{(n+m)\sin^2\frac{1}{2}a \,.\, \sin 2a}{n - m\cos a}$$

cui expressioni ipsa differentia arcuum $\Omega C - \Omega O$ erit aequalis, ita ut sit

$$\Omega C - \Omega O = \frac{(n+m)\sin^2\frac{1}{2}a}{n - m\cos a}\cdot \sin 2a.$$

Si ergo haec particula a longitudine centri umbrae subtrahatur, prodibit locus lunae in orbita, cum quo locum ex tabulis inventum pro medio eclipsis tempore comparari oportet, sicque ex dissensu locorum lunae ex tabulis inventorum et locorum modo hic exposito ex eclipsibus conclusorum correctio ante explicata tabularum erit instituenda.

§ 20. Cum jam angulus $a$ sit $= 5^0 17'$, atque ob $n$ prae $m$ valde magnum, pro ratione $m:n$ ratio mediorum motuum solis et lunae tuto assumi queat, erit

$$m : n = 148'' : 1976'' \text{ et } m\cos a = 147'',$$

unde $\frac{n+m}{n - m\cos a} = \frac{2124}{1829}$, ejusque logarithmus : 0,0649408;

addatur : $7,3271986 = 2l\sin a$

prodit $7,3921394 = l\frac{n+m}{n - m\cos a}\sin^2 a$

ad quem logarithmum insuper addi debet $l \,.\, \sin 2a$, ut prodeat logarithmus particulae $\Omega C - \Omega O$ quae ut in minutis secundis expressa prodeat, subtrahatur hic logarithmus : 4,6855749, seu ad log sin $2a$ addatur hic logarithmus : 2,7065645, prodibitque logarithmus correctionis quaesitae in minuti[s] secundis expressae.

§ 21. Hinc igitur sequentem tabulam supputavi, cujus argumentum habetur, si a loco so[li] opposito subtrahatur longitudo nodi ascendentis : ex qua inventa aequatio loco soli opposito vel ad[di] vel subtrahi debet, prout titulus monstrat, ut obtineatur verus lunae locus in sua orbita med[iae] eclipsis tempore

## Tabula aequationis

loco soli opposito applicanda, ut prodeat lunae locus in orbita tempore medio eclipsis.

*Argumentum.* Subtrahatur longitudo nodi a longitudine solis.

| Grad. | 0 } VI } Sig. Subtrah. | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0′ 0″ | 30 | 0′ 0″ |
| 1 | 1 11 | 29 | 0 18 |
| 2 | 2 22 | 28 | 0 35 |
| 3 | 3 33 | 27 | 0 35 |
| 4 | 4 43 | 26 | 1 11 |
| 5 | 5 53 | 25 | 1 28 |
| 6 | 7 2 | 24 | 1 45 |
| 7 | 8 11 | 23 | 2 3 |
| 8 | 9 20 | 22 | 2 20 |
| 9 | 10 28 | 21 | 2 37 |
| 10 | 11 35 | 20 | 2 54 |
| 11 | 12 41 | 19 | 3 10 |
| 12 | 13 46 | 18 | 3 26 |
| 13 | 14 51 | 17 | 3 43 |
| 14 | 15 54 | 16 | 3 58 |
| 15 | 16 55 | 15 | 4 14 |
| 16 | 17 56 | 14 | 4 29 |
| 17 | 18 55 | 13 | 4 44 |
| 18 | 19 54 | 12 | 4 58 |
| 19 | 20 51 | 11 | 5 13 |
| 20 | 21 46 | 10 | 5 26 |
| | adde V } XI } Sig. | Grad. | |

§ 22. Pro mediis igitur eclipsium momentis omnium observationum, quae in hunc finem sunt collectae, computentur loca solis vera, simulque tam lunae quam nodi loca media, quibus ob rationes post indicandas adjiciantur quoque ex tabulis anomaliae lunae mediae. Tum locus nodi per aequationes tabularum imprimis II et III corrigatur, hicque a loco solis subtrahatur, ut habeatur argumentum praecedentis tabulae, cujus ope ex loco soli opposito reperietur locus lunae in orbita. Deinde loca lunae media corrigantur per aequationem ab anomalia media solis pendentem, ut supra docui, etiamsi huic aequationi nondum fidem plenam adhibeamus, atque ubique notentur differentiae inter haec lunae loca et ea, quae ex observationibus sunt deducta. Quo facto eligantur duae observationes, quibus maximae differentiae deprehenduntur, altera in excessu, altera in defectu, et cum

hujusmodi plures occurrant, ejusmodi duae eligantur, quae fere aequalem aequationem ab anomalia media solis pendentem habeant.

§ 23. Quoniam vero in his observationibus temere assumeretur, ipsam aequationem maximam ab anomalia lunae pendentem convenire, in hunc finem anomalias quoque lunae medias notari convenit; cum enim eae vix unum gradum a vero errare queant, ex his facile patebit, quantum aequatio illis observationibus conveniens a maxima differat. Etsi enim aequatio maxima ipsa nondum est cognita, tamen differentiae inter aequationes maximae proximas eaedem erunt; quae in tabulis exhibentur. Ita si pro altera observatione reperta fuerit anomalia lunae media $= 3^s 10^0$, aequatio conveniens minor erit quam maxima $1' 38''$. Hic ergo defectus ad utramque differentiam addatur, atque tum earum summa aequabitur aequationi maximae bis sumtae, hocque pacto aequatio maxima accuratius innotescet.

§ 24. Hinc igitur pro utraque observatione facile colligetur aequatio conveniens, sicque loca lunae hactenus per solam aequationem solarem correcta emendari poterunt. Praeterea autem ipsa tabula aequationum lunarium ex cognita aequatione maxima facile corrigetur. Deinde, ut jam ante meminimus, quaerantur ejusmodi observationes, quibus differentia minima respondet, et quae proxime aequalem habeant aequationem solarem iis, quae binis prioribus observationibus competebant, locoque lunae ante computato per correctionem modo memoratam correcto, ipsa differentia a loco observato aequationem convenientem indicabit, unde simul anomalia media huic loco debita cognoscetur: hocque pacto tam tabula anomaliarum mediarum, quam aequationum ipsis respondentium condetur. Denique hoc negotio expedito, aequatio maxima ab anomalia media solis pendens investigetur modo ante exposito, atque ad correctionem tabularum motuum mediorum lunae hinc facile pervenietur.

§ 25. Quodsi correctiones hoc modo inventae satis fuerint notabiles, eae nondum justae censeri poterunt. Sed tabulis hoc modo correctis, conveniet omnes hactenus expositas operationes de novo repetere, qui labor jam erit perfacilis, sicque hac secunda correctione adhibita dubium erit nullum, quin tum tabulae proditurae sint accuratissimae, dummodo in observationibus nullus error reperiatur. Hoc vero calculo ad finem perducto demum aequatio illa nobis etiamnunc incognita investigetur; supervacaneum enim foret hoc negotium suscipere antequam altera correctio, siquidem necessaria videatur, fuerit peracta. Atque his expeditis singulae tabularum mearum partes non solum facile corrigentur, sed etiam illa tabula, quae adhuc deest, levi opera adjicietur, ut nihil amplius praeterea desiderari queat.

§ 26. Maxima difficultas in hoc correctionis negotio in electione binarum illarum observationum, quae vel eadem anni tempestate, vel cum aequatio solaris fuerit fere eadem, erit posita. Parum enim est probabile hunc casum in tempore unius vel sesquiseculi ita commode usu venire, ut praecepta ante tradita sine ullo impedimento sequi possimus. Si igitur huic conditioni satisfieri nequeat, tum primo quidem tabula aequationum ab anomalia media solis pendentium pro certa habeatur, atque ex maximis differentiis, in quaecunque etiam tempora incidant, tam maxima aequatio quam correctio motus medii investigetur. Deinde considerentur observationes, quibus minima aequatio

unaris competit, ex iisque correctio anomaliae mediae exploretur, quae si perpetuo eadem resultet, quaecunque observationes adhibeantur, sive circa aequinoctium vernum sive autumnale factae, hoc certum erit indicium tabulam nostram aequationum solarium esse veritati consentaneam.

§ 27. Sin autem aliae anomaliae mediae correctiones inveniantur, prout aliae observationes in computum ducantur, tabula nostra aequationum solarium data sui parte vel augeatur vel diminuatur, scilicet singulae aequationes hujus tabulae parte sua quarta diminuantur, cum probabile sit si errent, eas in excessu peccare: eaedemque operationes hac facta mutatione repetantur, sicque patebit, utrum major an minor consensus sit proditurus? Ex ipsa autem dissensuum inaequalitate non solum utra hypothesis ad veritatem propius accedat, intelligetur, sed etiam vera quantitas aequationum solarium concludi poterit. Quae nisi adhuc satis certa videatur, novis hypothesibus propioribus fingendis, iisdemque operationibus denuo instituendis, multo certior veritatique conformis obtinebitur. Quin etiam, quo minor dubitandi locus relinquatur, postquam hoc modo omnes tabulae fuerint correctae, hae ipsae iisdem operationibus denuo subjici, atque altera vice emendari poterunt.

§ 28. Quodsi autem aliis atque aliis observationibus ad hoc negotium adhibendis diversae correctiones inveniantur, neque eae ad consensum perduci queant, hinc manifesto liquebit, in ipsis observationibus errores latere, qui nisi detegi, atque observationes certiores a minus certis dignosci queant: correctiones ex singulis repertae seorsim notentur, moreque Astronomis satis solenni inter omnes has correctiones diversas medium capiatur, ut sic correctiones tabularum, quae omnibus observationibus simul sumtis quam proxime satisfaciant, obtineantur. Cum autem tanta eclipsium lunarium multitudo, quanta opus est, fuerit collecta, calculusque primum instituendus absolutus, levi attentione adhibita plura se offerrent subsidia calculique compendia, ut superfluum foret plura hic praecepta tradere, quae vel inutilia sint futura, vel sponte occursura.

§ 29. Si quis igitur hoc calculi onus in se suscipere velit, is non solum de theoria lunae, quae ab omnibus astronomis tantopere adhuc est desiderata, maxime merebitur; sed etiam nodum in astronomia maximi momenti tam feliciter resolvet, ut nulla alia via aeque accurata solutio expectari queat. Parallaxis scilicet solis horizontalis, qua ejus vera a terra distantia determinatur, tam exacte hinc cognosci poterit, ut error ne quidem ad semissem minuti secundi assurgere possit. Cum enim ex parallaxi solis horizontali, quam $12\frac{1}{2}''$ assumseram, maxima lunae aequatio solaris pro syzygiis prodiisset $13'12''$, si ista aequatio calculo evoluto major minorve reperiatur, in eadem ratione parallaxis solis horizontalis augeri minuive debebit. Si igitur in determinatione hujus maximae aequationis solaris error supra dimidium minutum primum committi nequeat, multo minorem autem eum esse futurum puto; parallaxin solis horizontalem tam accurate hinc cognoscere licebit, ut error ne dimidium quidem minutum secundum attingat. Ponamus enim inveniri maximam aequationem solarem in syzygiis $12'30''$, haec analogia institui debebit:

$$13'12'' : 12''30''' = 12'30'' : 11''50'''$$

unde patet parallaxin solis horizontalem futuram esse $11''50'''$.

§ 30. Contra calculum hic praeceptum jure objici potest, quod tabulis lunaribus ad statum

syzygiarum accomodatis uti jubeam, cum tamen in observationibus ad medium cujusque eclipsis tempus institutis centra solis et lunae non in vera oppositione secundum longitudinem versentur. Contra hanc autem objectionem nihil aliud habeo quod respondeam, nisi quod errores calculi ex hoc capite oriundi tam sint parvi, ut ratione ad alios errores prorsus inevitabiles habita tuto negligi queant. Si enim eclipsis fuerit minima, quod evenit si centrum solis 18° fere a nodo distet, differentia longitudinum centri lunae et centri umbrae minor est 5′: cui differentiae ex tabula variationis aequatio 6″ minor respondet, neque ex tabula IV error ultra 7″ oriri potest, qui adeo illum saepe destruit. Interim tamen si jam tabulae neglectis his erroribus, qui, si eclipses sint notabiles, nullius prorsus sunt momenti, fuerint plane correctae, non difficile erit etiam harum minimarum aberrationum rationem in calculum introducere, atque tabulas a vitiis quoque inde ortis penitus purgare.

# XVI.

# Tria Capita ex Opere quodam majori inedito de theoria lunae.

---

## Caput ....

### De loco lunae ex eclipsibus lunaribus determinando.

§ 1. Quo ex formulis hactenus inventis, quibus motus lunae continetur, ad quodvis tempus erus lunae locus in coelo definiri possit, primum aliquot ejus loca cognita esse oportet, ut deineps tam longitudo media lunae quam ejus anomalia et locus nodi ad illa loca accommodari, ac raeterea vera excentricitas lunae exacte determinari possit. Si enim luna in motu suo eas sequatur egulas, quas ex theoria elicuimus, certum est, si formulae inventae ad aliquot loca observata ccommodentur, eas perpetuo cum observationibus congruere debere. Ad hoc ergo institutum ejusiodi observationes eligi conveniet, ex quibus verus lunae locus geocentricus accurate concludi queat, a ut nequidem ejus parallaxi sit opus, quippe quae postquam theoria penitus fuerit confirmata, emum exacte assignari poterit. Nullius ergo etiamnunc erunt usus neque observationes culminatios lunae, neque occultationes stellarum fixarum, quoniam ex iis sine cognita parallaxi verum lunae cum concludere non licet.

§ 2. Ad praesentem ergo scopum observationes eclipsium lunae sine dubio erunt aptissimae, iae ubivis terrarum, ubi quidem lunam conspicere licet, eaedem apparent, neque a varietate parallxeos inquinantur. Eveniunt autem hujusmodi eclipses circa oppositionem lunae et solis, in iisque itur temporis momentum, quo longitudo lunae e diametro opponitur longitudini solis: quod momenm si esset cognitum, quoniam pro eo locum solis definire liceret, hinc facillime vera longitudo nae concludi posset. Verum hoc ipsum momentum verae oppositionis in observatione non ita stincte exprimitur, sed demum ex comparatione reliquarum circumstantiarum non obvio ratiocinio ncludi potest. Quae enim in quavis eclipsi lunae attenta observatione distinguere licet, sunt ejus itium et finis; tum, si eclipsis fuerit totalis, momentum immersionis integrae et initium emersionis.

Quandoque etiam phases seu portiones obscuratas satis exacte dimetiri licet: verumtamen hujusmodi observationibus plerumque minor fides adhiberi potest, quia umbra non satis distincte terminatur.

§ 3. Repraesentet in superficie sphaerica (Fig. 205.) circulus ☊$Ss$ eclipticam, et circulus ☊$L$ orbitam lunae. Ponamus initio eclipsis centrum umbrae, seu punctum soli oppositum esse in $S$, centrum lunae vero in $L$; in fine autem eclipsis, centrum umbrae versari in $s$, centrum lunae vero in $l$. Ductis igitur arcubus $SL$ et $sl$ erit uterque aequalis summae semidiametrorum apparentium umbrae et lunae: ac propterea $SL = sl$. Dum enim eclipsis durat, tuto assumere licet, neque diametrum umbrae neque diametrum lunae apparentem ullam mutationem pati: etiamsi enim revera in utroque quaepiam variatio contingere possit, tamen ea erit tam parva, ut ob reliquos leves errores, quae in observatione evitari omnino nequeunt, attendi non mereatur. Deinde quoque consideramus locum nodi ☊ tanquam fixum, non quasi ejus motum negligeremus, sed quoniam promotiones tam solis quam lunae non veras sed relativas respectu nodi in calculum introducemus. Denique etiam durante eclipsi tam motum lunae quam solis uniformem statuemus, quae enim inaequalitas in motu lunae spatio aliquot horarum inesse potest, ea uti non ultra aliquot minuta assurgit, in hoc negotio erit imperceptibilis.

§ 4. Sit igitur tempore eclipsis semidiameter umbrae $= \alpha$, qui aequatur, uti constat, summae parallaxium lunae et solis, demto semidiametro apparente solis. Sit semidiameter lunae apparens $= \beta$, eritque tam pro initio quam pro fine eclipsis arcus $SL = sl = \alpha + \beta$. Sin autem in $SL$ fuerit initium immersionis totius lunae in umbram, et in $sl$ initium emersionis, erit quoque $SL = sl$ verum tum habebitur $SL = sl = \alpha - \beta$. Sive ergo cujuspiam eclipsis lunaris observetur initium et finis, sive immersio et emersio, siquidem fuerit totalis, utroque casu erit $SL = sl$, haecque aequalitas sufficit ad locum quemdam lunae verum eliciendum, etiamsi ipsi arcus $SL$ et $sl$ non sint cogniti.

§ 5. Ponamus ab initio eclipsis ad finem effluxisse $h$ horas, seu ab immersione usque ad emersionem, siquidem hujusmodi observationibus uti velimus. Sit vero tempore eclipsis motus horarius solis $= m''$, et motus horarius lunae $= n''$, motus autem horarius nodi in antecedentia $= k''$, qui motus ex theoria lunae jam satis prope cognita sunt colligendi, etiamsi enim theoria aliquantillum a veritate discrepet, tamen discrimen, quod inde in motum horarium redundare potest, nullius prorsus erit momenti. Cum igitur hi motus sint uniformes saltem durante eclipsi, erit a nodo ☊ computando spatium $Ss = h(m'' + k'')$, et spatium $Ll = h(n'' + k'')$. Sin autem elapsis ab initio cum centra umbrae et lunae erant in $S$ et $L$, $t$ horis, centrum umbrae sit in $\sigma$, et centrum lunae in $\lambda$, erit arcus $S\sigma = (m + k)\,t''$, et $L\lambda = (n + k)\,t''$.

§ 6. Si jam elapsis ab initio $t$ horis vera luminarium oppositio contingat, erit arcus $\lambda\sigma$ perpendicularis in eclipticam ☊$Ss$, eoque momento erit longitudo lunae e diametro opposita longitudini solis. Verum ne reductione loci lunae ad eclipticam opus sit, expediet id temporis momentum investigasse, quo arcus $\sigma\lambda$ tam ab ecliptica, quam ab orbita lunae aequales arcus abscindat, ita ut sit ☊$\sigma$ = ☊$\lambda$. Hoc enim momentum si fuerit cognitum, longitudo lunae in propria orbita aequalis esse debebit longitudini puncti soli oppositi. Pro qualibet scilicet eclipsi lunae id temporis momentum determinabimus, quo longitudo lunae in orbita exacte fit aequalis longitudini umbrae; hoc enim cognito, quia ex theoria solis locus centri umbrae constat, statim eum habebimus locum lunae in

bita, quem tabulae lunares indicare debent, neque ad hoc reductione loci lunae ad eclipticam us habebimus, uti vera oppositio postulat.

§ 7. Repraesentet ergo arcus $\sigma\lambda$ non veram oppositionem, sed eum luminarium situm, in quo cus $\Omega\lambda$ aequalis sit arcui $\Omega\sigma$, hocque eveniat elapsis post initium $SL$ horis $t$. Sit ergo hoc omento tam longitudo umbrae, quam longitudo lunae in orbita a nodo computata $\Omega\sigma = \Omega\lambda = x$, it ob $S\sigma = (m+k)\,t''$, $L\lambda = (n+k)\,t''$, arcus $\Omega S = x-(m+k)\,t''$ et arcus $\Omega L = x-(n+k)\,t''$. einde vero erit arcus $\Omega s = x+(m+k)\,(h-t)''$ et $\Omega l = x+(n+k)\,(h-t)''$. Ponatur gulus $\lambda\Omega\sigma = \varrho$, erit ex natura triangulorum sphaericorum

$$\cos SL = \cos\varrho \sin\Omega L \sin\Omega S + \cos\Omega L \cos\Omega S,\quad \cos sl = \cos\varrho \sin\Omega l \sin\Omega s + \cos\Omega l \cos\Omega s.$$

uare cum sit $SL = sl$, erit

$$\cos\Omega L \cos\Omega S - \cos\Omega l \cos\Omega s = \cos\varrho\,(\sin\Omega l \sin\Omega s - \sin\Omega L \sin\Omega S).$$

§ 8. Est vero per compositionem angulorum ut sequitur

$$\cos\Omega L = \cos x \cos(n+k)\,t'' + \sin x \sin(n+k)\,t''$$
$$\cos\Omega S = \cos x \cos(m+k)\,t'' + \sin x \sin(m+k)\,t''$$
$$\cos\Omega l = \cos x \cos(n+k)\,(h-t)'' - \sin x \sin(n+k)\,(h-t)''$$
$$\cos\Omega s = \cos x \cos(m+k)\,(h-t)'' - \sin x \sin(m+k)\,(h-t)''$$
$$\sin\Omega l = \sin x \cos(n+k)\,(h-t)'' + \cos x \sin(n+k)\,(h-t)''$$
$$\sin\Omega s = \sin x \cos(m+k)\,(h-t)'' + \cos x \sin(m+k)\,(h-t)''$$
$$\sin\Omega L = \sin x \cos(n+k)\,t'' - \cos x \sin(n+k)\,t''$$
$$\sin\Omega S = \sin x \cos(m+k)\,t'' - \cos x \sin(m+k)\,t''$$

per alias sinuum proprietates

$$\cos\Omega L \cos\Omega S = \tfrac{1}{2}\cos(\Omega S - \Omega L) + \tfrac{1}{2}\cos(\Omega S + \Omega L)$$
$$\cos\Omega l \cos\Omega s = \tfrac{1}{2}\cos(\Omega l - \Omega s) + \tfrac{1}{2}\cos(\Omega s + \Omega l)$$
$$\sin\Omega l \sin\Omega s = \tfrac{1}{2}\cos(\Omega l - \Omega s) - \tfrac{1}{2}\cos(\Omega s + \Omega l)$$
$$\sin\Omega L \sin\Omega S = \tfrac{1}{2}\cos(\Omega S - \Omega L) - \tfrac{1}{2}\cos(\Omega S + \Omega L).$$

§ 9. Cum igitur sit

$$\Omega S - \Omega L = (n-m)\,t'' \qquad \Omega S + \Omega L = 2x - (m+n+2k)\,t''$$
$$\Omega l - \Omega s = (n-m)\,(h-t)'' \qquad \Omega s + \Omega l = 2x + (m+n+2k)\,(h-t)''.$$

E ergo valoribus substitutis reperiemus

$$\left.\begin{array}{l} \cos(n-m)t'' + \cos(2x-(m+n+2k)t'') \\ -\cos(n-m)(h-t)'' - \cos(2x+(m+n+2k)(h-t)'') \end{array}\right\} = \cos\varrho \left\{\begin{array}{l} \cos(n-m)(h-t)'' - \cos(2x+(m+n+2k)(h-t)'') \\ -\cos(n-m)t'' + \cos(2x-(m+n+2k)t'') \end{array}\right.$$

qe reducta abit in

$$(1+\cos\varrho)(\cos(n-m)t'' - \cos(n-m)(h-t)'') = (1-\cos\varrho)\left(\cos(2x+(m+n+2k)(h-t)'') - \cos(2x-(m+n+2k)t'')\right).$$

At cum sit

$$\cos(2x+(m+n+2k)(h-t)'') = \cos 2x \cos(m+n+2k)(h-t)'' - \sin 2x \sin(m+n+2k)(h-t)''$$

$$\cos(2x-(m+n+2k)t'') \quad = \cos 2x \cos(m+n+2k)t'' + \sin 2x \sin(m+n+2k)t''$$

quo calculus ad sinus et cosinus angulorum satis parvorum reducitur: qui anguli cum dentur in minutis secundis, ii multiplicentur per numerum $g = 0{,}0000048481$, seu $lg = 4{,}6855749$, ut reducentur ad partes radii, qui ponitur $= 1$; eritque sinibus et cosinibus horum angulorum per series convergentes expressis

$$(1+\cos\varrho)\left(1-\tfrac{1}{2}ggtt(n-m)^2 - 1 + \tfrac{1}{2}gg(h-t)^2(n-m)^2\right) =$$

$$(1-\cos\varrho)\begin{cases} +\cos 2x\left(1-\tfrac{1}{2}gg(h-t)^2(m+n+2k)^2\right) - \sin 2x\left(g(h-t)(m+n+2k)\right) \\ -\cos 2x\left(1-\tfrac{1}{2}ggtt(m+n+2k)^2\right) \qquad - \sin 2x\cdot gt(m+n+2k) \end{cases}$$

$$= (1-\cos\varrho)\left(\tfrac{1}{2}gg(m+n+2k)^2(2ht-hh)\cos 2x - gh(m+n+2k)\sin 2x\right)$$

§ 10. Hac ergo aequatione debite tractata reperiemus

$$(1+\cos\varrho)\cdot\tfrac{1}{2}gg(n-m)^2(hh-2ht) = (1-\cos\varrho)\cdot gh(m+n+2k)\left(\tfrac{1}{2}g(m+n+2k)(2t-h)\cos 2x - \sin 2x\right)$$

seu $g(h-2t)(n-m)^2 = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varrho\,(m+n+2k)\left(g(m+n+2k)(2t-h)\cos 2x - 2\sin 2x\right)$

vel hoc modo

$$\left.\begin{aligned} gh(n-m)^2 + gh(m+n+2k)^2\cos 2x \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varrho \\ + 2(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varrho \end{aligned}\right\} = 2gt(n-m)^2 + 2gt(m+n+2k)^2\cos 2x \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varrho$$

Hinc ergo eruetur

$$2t-h = \frac{2(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varrho}{g(m+n+2k)^2\cos 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varrho + g(n-m)^2}$$

et ob $\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varrho$ tantopere parvum, erit

$$t = \tfrac{1}{2}h + \frac{(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)^2} - \frac{(m+n+2k)^3\sin 2x\cos 2x \operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)^4}$$

ubi ultimus terminus ob summam parvitatem facile negligitur.

§ 11. In hac aequatione terminus $\tfrac{1}{2}h$ designat medium totius eclipsis momentum, quod ex observationibus vel initii et finis eclipsis, vel immersionis et emersionis facile concluditur. Momentum ergo, quo longitudo lunae in orbita et longitudo umbrae in ecliptica inter se fiunt aequales post medium eclipsis incidit elapsis horis $\frac{(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)^2}$. Quamobrem si pro eclipsis momento medio computemus et longitudinem lunae in orbita, quae sit $= L$, et longitudinem umbrae, seu oppositionem solis, quae sit $= U$, ex motu horario erit illo altero momento, quo utraque longitudo fit aequalis

$$\text{longitudo umbrae} = U + \frac{m(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)^2}$$

$$\text{longitudo lunae} = L + \frac{n(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)^2}$$

unde ob aequalitatem concluditur

$$\text{longitudo lunae } L = U - \frac{(m+n+2k)\sin 2x \tan^2 \frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)} \text{ sec.}$$

§ 12. Hoc igitur jam sumus consecuti, ut pro eclipsis momento medio veram lunae longitudinem in orbita assignare valeamus. Pro isto scilicet momento quaeri debet longitudo solis vera, quae sex signis vel aucta vel minuta dabit longitudinem umbrae $U$: ab hac porro subtrahantur $\frac{(m+n+2k)\sin 2x \tan^2 \frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)}$ minuta secunda*), atque remanebit longitudo lunae in orbita tempore medio eclipsis. Ad hoc ergo nosse oportet arcum $x$, qui habetur si longitudo nodi ascendentis a longitudine centri umbrae in media eclipsi subtrahatur: quamquam autem ob theoriam nondum satis perfectam, longitudo nodi nondum exactissime est cognita; tamen hinc ista determinatio non turbabitur, quoniam sufficit locum nodi proxime saltem nosse, dum error aliquot minutorum in arcu $x$ commissus nullum sensibilem errorem in valore $\frac{(m+n+2k)\sin 2x \tan^2 \frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)}$ gignit.

§ 13. Simili modo ex tabulis lunaribus adhuc constructis satis exacte habetur angulus inclinationis $\Omega = \varrho$, ut minimus error in eo commissus nihili sit aestimandus. Quamobrem pro quovis angulo $x$ valor $\frac{1}{g}\sin 2x \tan^2 \frac{1}{2}\varrho$ satis exacte assignari et in minutis secundis exprimi poterit, quem deinceps per $\frac{m+n+2k}{n-m} = 1 + \frac{2(m+k)}{n-m}$ multiplicari oportet, ut particula a longitudine umbrae subtrahenda obtineatur. Neglecto autem isto multiplicatore $\frac{m+n+2k}{n-m}$, valor alterius $\frac{1}{g}\sin 2x \tan^2 \frac{1}{2}\varrho$ ita se habebit, ut sequens tabella exhibet:

Tabula aequationum

pro vera lunae longitudine in orbita, tempore medio eclipsis lunaris invenienda.

*Arg.* Subtrahatur longitudo nodi a longitudine umbrae, et aequatio, quam sequens tabella exhibet, applicetur ad locum soli oppositum.

| Grad. | O Sign. VI Sign. Subtrahe. | | Inclinatio orbitae ☽ ad eclipticam. |
|---|---|---|---|
| 0 | 0′ 0″ | 30 | 5° 17′ 1″ |
| 1 | 0 15,3 | 29 | 5 17 0 |
| 2 | 0 30,6 | 28 | 5 16 59 |
| 3 | 0 45,9 | 27 | 5 16 58 |
| 4 | 1 1,1 | 26 | 5 16 56 |
| 5 | 1 16,2 | 25 | 5 16 53 |
| 6 | 1 31,2 | 24 | 5 16 50 |
| 7 | 1 46,1 | 23 | 5 16 45 |
| 8 | 2 0,8 | 22 | 5 16 40 |
| 9 | 2 15,3 | 21 | 5 16 35 |
| 10 | 2 29,7 | 20 | 5 16 29 |
| | Adde: V sign. XI sign. | Grad. | |

*Scripturae in margine.* Hae autem aequationes insuper multiplicari debent per factorem $1 + \frac{2(m+k)}{n-m}$ ex motu horario inveniendum.

Multiplicatae per $2\frac{1}{6}$ dant correctionem pro longitudine lunae in ecliptica; multiplicatae autem per $\frac{2n+2k}{n-m}$ dabunt correctionem pro longitudine vera in ecliptica.

$n = 2023'' - 258'' \cos v$, $m = 148''$, $k = 8$

si $\cos v = 0$, $\frac{4062}{1875}$; si $\cos v = 1$, $\frac{3546}{1875}$;

si $\cos v = -1$, $\frac{4578}{1875}$.

*) *Scriptura ad marg.* et si a loco lunae in orbita subtrahatur part. $\sin 2x \tan^2 \frac{x}{2}\varrho$ habebitur longitudo vera in ecliptica.

§ 14. Cum autem tempore medio eclipsis luna saepe nimis distet a vera oppositione, quam ut aequationes ab angulo $\eta$ pendentes negligi possint, quo tamen calculus non mediocriter contrahitur, expediet tam locum solis quam lunae non pro momento eclipsis medio, sed pro eo temporis momento, quo longitudo lunae in orbita aequalis fit longitudini umbrae in ecliptica, supputare. Hoc ergo momentum obtinebitur, si ad tempus eclipsis medium addantur $\frac{m+n+2k}{g(n-m)^2}\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\varrho$ horae, seu $\frac{3600(m+n+2k)}{g(n-m)^2}\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\varrho$ minuta secunda temporis. Seorsim ergo evolvamus factorem $\frac{m+n+2k}{(n-m)^2}$, quippe qui ex motibus horariis determinatur, et alter factor $\frac{3600}{g}\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\varrho$ in minutis secundis ex sequenti tabella cognoscetur.

**Tabula ostendens temporis momentum,**
**quo longitudo lunae in orbita aequatur longitudini umbrae in ecliptica.**

*Arg.* Subtrahatur locus nodi a longitudine solis, et aequatio hujus tabulae applicetur momento eclipsis medio.

| 0 / VI Sign. | | | |
|---|---|---|---|
| Grad. | Adde. | Logarithm. | |
| 0 | 00000″ | $-\infty$ | 30 |
| 1 | 55166 | 4,7416734 | 29 |
| 2 | 110254 | 5,0423929 | 28 |
| 3 | 165195 | 5,2179972 | 27 |
| 4 | 219900 | 5,3422263 | 26 |
| 5 | 274294 | 5,4382170 | 25 |
| 6 | 328311 | 5,5162854 | 24 |
| 7 | 381810 | 5,5818479 | 23 |
| 8 | 434787 | 5,6382771 | 22 |
| 9 | 487183 | 5,6876924 | 21 |
| 10 | 538930 | 5,7315327 | 20 |
| | Subtrahe. | Logarithm. | Grad. |
| | | | V / XI Sign. |

Aequatio autem ex hac tabula in minutis secundis inventa multiplicari debet per $\frac{n+m+2k}{(n-m)^2}$ erpressis motibus horariis $n$, $m$ et $k$ in minutis secundis; sicque obtinebitur tempus, quo tabulae eandem lunae longitudinem in orbita indicare debent, quae reperitur pro longitudine umbrae in ecliptica.

§ 15. Interim tamen tuto uti poterimus methodo priori, qua ad eclipsis momentum medium vera longitudo lunae in sua orbita colligitur. Hoc enim tempore angulus $\eta$ seu ejus complementum ad 180° vix unquam ad 4′ exsurget, atque inaequalitas in motu lunae inde oriunda non ultra 5′ ascendet, qui error omnino erit contemnendus si perpendamus in determinatione momenti medii cujusvis eclipsis errorem unius minuti primi vix ac ne vix quidem evitari posse, unde in locum lunae error semissis minuti secundi redundat. Quamobrem superfluum foret nulliusque plane usus, si i

minutiis, quae tantum in aliquot minutis secundis consistunt, nimis anxii esse vellemus. Praeterea in hac loci lunae determinatione commode evenit, ut tempus durationis eclipsis, quo luna arcum $Ll$ confecit, nempe littera $h$ ex calculo excesserit; sicque patet eandem operationem locum habere, sive momentum medium collectum sit ex initio et fine eclipsis, sive ex immersione et emersione, sive denique ex aequalibus lunae phasibus, quibus arcus $LS$ et $ls$ inter se sint aequales. Omnes scilicet hujusmodi observationes, si exacte instituantur, idem eclipsis momentum medium praebere debent.

§ 16. Tempus autem, quo arcus $Ll$ et $Ss$ percurruntur, una cum arcuum $LS$ et $ls$ magnitudine, inserviet loco nodi propius cognoscendo, sicque tabula nodorum lunae inde emendari poterit, siquidem correctione indigeat. Cum enim arcus $SL$ et $sl$ sint aequales, et ex diametris apparentibus umbrae et lunae satis exacte dentur, sit uterque arcus $SL = sl = f$. Tum vero sit in medio eclipsis centrum umbrae in $\sigma$, et centrum lunae in $\lambda$, ac ponantur arcus $☊\sigma = x$, et $☊\lambda = y$, erit $x - y = U - L = \frac{(m+n+2k)\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\rho}{g(n-m)}$, hocque ergo discrimen, ob $\sin 2x$ et $\tang \frac{1}{2}\rho$ proxime cognitos, cum sit minimum, pro dato haberi poterit. Sit intervallum temporis ab $L$ ad $l = h$ horarum, eruntque arcus $L\lambda = l\lambda = \frac{1}{2}h(n+k)''$ et $S\sigma = \sigma s = \frac{1}{2}h(m+k)''$. Ideoque habebitur

$$☊L = y - \frac{1}{2}h(n+k)'' = x - \frac{1}{2}h(n+k)'' - \frac{(m+n+2k)\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\rho}{g(n-m)} \text{ et } ☊S = x - \frac{1}{2}h(m+k)''.$$

§ 17. Ponamus brevitatis gratia

$$\frac{1}{2}h(n+k) = a, \quad \frac{(m+n+2k)\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\rho}{g(n-m)} = c \text{ et } \frac{1}{2}h(m+k) = b$$

ut sint in triangulo sphaerico $S☊L$ latera $☊L = x - a - c$, $☊S = x - b$, $SL = f$ et ang. $☊ = \rho$; unde reperietur

$$\cos f = \cos\rho \sin(x-a-c)\sin(x-b) + \cos(x-a-c)\cos(x-b)$$

hincque eruetur

$$\cos(2x-a-b-c) = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\rho \cos(a-b+c)}{\sin^2 \frac{1}{2}\rho}.$$

Ex hac autem aequatione, quoniam levis error in angulo $\rho$ commissus fit admodum notabilis, angulus $2x - a - b - c$ non satis exacte inveniri potest. Cum igitur, si triangulum $l☊s$ consideretur, ad hanc perveniatur aequationem

$$\cos(2x+a+b-c) = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\rho \cos(a-b-c)}{\sin^2 \frac{1}{2}\rho}$$

erit illam aequationem per hanc dividendo

$$\frac{\cos(a+b) + \sin(a+b)\tang(2x-c)}{\cos(a+b) - \sin(a+b)\tang(2x-c)} = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\rho \cos(a-b+c)}{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\rho \cos(a-b-c)}$$

$$\text{seu } \tang(2x-c) = \frac{\sin(a-b)\cos(a+b)\sin c \cos^2 \frac{1}{2}\rho}{\sin(a+b)\cos f - \sin(a+b)\cos(a-b)\cos c \cos^2 \frac{1}{2}\rho}.$$

§ 18. Quamquam autem hic error in angulo $\rho$ in cosinu² $\frac{1}{2}\rho$ fit plane imperceptibilis, tamen hunc minimus error in angulo $c$ commissus inventionem anguli $2x - c$ nimis incertam reddit, ita

ut ex his observationibus solis locus nodi exacte definiri nequeat. Hancobrem in subsidium vocari debent aliae observationes, veluti si in eclipsi totali, praeter initium et finem ejus, quoque immersio et emersio observetur. Si enim tempus ab initio eclipsis ad finem elapsum sit $= h$ horarum, et semidiameter apparens umbrae $= \alpha$, ac semidiameter lunae apparens $= \beta$, erit $f = \alpha + \beta$. In immersione autem et emersione erit arcus $SL = sl = \alpha - \beta$, qui ponatur $= F$; tempus autem ab immersione ad emersionem elapsum sit $= H$ horarum. Quodsi ergo ponatur $\frac{1}{2} H(n+k) = A$, $\frac{1}{2} H(m+k) = B$, manente $\frac{(m+n+2k)\sin 2x \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)} = c$, reperietur simili modo

$$\cos(2x - A - B - c) = \frac{\cos F - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(A - B + c)}{\sin^2 \frac{1}{2}\varrho}.$$

§ 19. Si jam aequatio prius inventa

$$\cos(2x - a - b - c) = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\sin^2 \frac{1}{2}\varrho}$$

per istam dividatur, reperietur

$$\frac{\cos(2x - a - b - c)}{\cos(2x - A - B - c)} = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\cos F - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(A - B + c)},$$

in quam valor $\sin^2 \frac{1}{2}\varrho$ non amplius ingreditur. Etsi autem in ea etiamnunc terminus $\cos^2 \frac{1}{2}\varrho$ inest, tamen levis incertitudo in angulo $\varrho$, cum ipse angulus sit valde parvus, valorem termini $\cos^2 \frac{1}{2}\varrho$ non sensibiliter afficit, atque errores hinc oriundi in numeratore et denominatore fere se mutuo compensabunt. Aequatio autem inventa resolvetur in sequentem

$$\frac{\cos(a + b + c) + \sin(a + b + c)\operatorname{tang} 2x}{\cos(A + B + c) + \sin(A + B + c)\operatorname{tang} 2x} = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\cos F - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(A - B + c)}$$

ex qua valor $\operatorname{tang} 2x$, ac proinde ipse arcus $☊\sigma$, quo nodus a loco centri umbrae medio eclipsis momento distat, assignari poterit. Sit enim brevitatis gratia

$$\frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\cos F - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(A - B + c)} = d$$

$$\text{erit } \operatorname{tang} 2x = \frac{-\cos(a + b + c) + d\cos(A + B + c)}{-d\sin(A + B + c) + \sin(a + b + c)}.$$

§ 20. Invento loco nodi seu distantia $☊\sigma = x$, existente $\sigma$ loco centri umbrae momento medio eclipsis, inde porro inclinatio orbitae lunae ad eclipticam, seu angulus $☊ = \varrho$, accuratius definiri poterit. Cum enim iste angulus $\varrho$ jam tam prope sit cognitus, ut terminus $\cos^2 \frac{1}{2}\varrho$ minime a veritate discrepet, erit

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\cos(2x - a - b - c)}, \text{ seu } \cos\varrho = \frac{\cos f - \cos(x - a - c)\cos(x - b)}{\sin(x - a - c)\sin(x - b)}$$

$$\text{sive etiam } \sin^2 \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{\cos(a - b + c) - \cos f}{2\sin(x - a - c)\sin(x - b)} = \frac{\cos(a - b + c) - \cos f}{\cos(a - b + c) - \cos(2x - a - b - c)} = \frac{\sin\left(\frac{f + a - b + c}{2}\right)\sin\left(\frac{f - a + b - c}{2}\right)}{\sin(x - a - c)\sin(x - b)}.$$

Ex hac autem formula vicissim ipsa distantia $x$ ita definiri poterit, ut angulus $\varrho$ plane non ingrediatur, nisi quatenus particula minima $c$ ab eo pendet. Cum enim sit simili modo

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{\cos(A-B+c)-\cos F}{\cos(A-B+c)-\cos(2x-A-B-c)}$$

$$\text{erit } \frac{\cos(A-B+c)-\cos(2x-A-B-c)}{\cos(A-B+c)-\cos F} = \frac{\cos(a-b+c)-\cos(2x-a-b-c)}{\cos(a-b+c)-\cos f}.$$

Ex hac autem aequatione difficilius valor ipsius $x$ eruitur, unde methodo ante tradita potius uti conveniet.

§ 21. Qui autem laborem suscipere velit, atque ex aequationibus successive angulum $\varrho$ et particulam $c$ eliminare, is tandem sequentem reperiet aequationem

$$\tang x = \frac{(\cos F-\cos(A-B))(\cos f-\cos(a+b))\sin(A+B)\sin(a-b)-(\cos f-\cos(a-b))(\cos F-\cos(A+B))\sin(a+b)\sin(A-B)}{(\cos f-\cos(a-b))(\cos F+\cos(A+B))\sin(a+b)\sin(A-B)-(\cos F-\cos(A-B))(\cos f+\cos(a+b))\sin(A+B)\sin(a-b)}.$$

Inventa autem distantia $x$ erit porro

$$c = \frac{(\cos f-\cos(a-b))\sin(a+b)\sin 2x}{\cos f\sin(a-b)+\sin 2b\cos 2x-\cos f\sin(a+b)\cos 2x}$$

$$\text{et } \tang^2 \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{\cos(a-b)-\cos f-c\sin(a-b)}{\cos f-\cos(a+b)\cos 2x+c\sin(a+b)\cos 2x-\sin(a+b)\sin 2x-c\cos(a+b)\sin 2x}$$

$$\text{seu } \tang^2 \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{\cos(a-b)-c\sin(a-b)-\cos f}{\cos f-\cos(2x-a-b)-c\sin(2x-a-b)}.$$

Sicque ex observationibus initii et finis eclipsis, itemque immersionis et emersionis in eclipsi totali, tam locus nodi quam inclinatio orbitae lunae ad eclipticam definiri poterunt. Interim tamen verendum est, ne istae formulae complicatae, ob minimos etiam errores in observationibus commissos, nimium a veritate seducant, ac fortasse saepe tutius erit formulis ante inventis uti.

§ 22. Non difficile hinc erit momentum quoque verae oppositionis solis ac lunae assignare, quo scilicet longitudo centri lunae congruat cum longitudine umbrae. Accidat enim vera oppositio $z$ horis post medium eclipsis momentum; et cum in medio eclipsis esset longitudo centri umbrae a nodo

$$☊\sigma = x \quad\text{et}\quad ☊\lambda = x - \frac{(m+n+2k)\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)},$$

erit momento verae oppositionis longitudo centri umbrae a nodo $= x + z(m+k)''$ et distantia lunae a nodo

$$= x + z(n+k)'' - \frac{(m+n+2k)\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)}.$$

Sit brevitatis gratia

$$c = \frac{(m+n+2k)\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)},$$

erit ex conditione verae oppositionis

$$\cos\varrho = \frac{\tang(x+z(m+k)'')}{\tang(x-c+z(n+k)'')} = \frac{(\tang x+\tang z(m+k)''):(1-\tang x\tang z(m+k)'')}{(\tang x+\tang(z(n+k)''-c)):(1-\tang x\tang(z(n+k)''-c))}.$$

Cum autem anguli $c$, $z(m+k)$ et $z(n+k)$ sint minimi, eorum tangentes ipsis angulis in parte radii $=1$ conversis aequantur, quae conversio fit angulos per $g = 0,0000048481$ multiplicando unde fiet

$$\frac{\cos\varrho\,(\tang x + gz(n+k) - cg)}{1 - g(z(n+k) - c)\tang x} = \frac{\tang x + gz(m+k)}{1 - gz(m+k)\tang x}$$

seu $$\cos\varrho \tang x + gz(n+k)\cos\varrho - cg\cos\varrho - gz(m+k)\cos\varrho\tang^2 x =$$

$$\tang x + gz(m+k) - g(z(n+k) - c)\tang^2 x$$

hincque eruitur

$$gz = \frac{(1-\cos\varrho)\tang x + gc\tang^2 x + gc\cos\varrho}{(n+k)\cos\varrho - (m+k)\cos\varrho\tang^2 x - (m+k) + (n+k)\tang^2 x}$$

$$\text{seu } gz = \frac{(1-\cos\varrho)\sin x\cos x + gc\sin^2 x + gc\cos\varrho\cos^2 x}{(n+k)\cos\varrho\cos^2 x - (m+k)\cos\varrho\sin^2 x - (m+k)\cos^2 x + (n+k)\sin^2 x}$$

§ 23. Quia vero est $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ et $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

erit $$gz = \frac{(1-\cos\varrho)\sin 2x + gc - gc\cos 2x + gc\cos\varrho + gc\cos\varrho\cos 2x}{(n+k)(1+\cos\varrho) - (n+k)\cos 2x(1-\cos\varrho) - (m+k)(1+\cos\varrho) - (m+k)\cos 2x(1-\cos\varrho)}$$

seu ob $1-\cos\varrho = 2\sin^2\frac{1}{2}\varrho$ et $1+\cos\varrho = 2\cos^2\frac{1}{2}\varrho$ habebitur

$$gz = \frac{\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho + gc - gc\cos 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}{n - m - (m+n+2k)\cos 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}.$$

Cum autem sit $$gc = \frac{(m+n+2k)\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}{n-m},$$ erit

$$gz = \frac{2(n+k)\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho - (m+n+2k)\sin 2x\cos 2x\tang^4\frac{1}{2}\varrho}{(n-m)^2 - (n-m)(m+n+2k)\cos 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho}$$

ideoque proxime $gz =$

$$\frac{2(n+k)}{(n-m)^2}\sin 2x\tang^2\tfrac{1}{2}\varrho - \frac{(m+n+2k)}{(n-m)^2}\sin 2x\cos 2x\tang^4\tfrac{1}{2}\varrho + \frac{2(n+k)(m+n+2k)}{(n-m)^3}\sin 2x\cos 2x\tang^4\tfrac{1}{2}\varrho$$

ob terminos autem posteriores minimos erit

$$z = \frac{2(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x\tang^2\tfrac{1}{2}\varrho$$

qui numerus indicabit partem horae ad momentum eclipsis medium addendam, ut prodeat momentum verae oppositionis. Vel ad hoc obtinendum, ad momentum eclipsis medium addantur tot minuta secunda, quot haec expressio $\frac{7200(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x\tang^2\frac{1}{2}\varrho$ continet unitates. In vera autem oppositione longitudo tam lunae quam centri umbrae a nodo computata erit

$$x + \frac{2(m+k)(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x\tang^2\tfrac{1}{2}\varrho$$

seu si medio eclipsis fuerit longitudo umbrae $= U$, erit in oppositione utraque longitudo

$$= U + \frac{2(m+k)(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x\tang^2\tfrac{1}{2}\varrho \text{ min. sec.}$$

§ 24. Interest deinde etiam in contemplatione eclipsium nosse angulum apparentem, quem semita lunae cum ecliptica constituit. Hic scilicet centrum umbrae in ecliptica tanquam immobile spectatur, et angulus quaeritur, quem luna in orbita sua secundum motum relativum cum ecliptica format. Ad hunc inveniendum sit (Fig. 206) $\sigma$ centrum umbrae in vera oppositione, et $\lambda$ centrum lunae, ita ut arcus $\lambda\sigma$ sit ad eclipticam perpendicularis. Sit ut hactenus, medio eclipsis momento longitudo umbrae a nodo $= x$, erit ut vidimus in vera oppositione arcus

$$☊\sigma = x + \frac{2(m+k)(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varrho = x + d'',$$

posito brevitatis gratia

$$d = \frac{2(m+k)(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varrho \cdot$$

Jam tempusculo infinite parvo procedat centrum umbrae per spatiolum $\sigma s = u$, et luna per $\lambda l = \nu u$, existente $\nu = \frac{n+k}{m+k}$. Ponatur angulus $☊\lambda\sigma = \varphi$, erit $\cos\varphi = \cos(x+d)\sin\varrho = \cos x \sin\varrho - gd\sin x\sin\varrho$. Jam ex $l$ in $\sigma\lambda$ productum demittatur perpendiculum $lu$, erit ob $\lambda l$ infinite parvum,

$$lu = \nu u \sin\varphi \quad \text{et} \quad \lambda u = \nu u \cos\varphi = \nu u(\cos x\sin\varrho - gd\sin x\sin\varrho);$$

at erit

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2 x\sin^2\varrho + 2gd\sin x\cos x\sin^2\varrho,$$

ideoque ob $\sin^2\varrho$ valde parvum

$$\sin\varphi = \cos\varrho + \tfrac{1}{2}\sin^2 x\sin\varrho\operatorname{tang}\varrho + gd\sin 2x\sin\varrho\operatorname{tang}\varrho.$$

§ 25. Jam ad motum relativum repraesentandum removeamus totum systema motu sibi parallelo, ut punctum $s$ perveniat in $\sigma$, et $l$ in $t$, eritque $t$ locus centri lunae ex centro umbrae $\sigma$ spectatus, ideoque interea centrum lunae ex $\lambda$ in $t$ pervenisse et arcum $\lambda t$ descripsisse censebitur; ac propterea angulus $\lambda tu$ erit ille angulus, quem orbita lunae apparens cum ecliptica facere videbitur; erit autem $lt = u$, ideoque $tu = \nu u\sin\varphi - u$. Quare ob $\lambda u = \nu u\cos\varphi$, reperietur tangens anguli quaesiti $ut\lambda$, nempe

$$\operatorname{tang} ut\lambda = \frac{\nu\cos\varphi}{\nu\sin\varphi - 1} = \frac{(n+k)\cos\varphi}{(n+k)\sin\varphi - m - k}, \text{ seu } = \frac{(n+k)\sin\varrho(\cos x - gd\sin x)}{(n+k)\cos\varrho + \frac{1}{2}(n+k)\sin^2 x\sin\varrho\operatorname{tang}\varrho - m - k}.$$

Facilius autem hic angulus reperietur ex angulo $\varphi$, quem ante investigari oportebit, ex formula $\cos\varphi = \cos(x+d)\sin\varrho$, existente

$$d = \frac{2(m+k)(n+k)}{g(n-m)^2}\sin 2x\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varrho;$$

et posito $\nu = \frac{n+k}{m+k}$ erit tang: anguli quaesiti $= \frac{\nu\cos\varphi}{\nu\sin\varphi - 1}$: Potest quoque particula $d$ prorsus negligi, cum perinde sit, sive ista inclinatio apparens ad medium eclipsis momentum, sive ad veram oppositionem supputetur.

§ 26. Quo igitur has formulas in usum vocare queamus, requiritur, ut tempore eclipsis veros motus horarios tam lunae quam solis et nodi cognoscamus, cui investigationi sequens caput est destinatum. Interim tamen juvabit hic valorem medium horum motuum perpendisse. Ex tabulis ergo astronomicis invenimus motum medium horarium solis $m = 2'27''50''' = 147\tfrac{5}{6}'' = 147'',833$; motum medium horarium lunae $n = 32'56''28''' = 1976\tfrac{7}{15}'' = 1976'',4666$, et motum horarium

medium nodi $= 7'' 56''' = 7\frac{14}{15}'' = 7'',9333$. Hi valores, quia a veris nunquam adeo notabiliter discrepant, sufficiunt ad formulam, quam supra (§ 13) eruimus, ad longitudinem lunae in orbita, tempore medio eclipsis inveniendam. Cum enim sit

$$m = 147,833 \qquad \text{erit } m + n + 2k = 2140,166$$
$$n = 1976,466 \qquad n - m = 1828,633$$
$$k = 7,933$$

ideoque coëfficiens $\frac{m+n+2k}{n-m} = 1,17036 = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{300} + \frac{1}{3000}$. Quamobrem haec habebitur

Tabula aequationum

pro vera lunae longitudine in orbita tempore eclipsis medio invenienda.

*Arg.* Subtrahatur longitudo nodi a longitudine solis, et aequatio, quam sequens tabula praebet, ad locum soli oppositum applicetur.

| 0 VI Sign. Grad. | Subtrah. | |
|---|---|---|
| 0 | 0′ 0″ | 30 |
| 1 | 0 18 | 29 |
| 2 | 0 36 | 28 |
| 3 | 0 54 | 27 |
| 4 | 1 12 | 26 |
| 5 | 1 29 | 25 |
| 6 | 1 47 | 24 |
| 7 | 2 4 | 23 |
| 8 | 2 21 | 22 |
| 9 | 2 38 | 21 |
| 10 | 2 55 | 20 |
| | Adde | Grad. V XI Sign. |

§ 27. Ex hac ergo tabula satis exacte locus lunae in sua orbita ad medium cujusque eclipsis momentum assignari poterit, etiamsi motus horarius verus diversus sit a medio. Quanquam enim verus motus horarius lunae a medio fere 5′, et verus motus horarius solis a medio 5″ discrepare potest, tamen inde in coëfficientem $\frac{n+m+2k}{n-m}$ non adeo magnum discrimen redundat. Augeamus namque, ut discrimen fiat maximum, valorem litterae $n$, 300″, at valorem litterae $m$ minuamus 5, ita ut numerator augmentum capiat 295″ et denominator 305″, eritque $\frac{n+m+2k}{n-m} = \frac{2435}{2134} = 1,141$(, cujus valoris defectus a praecedente medio est $= 0,02931 = \frac{1}{34}$. Hinc ergo aequatio maxima distantiae 10° solis a nodo respondens tantum 5″ diminuetur, quod discrimen praecipue in evolutione

eclipsium penitus est contemnendum, propterea quod ex observationibus medium eclipsis momentum tam accurate definire non licet, ut error 5″ ullius censendus sit momenti. Interim tamen non difficile erit etiam hunc errorem, postquam veros motus horarios determinaverimus, penitus evitare.

§ 28. Aliter vero est comparata ratio reliquarum formularum, quas in hoc capite elicuimus, quae ex valoribus mediocribus litterarum $n, m, k$ sine notabili errore ad usum vocari nequeunt. In his scilicet formulis littera $n$, quae maximis variationibus est obnoxia, non eundem obtinet dimensionum numerum, tam in numeratore quam in denominatore, quemadmodum in casu tractato evenit, ubi ob mutabilitatem litterae $n$ numerator et denominator coëfficientis $\frac{n+m+2k}{n-m}$ fere in eadem ratione mutabantur. Hinc sine exacta motuum horariorum cognitione neque temporis momentum, quo longitudo in orbita aequatur longitudini umbrae in ecliptica, definiri poterit, neque momentum verae oppositionis luminarium, neque etiam angulus, quem apparens lunae semita cum ecliptica constituit. Multo minus licebit ex observationibus eclipsium verum locum nodorum et inclinationem orbitae lunaris ad eclipticam assignare. Quamobrem in sequenti capite tam veros motus horarios solis, lunae et lineae nodorum investigabimus, quam diametros apparentes et lunae et umbrae terrestris, quae a parallaxi lunae pendet.

## Caput ....

### De vero loco nodi atque vera inclinatione orbitae lunaris ad eclipticam.

§ 1. Antequam valores litterarum $\alpha$, $\delta$, $\varepsilon$, quae in expressione loci lunae $\varphi$ adhuc insunt, per observationes lunae extra syzygias factas definiamus, conveniet verum nodi ascendentis locum cum ejus vera ad eclipticam inclinatione determinari, quoniam hoc commodissime ex observationibus eclipsium totalium effici potest. Ad hoc ergo primo eligamus eclipsin sextam, cujus cum duplex habeatur observatio, sumamus inter utramque media momenta, quae erunt

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A. 1722 Jun. $28^d$ | initium: | $12^h 16' 28''$ | immersio: $13^h 24' 4''$ |
| | | finis: | 15 36 13 | emersio: 14 27 29 |
| et medium erat | A. 1722 Jun. $28^d$ | | 13 56 0 | tempore vero |
| seu | A. 1722 Jun. $28^d$ | | 13 58 41 | tempore medio. |

Pro hoc tempore medio reperitur ex meis tabulis

longitudo nodi ☊ media $3^s 2^\circ 20' 43''$

cujus aequationes cum inclinatione ad eclipticam erunt

| | Aequat. ☊ | Inclinatio |
|---|---|---|
| Anomalia media lunae | $-$ 0′ 54″ | |
| Anom. media solis | $-$ 0 12 | |
| long. ☊ a longit. solis | $+$ 13 46 | 5 16 $59\frac{1}{2}$ |
| long. ☉ a longit. ☽ | 0 0 | $-$ 42 |
| long. ☊ a longit. ☽ | $+$ 1 1 | $+$ 37 |

Hinc erit ex tabulis longitudo nodi vera $= 3^s 2^\circ 34' 24''$ et inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam $= 5\ 16\ 54.$

§ 2. Ut igitur ex observatione quoque has res eruamus, primo diametrum solis apparentem et ejus parallaxin quaeramus, ex ejus anomalia excentrica

$$V = 11^s 28^0 25' 22'', \text{ unde fit } \sin V = -\sin 1^0 34' 38'' \text{ et } \cos V = +\cos 1^0 34' 38''.$$

Erat ergo diameter solis apparens $= 1933'' - 32'',2 = 1901'' = 31'41''$, ejus ergo semidiameter apparens $= 15'50\frac{1}{2}''$. Porro autem ejus parallaxis horizontalis erit $= 12''$. Tum vero motus horarius solis erit $= 143'' = 2'23''$.

§ 3. Pro luna vero, cum sit ejus anomalia excentrica

$$v = 4^s 26^0 26' 6'', \ \sin v = +\sin 33^0 33' 54'', \ \cos v = -\cos 33^0 33' 54'',$$

reperietur secundum praecepta supra data

| | |
|---|---|
| diameter lunae apparens . . . . . | $= 33' 15''$ |
| semidiameter apparens . . . . . . | $= 16\ 37\frac{1}{2}$ |
| parallaxis lunae horizontalis. . . . | $= 60\ 18$ |

Tum vero quoque invenietur

| | |
|---|---|
| motus lunae horarius verus. . . . | $= 37\ 20$ |
| motus autem horarius nodi erit . . | $= 0\ 8.$ |

Jam ad semidiametrum umbrae inveniendum, secundum regulam cognitam

| | |
|---|---|
| ad parallaxin lunae horizontalem . | $= 60\ 18$ |
| addatur parallaxis solis . . . . . . | $= 12$ |
| summa | $= 60\ 30$ |
| subtrahatur semidiameter solis . . | $= 15\ 50\frac{1}{2}$ |
| eritque semidiameter umbrae . . . | $= 44\ 39\frac{1}{2}$ |

§ 4. Ut igitur formulas supra Cap.... inventas ad hunc casum accomodemus, erit

| | |
|---|---|
| semidiameter umbrae . . . . . . . . . | $\alpha = 44' 39\frac{1}{2}'' = 2679'',5$ |
| semidiameter lunae apparens . . . . . | $\beta = 16\ 37\frac{1}{2} = 997,5$ |
| ergo pro initio ac fine eclipsis . . . . | $\alpha + \beta = 3677'' = f$ |
| et pro immersione et emersione . . . | $\alpha - \beta = 1682 = F$ |
| tempus ab initio eclipsis ad finem . . | $h = 3^h 19' 45'' = 3^h, 32916$ |
| tempus ab immersione ad emersionem | $H = 1\ \ 3\ 25 = 1, 05694$ |
| motus horarius solis . . . . . . . . . . | $m = 143$ |
| motus horarius lunae . . . . . . . . . | $n = 2240$ |
| motus horarius nodi . . . . . . . . . . . | $k = 8$ |

ergo erit $m + k = 151$, $n + k = 2248$, $m + n + 2k = 2399$ et $n - m = 2097$; unde invenitu

$$lh = 0{,}5223355, \quad la = 3{,}5731018, \quad lA = 3{,}0748184$$
$$lH = 0{,}0240521, \quad lb = 2{,}4002825, \quad lB = 1{,}9019991$$

ergo $a = 3742''$, $b = 251''$, $A = 1188''$ et $B = 80''$. Cum jam porro sit

| | |
|---|---|
| longitudo umbrae. . . . . . . . . . . . | $= 9^s 6^0 51' 7''$ |
| et longitudo nodi vera tabularis . . . . | $= 3\ 2\ 34\ 24$ |

erit valor vero proximus . . . . . . $x = 6^s\,4^0\,16'\,43''$

seu a nodo descendente computando $x = \quad 4\ 16\ 43$

quem valorem autem nunc accuratius definiri oportet.

§ 5. Deinde cum inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam jam prope sit

$$\varrho = 5^0\,16'\,54''$$

erit ejus semissis $\frac{1}{2}\varrho = 2\ 38\ 27$

et distantiae $x$ duplum $2x = 8\ 33\ 26$

unde quaeratur angulus ille parvus $c = \frac{(m + n + 2k)\sin 2x \tang^2 \frac{1}{2}\varrho}{g(n-m)}$ sec. existente $lg = 4{,}6855749$, qui invenitur $c = 75'' = 1'\,15''$.

Jam quaerantur porro anguli: $a + b = 3993'' = 1^0\ 6'\,33''$; $a + b + c = 1^0\ 7'\,48''$

$A + B = 1268 \ = 0\ 21\ \ 8$ ; $A + B + c = 0\ 22\ 23$

$a - b = 3491 \ = 0\ 58\ 11$ ; $a - b + c = 0\ 59\ 26$

$A - B = 1108 \ = 0\ 18\ 28$ ; $A - B + c = 0\ 19\ 43$

et anguli $f = 1\ \ 1\ 17$ $\quad F = 0\ 28\ \ 2$

ex quibus quaeratur $d = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\cos F - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(A - B + c)}$ fietque $ld = 0{,}001647$, et cum sit

$$\tang 2x = \frac{d\cos(A + B + c) - \cos(a + b + c)}{\sin(a + b + c) - d\sin(A + B + c)}$$

hinc autem reperitur $x = 8^0 22'\,45''$, qui valor fere duplo est major, quam ex tabulis invenitur. Sin autem utamur formula

$$\cos(2x - a - b - c) = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\sin^2 \frac{1}{2}\varrho}$$

invenitur $x = 3^0\,19'\,59''$; unde patet ex his formulis nimis esse lubricum locum nodi assignare.

§ 6. Certior videtur formula alia supra inventa

$$\frac{\cos(a + b) + \sin(a + b)\tang(2x - c)}{\cos(a + b) - \sin(a + b)\tang(2x - c)} = \frac{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b + c)}{\cos f - \cos^2 \frac{1}{2}\varrho \cos(a - b - c)}$$

ex qua calculo subducto reperitur $2x = 8^0\,21'\,52''$ et $x = 4^0\,10'\,56''$, qui valor ab eo, quem tabulae exhibent $x = 4^0\,16'\,43''$ deficit $5'\,47''$, ita ut locus nodi medius hac particula $5'\,47''$ promovendus videatur. Hac autem correctione adhibita, cum sit

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{\cos(a - b + c) - \cos f}{2\sin(x - a - c)\sin(x - b)} = \frac{\sin\frac{f + a - b + c}{2}\sin\frac{f - a + b - c}{2}}{\sin(x - a - c)\sin(x - b)}$$

hi autem anguli nimis sunt parvi, quam ut inde inclinatio vera recte concludi possit.

§ 7. Quoniam si hac ultima methodo utamur, immersionis et emersionis nulla ratio habetur, eclipses quoque partiales ad hunc scopum adhibere poterimus, quae etiam erunt aptiores ad inclinationem definiendam, cum anguli in denominatore $x - a - c$ et $x - b$ non fiant adeo parvi. Sumamus ergo eclipsin decimam

A. 1731 Jun. $19^d$ init. $13^h\,14'\,21''$ / fin. $14\ 40\ 41$ medium $13^h\,57'\,31''$ t. v.

at medium A. 1731 Jun. $19^d$ $13^h\,58'\,15''$ tempore medio.

Pro hoc tempore ex tabulis meis colligitur

longitudo nodi media . . . . . . . . $9^s 8^0 45' 38''$

| cujus correctiones sunt | Long. ☊ | Inclin. |
|---|---|---|
| anom. media lunae . . . . . | $-$ 1′ 12″ | |
| anom. media solis . . . . . . | $-$ 1 19 | |
| distantia ☊ a ☉. . . . . . . | $-$ 31 52 | $5^0 16' 35''$ |
| dist. ☉ a ☽. . . . . . . . . | 0 0 | $-42$ |
| dist. ☊ a ☽. . . . . . . . . | $-$ 2 23 | $+36$ |
| | $-$ 36′ 46″ | $\varrho = 5^0 16' 29''$ |

et longit. ☊ vera $= 9^s\ 8^0 8' 52''$

longit. umbrae $= 8\ 28\ 5\ 41$ $\qquad \frac{1}{2}\varrho = 2^0 38' 15''$

hinc erit $x = -10\ 3\ 11$.

§ 8. Jam est porro

$$V = 11^s 19^0 38' 30'' \qquad \cos V = +\cos 10^0 21' 30''$$
$$v = 4\ 12\ 54\ 33 \qquad \cos v = -\cos 47\ 5\ 27$$
$$2v = 8\ 25\ 49\ 6 \qquad \cos 2v = -\cos 85\ 49\ 6$$
$$v - V = 4\ 23\ 16\ 3 \qquad \cos(v - V) = -\cos 36\ 43\ 57$$

Unde invenitur:
diameter solis apparens $= 31' 41''$
parallaxis solis horizontalis $= 12$
motus horarius solis $= 2\ 23 = m = 143''$
diameter lunae apparens $= 32\ 55$
parallaxis lunae horizontalis $= 59\ 38$
motus lunae horarius $= 36\ 35 = n = 2195$

Ex his fiet:
semidiameter umbrae $\alpha = 44\ 0 - \frac{1}{2}$
semidiam. lunae apparens $\beta = 16\ 27 + \frac{1}{2}$
ergo $\alpha + \beta = 60\ 27 = f$
duratio porro eclipsis est $h = 1{,}4389$ horas
atque ob $a = \frac{1}{2}h(n+k)$ fiet $a = 1585'' = 26' 25'$
et $b = \frac{1}{2}h(m+k)$ $\quad b = 109 = 1\ 49$

§ 9. Cum jam sit $n - m = 2052$ et $m + n + 2k = 2354$ atque $2x = -20^0 6' 22''$ et $\frac{1}{2}\varrho = 2^0 38' 15''$, reperietur particula illa $c = -2' 53''$. Deinde, quia habemus

$$a + b = 28' 14'',\ a - b = 24' 36'',\ a - b + c = 21' 43'' \text{ et } a - b - c = 27' 29''$$

reperietur
$$-\operatorname{tang}(2x - c) = \frac{120}{39776 \operatorname{tang}(a+b)},$$
unde colligitur
$$-(2x - c) = 20^0 10' 14'' = -2x + c = -2x - 2' 53''$$
ideoque $\quad 2x = -20^0 13' 7''$ et $x = -10^0 6' 34''$. Erat autem per tabulas

$$x = -10\ 3\ 11$$
$$\text{diff. } 3\ 23$$

Quare longitudo nodi vera hoc tempore non $9^s 8^0 8' 52''$, ut tabulae praebent, sed $9^s 8^0 12' 15''$ scilicet $3' 23''$ promotior esse debebat. Hinc ergo longitudo media nodi tabularis $3' 23''$ augeri debere videtur, cum ante augmentum $5' 47''$ esset inventum; ita ut vix dubitari liceat, quin ad longitudines nodi in tabulis exhibitas nonnulla minuta prima adjici debeant. Hinc autem porro ob angulos $x - a - c = -10^0 30' 6''$ et $x - b = -10^0 8' 23''$ reperitur certius $l \sin^2 \frac{1}{2}\varrho = 7{,}3218378$, $l \sin \frac{1}{2}\varrho = 8{,}6609189$ et $\frac{1}{2}\varrho = 2^0 37' 21''$, et hoc tempore inclinatio $\varrho = 5^0 14' 42''$, quae a tabulari deficit $1' 47''$.

§ 10. Verumtamen ob hoc ipsum, quod hic tantum initium ac finis eclipsis in calculum inducitur, huic determinationi non admodum confidere licet; propterea quod reipsa tres habemus quantitates incognitas $x$, $\varrho$ et $c$, ad quas definiendas duae aequationes ex initio ac fine eclipsis deductae non sufficiunt. Etsi enim valorem ipsius $c$ hic jam tanquam cognitum assumsimus, notandum tamen est ex minimo errore in eo commisso errores satis grandes in determinationes arcuum $x$ et $\varrho$ irrepere posse. Vulgo quidem, si eclipsis partialis adhibetur, quantitas maximae obscurationis insuper in subsidium vocari solet, quae quoniam per observationem exactissime assignari nequit, expedire videtur, eclipsibus totalibus, in quibus tam initium ac finis, quam immersio et emersio omni cura sunt observata, ad hoc institutum uti. Ne autem summa formularum supra inventarum complicatio calculum impediat, ternas aequationes, quas observationes initii, finis et immersionis suppeditant contemplemur, aliamque methodum aperiamus, ex iis immediate quantitates incognitas $x$, $\varrho$ et $c$ determinandi.

§ 11. Sit tempore eclipsis medio motus solis horarius $= m$

motus lunae horarius $= n$

motus nodi horarius $= k = 8$

semidiameter umbrae $= \alpha$, semidiameter lunae $= \beta$; $\alpha + \beta = f$, $\alpha - \beta = F$

tempus ab initio eclipsis ad finem elapsum $= h$ hor.

tempus ab immersione ad emersionem $= H$ hor.

ponaturque

$$a = \tfrac{1}{2} h (n + k) \qquad A = \tfrac{1}{2} H (n + k)$$

$$b = \tfrac{1}{2} h (m + k) \qquad B = \tfrac{1}{2} H (m + k)$$

Tum sint incognitae quantitates

distantia nodi ☊ a centro umbrae $= x$

distantia nodi ☊ a centro lunae $= y$

inclinatio orbitae lunaris ad eclipt. $= \varrho$

atque habebuntur hae aequalitates

$$\cos\varrho = \frac{\cos f - \cos(y - a)\cos(x - b)}{\sin(y - a)\sin(x - b)} = \frac{\cos f - \cos(y + a)\cos(x + b)}{\sin(y + a)\sin(x + b)}$$

itemque

$$\cos\varrho = \frac{\cos F - \cos(y - A)\cos(x - B)}{\sin(y - A)\sin(x - B)} = \frac{\cos F - \cos(y + A)\cos(x + B)}{\sin(y + A)\sin(x + B)}$$

§ 12. Quatuor harum formularum, quibus idem valor $\cos\varrho$ exprimitur, sufficiet tres assumsisse, cum quarta jam sponte in iis involvatur. Manifestum autem est, si binarum incognitarum $x$ et $y$ alteram eliminare voluerimus, ut unica in aequatione supersit, expressionem esse prodituram tantopere complicatam, ut per calculum difficillime explicetur. Rejecta ergo praevia alterius incognitae eliminatione ope regulae *falsi* dictae, utriusque valorem simul per fictas hypotheses definiamus, quod eo promtius fieri poterit, cum utriusque valor jam proxime constet. Quae operatio, quo clarius perspiciatur, eam statim ad eclipsin totalem A. 1722 accommodemus. Erit ergo $f = 1^0 1' 17''$, $F = 0^0 28' 2''$, $a = 1^0 2' 22''$, $b = 4' 11''$, atque $A = 19' 48''$, $B = 1' 20''$. Proxime vero jam constat esse $x = 4^0 16' 43''$ et $y = x - c = 4^0 15' 28''$. Sit autem revera $x = 4^0 16' 43'' - p'$ et $y = 4^0 15' 28'' - q'$; et ad correctiones $p$ et $q$ inveniendas constituantur tres hypotheses:

| I. | II. | III. |
|---|---|---|
| $x = 4^0\,16'\,43''$ | $x = 4^0\,16'\,43''$ | $x = 4^0\;\;6'\,43''$ |
| $y = 4\;\;15\;\;28$ | $y = 4\;\;\;5\;\;28$ | $y = 4\;\;15\;\;28$ |

Verum postea alias hypotheses fingi conveniet.

§ 13. Pro his jam ternis hypothesibus evolvantur singuli valores pro $\cos\varrho$ inventi, ex iisque colligi poterunt ii valores, qui ex positis veris valoribus ipsarum $y$ et $x$ essent produituri, qui deinde inter se aequales sunt ponendi. Commodius autem erit his formulis uti

$$\text{I. } \sin^2\tfrac{1}{2}\varrho = \frac{-\sin\frac{1}{2}(x - y + a - b - f)\sin\frac{1}{2}(x - y + a - b + f)}{\sin(y - a)\sin(x - b)}$$

$$\text{II. } \sin^2\tfrac{1}{2}\varrho = \frac{-\sin\frac{1}{2}(x - y - a + b - f)\sin\frac{1}{2}(x - y - a + b + f)}{\sin(y + a)\sin(x + b)}$$

$$\text{III. } \sin^2\tfrac{1}{2}\varrho = \frac{-\sin\frac{1}{2}(x - y + A - B - F)\sin\frac{1}{2}(x - y + A - B + F)}{\sin(y - A)\sin(x - B)}$$

$$\text{IV. } \sin^2\tfrac{1}{2}\varrho = \frac{-\sin\frac{1}{2}(x - y - A + B - F)\sin\frac{1}{2}(x - y - A + B + F)}{\sin(y + A)\sin(x + B)}$$

Cum jam sit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 1^0\;\;2'\,22''$ | | $A = 0^0\,19'\,48''$ |
| $b = 0\;\;4\;\;11$ | atque | $B = 0\;\;1\;\;20$ |
| $a - b = 0\;\;58\;\;11$ | | $A - B = 0\;\;18\;\;28$ |
| $f = 1\;\;1\;\;17$ | | $F = 0\;\;28\;\;2$ |

erit

| | |
|---|---|
| $a - b + f = \;\;1^0\,59'\,28''$ | $A - B + F = \;\;0^0\,46'\,30''$ |
| $a - b - f = -0\;\;3\;\;6$ | $A - B - F = -0\;\;9\;\;34$ |
| $\frac{1}{2}(a - b + f) = \;\;0\;\;59\;\;44$ | $\frac{1}{2}(A - B + F) = \;\;0\;\;23\;\;15$ |
| $\frac{1}{2}(a - b - f) = -0\;\;1\;\;33$ | $\frac{1}{2}(A - B - F) = -0\;\;4\;\;47.$ |

§ 14. Jam secundum ternas hypotheses sit

| | I. | II. | III. | revera |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}(x - y) =$ | $0'\,38''$ | $0'\,38''$ | $0'\,28''$ | $0'\,38'' - p''$ |
| $\frac{1}{2}(x + y) =$ | $4^0\,16\;\;0$ | $4^0\,11\;\;0$ | $4^0\,16\;\;0$ | $4^0\,16\;\;0 - q'$ |
| $x =$ | $4\;\;16\;\;38$ | $4\;\;11\;\;38$ | $4\;\;16\;\;28$ | |
| $y =$ | $4\;\;15\;\;22$ | $4\;\;10\;\;22$ | $4\;\;15\;\;32$ | |

| | I. | II. | III. |
|---|---|---|---|
| I. | $\frac{\sin 0'55''.\ \sin 1^0 0'22''}{\sin 3^0 13'0''.\ \sin 4^0 12'27''}$ | $\frac{\sin 0'55''.\ \sin 1^0 0'22''}{\sin 3^0 8'0''.\ \sin 4^0 7'27''}$ | $\frac{\sin 1'5''.\ \sin 1^0 0'12''}{\sin 3^0 13'10''.\ \sin 4^0 12'17''}$ |
| II. | $\frac{\sin 59'6''.\ \sin 2'11''}{\sin 5^0 17'44''.\ \sin 4^0 20'49''}$ | $\frac{\sin 59'6''.\ \sin 2'11''}{\sin 5^0 12'44''.\ \sin 4^0 15'49''}$ | $\frac{\sin 59'16''.\ \sin 2'1''}{\sin 5^0 17'54''.\ \sin 4^0 20'39''}$ |
| III. | $\frac{\sin 4'9''.\ \sin 23'53''}{\sin 3^0 55'34''.\ \sin 4^0 15'18''}$ | $\frac{\sin 4'9''.\ \sin 23'53''}{\sin 3^0 50'34''.\ \sin 4^0 10'18''}$ | $\frac{\sin 4'19''.\ \sin 23'43''}{\sin 3^0 55'44''.\ \sin 4^0 15'8''}$ |
| IV. | $\frac{\sin 22'37''.\ \sin 5'25''}{\sin 4^0 35'10''.\ \sin 4^0 17'58''}$ | $\frac{\sin 22'37''.\ \sin 5'25''}{\sin 4^0 30'10''.\ \sin 4^0 12'58''}$ | $\frac{\sin 22'47''.\ \sin 5'15''}{\sin 4^0 35'20''.\ \sin 4^0 17'48''}$ |

Sin autem calculus secundum has formulas evolvatur, reperitur $p = 102$, foretque ergo $y > x$, quod tamen admitti nequit.

§ 15. Ratio hujus incommodi, praeter incertitudinem momentorum, quibus eclipsis vel incipit vel finitur, vel tota luna in umbram terrae immergitur, vel ex ea emergere incipit, in hoc potissimum posita videtur, quod umbra terrae ob ejus atmosphaeram revera amplior est, quam in calculo admisimus. Etsi enim atmosphaera terrae, ob radiorum solis refractionem, conum terrae umbrosum ita diminuit, ut ejus vertex ne quidem ad lunam usque porrigatur, sicque luna nunquam in veram terrae umbram ingrediatur, tamen pelluciditas atmosphaerae in tanta distantia tantopere diminuitur, ut ipsa quoque atmosphaera perinde ac terra ipsa tanquam corpus opacum spectari debeat: quamobcausam semidiameter umbrae augeri debebit tanta particula, quanta altitudo atmosphaerae est ipsius radii terrae. Quare cum ex crepusculis altitudo atmosphaerae sit quasi 12 milliarium conclusa, radio telluris existente 860 mill., semidiameter umbrae augeri debebit parte sui $\frac{1}{71}$. Hinc in nostro exemplo semidiameter umbrae $44'40''$ augeri debebit $38''$, idemque erit incrementum angulorum $f$ et $F$, unde anguli exigui illi in numeratoribus fractionum ipsi $\sin^2 \frac{1}{2} \varrho$ aequalium augeri debebunt $19''$.

§ 16. Calculo expedito minus utique incommodum oritur, si semidiameter umbrae $19''$ augeatur, neque tamen hoc modo veritas, quae jam proxime est cognita, satis salvatur: perspicuum fiet umbram adhuc magis augeri oportere. Videntur autem omnia incommoda optime tolli, si semidiameter umbrae $30''$ augeatur; ita ut atmosphaera plus quam semissi amplior sit statuenda, quam ex crepusculis conclusimus, sive aër etiamnunc in altitudinem fere 20 milliarium in regione lunae tanquam corpus opacum cernitur. Ob incognitam vero umbrae terrestris veram quantitatem, ex eclipsibus neque verus nodorum locus, neque vera orbitae lunaris inclinatio ad eclipticam accuratius definiri potest, quam in tabulis exhibetur. Unde his elementis tabularibus tantisper uti conveniet, donec ex observationibus exquisitissimis latitudinis lunae, vel maximae vel evanescentis, tam inclinationem tabularem quam locum nodi accurate definire liceat.

## Caput ....

### De diametris apparentibus motuque horario vero Solis ac Lunae, in eclipsibus lunaribus.

§ 1. Sit $U$ anomalia media solis, $V$ ejus anomalia excentrica, $\theta$ longitudo vera et $e$ excentricitas orbitae, quam invenimus esse $e = 0{,}0167595$; erit ergo

$$U = V + e \sin V \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{dV \sqrt{(1 - ee)}}{1 + e \cos V}.$$

Porro si ponatur $y$ distantia solis a terra, et $a$ distantia media, erit

$$y = a(1 + e\cos V),$$

pro $a$ vero in tabulis usurpari solet numerus 100000. Quando autem sol in hac distantia media a terra versatur, ejus diameter apparens deprehenditur 32′13″. In distantia ergo $y = a(1 + e\cos V)$ erit diameter solis apparens

$$= \frac{32'13''}{1 + e\cos V} = \frac{1933''}{1 + e\cos V}:$$

Evoluto autem hoc denominatore prodibit diameter apparens

$$= 1933''(1 - e\cos V + \tfrac{1}{2}ee + \tfrac{1}{2}ee\cos 2V - \tfrac{3}{4}e^3\cos V - \tfrac{1}{4}e^3\cos 3V);$$

et si parallaxis horizontalis in distantia media statuatur $= 12\tfrac{1}{2}''$, erit pro quavis distantia $y$, quae anomaliae excentricae $V$ convenit, parallaxis horizontalis solis

$$= 12{,}5\,(1 + \tfrac{1}{2}ee - (e + \tfrac{3}{4}e^3)\cos V + \tfrac{1}{2}ee\cos 2V - \tfrac{1}{4}e^3\cos 3V).$$

§ 2. Posito autem pro $e$ valore supra invento erit

$$1 + \tfrac{1}{2}ee = 1{,}0001405, \qquad e + \tfrac{3}{4}e^3 = 0{,}0167630$$

$$\tfrac{1}{2}ee = 0{,}0001405, \qquad \tfrac{1}{4}e^3 = 0{,}0000012.$$

Hinc anomaliae excentricae $V$ respondebit diameter solis apparens in minutis secundis

$$1933'' - 32{,}4\cos V + 0{,}27\cos 2V$$
$$(1{,}5105718) \qquad (9{,}4323278)$$

cum ergo terminus ultimus ne dimidium quidem minutum secundum praebeat, erit

$$\text{diameter solis apparens} = 32'13'' - 32{,}4\cos V$$
$$(1{,}5105718)$$

$$\text{semidiam. solis apparens} = 16\ \ 6\tfrac{1}{2} - 16{,}2\cos V$$
$$(1{,}2095418)$$

Parallaxis autem solis horizontalis anomaliae excentricae $V$ respondens erit $= 12\tfrac{1}{2}'' - 0{,}2\cos V$. In apogeo ergo parallaxis solis fere erit 12″, in perigeo vero 13″, unde hoc calculo fere supersedere poterimus.

§ 3. Quod ad motum solis horarium attinet, eum ex aequatione differentiali $d\theta = \frac{dV\sqrt{(1-ee)}}{1+e\cos V}$ definiri conveniet. Cum enim sit $dV = \frac{dU}{1+e\cos V}$, erit $d\theta = \frac{\sqrt{(1-ee)}}{(1+e\cos V)^2}dU$, unde si $dU$ denote motum horarium anomaliae solis mediae, qui est $= 2'27\tfrac{5}{6}''$, valor ipsius $d\theta$ erit motus horariu verus solis. Hinc ergo pro anomalia excentrica $V$ erit motus horarius solis

$$= 147''{,}833\,(1 + ee - (2e + 2e^3)\cos V + \tfrac{3}{2}ee\cos 2V - e^3\cos 3V)$$
$$= 147''{,}833\,(1{,}0002809 - 0{,}0335284\cos V + 0{,}0004214\cos 2V).$$

His ergo factoribus evolutis erit

$$\text{motus horarius solis} = 147''{,}87 - 4{,}9566\cos V.$$
$$(0{,}6951839)$$

In apogeo ergo est motus horarius solis $= 142''{,}92 = 2'23''$

in perigeo vero erit motus horarius solis $= 152''{,}86 = 2\ \ 33$ .

Ad quodvis igitur tempus hinc tam diameter solis apparens cum ejus parallaxi horizontali, quam verus motus horarius assignari poterit.

§ 4. Diameter lunae apparens ejusque parallaxis horizontalis pendet ab ejus distantia a terra. Scilicet si distantia media ponatur $= c$, et distantia vera $= z$, erit, uti supra vidimus, diameter lunae apparens $= \frac{c}{z} \cdot 31' 13\frac{1}{2}''$, *) et parallaxis lunae horizontalis $= \frac{c}{z} \cdot 56' 39''$. Commodissime ergo primo quaeritur distantia lunae a terra $z$, ex qua cum sit $c = 100000$, levi calculo tam diameter apparens quam parallaxis lunae horizontales definitur. Interim tamen quoque formula $\frac{c}{z}$ per divisionem evolvi poterit, sicque ex ea immediate tam diametrum apparentem, quam parallaxin horizontalem definire licebit. Ponamus loco coëfficientium numericorum litteras alphabeti, sitque

$$\frac{z}{c} = 1 + k\cos v - \mathfrak{a}\cos V + \mathfrak{b}\cos(v+V) - \mathfrak{c}\cos(v-V) + \mathfrak{d}\cos\eta - \mathfrak{e}\cos 2\eta - \mathfrak{f}\cos(2\eta - 2v)$$
$$- \mathfrak{g}\cos(2\eta+v) + \mathfrak{h}\cos(2\eta-v) + \mathfrak{j}\cos(2\eta+V) + \mathfrak{k}\cos(2\eta-V) - \mathfrak{l}\cos(2\eta-v+V) - \mathfrak{m}\cos(2\eta-v-V).$$

§ 5. Coëfficientes ergo hi, quorum valores supra exhibuimus, sequenti modo per logarithmos determinabuntur, ut sit

| | | |
|---|---|---|
| $lk = 8{,}7359900$ | $l\mathfrak{d} = 6{,}4639186$ | $l\mathfrak{h} = 8{,}0092614$ |
| $l\mathfrak{a} = 6{,}1580247$ | $l\mathfrak{e} = 7{,}8437310$ | $l\mathfrak{j} = 6{,}2771879$ |
| $l\mathfrak{b} = 6{,}2430230$ | $l\mathfrak{f} = 6{,}3091788$ | $l\mathfrak{k} = 6{,}3908075$ |
| $l\mathfrak{c} = 6{,}2803776$ | $l\mathfrak{g} = 6{,}5773131$ | $l\mathfrak{l} = 6{,}2581595$ |
| | | $l\mathfrak{m} = 6{,}0152034$ |

Quibus notatis habebimus convertendo fractionem $\frac{z}{c}$:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{c}{z} = 1 & -k\cos v + \frac{1}{2}kk\cos 2v - \frac{1}{4}k^3\cos 3v & +\mathfrak{a}\cos V & -\mathfrak{b}\cos(v+V) & +\mathfrak{c}\cos(v-V) \\
+\frac{1}{2}kk - \mathfrak{e}\mathfrak{h} & & +k\mathfrak{b} & -\mathfrak{a}k & -\mathfrak{a}k \\
+\frac{1}{2}\mathfrak{h}\mathfrak{h} - \mathfrak{f}\mathfrak{h} & & -k\mathfrak{c} & +\mathfrak{j}\mathfrak{h} & +\mathfrak{b}\mathfrak{h} \\
 & -\frac{3}{4}k^3 & -\mathfrak{h}\mathfrak{l} & & \\
 & & -\mathfrak{h}\mathfrak{m} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
-\mathfrak{d}\cos\eta & +\mathfrak{e}\cos 2\eta & +\mathfrak{f}\cos(2\eta-2v) & +\mathfrak{g}\cos(2\eta+v) & -\mathfrak{h}\cos(2\eta-v) \\
 & -k\mathfrak{g} & +k\mathfrak{h} & -k\mathfrak{e} & -k\mathfrak{e} \\
 & +k\mathfrak{h} & & & -k\mathfrak{f}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
-\mathfrak{j}\cos(2\eta+V) & -\mathfrak{k}\cos(2\eta-V) & +\mathfrak{l}\cos(2\eta-v+V) & +\mathfrak{m}\cos(2\eta-v-V) \\
-k\mathfrak{l} & -k\mathfrak{m} & +k\mathfrak{j} & +k\mathfrak{k} \\
+\mathfrak{b}\mathfrak{h} & -\mathfrak{c}\mathfrak{h} & -\mathfrak{a}\mathfrak{h} & -\mathfrak{a}\mathfrak{h}
\end{array}$$

§ 6. Restitutis ergo loco harum litterarum valoribus erit

$$\begin{array}{llll}
\frac{c}{z} = 1{,}00160 & -0{,}05464\cos v & +0{,}00148\cos 2v & +0{,}00012\cos V \\
0{,}00069 & 8{,}73751 & 7{,}17095 & 6{,}07918
\end{array}$$

*) *Ad marginem:* potius $31' 14\frac{1}{2}''$.

$$-0,00018\cos(v+V)+0,00018\cos(v-V)-0,00029\cos\eta+0,00752\cos 2\eta$$
6,25527 6,25527 6,46392 7,87564

$$+0,00076\cos(2\eta-2v)-0,01061\cos(2\eta-v)-0,00020\cos(2\eta+V)$$
6,88081 8,02571 6,29226

$$-0,00025\cos(2\eta-V)+0,00019\cos(2\eta-v+V)+0,00012\cos(2\eta-v-V)$$
6,40654 6,27875 6,06070

Hinc ergo pro primo invenitur *Diameter Lunae apparens:*

$$=31'17''-102'',4\cos v+2,8\cos 2v+0,2\cos V-0,3\cos(v+V)+0,3\cos(v-V)$$
2,01016 0,44360 9,352 9,527 9,527

$$-0,6\cos\eta+14,1\cos 2\eta+1,4\cos(2\eta-2v)-19,9\cos(2\eta-v)-0,4\cos(2\eta+V)$$
9,736 1,1483 0,153 1,29836 9,564

$$-0,4\cos(2\eta-V)+0,4\cos(2\eta-v+V)+0,2\cos(2\eta-v-V)$$
9,679 9,551 9,333

Similique modo *Parallaxis Lunae horizontalis:*

$$=56'44''-185,7\cos v+5,1\cos 2v+0,4\cos V-0,6\cos(v+V)+0,6\cos(v-V)$$
2,26879 0,702 9,610 9,786 9,786

$$-1,0\cos\eta+25,5\cos 2\eta+2,6\cos(2\eta-2v)-36,1\cos(2\eta-v)-0,7\cos(2\eta+V)$$
9,995 1,4069 0,4121 1,5570 9,823

$$-0,9\cos(2\eta-V)+0,6\cos(2\eta-v+V)+0,4\cos(2\eta-v-V)$$
9,937 9,809 9,592

§ 7. Cum igitur sufficiat tam diametrum lunae apparentem quam parallaxin horizontalem ad unum duove minuta secunda nosse, hae formulae multo fient succinctiores eritque

$$\text{diameter lunae apparens}=31'17''-102\cos v+3\cos 2v+14\cos 2\eta$$
2,01016 0,444 1,1843

$$+\cos(2\eta-2v)-20\cos(2\eta-v)$$
0,15 1,298

$$\text{parallaxis horizontalis}=56'44''-186\cos v+5\cos 2v-\cos\eta+25\cos 2\eta$$
2,2688 0,702 9,99 1,407

$$+2\cos(2\eta-2v)-36\cos(2\eta-v)$$
0,412 1,557

Neque tamen opus est, ut hinc tabulae peculiares construantur, cum in tabulis distantiam lunae a terra ubique exhibeamus, eaque facili negotio colligi queat. Ea vero cognita multo facilius tam diametrum lunae apparentem, quam parallaxin ejus horizontalem definire licebit. Ceterum diameter apparens, quem sic invenimus, ad centrum terrae spectat, indeque pro quavis altitudine super horizonte diameter visa non difficulter assignatur.

§ 8. Ex his ergo concludimus fore in conjunctione

| | | in Apog. | in Perig. |
|---|---|---|---|
| diametrum lunae appar. | $= 31' 30'' - 122 \cos v + 4 \cos 2v$ | $29' 32''$ | $33' 36''$ |
| parallaxin horizontalem | $= 57\;\; 8 \;\; - 222 \cos v + 8 \cos 2v$ | 53 34 | 60 58 |
| In oppositione vero erit | | | |
| diameter lunae app. | $= 31\;\; 32 \;\; - 122 \cos v + 4 \cos 2v$ | 29 34 | 33 38 |
| parallaxis horiz. | $= 57\;\; 10 \;\; - 222 \cos v + 8 \cos 2v$ | 53 36 | 61 0 |
| atque in quadraturis | | | |
| diameter lunae app. | $= 31\;\; 3 \;\; - 83 \cos v + \cos 2v + \cos V$ | 29 41 | 32 27 |
| parallaxis horiz. | $= 56\;\; 18 \;\; - 150 \cos v + 2 \cos 2v + 2 \cos V$ | 53 50 | 58 50 |

Ope priorum ergo formularum ad momenta eclipsium tam solarium quam lunarinm facile definitur et diameter lunae apparens et ejus parallaxis horizontalis: quoniam haec determinatio a sola anomalia lunae excentrica pendet, dum reliquae partes ab anomalia solis insuper pendentes tam fuerint exiguae, ut sine errore rejici queant.

§ 9. His expeditis investigationem motus lunae horarii suscipio: quae pariter ex aequatione differentiali, qua variatio longitudinis lunae momentanea $d\varphi$ continetur, est petenda. Quodsi vero ponamus anomaliam lunae mediam $= u$, excentricam $= v$, ut sit $du = dv\,(1 + k \cos v)$, distantiamque lunae a terra $= z$, erit $d\varphi = \frac{\alpha - \frac{3}{2} Mnn}{zz : cc}\, du$, existente

$$\alpha = 1{,}0070234, \quad l\alpha = 0{,}0030396, \quad l\tfrac{3}{2}\, nn = 7{,}9312851$$

Unde si $du$ denotet motum horarium anomaliae mediae, ut sit

$$du = 32' 39'' 48''',$$

valor differentialis $d\varphi$ dabit motum horarium lunae verum. Supra autem invenimus valorem litterae $M$ sequentem

$$\begin{aligned} -M = &+ A \cos 2\eta + Bk \cos (2\eta + v) + Ekk \cos 2(\eta - v) - Fe \cos (2\eta + V) \\ &+ akk \cos 2\eta + Ck \cos (2\eta - v) - Ge \cos (2\eta - V) \\ &- Kke \cos (2\eta - v - V) + M\varepsilon \cos \eta + N\varepsilon \cos 3\eta + O\varepsilon k \cos (\eta - v) \\ &- Lke \cos (2\eta - v + V) - nnS \cos 4\eta + nnUk \cos v \end{aligned}$$

§ 10. Si jam pro his litteris valores supra inventos substituamus, reperiemus numeratorem fractionis $\alpha - \frac{3}{2} nnM =$

$$\begin{aligned} &1{,}0070234 + 0{,}004662 \cos 2\eta + 0{,}0003385 \cos (2\eta + v) + 0{,}0011281 \cos (2\eta - v) \\ &\quad 0{,}0030396 \qquad 7{,}66857 \qquad 6{,}529607 \qquad 7{,}052357 \\ &- 0{,}0005506 \cos (2\eta - 2v) - 0{,}0001170 \cos (2\eta + V) - 0{,}0001269 \cos (2\eta - V) \\ &\quad 6{,}740834 \qquad 6{,}068320 \qquad 6{,}103616 \\ &- 0{,}0000364 \cos (2\eta - v - V) - 0{,}0000293 \cos (2\eta - v + V) + 0{,}0000084 \cos \eta \\ &\quad 5{,}560398 \qquad 5{,}466904 \qquad 4{,}921866 \\ &+ 0{,}0000139 \cos 3\eta - 0{,}0000124 \cos (\eta - v) - 0{,}0000403 \cos 4\eta + 0{,}0001987 \cos v \\ &\quad 5{,}143714 \qquad 5{,}091308 \qquad 5{,}6050 \qquad 6{,}2981 \end{aligned}$$

Pro hoc numeratore ponatur brevitatis gratia

$$\begin{aligned}&\alpha + A\cos 2\eta + B\cos(2\eta + v) + C\cos(2\eta - v) - D\cos(2\eta - 2v) - E\cos(2\eta + V)\\&- F\cos(2\eta - V) - G\cos(2\eta - v - V) - H\cos(2\eta - v + V) + J\cos\eta + K\cos 3\eta\\&- L\cos(\eta - v) - M\cos 4\eta + N\cos v.\end{aligned}$$

Pro denominatore vero $\frac{zz}{cc}$ jam ejus reciprocum ante inventum consideremus, sitque brevitatis gratia

$$\begin{aligned}\frac{c}{z} = {}&\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\cos v + \mathfrak{C}\cos 2v + \mathfrak{D}\cos V - \mathfrak{E}\cos(v+V) + \mathfrak{F}\cos(v-V) - \mathfrak{G}\cos\eta + \mathfrak{H}\cos 2\eta\\&+ \mathfrak{J}\cos(2\eta-2v) - \mathfrak{K}\cos(2\eta-v) - \mathfrak{L}\cos(2\eta+V) - \mathfrak{M}\cos(2\eta-V) + \mathfrak{N}\cos(2\eta-v+V)\\&+ \mathfrak{O}\cos(2\eta-v-V).\end{aligned}$$

§ 11. Evolvatur ergo calculus, ac reperietur

$$\begin{array}{llllll}\frac{d\varphi}{du} = \alpha\mathfrak{A}^2 & -2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cos v & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos 2v & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{D}\cos V & -2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{E}\cos(v+V) & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{F}\cos(v-V)\\ +\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{B}^2 & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C} & +\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{B}^2 & +\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{E} & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{D} & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{D}\\ +\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{H}^2 & -\alpha\mathfrak{D}\mathfrak{E} & & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{F} & +\alpha\mathfrak{K}^2 & +\alpha\mathfrak{K}\mathfrak{M}\\ +\frac{1}{2}\alpha\mathfrak{K}^2 & +\alpha\mathfrak{D}\mathfrak{F} - A\mathfrak{A}\mathfrak{K} & & & & \\ +A\mathfrak{A}\mathfrak{H} & -\alpha\mathfrak{H}\mathfrak{K} & & & & \\ -C\mathfrak{A}\mathfrak{K} & +N\mathfrak{A}^2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} -2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{G}\cos\eta & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{H}\cos 2\eta & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{J}\cos(2\eta-2v) & -2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{K}\cos(2\eta-v) & +\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{G}\cos(\eta-v)\\ +J\mathfrak{A}^2 & +\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{K} & +\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{K} & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{H} & -L\mathfrak{A}^2\\ & +A\mathfrak{A}^2 & -D\mathfrak{A}^2 & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{J} & \\ & -C\mathfrak{A}\mathfrak{B} & -C\mathfrak{A}\mathfrak{B} & +C\mathfrak{A}^2 & \\ & & & -A\mathfrak{A}\mathfrak{B} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{L}\cos(2\eta+V) & -2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{M}\cos(2\eta-V) & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{N}\cos(2\eta-v+V) & +2\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{O}\cos(2\eta-v-V)\\ -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{N} - C\mathfrak{A}\mathfrak{E} & -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{O} - C\mathfrak{A}\mathfrak{F} & +\alpha\mathfrak{B}^2 - A\mathfrak{A}\mathfrak{F} & +\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{M}\\ -E\mathfrak{A}^2 & -F\mathfrak{A}^2 & -\alpha\mathfrak{D}\mathfrak{K} + C\mathfrak{A}\mathfrak{D} & -\alpha\mathfrak{D}\mathfrak{K} + C\mathfrak{A}\mathfrak{D}\\ +A\mathfrak{A}\mathfrak{D} & +A\mathfrak{A}\mathfrak{D} & -H\mathfrak{A}^2 & -G\mathfrak{A}^2\\ & & & -A\mathfrak{A}\mathfrak{E} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos(2\eta+v) & +K\mathfrak{A}^2\cos 3\eta & -M\mathfrak{A}^2\cos 4\eta\\ +\mathfrak{B}\mathfrak{A}^2 & & +A\mathfrak{A}\mathfrak{H}\\ -A\mathfrak{A}\mathfrak{B} & & \end{array}$$

§ 12. Valoribus ergo in numeris restitutis prodibit

$$\begin{array}{llllll}\frac{d\varphi}{du} = 1{,}01188 & -0{,}11022\cos v & +0{,}004493\cos 2v & +0{,}000242\cos V & -0{,}000368\cos(v+V)\\ \quad 0{,}0051293 & 9{,}04226 & 7{,}65257 & 6{,}38394 & 6{,}5658\end{array}$$

$$\begin{array}{llll} +0{,}000358\cos(v-V) & -0{,}000579\cos\eta & +0{,}020356\cos 2\eta & +0{,}000014\cos 3\eta\\ 6{,}5539 & 6{,}7627 & 8{,}30869 & 5{,}14579\end{array}$$

$- 0{,}000006 \cos 4\eta$ $+ 0{,}000004 \cos(\eta - v)$ $+ 0{,}001502 \cos(2\eta - 2v)$ $- 0{,}000328 \cos(2\eta + v)$
4,778 4,6020 7,17667 6,51587

$- 0{,}020979 \cos(2\eta - v)$ $- 0{,}000524 \cos(2\eta + V)$ $- 0{,}000649 \cos(2\eta - V)$
8,32178 6,71933 6,81224

$+ 0{,}000365 \cos(2\eta - v + V)$ $+ 0{,}000209 \cos(2\eta - v - V)$
6,56229 6,32015

Cum nunc sit $du = 32'39\frac{4}{5}'' = 1959'',8$, erit $l.du = 3{,}292212$. Hinc fiet in minutis secundis motus horarius lunae verus =

$33'3'' - 216'' \cos v$ $+ 9 \cos 2v$ $- \cos\eta$ $+ 40 \cos 2\eta$ $+ 3 \cos(2\eta - 2v)$ $- 41 \cos(2\eta - v)$
2,3344 0,9448 0,055 1,6009 0,4689 1,6140

$- \cos(2\eta + V) - \cos(2\eta - V)$
0,005 0,104

omissis scilicet terminis, quorum valores ne quidem ad unum minutum secundum exsurgunt. Hinc ergo non erit adeo difficile ad quodvis tempus motum lunae horarium supputare; hicque labor multo erit facilior, quam si, ut vulgo fieri solet, duo loca lunae ad tempora horae unius intervallo discrepantia computari debeant.

§ 13. Haec autem formula adhuc quapiam correctione indiget, cum valor litterae $\alpha$, ob plures particulas ex denominatore ad eum accedentes, non satis sit certus. Ad hanc ergo correctionem inveniendam, calculo quaesivi duo loca lunae ad duo momenta horae intervallo differentia. Primo scilicet assumsi esse $v = 0$, $u = 0$, $\eta = 0$ et $V = 90^\circ$; deinde, post horae intervallum erat $v = 1858'',6$, $u = 1959'',8$, et ob motum lunae horarium jam proxime cognitum $\eta = 1627''$, sicque ex tabulis prodiit promotio lunae horaria $= 1774'',7$. Formula autem hic inventa praebet pro hoc casu motum horarium $= 1775'',7$, ita ut haec formula unico tantum minuto secundo sit minuenda; quare primus terminus $33'3''$ transmutandus erit in $33'2''$. Hincque concludimus fore in conjunctione motum horarium lunae

$$= 33'40\tfrac{4}{5}'' - 258{,}3 \cos v + 11{,}7 \cos 2v - 1{,}8 \cos V + 1{,}4 \cos(v - V).$$
2,41212 1,0696 0,2607 0,1495

In oppositione vero erit motus horarius lunae

$$= 33'43\tfrac{1}{10}'' - 258{,}3 \cos v + 11{,}7 \cos 2v - 1{,}8 \cos V + 1{,}4 \cos(v - V),$$

ubi quidem terminum $N$ omisi, quoniam supra jam est monitum hunc terminum in excentricitate comprehendi posse.

§ 14. Si ergo luna fuerit in apogeo, erit ejus motus horarius

in Conjunctione $= 29'34\frac{1}{5}'' - 0{,}4 \cos V$, in Oppositione $= 29'36\frac{1}{2}'' - 0{,}4 \cos V$

Sin vero luna sit in perigeo, erit ejus motus horarius

in Conjunctione $= 38'10\frac{4}{5}'' - 3{,}2 \cos V$, in Oppositione $= 38'13\frac{1}{10}'' - 3{,}2 \cos V$.

Si igitur dum luna in perigeo versatur, sol fuerit in apogeo, erit motus horarius

$$\text{in Conjunctione} = 38'7\tfrac{3}{5}'', \text{ at in Oppositione} = 38'9\tfrac{9}{10}''.$$

Sin autem sol fuerit in perigeo perinde ac luna, erit motus horarius lunae

$$\text{in Conjunctione} = 38'14'', \text{ in Oppositione} = 38'16\tfrac{3}{10}''.$$

Dum autem sol est in apogeo, variatio motus horarii lunae inde orta ne ad dimidium quidem minutum secundum ascendit.

§ 15. Formula autem generalis pro motu horario lunae sic correcta ita se habebit, ut pro anomalia lunae excentrica $= v$, anomalia solis $= V$ et distantia lunae a sole $= \eta$ sit motus lunae horarius in minutis secundis expressus $=$

$$1982'',0 - 216{,}4 \cos v + 8{,}8 \cos 2v + 0{,}5 \cos V - 0{,}7 \cos(v+V) + 0{,}7 \cos(v-V)$$
2,33526 0,9448 9,676 9,858 9,846

$$- 1{,}1 \cos \eta + 39{,}9 \cos 2\eta + 3{,}0 \cos(2\eta - 2v) - 0{,}6 \cos(2\eta + v) - 41{,}1 \cos(2\eta - v)$$
0,0549 1,6009 0,4690 9,808 1,6140

$$- 1{,}0 \cos(2\eta + V) - 1{,}3 \cos(2\eta - V) + 0{,}7 \cos(2\eta - v + V) + 0{,}4 \cos(2\eta - v - V)$$
0,0115 0,1044 9,854 9,612

Commode ergo tabulis lunaribus adjungi poterit tabula peculiaris motui horario inveniendo inserviens, quoniam tam ad eclipses quam ad occultationes accurate determinandas plurimum interest nosse motum lunae horarium. Hanc tabulam autem conveniet ad partes decimas minuti secundi accommodari, ne collectione singularum aequationum error unum minutum secundum superet. Constabit autem haec tabula duodecim quoque partibus, pariter ac ipsa motus lunae tabula, commodeque cum ea conjungi poterit.

§ 16. Motum horarium lunae in conjunctione et oppositione, quo in eclipsibus opus habemus, jam ante exhibuimus; videamus ergo quomodo se motus lunae horarius sit habiturus in quadraturis, quando angulus $\eta$ est vel $90^\circ$ vel $270^\circ$; utroque autem casu reperietur motus lunae horarius

$$= 1942'',1 - 174{,}7 \cos v + 5{,}8 \cos 2v + 2{,}8 \cos V - 1{,}1 \cos(v+V)$$
2,24229 0,763 0,447 0,041

| | ⊙ in Apog. | ⊙ in Perig. |
|---|---|---|
| Si ergo luna fuerit in apogeo, seu $v = 0$, erit motus horarius lunae | | |
| $= 1773'',2 + 1{,}7 \cos V$: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1775'', seu | 1771'' seu |
| | 29'35'' | 29'31'' |
| Sin autem luna sit in perigeo, seu $v = 180^\circ$, erit motus horarius | | |
| lunae $= 2122'',6 + 3{,}9 \cos V$: . . . . . . . . . . . . . . . . | 2126'' seu | 2119'' seu |
| | 35'26'' | 35'19'' |

Motus ergo lunae horarius est minimus in quadraturis, quando luna in apogeo, sol vero in perigeo versatur. Maximus vero est motus horarius lunae in oppositione, quando simul luna et sol fuerint in perigeo.

# XVII.

## De atmosphaera lunae ex eclipsi solis annulari evicta.

---

§ 1. Quum nuper momenta eclipsis solis, quam hic nobis die $25^{to}$ praeteriti mensis Julii obser-vare contingebat, exposuissem, ea tantum sum prosecutus, quae ad verum lunae motum ejusque parallaxin accuratius definiendam pertinere videbantur. Obtulerunt se autem in observatione hujus eclipsis alia quaedam insignia phaenomena, quae neque a lunae motu, neque ab ejus parallaxi pende-bant, sed ita erant comparata, ut rationem refractionis radiorum lunae oras stringentium declarare quaestionemque inter astronomos jam pridem agitatam, utrum luna atmosphaera quadam sit cincta nec ne? decidere viderentur. Quamobrem hic ista phaenomena, quae in hac eclipsi a nobis sunt animadversa, diligentius evolvere, in eorumque causas inquirere constitui.

§ 2. Quo accuratius omnia, quae in hac eclipsi notanda occurrerent, nobis perspicere atque ad mensuram revocare liceret, in aedibus meis conclave meridiem respiciens obscurum paravimus, tuboque astronomico 9 pedum per fenestrae foramen ad solem directo, ejus imaginem in charta alba excipimus. Chartam hanc quidem ad axem tubi normalem in tanta a tubo distantia firmavimus, ut solis imago circulum super ea descriptum exacte repleret; tubum vero eo usque diduximus, ut solis imago quam distinctissime super charta repraesentaretur, omnesque ejus maculae, quarum tam plures in solis disco erant conspicuae, clarissime distingui possent. Tum vero machina ita erat constructa, ut etiamsi tubus motum solis continuo sequeretur, charta pari motu lata perpetuo eandem a tubo distantiam retineret, solisque imago constanter in circulo super charta descripto contineretur.

§ 3. Hoc modo quum machina esset instructa, solisque imago perpetuo oculis esset exposita, eventum eclipsis expectavimus, cujus quidem initium ob frequentes nubeculas, quae solem saepe tegebant, nobis observare non licebat. Parum etiam nobis spei relinquebatur sequentes eclipsis phases observandi, quum coelum continuo magis nubibus obduceretur. Interim tamen praeter exspectationem praecipuas phases, atque imprimis annulum quoad duravit, nobis egregie conspicari concedebatur, quarum quidem momenta, quoniam a cl. Kiesio diligentissime sunt determinata,

atque Academiae exhibita, hic non repetam, sed eas res tantum commemorabo, quae ad institutum meum facere videbantur.

§ 4. Quum luna jam ultra medietatem in discum solis intrasset, solisque figura jam admodum falcata apparere coepisset, ut angulus, quo cornua claudebantur valde acutus evaderet, primum animadvertimus discum solis a circulo nostro in charta descripto non amplius capi, sed cornuum cuspides extra eum porrigi, margo tamen solis ab his cuspidibus remotior adhuc exacte cum circulo conveniebet. Hoc scilicet phaenomenon ita apparebat, uti in figura 207 repraesentatur, ubi $AEDEA$ est circulus in charta descriptus, et $GAGBG$ solis figura falcata, cujus cuspides $G$, $G$ utrinque ita ultra circulum extendebantur, ut portiunculae $EFG$ prominerent, reliqua vero limbi portio $EAE$ adhuc exacte congrueret.

§ 5. Ita cuspidum $G$ et $G$ prominentia extra circulum deinceps continuo major deprehendebatur, quo acutiores fiebant cuspidum anguli $G$ et $G$, donec tandem cum hae cuspides coaluissent atque sol sub annuli forma apparuisset, totus ejus discus circulum notabiliter majorem in charta exhiberet, quam erat is, quo initio perfecto continebatur. Circa medium autem figura annuli ita ut in charta depicta conspiciebatur, uti figura 208 repraesentat, ubi $AZBN$ est discus solis cujus punctum summum in $Z$, imum in $N$ exhibetur, per quem ducta est recta horizontalis $AB$, altero termino $A$ orientem, altero $B$ occasum respiciens: et $azbn$ est discus lunae, et recta $EF$ per utriusque centrum $C$ et $c$ transit, quae a recta verticali $ZN$ circiter angulo $40^0$ distare videbatur, exacte enim hunc angulum non sumus metiti, ad alia phaenomena magis attenti; maxima ergo annuli latitudo erat $Ff$, minima vero $Ee$, quae illius parti quartae propemodum aequalis aestimabatur.

§ 6. Calculo autem astronomico pro hoc tempore collegi semidiametrum solis apparentem $= 952''$ et semidiametrum lunae $= 898''$, quae mensurae, antequam discus solis circa tempus, quo annulus formari coepit, hanc dilatationem esset passus, satis exacte cum observatione conveniebant, ita ut hoc loco theoria nulla emendatione indigeat. Ex duratione porro annuli conclusi minimam centrorum solis ac lunae distantiam fere $53''$ esse debuisse: unde si discus solis in regione $Ff$, ubi annuli maxima erat latitudo, nullam ampliationem passus esse assumatur, quoniam vidimus hanc ampliationem in iis tantum locis usu venisse, ubi limbi solis ac lunae se mutuo proxime contingerent, erat $CF = 952''$, $cf = 898''$ et $Cc = 53''$, ideoque $Cf = 845''$, ac propterea maxima annuli latitudo $Ff = 107''$, quae cum annuli figura, quam delineavimus, satis exacte convenit.

§ 7. Hinc apparet, nisi discus solis circa minimam annuli latitudinem in $Ee$ fuisset dilatatus, quanta haec latitudo $Ee$ esse debuisset. Si enim ponatur $CE = 952''$, ob $ce = 898''$ et $Ce = 951''$, foret minima annuli latitudo $Ee = 1$, quae tamen manifesto nobis visa est quartae circiter parti latitudinis maximae $Ff$ aequalis. Erat ergo latitudo $Ee$ circiter $= 26''$, quum ea tamen, si discus solis nullam expansionem esset passus, plus uno minuto secundo continere non debuisset. Francofurti ad Viadrum, a celebri viro Pohlar, idem phaenomenon est observatum, ubi distantia centrorum solis ac lunae adhuc minor erat quam hic; quum enim annulus ibi durasset $4'$, concludo minimam centrorum distantiam circiter $35''$ fuisse, unde annuli latitudo maxima prodiret $89''$, ac minima $19''$. At minima latitudo quasi subdupla maximae, ideoque $44''$ aestimabatur, ita ut etiam ibi discus solis circa loca, ubi annuli latitudo erat minima, $25''$ perinde ac hic esset dilatatus.

§ 8. Hinc igitur haec quaestio enascitur: quaenam fuerit causa, cur discus solis in iis locis, ubi a limbo lunae intus fere tangebatur, sit dilatatus? quantitatem quidem dilatationis hujus, quam ad 25″ aestimavimus, non pro tam certa habendam esse judico, ut non error plurium minutorum secundorum commissus esse possit, primo enim latitudinem annuli tam exacte mensurare non licuit; tum vero ob colores, quibus tam solis quam lunae margo constanter obsitus cernebatur, ille quidem violaceo, hic vero rubro, veros utriusque limbi terminos discernere non licebat, interim tamen nullum dubium superesse potest, quin minima annuli latitudo hic 10″ superaverit, cujus dilatationis causam investigare operae erit pretium.

§ 9. Quaestio ergo huc redit, ut explicemus, (Fig 209) cur extremus solis margo $A$, qui per radium $AT$ lunam $L$ in $M$ stringentem, lunae immediate contiguus conspici deberet, non in $A$, sed in $a$ appareat, atque a vero suo loco angulo $ATa$, quem 25″ invenimus, non tamen multo supra 10″ aestimamus, aberrare videatur spectatori in $T$ constituto? hoc enim si fuerit expositum, intelligetur, quomodo fiat, ut quum latitudo annuli nulla, seu fere nulla esse deberet, ea tamen augmentum tot minutorum secundorum, quot angulus $ATa$ continet, capere cernatur. Namque si margo solis a limbo lunae, cui est proximus, hoc modo elongatur, perspicuum est, ob hanc causam et solis cornua ante et post annulum distendi et latitudinem ipsius annuli, ubi est minima, expandi oportere.

§ 10. Antequam autem hujus phaenomeni explicationem suscipio, opinionem primo intuitu non admodum improbabilem removeri conveniet. Qui enim ex descriptione aliarum eclipsium solis annularium intellexerunt, utramque annuli latitudinem et maximam et minimam simul majorem summam efficere, quam est differentia inter diametros apparentes solis ac lunae, ii plerumque sunt suspicati, in eclipsi solis annulari diametrum lunae aliquanto minorem apparere, quam si extra solem cerneretur. Eo autem modo, quo nos observationem instituimus, luculenter patebat, non lunam diminutionem, sed ipsum solem amplificationem quandam esse passum. Qui enim in ipsa eclipsi diametrum lunae sunt metiti, eam calculo perfecte conformem deprehenderunt.

§ 11. Ut igitur ad amplificationem disci solaris in eclipsi annulari observatam revertar, primo quidem ad hoc phaenomenon vel leviter attendenti statim patet, ejus causam in refractione radiorum corpus lunae stringentium esse quaerendam. Facile enim perspicitur, si luna atmosphaera quadam nostrae simili circumdata esset, ob refractionem radiorum oblique per eam transeuntium idem plane phaenomenon, quod in deflexione radiorum consistit, inde resultare debere. Non solum igitur nullum dubium superesse videtur, quin lunae atmosphaera quaedam tribui debeat, sed etiam ex quantitate refractionis ipsam hujus atmosphaerae densitatem definire licebit.

§ 12. Sit igitur (Fig. 210) corpus lunae $EMF$ atmosphaera tenui $PQR$ cinctum, quam per totam suam altitudinem ejusdem densitatis esse ponamus, etiamsi ea procul dubio, perinde ut atmosphaera terrae, a superficie continuo fiat rarior, donec tandem insensibiliter cum aethere totum spatium coeleste replente confundatur. Quoniam enim ex aliis phaenomenis novimus atmosphaeram lunae prae ea, qua terra circumdatur, esse subtilissimam, sine errore varietatem, quae in diversis a superficie lunae distantiis locum habet, negligere poterimus. Hoc posito quilibet radius lucis, qui in lunae atmosphaeram intrat, certam quandam refractionem patietur, tum vero per ipsam atmosphaeram in linea recta transibit, et ubi iterum in aetherem inde erumpet, novam refractionem priori similem subibit.

§ 13. Consideremus jam radium lucis, a puncto $S$, sive sit stella, sive particula quaedam ad solem pertinens, emissum $SP$, qui in $P$ in lunae atmosphaeram incidat, ut refractus lunae superficiem stringat in $M$. Spectator igitur in lunae puncto $M$ constitutus punctum $S$ ob refractionem non in vero suo loco conspiciet, sed in $\sigma$, quod punctum ipsi in coelo radius refractus $MP$ prolongatus repraesentabit. Quum autem recta haec $MP$, quia superficiem lunae tangit; horizontem lunarem referat, spectator in $M$ positus punctum lucidum in horizonte conspiciet, quum id adhuc revera sub horizonte lateat, angulo $SP\sigma$, erit ergo hic angulus $SP\sigma$ refractioni horizontali, quam incolae lunares sentire debent, aequalis. Vocemus ergo hunc angulum $SP\sigma$, seu refractionem horizontalem in luna visam $= \alpha$, quoad ejus valorem propius definire valeamus.

§ 14. Trajiciat porro iste radius $PM$ totam lunae atmosphaeram, et in $Q$, ubi in aetherem exit, denuo refringatur, unde secundum lineam rectam $QT$ ad terram usque perveniat, et in $T$ observatoris oculum afficiat. Hinc igitur punctum, unde iste radius pervenerat, in directione $TQ$ producta ideoque in $s$ situm esse judicabit. Nisi autem luna fuisset interprosita, hoc idem punctum observator in vero suo loco $S$ esset conspicatus. Quodsi jam distantia hujus puncti $S$ sit vehementer magna prae distantia lunae a terra, id remota luna ab observatore $T$ conspici deberet in directione rectae $PS$ parallela, quae ob angulum $PQS$ ipsi angulo $SP\sigma = \alpha$ aequalem, ad directionem $TQ$ inclinabitur angulo duplo $= 2\alpha$.

§ 15. Si igitur luna atmosphaera careret, punctum $S$ observatori in $T$ plane esset inconspicuum, atque post lunam lateret ad distantiam ab ejus limbo $= \alpha$. Atmosphaera ergo lunae hoc punctum $S$ conspicuum reddet atque observatori $T$ ita spectandum offerret, quasi in $s$ esset positum, et quum lunae margo $M$ ob radium $MQT$ ad idem coeli punctum $s$ referatur, observator in $T$ positus punctum lucidum $S$ margini lunae $M$ contiguum conspiciet, ita ut a refractione atmosphaerae lunaris punctum $S$ de vero suo loco $S$ per spatium $Ss = 2\alpha$ in coelo translatum cernatur. Conspectus igitur stellae, seu cujusvis puncti lucidi in coelo ante nobis a luna non eripitur, quam cum ultra spatium $= 2\alpha$ post lunam sese absconderit. Quamdiu enim spatium, quo stella post lunam occultatur, minus fuerit quam $2\alpha$, tamdiu ea extra lunae limbum conspicietur.

§ 16. Verum consideremus quoque casum (Fig. 211.), quo radius $SP$ per lunae atmosphaeram penetrans ipsum ejus limbum non amplius stringit, sed ab eo in data distantia $MN$ transit, minorem igitur hic radius tam in $P$ quam in $Q$ patietur refractionem, quoniam atmosphaera, quo magis supra lunam elevatur, eo rarior est concipienda; nihilo tamen secius in hac rariori regione viam radii $PQ$, qua atmosphaeram trajicit, pro linea recta habere licebit. Considerari igitur debet spectator supra lunae superficiem ad altitudinem $MN$ remotus, ubi sine dubio minorem refractionem horizontalem siderum percipiet, atque refractioni huic horizontali aequalis erit angulus $SP\sigma$, per quem sidus $S$ elevatum apparebit, et quia radius $PQ$ ad terram $T$ usque pergens in $Q$ parem refractionem patitur, observatori in terrae loco $T$ constituto punctum lucidum $S$ in $s$ situm apparebit, ita ut intervallum $Ss$ duplo angulo $SP\sigma$ in coelo sit aequale.

§ 17. Sit distantia $MN$ a lunae superficie tanta, ut observatori in terra $T$ versanti appareat sub angulo $x$, et quia tota atmosphaerae lunae altitudo $MK$ est valde parva, et ipsa refractio in $Q$ minima, stellae $S$ locus apparens $s$ ipsi eodem intervallo $= x$ a limbo lunae $M$ remotus videbitur.

Verus autem hujus stellae locus, quem cerneret, si luna atmosphaera careret, centro lunae propior erit intervallo $sS$, quod duplo angulo $SP\sigma$ mensuratur. Quodsi ergo hic angulus $SP\sigma$ seu refractio horizontalis altitudini $MN = x$ supra lunae superficiem respondens ponatur $= \zeta$, atque stella conspiciatur a lunae limbo remota intervallo $= x$, ut hinc locus stellae verus colligatur, oportet eam de loco apparente centrum lunae versus admovere per intervallum $sS = 2\zeta$, unde si pro quavis a limbo lunae distantia $x$ constaret ei respondens refractio horizontalis $\zeta$, ex loco apparente cujusvis stellae ejus locus verus facile determinari posset.

§ 18. Ex dilatatione annuli solaris hic Berolini observata concludere licet, quod cum annulus, ubi erat arctissimus, tantum unius minuti secundi esse debuisset, haec latitudo quasi evanescens augmentum $25''$ circiter acceperit. Hinc si limbus solis, seu stella a limbo lunae $25''$ remota appareat, vera distantia plane nulla erit censenda, nisi forte ob rationes ante commemoratas loco $25''$ minor numerus veluti 20 aut 15 eligi debet. Tum vero ex copiosissimis observationibus, quibus vulgo atmosphaera lunae oppugnari solet, novimus, si stellae distantia a limbo lunae vel unum saltem minutum primum superaverit, mutationem quam ejus locus a refractione lunari patiatur, fere prorsus esse imperceptibilem.

§ 19. Quoniam ex theoria refractionis summopere difficile videtur, pro quavis a limbo lunae distantia effectum refractionis determinare, propterea quod diminutio densitatis atmosphaerae nobis est incognita, aestimatione hoc negotium ita commodissime expediri videtur, ut formulam investigemus, quae phaenomenis quam proxime satisfaciat. Sit igitur distantia stellae cujuspiam a limbo lunae apparens $= x''$, et effectus refractionis huic distantiae respondens $= z''$, ita ut verus stellae locus hinc obtineatur, si locus apparens $z''$ propius ad centrum lunae admoveatur. Jam haec correctio $z$ ita ex distantia $x$ definiri debebit, ut si ponatur $x = 20$, prodeat quoque $z = 20$, sin autem sit $x = 60$, tum valor ipsius $z$ tam fiat parvus, ut vix percipi queat, puta $5''$.

§ 20. In hunc finem accipiam formulam latius patentem, statuamque $z = \frac{A}{1 + Bx^n}$, quoniam video tali formula id commodissime obtineri, ut si distantia $x$ fiat notabilis, valor ipsius $z$ fiat quam minimus, dummodo sit exponens $n$ modice magnus. Quodsi assumatur $n = 2$ ac duabus superioribus conditionibus satisfiat, reperietur haec formula

$$z = \frac{32}{1 + 0{,}0015\,xx}, \quad \text{seu } z = \frac{32}{1 + \frac{1}{666}\,xx}.$$

Sin autem loco $5''$, quae distantiae $x = 60''$ tribuimus, ponamus $4''$, obtinebitur

$$z = \frac{40}{1 + \frac{1}{400}\,xx}.$$

Hac igitur formula ut simplicissima tantisper utamur, donec ejus loco certiorem adhibere licebit, conclusiones enim ex hac etsi erronea formula deducendae non tantum a veritate discrepabunt, ut error fiat notabilis.

§ 21. Ex hac igitur formula sequentem tabellam construxi, quae pro quavis sideris a limbo lunae distantia apparente exhibet correctionem, qua ea minui debet, ut vera distantia obtineatur. Denotat scilicet $x$ distantiam apparentem a limbo lunae et $z$ correctionem seu effectum refractionis.

| $x$ | $z$ | $x$ | $z$ | $x$ | $z$ | $x$ | $z$ | $x$ | $z$ | $x$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0″ | 40″ | 10″ | 32″ | 20″ | 20″ | 30″ | 12″ | 40″ | 8″ | 90″ | 2 |
| 1 | 40 | 11 | 31 | 21 | 19 | 31 | 12 | 45 | 7 | 100 | 2 |
| 2 | 40 | 12 | 29 | 22 | 18 | 32 | 11 | 50 | 6 | 110 | 1 |
| 3 | 39 | 13 | 28 | 23 | 17 | 33 | 11 | 55 | 5 | 120 | 1 |
| 4 | 38 | 14 | 27 | 24 | 16 | 34 | 10 | 60 | 4 | 130 | 1 |
| 5 | 37 | 15 | 26 | 25 | 15 | 35 | 10 | 65 | 4 | 140 | 1 |
| 6 | 36 | 16 | 24 | 26 | 15 | 36 | 10 | 70 | 3 | 150 | 1 |
| 7 | 35 | 17 | 23 | 27 | 14 | 37 | 9 | 75 | 3 | 160 | 1 |
| 8 | 34 | 18 | 22 | 28 | 13 | 38 | 9 | 80 | 2 | 170 | $\frac{1}{2}$ |
| 9 | 33 | 19 | 21 | 29 | 13 | 39 | 8 | 85 | 2 | 180 | $\frac{1}{2}$ |
| 10 | 32 | 20 | 20 | 30 | 12 | 40 | 8 | 90 | 2 | | |

§ 22. Secundum hanc ergo tabulam non solum phaenomeno nuperae eclipsis solaris satisfit, ut quum limbus solis a limbo lunae 20″ distare videretur, is ipsi revera esset contiguus, sed etiam inde perspicitur, antequam limbus lunae uno minuto primo propius accesserit, effectum refractionis lunaris fuisse imperceptibilem. Vidimus enim in distantia 180″ seu 3′ hunc effectum ne ad unicum quidem minutum secundum exsurgere, ideoque pro nihilo esse reputandum, id quod observationibus omnino est consentaneum. Quum autem haec tabula indicat, si distantia apparens $x$ sit plane evanescens, effectum refractionis esse 40″, seu punctum lucidum revera tanto intervallo post lunae discum latere, si hic numerus recte se haberet, hanc sequeretur refractionem horizontalem incolis lunaribus esse 20″. Simul vero intelligitur, etiamsi haec tabula sit erronea, tamen hanc refractionem horizontalem adeo multum a vero aberrare non posse.

§ 23. Simul atque igitur limbus solis non ultra 40″ post lunam absconditur, nobis debet esse conspicuus, ex quo, si eclipsin solis annularem per calculum definire velimus, initium annuli incidet, antequam distantia centrorum excessui semidiametri solaris supra semidiametrum lunae fit aequalis. Similique modo annulus disparebit aliquanto, postquam distantia centrorum differentiae semidiametrorum iterum evasit aequalis. Scilicet si parallaxis horizontalis in luna assumatur 20″, annulus apparere deberet, statim atque distantia centrorum quadraginta minutis secundis superaret differentiam semidiametrorum; ideoque eclipsis foret annularis, etiamsi distantia centrorum nunquam minor evaderet, quam differentia semidiametrorum, dummodo illa distantia hanc differentiam non plus quam 40″ superet. Atmosphaera itaque lunae efficit, ut eclipsis, quae sine ea annularis non foret, talis tamen appareat, et ut annulus diutius duret, quam secundum calculum, neglecto atmosphaerae lunaris effectu, durare deberet.

§ 24. Neque tamen annulus tamdiu persistere posse videtur, quam refractio illa 40″ requireret, cum enim stellae ob solis splendorem in coelo conspici nequeant maxime est verisimile etiam annulum ea parte, qua est nimis arctus, percipi non posse: quamdiu scilicet annuli latitudo est vehementer parva et non ultra aliquot minuta secunda increscit, ea erit invisibilis, neque ante annulus in conspectum prodit, quam notabilem jam latitudinem fuerit consecutus. Observavimus etiam in

nupera eclipsi annulum subito cum notabili latitudine apparuisse, neque eum pedetentim et quasi per gradus esse firmatum; ex quo manifestum erat, annulum ob splendorem reliquae solis partis prius videri non potuisse, quam ad tantam amplitudinem excreverit, quanta sensui visus excitando par esset.

§ 25. Hic etiam annotari convenit, eos, qui directe in solem per tubum astronomicum sunt intuiti, annulum diutius esse conspicatos, quam nos, qui imaginem solis in charta depictam sumus contemplati. Illis enim annulus per spatium 82″ erat conspicuus, cum nobis is in charta ne unum quidem minutum primum durasse videretur, cujus discriminis ratio sine dubio in eo est posita, quod ii, qui directe solem aspexerunt, fortiores a radiis impressiones acceperint, ideoque annulum, cum ejus latitudo adhuc valde esset parva, sentire potuerint, quippe qui etiam stellas quasdam conspexerunt: contra autem, quia in charta solis imago multo debilius exprimitur, mirum non est, annulum tardius apparere coepisse, citius que desiisse, cum, antequam ejus latitudo jam satis erat notabilis, impressiones in charta nimis essent debiles, quam ut sentiri potuissent.

§ 26. Quin etiam tam ante quam post annulum, cum sol falcatus appareret, cuspides cornuum in charta non perfecte exprimebantur, sed circa extremitates obtusae et quasi rescissae conspiciebantur, cujus phaenomeni causa ex allatis est manifesta. Extremitates enim cuspidum $G$ et $G$ (Fig. 207) nimis erant angustae, quam ut radii inde in oculos vel in chartam incidentes sensum vel imaginem excitare potuissent. Namque quatenus latitudo hujus cuspidis diametrum stellae, quae in hoc loco inconspicua fuisset, non separabat, eatenus quoque in oculos non cadebat; ubi autem cuspis terminari cernebatur, ibi jam satis notabilem latitudinem habere videbatur. Hocque adeo phaenomenon simile est ei, quod supra de latitudine, quam annulus habere debet, antequam sensum visus afficere valeat, commemoravimus.

§ 27. Ob hanc igitur causam initium annuli non in eo temporis puncto est constituendum, ubi distantia centrorum solis et lunae differentiam semidiametrorum 40″ excedit, siquidem refractionem horizontalem in luna recte 20″ aestimamus; sed initium annuli tum demum statui debet, quum ejus latitudo jam satis larga evaserit, atque diametrum stellarum in hac regione invisibilium superaverit. Nobis quidem latitudo annuli in primo initio viginti minutis secundis minor non apparuit, unde colligere licet, annulum ante non in conspectum venire, quam ejus latitudo ultra 20″ increverit, tum autem subito cum hac latitudine apparere incipire. Neque vero hunc terminum certo definire licet, cum quo quisque excellentiori tubo utatur, per quem solem intueatur, eo citius quoque annulum clausum sit spectaturus: in charta autem si solis imago repraesentatur, hi limites adhuc ulterius erunt extendendi.

§ 28. Ad eclipsin solis annularem calculo definiendam sit:

semidiameter solis apparens $= a$

semidiameter lunae apparens $= b$

ac differentia semidiametrorum ponatur $a - b = d$.

Sit porro (Fig. 212) recta $AB$ via apparens centri lunae respectu centri solis, quod tanquam immotum in $S$ consideretur, unde perpendicularis $SL$ ad $AB$ demissa exhibebit minimam centrorum distantiam,

quae sit $SL = c$, atque haec distantia $SL$, siquidem eclipsis est annularis, valde erit parva. Incipiat eclipsis, cum centrum lunae pervenerit in $A$, finis autem incidat in $B$; erit ergo recta $SA$ perinde ac $SB$ aequalis summae semidiametrorum $a + b$ et quia $SL$ tam est parva, ipsa recta $AB$ seu via apparens, quam centrum lunae ab initio ad finem describit, summae $SA + SB$ aequalis censeri poterit, ita ut sit $AB = 2a + 2b$.

§ 29. Sit porro $t$ tempus totius eclipsis, atque centrum lunae spatium $AB = 2a + 2b$ tempore $t$ uniformiter percurrere assumi potest. His positis annulus apparere incipiet, quum centrum lunae pervenerit in $M$, ut sit $SM$ aequalis differentiae semidiametrorum $a - b = d$, auctae primo $40''$, tum vero minutae ea quantitate, quam annuli latitudo habere debet, antequam fiat conspicua. Quod si ergo assumamus percipi non posse, nisi ejus latitudo $20''$ superet, initium annuli incidet in $M$, ut sit $SM = d + 40'' - 20'' = d + 20''$. Similique modo sumto $SN = d + 20''$, finis annuli cum loco centri lunae $N$ conveniet. Dummodo igitur fuerit $d + 20''$ majus quam $SL = c$, eclipsis erit annularis, hoc est dummodo minima centrorum distantia $SL$ minor fuerit quam $d + 20''$.

§ 30. Duratio igitur annuli reperietur, quaerendo quartam proportionalem ad distantias $AB$, $MN$ et tempus $t$. Erit autem $ML = \sqrt{(d + 20'')^2 - cc}$, ideoque $MN = 2\sqrt{(d + 20'')^2 - cc}$, unde si tempus, per quod annulus est conspicuus, vocetur $= \vartheta$, erit:

$$2a + 2b : 2\sqrt{(d + 20'')^2 - cc} = t : \vartheta,$$

ideoque $(d + 20'')^2\, tt - cctt = (a + b)^2\, \vartheta\vartheta$.

Hinc si cognita sit duratio annuli $\vartheta$, duratio totius eclipsis $t$ et semidiametri apparentes solis et lunae $a$ et $b$, unde habetur $d = a - b$, vicissim ex observatione eclipsis annularis concludi poterit minima centrorum solis ac lunae distantia $SL = c$, erit nempe

$$c = \sqrt{(d + 20'')^2 - (a + b)^2 \frac{\vartheta\vartheta}{tt}}.$$

§ 31. Quodsi jam hanc formulam ad nuperam eclipsin solis annularem transferemus, erat

semidiameter solis apparens $a = 952''$

semidiameter lunae apparens $b = 898''$,

ideoque $a - b = d = 54''$, et $d + 20'' = 74''$.

Deinde tempus totius eclipsis ex observationibus conclusum est $3^h\, 6'$, et tempus durationis annu $1'\, 22''$, unde fiet $t = 11160''$ et $\vartheta = 82''$, atque ob $a + b = 1850$, reperietur minima centroru distantia

$$SL = c = \sqrt{74^2 - \frac{1850^2 . 82^2}{11160^2}} = \sqrt{5291} = 72''44'''.$$

Fuisset ergo minima centrorum distantia $72\frac{3}{4}$ minutorum secundorum, quam tamen per calculu tantum $51''$ inveneram.

§ 32. Ostendi autem in praecedente dissertatione, ubi hanc eclipsin ad calculum revoca, parallaxin lunae, quae vulgo in tabulis traditur, notabiliter diminui oportere, ut minima centrorū distantia ad $51''$ exsurgat, unde haec parallaxis adhuc multo magis diminui deberet, ut mini

distantia centrorum adeo ultra 72″ augeretur. Cum autem elementa hujus eclipsis tantopere a vero dissentire non videantur, magis verisimile est differentiam semidiametrorum $d$ non 20″, sed minori numero augeri debere; quod fieret, si refractio horizontalis in luna non 20″, sed tantum 15″ statuatur, tum enim pro $d + 20$ scribi debere $d + 10''$, seu 64″, unde prodiret $c = 62\frac{1}{2}''$, ita ut distantia centrorum per calculum inventa 51″ tantum $11\frac{1}{2}''$ augeri debeat; tam parvam autem correctionem elementa hujus eclipsis requirere non improbabile videtur.

§ 33. His igitur argumentis indubitate evincitur lunam quoque atmosphaera quadam esse cinctam, etiamsi forte multo sit tenuior, quam observationibus nostris est aestimata: cum enim circa medium eclipsis discus solis notabile augmentum ceperit, quanquam id exacte mensurare non licuerit, hoc phaenomenon nulli alii causae nisi atmosphaerae lunari adscribi potest. Interim tamen nolim, ut determinationibus, quas hic pro radiorum per lunae atmosphaeram transeuntium refractione dedi, nimium tribuatur: atque adeo ex ipsis observationibus, cum theoria collatis admodum probabile videtur, refractionem lunae horizontalem, quam 20″ statueram, vix 10″ superare; unde diameter solis augmentum 20″ accipere queat. Multo autem minus certi quicquam statuere licet circa diminutionem hujus refractionis, quae radiis longius a luna praetereuntibus conveniat, quamvis haec diminutio tanta videatur, ut pro radiis, qui ad distantiam aliquot minutorum primorum a limbo lunae per ejus atmosphaeram penetrant, refractio omnino fiat imperceptibilis.

§ 34. Quodsi nobis contingeret denuo hujusmodi eclipsin solis annularem observare, operae utique foret pretium singula phaenomena, quae amplificatio disci solaris suppeditaret, omni cura ad mensuram revocare, ut inde non solum radiorum limbum lunae stringentium refractio, sed etiam lex, secundum quam refractio radiorum longius a luna praetereuntium minuitur, accurate definiri queat. Cum autem vix nobis talem eclipsin exspectare liceat, ad alia phaenomena, quae saepius sese nostrae contemplationi offerunt, erit confugiendum. Atque ex hoc genere aptissima videntur ea, quae occultationes stellarum fixarum a luna nobis suggerunt; quum enim stellam fixam, quoad lunae fiat contigua, conspicari liceat, mutatio quaedam in ejus loco, quae a refractione lunari proficiscatur, animadverti debebit, dummodo instrumenta satis fuerint exacta, ut hujusmodi minutias indicare valeant.

§ 35. Eligatur nimirum stella fixa, illi, quae occultationem a luna est subitura, tam propinqua, ut ambae simul per tubum astronomicum conspici queant; atque modico temporis intervallo, antequam occultatio accidit, ope exquisiti micrometri mensuretur harum stellarum distantia, quae intra unum minutum secundum obtineri posse videtur, siquidem tubi longitudo sit 10 pedibus minor neque stellarum distantia 15′ excedat. Hoc modo, quia radii a stella occultanda nullam adhuc refractionem perpetiuntur, reperietur vera istarum stellarum distantia in minutis secundis satis praecise expressa. Tum expectetur occultatio, atque ipso momento, quo ea contingit, denuo mensuretur distantia earundem stellarum, et notetur differentia inter hanc distantiam et eam, quae ante est inventa: atque ex hoc discrimine non difficulter refractio lunae horizontalis concludetur, si quidem diameter apparens lunae, ejusque situs momento occultationis, respectu ambarum stellarum, fuerit cognitus; quas res, nisi per observationem simul determinari queant, ex theoria motus lunae depromere licebit.

§ 36. Sit scilicet distantia stellarum vera $= m''$, quam micrometrum multo ante occultationem indicaverit, ipso vero occultationis momento appareat stella occultanda, in limbi lunae puncto $S$ (Fig. 213).

Si altera vero stella sit in $A$, atque nunc assumamus distantiam harum stellarum $AS$ minorem, deprehendi, ut sit $AS = m'' - \mu''$. Quoniam porro ex theoria semidiameter lunae apparens $LS$ satis exacte datur, atque angulus $ASL$ vel ex theoria vel ex duratione occultationis, vel alio modo colligi potest, sit iste angulus $ASL = \varphi$; et quia ob refractionem locus stellae a centro lunae elongatur, sit hoc momento verus stellae locus in $s$, erit $As = m''$ et, si $At = AS$, abscindatur $st = \mu''$, unde ob angulum $Sst = 180^0 - \varphi$ proxime concludetur effectus refractionis

$$Ss = \frac{\mu''}{\cos(180^0 - \varphi)} = -\frac{\mu''}{\cos\varphi},$$

cujus semissi refractio lunae horizontalis aequalis censeri debet.

§ 37. Consultum autem erit ad hoc institutum ejusmodi occultationes eligere, quibus stella fixa $S$ obscurum lunae limbum subit, quod evenit circa priorem quadraturam. Si enim stella ad lunae limbum illuminatum appellit, ejus lumen jam ante occultationem, ab eximio lunae splendore ita offuscatur, ut stella jam ante momentum occultationis evanescat, nisi forte sit primae magnitudinis. Etsi enim hoc casu lunae limbus non apparet, tamen ipsum occultationis momentum id temporis punctum indicat, quo stella lunae limbo erat contigua. Interim tamen quoque juvabit hoc modo appulsus stellarum ad limbum lunae illuminatum examini subjicere, ut inde intelligamus, utrum refractio prope limbum illuminatum, a refractione prope obscuratum diversa sit, nec ne? quia enim circa regionem illuminatam lunae atmosphaera tam indesinenter radiis solis est exposita, suspicari licet eam hoc tempore tantopere attenuari, ut refractio multo minor existat. Haecque fortasse est causa, quod adhuc iste refractionis effectus in occultationibus non sit animadversus.

§ 38. Deinde vero etiam in hoc erit praecipue incumbendum, ut jam antequam stella occultatur, perpetuo et quasi singulis momentis ejus distantia ab altera stella fixa summa diligentia investigetur, quoniam hanc distantiam jam ante ipsum appulsum ad lunam sensim diminui debere evicimus. Sic enim ex observationum serie, si theoria in subsidium vocetur, pro qualibet observatione distantia stellae apparens a limbo lunae concludi, eique conveniens refractio definiri poterit, simili modo ei, quem ante pro ipso occultationis momento commendavi. Atque si plures hujusmodi observationes diligenter fuerint institutae, ex iis tabula § 21 tradita emendari, vel potius levi opera nova construi poterit, cujus ope deinceps cuncta phaenomena ab atmosphaera lunae oriunda accuratius assignari queant.

§ 39. Minime igitur mirandum est, insignem hanc et inter astronomos jam a longo tempore multum agitatam quaestionem: utrum luna atmosphaera sit praedita, nec ne? adhuc non fuisse decisam. Quamvis enim occultationes stellarum fixarum a luna saepissime eveniant, tamen effectus refractionis, quia tam est exiguus in ipsis stellis fixis, quae occultantur, nullo modo percipi potest nisi distantiae earum ab aliis diligentissime jam ante sint exploratae, et circa ipsam occultationem denuo accuratissime mensurentur. Hoc autem modo fortasse adhuc nemini astronomorum in mentem venit in atmosphaeram lunae inquirere; aut si forte in hanc methodum inciderint, satis exquisitis instrumentis destituti hanc indagationem relinquere sunt coacti. Qui autem hoc opus suscipere voluerit, nescio an non micrometrum Kirchianum, dummodo cochleae intus in cuspides desinant

praeferendum sit iis, quae summa cura atque ingentibus sumtibus nunc parari solent. Si enim cochlearum cuspides ambabus stellis semel fuerint admotae, facillime apparebit, si earum stellarum distantia diminuatur, atque ipsa diminutio per cochlearum revolutionem non difficulter definietur.

§ 40. Physicae quidem sanioris principia atmosphaeram lunae extra dubium collocant. Sed hoc, quod observationes nobis patefecerunt, non minus mirum videtur, atmosphaeram lunae tantopere esse tenuem, ut ejus effectus fere evanescat. Cum enim super terra refractio horizontalis dimidium gradum superet, si luna pari atmosphaera atque terra esset cincta, sidera prope lunae limbum ultra gradum de suo loco detorquerentur: nunc igitur, cum iste effectus fortasse vix 20″ excedat, aërem lunarem fere ducenties rariorem esse oportet quam nostrum; ex quo concludere licet, ex superficie lunae vel nullos plane vapores ascendere, vel materiam lunae tam esse solidam ac siccam ut nulli fere evaporationi sit obnoxia: quin etiam usu longiorum tuborum astronomi jam sunt edocti, maculas illas obscuriores in luna, quae vulgo pro aquis et lacubus haberi solent, pro regionibus potius aridis, sive speluncis, sive silvis haberi oportere, quam pro humidis.



# XVIII.

# De motu Cometarum in orbitis parabolicis, solem in foco habentibus.

---

1. **Problema 1.** Cometae in data orbita parabolica moti invenire locum heliocentricum ad datum tempus.

**Solutio.** (Fig. 214) Sit *MEAF* orbita cometae parabolica, in cujus foco *F* versetur sol, quae cum ponatur data, dabitur locus perihelii *A* in coelo ex sole visus, atque cometa ex sole cernetur in circulo maximo moveri, cujus planum pariter erit datum. Datum porro etiam sit tempus, quo cometa in perihelio versabitur, atque vel ante vel post hoc tempus quaeratur locus cometae *M* ex sole visus. Elapsum sit scilicet jam tempus *T*, postquam cometa in perihelio *A* extiterit, sitque hoc tempore *M* locus cometae, ita ut cometa in coelo appareat a loco perihelii *A* distare angulo *ASM*, qui angulus erit cometae anomalia vera. Sit iste angulus, qui quaeritur, $ASM = v$, ac ponatur distantia perihelii a sole $SA = a$, erit parameter parabolae $= 4a$. Ex loco cometae *M* in axem parabolae *AS* demittatur perpendiculum *MP*, et vocetur $AP = x$, $PM = y$, erit $yy = 4ax$, atque ob $PS = x - a$, erit radius $SM = x + a$. Hinc anguli $ASM = v$ sinus erit $= \frac{y}{a+x}$ et cosinus $= \frac{a-x}{a+x}$ posito sinu toto $= 1$. Cum igitur sit $\cos v = \frac{a-x}{a+x}$, erit

$$x = \frac{a(1-\cos v)}{1+\cos v}, \text{ et distantia cometae a sole } MS = a + x = \frac{2a}{1+\cos v}.$$

Inventa ergo anomalia vera $v$ innotescit distantia cometae a sole $MS = \frac{2a}{1+\cos v}$. Quoniam ver tempus *T*, quo cometa a perihelio *A* ad locum *M* pertingit, est directe ut area *ASM*, et inverse u radix quadrata ex latere recto seu parametro $4a$, aream *ASM* indagare oportet, quae est $=$ area $APM - \triangle SPM$. At area *APM* ex natura parabolae est

$$= \tfrac{2}{3}xy, \text{ et } \triangle SPM = \tfrac{1}{2}y(x-a) = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}ay;$$

ex quibus area $ASM$ erit $= \frac{1}{6} xy + \frac{1}{2} ay$. Est vero $x = \frac{a(1-\cos v)}{1+\cos v}$ et $y = (a+x)\sin v = \frac{2a \sin v}{1+\cos v}$. Hinc erit $\frac{1}{6} x + \frac{1}{2} a = \frac{2a + a\cos v}{3(1+\cos v)}$, ideoque area $ASM = \frac{2aa(2+\cos v)\sin v}{3(1+\cos v)^2}$.

Ad hanc expressionem simpliciorum reddendam ponatur semissis anguli $ASM$ tangens, seu $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = t$, erit $\sin \frac{1}{2} v = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$, $\cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$, indeque $\sin v = \frac{2t}{1+tt}$, $\cos v = \frac{1-tt}{1+tt}$, atque porro $2 + \cos v = \frac{3+tt}{1+tt}$ et $1 + \cos v = \frac{2}{1+tt}$. Fiet itaque

$$\text{area } ASM = \tfrac{1}{3} aat(3+tt) = aa(t + \tfrac{1}{3} t^3).$$

Ponatur jam semiaxis major orbitae terrae, seu distantia media terrae a sole $= c$, atque planeta, qui circa solem circulum, cujus radius $= c$, describeret, periodum absoluturus esset uno anno sidereo, hoc est $365^d\, 6^h\, 8'\, 31''$, quod tempus ponamus $= \theta$. Cum igitur hujus circuli area sit $\pi cc$, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, et parameter diametro $2c$ sit aequalis, erit tempus unius revolutionis $\theta$ ut area $\pi cc$ divisa per $\sqrt{2c}$, hoc est ut $\frac{\pi}{\sqrt{2}} c\sqrt{c}$. Simili vero modo est tempus $T$, quo cometa ex $A$ in $M$ pertingit, ut area $ASM = aa(t + \frac{1}{3} t^3)$ divisa per $\sqrt{4a}$, hoc est ut $(t + \frac{1}{3} t^3)\frac{a\sqrt{a}}{2}$; unde haec nascitur analogia $\theta : T = \frac{\pi c\sqrt{c}}{\sqrt{2}} : \frac{a\sqrt{a}}{2}(t + \frac{1}{3} t^3)$, ergo

$$t + \tfrac{1}{3} t^3 = \frac{\pi T c\sqrt{2c}}{\theta a\sqrt{a}} = 4{,}4428829381 \cdot \frac{T}{\theta} \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}.$$

Quia $\theta$ est annus sidereus, et $T$ tempus datum, erit $\theta$ ad $T$ ut $360^0$ ad motum terrae medium tempori $T$ convenientem. Si ergo ponatur motus terrae medius tempori $T$ respondens $= m$, fiet $\frac{T}{\theta} = \frac{m}{360}$. Ex aequatione ergo cubica

$$t^3 + 3t = 13{,}3286488144 \cdot \frac{m}{360} \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$$

eruatur valor ipsius $t$, qui erit tangens semissis anguli $ASM$, hincque ad datum tempus vel ante vel post transitum cometae per perihelium $A$ assignabitur locus cometae heliocentricus. Q. E. I.

2. **Coroll. 1.** Si tempus $T$ sit spatium unius diei seu 24 horarum, erit $m = 59'\, 8''$, unde calculo subducto fiet $t^3 + 3t = 0{,}036491289910 \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$. Quare si $T$ sit spatium $n$ dierum, erit

$$t^3 + 3t = 0{,}036491289910 \cdot \frac{nc\sqrt{c}}{a\sqrt{a}} \quad \text{seu}$$

$$t + \tfrac{1}{3} t^3 = 0{,}012163763303 \cdot \frac{nc\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}.$$

3. **Coroll. 2.** Pro quovis ergo dierum numero $n$ reperitur numerus ipsi $t + \frac{1}{3} t^3$ aequalis, unde cum difficulter valor ipsius $t$, ex eoque valor anguli $v$ reperiatur, conveniet tabulam construi, quae pro singulis valoribus anguli $v$ exhibeat valores respondentes ipsius $t + \frac{1}{3} t^3$: hujus enim tabulae ope vicissim ex valore ipsius $t + \frac{1}{3} t^3$ dato angulus $v$ colligetur.

4. **Coroll. 3.** Si ergo detur tempus, quo cometa in perihelio versatur, atque distantia perihelii a sole $a$, ad quodvis tempus, distantia cometae a perihelio ex sole visa determinari poterit ope tabellae. Scilicet propositum sit tempus $n$ dierum vel ante vel post appulsum cometae ad perihelium, computetur valor $0{,}012163763303 \cdot \frac{nc\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$; hic valor quaeratur in tabula sub columna $t + \frac{1}{3}t^3$, ac respondens valor ipsius $v$ dabit angulum quaesitum.

5. **Exemplum.** Cometae, qui A. 1680 apparuit, Newtonus statuit latus rectum orbitae $4a = 236{,}8$, seu $a = 59{,}2$ existente $c = 10000$, atque istum cometam collegit in perihelio versatum esse A. 1680 decembr. die 8, $0^h\,4'$ p. m. Hinc erit $0{,}012163763303 \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}} = 26{,}70458$, atque $n$ diebus vel ante vel post appulsum cometae ad perihelium erit $t + \frac{1}{3}t^3 = 26{,}70458\, n$, cui valori respondens angulus $v$ ostendet cometae distantiam a perihelio in orbita sua ex sole visam. Uno ergo die tam ante quam post perihelium hic cometa confecit angulum $ASM$ plus quam 152°; die autem vel praecedente vel antecedente tantum 6 circiter gradus absolvit. Postquam autem cometa per perihelium transiisset, per spatium 90 dierum adhuc adparuit, toto ergo hoc tempore absolvit angulum $ASM$ circiter 174°.

6. **Coroll. 4.** Cognito angulo $ASM = v$, innotescet cometae a sole distantia $SM$, quae est $= \frac{2a}{1 + \cos v}$. Posito autem $t = \text{tang}\, \frac{1}{2}v$, erit $\cos v = \frac{1 - tt}{1 + tt}$ et $1 + \cos v = \frac{2}{1 + tt}$. Hinc erit distantia $SM = a(1 + tt) = a \sec^2 \frac{1}{2}v$. Distantia ergo cometae a sole $SM$ confecto angulo $ASM = 174°$, ubi disparere coepit, ob $a = 59{,}2$ et $t = \text{tang}\, 87°$ erat 21613; non multum ergo diametrum orbis magni $2c$ excedebat.

7. **Coroll. 5.** Si ducatur tangens curvae in $M$, in eamque ex $S$ perpendiculum demittatur, erit hoc perpendiculum $= a\sqrt{(1 + tt)}$, et celeritas cometae in puncto $M$ erit ut $\frac{1}{a\sqrt{(1 + tt)}}$, seu ob $a$ constans, ut $\cos \frac{1}{2}v$.

8. **Scholion.** Si numerus, qui pro $t + \frac{1}{3}t^3$ resultat, non exacte reperiatur in tabula, tum per interpolationem consueto more investigabitur angulus $v$ in minutis primis et secundis, nisi forte numerus ille sit nimis magnus, atque numeri $t + \frac{1}{3}t^3$ angulis $v$ respondentes nimium a progressione arithmetica discrepent. Hoc igitur casu peculiari artificio opus erit, ex natura progressionis petito, ad angulum $v$ exactius determinandum. Quaeratur exempli gratia angulus $ASM$, quem cometa A. 1680 tempore 10 dierum confecerat: erit ergo $t + \frac{1}{3}t^3 = 267{,}0458$, unde apparet angulum $v$ contineri intra 167° et 168°. Primum ergo more solito interpolatio instituatur:

| | | |
|---|---|---|
| 167°: | 234,1492 | 267,0458 |
| 168°: | 296,6044 | 234,1492 |
| 60′: | 62,4552 | 32,8966 |
| | 1,0409 | 1,0409 |
| | | 32,8968 |
| | | 1,3158 |
| | | 296 |

ergo angulus $v = 167^\circ\,34'$ et $t = \text{tang}\,83^\circ\,47'$. Ponatur jam $t = \text{tang}\,(83^\circ\,47' + m'')$ eritque

$$t = 9{,}1802838 + 4145\,m \qquad lt = 0{,}9628561 + 196\,m$$

$$257{,}8974000 + 350000\,m \qquad lt^3 = 2{,}8885683 + 588\,m$$

$$267{,}0776838 + 354145\,m \qquad l3 = 0{,}4771213$$

$$l\tfrac{1}{3}t^3 = 2{,}4114470 + 588\,m$$

$$\text{num.} = 257{,}8974 + 350\,m$$

ergo erit $267{,}0776 + 0{,}0354\,m = 267{,}0458$, hincque $354\,m = -318$, ergo $m$ nequidem unum minutum secundum valet, ita ut vere sit $v = 167^\circ\,34'$.

9. **Problema 2.** Ex datis tribus locis heliocentricis cometae ejus orbitam determinare.

**Solutio.** Fig. 215. Sit $LMNA$ orbita cometae, quae quaeritur; ac primo quidem planum, in quo ea existit, sponte innotescit ex duabus observationibus. Observetur primum cometa in directione $SL$; secundo in directione $SM$, et tertio in directione $SN$. Dantur ergo anguli $LSM$ et $LSN$, itemque differentiae temporum inter has observationes. Sit tempus inter observationem primam et secundam $= m$ dierum, inter primam ac tertiam $= n$ dierum. Porro sit tangens semissis anguli $LSM = f$, tangens semissis anguli $LSN = g$. Ponatur tempus, quo cometa ex $L$ in perihelium $A$ perveniet $= z$ dierum; erit tempus inter cometae loca $M$ et $A = z - m$, et inter loca $N$ et $A = z - n$. Sit tangens semissis anguli $ASL = t$, erit

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,ASM = \frac{t-f}{1+ft} \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,ASN = \frac{t-g}{1+gt}.$$

Posito jam brevitatis gratia $N = 0{,}012163763303 \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$, denotante $a$ distantiam $SA$, et $c$ distantiam mediam terrae a sole. His positis erit

$$t + \tfrac{1}{3}\,t^3 = Nz$$

$$\frac{t-f}{1+ft} + \frac{1}{3}\,\frac{(t-f)^3}{(1+ft)^3} = N(z-m)$$

$$\frac{t-g}{1+gt} + \frac{1}{3}\,\frac{(t-g)^3}{(1+gt)^3} = N(z-n)$$

ex quibus tribus aequationibus tres incognitas $N$, $z$, et $t$ determinari oportet. Per subtractionem secundae et tertiae a prima obtinentur hae duae aequationes

$$\frac{f(1+tt)}{1+ft} + \frac{ftt(1+tt) - fft(1-t^4) + \frac{1}{3}f^3(1+t^6)}{(1+ft)^3} = Nm$$

$$\frac{g(1+tt)}{1+gt} + \frac{gtt(1+tt) - ggt(1-t^4) + \frac{1}{3}g^3(1+t^6)}{(1+gt)^3} = Nn$$

sive

$$\frac{f(1+tt)^2 + fft(1+tt)^2 + \frac{1}{3}f^3(1+tt)^3}{(1+ft)^3} = Nm$$

$$\frac{g(1+tt)^2 + ggt(1+tt)^2 + \frac{1}{3}g^3(1+tt)^3}{(1+gt)^3} = Nn$$

quarum una per alteram divisa dabit aequationem incognita $N$ carentem, solamque $t$ involventem

$$\frac{fn(1+\frac{1}{3}ff+ft+\frac{1}{3}fftt)}{(1+ft)^3}=\frac{gm(1+\frac{1}{3}gg+gt+\frac{1}{3}ggtt)}{(1+gt)^3}$$

$$\text{seu}\quad \frac{fn}{(1+ft)^2}+\frac{f^3n(1+tt)}{3(1+ft)^3}=\frac{gm}{(1+gt)^2}+\frac{g^3m(1+tt)}{3(1+gt)^3}$$

in qua aequatione incognita $t$ ad quinque dimensiones ascendit. Quamobrem ut solutio facilior evadat, eligantur tres observationes a se invicem minimum distantes, ita ut $f$ et $g$ quasi infinite parva evadant. Tum vero prima observatio $L$ non tantum a perihelio distet, ut $t$ possit posteriorem terminum in utroque membro notabilis quantitatis efficere. Evanescent ergo in utroque membro termini posteriores, eritque

$$\frac{fn}{(1+ft)^2}=\frac{gm}{(1+gt)^2},\ \text{unde fit}$$

$$(1+gt)\sqrt{fn}=(1+ft)\sqrt{gm},\ \text{hincque}\ t=\frac{\sqrt{gm}-\sqrt{fn}}{g\sqrt{fn}-f\sqrt{gm}}.$$

Hoc modo quidem tantum vero proxime valor ipsius $t$ invenitur, quia minimus error in observationibus commissus ingentem aberrationem parit. Verum si hoc modo valor ipsius $t$ prope verus fuerit inventus, tum aliae duae quaecunque observationes cum prima $L$ conjungantur, atque tum aequatio, etsi quinque est dimensionum, tamen ob valorem ipsius $t$ prope verum cognitum, verus valor non difficulter eruetur. Sit $\theta$ valor prope verus ipsius $t$, ponaturque $t=\theta+\psi$, ita ut $\psi$ prae $\theta$ sit valde parvum, eritque

$$\frac{fn}{(1+f\theta)^2}+\frac{f^3n(1+\theta\theta)}{3(1+f\theta)^3}-\frac{2ffn\psi}{(1+f\theta)^3}-\frac{f^3n\psi(3f-2\theta+f\theta\theta)}{3(1+f\theta)^4}=$$

$$\frac{gm}{(1+g\theta)^2}+\frac{g^3m(1+\theta\theta)}{3(1+g\theta)^3}-\frac{2ggm\psi}{(1+g\theta)^3}-\frac{g^3m\psi(3g-2\theta+g\theta\theta)}{3(1+g\theta)^4}$$

ex qua aequatione $\psi$ inventum dabit verum valorem tangentis $t=\theta+\psi$, et anguli ipsi respondentis duplum monstrabit angulum $LSA$, ideoque praebebit positionem axis $AS$ parabolae quaesitae. Invento autem $t$ erit

$$N=\frac{(1+tt)^2(f+fft+\frac{1}{3}f^3(1+tt))}{m(1+ft)^3}=0{,}0121637\cdot\frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$$

unde elicitur distantia $AS=a$, ac parabolae latus rectum $4a$. Denique colligetur tempus, quo cometa in perihelium perveniet, quod post observationem primam $L$ eveniet $z$ diebus, existente $z=\frac{3t+t^3}{3N}$. Cognitis ergo positione axis parabolae $AS$, ejus parametro $4a$, seu valore litterae $N$ una cum tempore, quo cometa perihelium attingit, ad quodvis tempus locus cometae in orbita ejusque distantia a sole per problema praecedens definietur. Q. E. I.

10. **Coroll. 1.** Ex cognito tempore, quo cometa ad perihelium appellit, una cum valore numeri $N$ ad datum tempus, distantia cometae a perihelio ex sole visa determinabitur; scilicet si haec distantia desideretur $n$ diebus vel ante vel post appulsum ad perihelium, multiplicetur numerus $N$ per $n$, ac productum quaeratur in tabula sub columna $t+\frac{1}{3}t^3$, cui respondebit angulus $v$, distantiam cometae a perihelio e sole visam indicans.

**11. Coroll. 2.** Si valor numeri $N$ inventus dividatur per 0,012163763303, quotus dabit $\frac{c\sqrt{e}}{a\sqrt{a}}$, unde reperietur distantia perihelii a sole $SA = a$, seu potius ejus ratio ad distantiam mediam terrae a sole. Hinc autem in quovis loco vera cometae a sole distantia colligetur. (6).

**12. Scholion.** Maxima difficultas posita est in inventione tangentis $t$ ex aequatione

$$\frac{fn}{(1+ft)^2} + \frac{f^3 n(1+tt)}{3(1+ft)^3} = \frac{gm}{(1+gt)^2} + \frac{g^3 m(1+tt)}{3(1+gt)^3};$$

ubi primum praecepimus ejusmodi observationes adhibere, in quibus $f$ et $g$ fiant vehementer parvae, ut $t$ proxime tantum innotescat. At quoniam minimus error in observationibus nimium vicinis maxime deflectentem a veritate conclusionem producere potest, conveniet binas posteriores observationes neque nimis vicinas, neque nimis remotas a prima accipi, quo $f$ et $g$ neque sint vehementer parvae, neque ad unitatem appropinquent, quod eveniet, dummodo angulus $LSN$ minor sit 60°. Tales observationes si eligantur, tum aequatio $\frac{fn}{(1+ft)^2} = \frac{gm}{(1+gt)^2}$ valorem ipsius $t$ a vero aberrantem quidem, at non multum, praebebit. Sit iste valor $t = \theta$, ita ut sit $\frac{fn}{(1+f\theta)^2} = \frac{gm}{(1+g\theta)^2}$, ac statuatur verus valor $t = \theta + \psi$, ubi $\psi$ instar quantitatis vehementer parvae tractare licebit. Pervenietur autem, uti in solutione, ad hanc aequationem

$$\frac{f^3 n(1+\theta\theta)}{3(1+f\theta)^3} - \frac{ffn\psi(6+3ff+4f\theta+ff\theta\theta)}{3(1+f\theta)^4} = \frac{g^3 m(1+\theta\theta)}{3(1+g\theta)^3} - \frac{ggm\psi(6+3gg+4g\theta+gg\theta\theta)}{3(1+g\theta)^4}$$

quae, propter $fn : gm = (1+f\theta)^2 : (1+g\theta)^2$, abit in

$$\frac{ff(1+\theta\theta)}{1+f\theta} - \frac{f\psi(6+3ff+4f\theta+ff\theta\theta)}{(1+f\theta)^2} = \frac{gg(1+\theta\theta)}{1+g\theta} - \frac{g\psi(6+3gg+4g\theta+gg\theta\theta)}{(1+g\theta)^2}$$

ex qua aequatione si erutum fuerit $\psi$, habebitur satis prope $t = \theta + \psi$, qui tamen pari modo ulterius corrigi potest. Denique consultum erit tres observationes a se invicem maxime remotas adhibere, atque per aequationem quintae potestatis, qua $t$ determinatur, exactissime valorem ipsius $t$ determinare, id quod non difficulter praestabitur, cum valor ipsius $t$ jam proxime sit notus. Sicque multiplicato observationum numero, orbita cometae continuo exactius cognoscetur.

**13. Problema 3.** Cognita cometae orbita, una cum temporis momento, quo in perihelio versatur, ad quodvis tempus cometae longitudinem ac latitudinem heliocentricam definire.

**Solutio.** Fig. 216. Quoniam cometa in plano per solem transeunte movetur, apparebit in circulo maximo incedere. Sit igitur sol in centro coeli siderei $S$, atque ☊$MA$☋ circulus maximus, in quo cometa ingredi cernitur, secundum ordinem litterarum ☊$MA$☋. Sit porro ☊$ma$☋ ecliptica secundum signorum ordinem distributa, et $O$ polus eclipticae borealis, erit ☊ nodus ascendens orbitae cometae, et ☋ nodus descendens. Sit longitudo nodi ascendentis ☊ a prima stella arietis computata $= q$, atque inclinatio orbitae cometae ☊$MA$☋ ad eclipticam, seu angulus $M$☊$m = s$, qui si recto fuerit minor, motus cometae secundum signorum seriem fieri cernetur; contra, si angulus $s$ recto sit major, motus cometae contra signorum seriem perficietur. Sit deinde $A$ locus perihelii, per quem ex $O$ ducatur circulus maximus $OAa$, erit $a$ longitudo perihelii, cujus distantia a prima stella arietis

sit $=p$, erit arcus $☊a = p - q$. Ex triangulo sphaerico $A☊a$ ad $a$ rectangulo innotescit primo latitudo borealis perihelii $Aa$, erit nempe $\operatorname{tang} Aa = \operatorname{tang} s \,.\, \sin(p-q)$ et $\operatorname{tang} ☊A = \frac{\operatorname{tang}(p-q)}{\cos s}$. Sit $a$ distantia cometae in perihelio a sole, et $c$ distantia media terrae a sole, ac ponatur

$$N = 0{,}012163763303 \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}.$$

Jam quaeratur $k$ diebus, antequam cometa ad perihelium appellit, locus cometae, qui sit in $M$. Ad quem inveniendum sit angulus $MSA$ seu arcus $MA = v$ et $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = t$, erit $t + \frac{1}{3} t^3 = Nk$, atque ope tabulae computatae ex numero $Nk$ reperietur angulus $v$. Sit arcus $☊A = A$, ita ut sit $\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang}(p-q)}{\cos s}$; erit arcus $☊M = A - v$. Hinc in triangulo $☊mM$ ad $m$ rectangulo erit $\sin Mm = \sin(A-v) \sin s$ et $\operatorname{tang} ☊m = \operatorname{tang}(A-v) \cos s$. Erit ergo $Mm$ latitudo cometae heliocentrica, et si ad $☊m$ addatur $q$ longitudo nodi, prodibit longitudo cometae a prima stella arietis computata. Q. E. I.

14. **Coroll. 1.** In triangulo sphaerico $M☊m$ latera $Mm$ et $☊m$ et angulus $M☊m = s$ ita a se invicem pendent, ut sit $\operatorname{tang} Mm = \sin ☊m \operatorname{tang} s$. Haecque aequatio ex duabus inventis resultare debet, si arcus $A - v$ eliminetur.

15. **Coroll. 2.** Quodsi autem ex duabus aequationibus inventis $\sin Mm = \sin(A-v) \sin s$ et $\operatorname{tang} ☊m = \operatorname{tang}(A-v)\cos s$ eliminetur angulus $s$, orietur haec aequatio

$$\cos(A-v) = \cos Mm \,.\, \cos ☊m.$$

16. **Coroll. 3.** Quatuor ergo habentur aequationes, quae autem duabus tantum aequivalent, istae:

$$\sin Mm = \sin(A-v)\sin s, \qquad \operatorname{tang} ☊m = \operatorname{tang}(A-v)\cos s$$
$$\operatorname{tang} Mm = \sin ☊m \operatorname{tang} s, \qquad \cos(A-v) = \cos Mm \cos ☊m$$

ex quibus binae, prouti commodum visum fuerit, ad usum adhiberi poterunt.

17. **Coroll. 4.** Data igitur, ex quibus longitudo ac latitudo heliocentrica cometae ad datum tempus assignatur, sunt primo ex orbita cometae desumta. Nempe distantia nodi ☊ a perihelio $A$ ex sole visa $= A$; deinde inclinatio orbitae cometae ad planum eclipticae, seu angulus $M☊m = s$. Porro, differentia inter tempus propositum et tempus, quo cometa perihelium attingit, quae in diebus expressa sit $= k$ dierum, ex qua ope tabulae ante datae sequitur angulus $v$.

18. **Coroll. 5.** Quoniam cometae a sole distantia $SM$ est $= a \sec^2 \frac{1}{2} v$, erit ejus distantia a sole curtata, seu in ecliptica sumta $= a \sec^2 \frac{1}{2} v \,.\, \cos Mm$.

19. **Coroll. 6.** Si longitudo heliocentrica ponatur $= f$, et latitudo heliocentrica $= g$, erit $f = ☊m + q$, unde fiet

$$\text{I.}\ \sin g = \sin(A-v)\sin s, \qquad \text{II.}\ \operatorname{tang}(f-q) = \operatorname{tang}(A-v)\cos s$$
$$\text{III.}\ \operatorname{tang} g = \sin(f-q)\operatorname{tang} s, \qquad \text{IV.}\ \cos(A-v) = \cos g \cos(f-q).$$

20. **Problema 4.** Fig. 217. Ex datis duobus cometae locis heliocentricis invenire inclinationem orbitae cometae ad eclipticam, atque positionem nodorum ☊ et ☋.

**Solutio.** Observetur primum cometa in $L$, sitque longitudo heliocentrica $= f$ et latitudo borealis $= g$; praeterea vero observetur cometa in $M$, sitque longitudo ejus $= f'$ et latitudo $Mm = g'$. Ponatur longitudo nodi ascendentis $☊ = q$, et inclinatio orbitae ad eclipticam, seu angulus $L☊l = s$. Erit igitur differentia longitudinum $lm = f' - f$. Ex aequatione ergo tertia (19) nascentur hae duae aequationes

$$\operatorname{tang} g = \sin(f - q) \operatorname{tang} s \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} g' = \sin(f' - q) \operatorname{tang} s$$

quarum haec per illam divisa dabit

$$\frac{\operatorname{tang} g'}{\operatorname{tang} g} = \frac{\sin(f' - q)}{\sin(f - q)} = \frac{\sin(f - q + lm)}{\sin(f - q)}.$$

Cum autem sit $\sin(f - q + lm) = \sin(f - q)\cos lm + \cos(f - q)\sin lm$, fiet

$$\frac{\operatorname{tang} g'}{\operatorname{tang} g} = \cos lm + \frac{\sin lm}{\operatorname{tang}(f - q)}.$$

Hinc reperitur

$$\operatorname{tang}(f - q) = \frac{\operatorname{tang} g \sin lm}{\operatorname{tang} g' - \operatorname{tang} g \cos lm}.$$

Innotescit ergo differentia longitudinum $☊l = f - q$, unde ob longitudinem puncti $l$ datam definietur longitudo nodi ascendentis ☊; qua cognita ob arcum $f - q$ datum erit $\operatorname{tang} s = \frac{\operatorname{tang} g}{\sin(f - q)}$, sicque inclinatio orbitae cometae ad planum eclipticae, seu angulus $L☊l = s$ invenitur. Q. E. I.

21. **Coroll. 1.** Quoniam est $\operatorname{tang}(f - q) = \frac{\operatorname{tang} f - \operatorname{tang} q}{1 + \operatorname{tang} f \operatorname{tang} q}$ et $lm = f' - f$, erit longitudo nodi quaesita

$$\operatorname{tang} q = \frac{\sin f \operatorname{tang} g' - \sin f' \operatorname{tang} g}{\cos f \operatorname{tang} g' - \cos f' \operatorname{tang} g}.$$

22. **Coroll. 2.** Si ponatur $\operatorname{tang} g = \alpha$, $\operatorname{tang} g' = \beta$, $\sin lm = \sin(f' - f) = \mu$ et $\cos(f' - f) = \nu$, reperietur

$$\operatorname{tang} s = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\nu)}}{\mu},$$

cujus fractionis numerator $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\nu)}$ est basis trianguli, cujus latera sunt $\alpha$ et $\beta$, angulum $= f' - f$ constituentia.

23. **Problema 5.** Si dato tempore, puta $k$ dierum, vel ante vel post cometae appulsum ad perihelium, detur distantia cometae a perihelio e sole visa $= v$, invenire eandem distantiam tempore $k + x$ dierum vel ante vel post momentum, quo in perihelio versatur.

**Solutio.** Ponatur $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = t$, erit $t + \frac{1}{3} t^3 = Nk$, seu $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v = Nk$. Sit jam angulus tempori $k + x$ dierum respondens $= v + \varphi$, erit posito brevitatis gratia $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v = V$, per calculum differentiarum finitarum

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(v+\varphi) + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}(v+\varphi) = V + \frac{\varphi\, dV}{dv} + \frac{\varphi^2\, ddV}{2dv^2} + \frac{\varphi^3\, d^3V}{6dv^3} + \text{etc.} = N(k+\varkappa).$$

Cum igitur sit $V = Nk$, erit

$$N\varkappa = \frac{\varphi\, dV}{dv} + \frac{\varphi\varphi\, ddV}{2dv^2} + \frac{\varphi^3\, d^3V}{6dv^3} + \text{etc.}$$

At est
$$\frac{dV}{dv} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2}v} + \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}v}{2\cos^2 \frac{1}{2}v} = \frac{1}{2\cos^4 \frac{1}{2}v}$$

$$\frac{ddV}{dv^2} = \frac{\sin \frac{1}{2}v}{\cos^5 \frac{1}{2}v}$$

$$\frac{d^3V}{dv^3} = \frac{1}{2\cos^4 \frac{1}{2}v} + \frac{5\sin^2 \frac{1}{2}v}{2\cos^6 \frac{1}{2}v} = \frac{5}{2\cos^6 \frac{1}{2}v} - \frac{2}{\cos^4 \frac{1}{2}v}$$

etc.

Ex his ergo fiet
$$N\varkappa = \frac{\varphi}{2\cos^4 \frac{1}{2}v} + \frac{\varphi^2 \sin \frac{1}{2}v}{2\cos^5 \frac{1}{2}v} + \frac{5\varphi^3}{12\cos^6 \frac{1}{2}v} - \frac{\varphi^3}{3\cos^4 \frac{1}{2}v} + \text{etc.}$$

Ponamus jam esse $\varphi = \alpha N\varkappa + \beta N^2\varkappa^2 + \gamma N^3\varkappa^3 + \text{etc.}$, atque facta substitutione habebimus:

$$\begin{aligned} N\varkappa = {} & \frac{\alpha N\varkappa}{2\cos^4 \frac{1}{2}v} + \frac{\beta N^2\varkappa^2}{2\cos^4 \frac{1}{2}v} + \frac{\gamma N^3\varkappa^3}{2\cos^4 \frac{1}{2}v} + \text{etc.} \\ & + \frac{\alpha^2 N^2\varkappa^2 \sin \frac{1}{2}v}{2\cos^5 \frac{1}{2}v} + \frac{\alpha\beta N^3\varkappa^3 \sin \frac{1}{2}v}{\cos^5 \frac{1}{2}v} + \text{etc.} \\ & + \frac{5\alpha^3 N^3\varkappa^3}{12\cos^6 \frac{1}{2}v} \\ & - \frac{\alpha^3 N^3\varkappa^3}{3\cos^4 \frac{1}{2}v}. \end{aligned}$$

His ad aequalitatem reductis erit

$$\alpha = 2\cos^4 \tfrac{1}{2}v$$

$$\beta = \frac{-\alpha^2 \sin \frac{1}{2}v}{\cos \frac{1}{2}v} = -4\cos^7 \tfrac{1}{2}v \sin \tfrac{1}{2}v$$

$$\gamma = \frac{-2\alpha\beta \sin \frac{1}{2}v}{\cos \frac{1}{2}v} - \frac{5\alpha^3}{6\cos^2 \frac{1}{2}v} + \frac{2\alpha^3}{3}, \text{ seu } \gamma = \tfrac{4}{3}\cos^{10} \tfrac{1}{2}v\,(7 - 8\cos^2 \tfrac{1}{2}v)$$

etc.

Ex his igitur reperitur

$$\varphi = 2N\varkappa \cos^4 \tfrac{1}{2}v - 4N^2\varkappa^2 \cos^7 \tfrac{1}{2}v \sin \tfrac{1}{2}v + \tfrac{4}{3}N^3\varkappa^3 \cos^{10} \tfrac{1}{2}v\,(7 - 8\cos^2 \tfrac{1}{2}v)$$

quae expressio, nisi differentia temporis $\varkappa$ sit admodum magna, per approximationem satis pro| praebet valorem ipsius $\varphi$. Primum enim si cometa a perihelio vehementer distet, angulus $\frac{1}{2}v$ n multum ab angulo recto differret, ideoque ejus cosinus fractio erit perquam exigua. Hinc termin secundus multo minor erit primo, ac tertius secundo; ita ut plerumque primus terminus suffice possit ad $\varphi$ exprimendum, quo invento erit angulus quaesitus $= v + \varphi$. Q. E. I.

24. **Coroll.** Si igitur cometa tempore $k$ dierum a perihelio movetur per angulum $v$, tempore $k+x$ dierum movebitur proxime per angulum $v + 2Nx\cos^4\frac{1}{2}v$; vel si iste angulus propius desideretur, erit is $v + 2Nx\cos^4\frac{1}{2}v - 4N^2x^2\cos^7\frac{1}{2}v\sin\frac{1}{2}v$, atque tertius terminus

$$\tfrac{4}{3}N^3x^3\cos^{10}\tfrac{1}{2}v\,(7-8\cos^2\tfrac{1}{2}v)$$

cum sequentibus semper tuto negligi poterit, dummodo utroque tempore cometa vel ante vel post perihelium versetur.

25. **Scholion 1.** Quo haec approximatio magis confirmetur, sumamus exemplum cometae A. 1680 visi, pro quo erat $N = 26,70458$, qui numerus, cum sit multo major unitate, terminos seriei illius, valorem ipsius $\varphi$ exhibentis, crescentes efficere videatur. Cum autem iste cometa uno die per angulum plus quam 152° a perihelio circa solem moveatur, quia cometam diu ante vel post perihelium observari ponimus, erit $v > 152^0$ et $\cos\frac{1}{2}v < \sin 14^0$ et proinde $\cos\frac{1}{2}v < 0,2419219$, hoc est $< \frac{1}{4}$. Hinc erit $\cos^4\frac{1}{2}v < \frac{1}{256}$, quo valore terminus $2Nx\cos^4\frac{1}{2}v$ valde redditur exiguus. Sumamus spatium $k$ esse decem dierum, erit (8) $v = 167^0\,34'$ et $\frac{1}{2}v = 83^0\,47'$. Si jam hinc quaeramus angulum tempori $k+x$ dierum respondentem, sequens calculus instituatur:

$$l\cos\tfrac{1}{2}v = (-1),0345825 \qquad lN = 1,4265857$$
$$l\sin\tfrac{1}{2}v = (-1),9974386 \qquad l2 = 0,3010300$$
$$lN = 1,4265857 \qquad l\cos^4\tfrac{1}{2}v = (-4),1383300$$
$$\overline{(-3),8659457}$$

$$\text{ergo}\quad 2N\cos^4\tfrac{1}{2}v = 0,007344.$$

Pro secundo termino erit
$$lN^2 = 2,8531714$$
$$l4 = 0,6020600$$
$$l\cos^7\tfrac{1}{2}v = (-7),2420775$$
$$l\sin\tfrac{1}{2}v = (-1),9974386$$
$$\overline{(-4),6947475}$$

$$\text{ergo}\quad 4N^2\cos^7\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}v = 0,000495.$$

Pro termino tertio utrumque membrum seorsim computetur, nempe

$$lN^3 = 4,2797571 \qquad lN^3 = 4,2797571$$
$$l\tfrac{4}{3} = 0,1249387 \qquad l\tfrac{4}{3} = 0,1249387$$
$$l7 = 0,8450980 \qquad l8 = 0,9030900$$
$$l\cos^{10}\tfrac{1}{2}v = (-10),3458250 \qquad l\cos^{12}\tfrac{1}{2}v = (-12),4149900$$
$$\overline{(-5),5956188} \qquad \overline{(-7),7227758}$$

ergo $\frac{28}{3} N^3 \cos^{10} \frac{1}{2} v = 0{,}00003941$ ergo $\frac{32}{3} N^3 \cos^{12} \frac{1}{2} v = 0{,}0000005282$.

Cometa ergo tempore $10 + x$ dierum a perihelio movetur per angulum

$$167^\circ\, 34' + 0{,}007344\, x - 0{,}0004839\, x^2 + 0{,}00003888\, x^3$$

qui termini, nisi $x$ decem dies superet, notabiliter decrescunt. Sit $x$ spatium unius diei, erit

$$\begin{array}{rl} & +0{,}007344 \\ & -0{,}000484 \\ & +0{,}000039 \\ \hline \varphi = & 0{,}006899 \\ & 0{,}006690 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \sin 23' = & 0{,}006690 \\ \sin 24' = & 0{,}006981 \\ \hline & 291 \end{array}$$

$$291 : 60'' = 209 : 43''$$

ergo tempori undecim dierum respondet angulus $167^\circ\, 57'\, 43''$.

26. **Scholion 2.** Si ponamus $x$ negativum, tum omnes termini seriei valorem ipsius $\varphi$ exhibentis iisdem signis erunt affecti, ideoque series eo magis convergit. Quodsi ergo tempori $k$ dierum respondeat angulus $v$ a perihelio sumtus, seu anomalia vera, tempori $k - x$ dierum respondebit anomalia vera $v - \varphi$, ita ut sit

$$\varphi = 2Nx \cos^4 \tfrac{1}{2} v + 4N^2 x^2 \cos^7 \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v + \tfrac{4}{3} N^3 x^3 \cos^{10} \tfrac{1}{2} v \left(7 - 8 \cos^2 \tfrac{1}{2} v\right)$$

quae primo, uti vidimus, vehementer convergit, si angulus $\frac{1}{2} v$ non multum deficiat ab angulo recto, hoc est si cometa adhuc longe a perihelio distet, etiamsi hoc casu $N$ sit numerus satis magnus. Quodsi autem $N$ sit numerus multo minor, quod evenit si perihelium cometae longius a sole sit remotum, tum haec series satis convergit, etiamsi cometa non tantopere a perihelio distet.

27. **Problema 6.** Ex datis tribus cometae longitudinibus ac latitudinibus heliocentricis orbitam ipsius determinare.

**Solutio.** Sit longitudo perihelii $= p$, distantia perihelii a sole $= a$, distantia terrae medi[a] a sole $= c$, ac ponatur $N = 0{,}012163763303 \cdot \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$. Sit longitudo nodi ascendentis $= q$, inclinati[o] orbitae cometae ad eclipticam $= s$; capiatur angulus $r$, ut sit $\tang r = \frac{\tang (p - q)}{\cos s}$, erit $r$ distanti[a] perihelii a nodo. Sint tres observationes sumtae diu antequam cometa ad perihelium pertingit, se[d] statim atque apparere incipit. Sit pro observatione

| | I. | II. | III. |
|---|---|---|---|
| longitudo cometae heliocentrica | $= f$ | $f'$ | $f''$ |
| latitudo cometae heliocentrica | $= g$ | $g'$ | $g''$ |

tempus inter observationem I. et II. $= x$ dierum

inter I. et III. $= \lambda$ dierum.

Post primam observationem ponamus cometam ad perihelium pertingere spatio $k$ dierum, et sit anomalia vera cometae tempore primae observationis $= v$, tempore secundae $= v - \varphi$, tempore tertiae $= v - \psi$, erit, uti vidimus,

$$\varphi = 2N\varkappa \cos^4 \tfrac{1}{2} v + 4N^2\varkappa^2 \cos^7 \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v + \text{etc.}$$

$$\psi = 2N\lambda \cos^4 \tfrac{1}{2} v + 4N^2\lambda^2 \cos^7 \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v + \text{etc.}$$

Jam erit per (19), posito $r$ loco $A$

1) $\sin g = \sin (r - v) \sin s$
$\sin g' = \sin (r - v + \varphi) \sin s$
$\sin g'' = \sin (r - v + \psi) \sin s$

2) $\tan (f - q) = \tan (r - v) \cos s$
$\tan (f' - q) = \tan (r - v + \varphi) \cos s$
$\tan (f'' - q) = \tan (r - v + \psi) \cos s$

itemque

3) $\tan g = \sin (f - q) \tan s$
$\tan g' = \sin (f' - q) \tan s$
$\tan g'' = \sin (f'' - q) \tan s$

4) $\cos (r - v) = \cos g \cos (f - q)$
$\cos (r - v + \varphi) = \cos g' \cos (f' - q)$
$\cos (r - v + \psi) = \cos g'' \cos (f'' - q)$

Ex aequationibus N⁰ 3 sequitur

$$\frac{\sin (f' - q)}{\sin (f - q)} = \frac{\tan g'}{\tan g} = \frac{\sin f' \cos q - \cos f' \sin q}{\sin f \cos q - \cos f \sin q}$$

indeque
$$\tan q = \frac{\tan g' \sin f - \tan g \sin f'}{\tan g' \cos f - \tan g \cos f'}.$$

Idem valor pro longitudine nodi $q$ prodire debet ex binis quibusvis aliis aequationibus ejusdem ordinis, siquidem observationes omni cura sunt institutae; erit ergo pariter

$$\tan q = \frac{\tan g'' \sin f' - \tan g' \sin f''}{\tan g'' \cos f' - \tan g' \cos f''}.$$

Inventa autem longitudine nodi ascendentis $q$, simul innotescit inclinatio orbitae cometae ad eclipticam $s$ ex aequatione $\tan s = \frac{\tan g}{\sin (f - q)}$. Quia porro $\varphi$ et $\psi$ sunt anguli perquam exigui, erit

$$\sin (r - v + \varphi) = \sin (r - v) + \varphi \cos (r - v) \text{ et } \sin (r - v + \psi) = \sin (r - v) + \psi \cos (r - v)$$

unde ex ordine aequationum primo habebitur

$$\frac{\sin g'}{\sin g} = 1 + \varphi \cot (r - v) \quad \text{et} \quad \frac{\sin g''}{\sin g} = 1 + \psi \cot (r - v)$$

$$\text{unde} \quad \frac{\sin g'' - \sin g}{\sin g' - \sin g} = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\lambda + 2N\lambda^2 \cos^3 \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v}{\varkappa + 2N\varkappa^2 \cos^3 \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v}$$

Praeterea vero cum sit $\sin (r - v) = \frac{\sin g}{\sin s}$, dabitur quoque $\cot (r - v)$, unde erit

$$\frac{\sin g' - \sin g}{\sin g \cot (r - v)} = \varphi = 2N\varkappa \cos^4 \tfrac{1}{2} v + 4N^2\varkappa^2 \cos^7 \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v$$

$$\text{et} \quad \frac{\sin g'' - \sin g}{\sin g \cot (r - v)} = \psi = 2N\lambda \cos^4 \tfrac{1}{2} v + 4N^2\lambda^2 \cos^7 \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v.$$

Ex his ergo aequationibus reperietur et valor numeri $N$, ex quo distantia perihelii a sole $a$ innotescit, et anomalia vera $v$ pro prima observatione, ex qua tempus $k$, quo cometa perihelium attingit, innotescit. Deinde vero ex cognito $v$ innotescit angulus $r$, hincque tandem longitudo perihelii $p$. Q. E. I.

28. **Coroll. 1.** Quoniam invenimus

$$\varphi = \frac{\sin g' - \sin g}{\sin g \cot (r - v)} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\sin g'' - \sin g}{\sin g \cot (r - v)},$$

atque angulus $r - v$ datus est ex aequatione $\sin (r - v) = \frac{\sin g}{\sin s}$, dabuntur decrementa anomaliae verae $v$ in observatione secunda et tertia, quae sunt $\varphi$ et $\psi$.

29. **Coroll. 2.** Quoniam ergo dantur $\varphi$ et $\psi$, erit ex (23)

$$N\varkappa = \frac{\varphi}{2\cos^4 \frac{1}{2} v} + \frac{\varphi\varphi \sin \frac{1}{2} v}{2 \cos^5 \frac{1}{2} v} + \text{etc.}$$

$$N\lambda = \frac{\psi}{2\cos^4 \frac{1}{2} v} + \frac{\psi\psi \sin \frac{1}{2} v}{2 \cos^5 \frac{1}{2} v} + \text{etc.}$$

hincque eliminando numerum $N$ erit

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\psi \cos \frac{1}{2} v + \psi^2 \sin \frac{1}{2} v}{\varphi \cos \frac{1}{2} v + \varphi^2 \sin \frac{1}{2} v}, \quad \text{seu} \quad \lambda\varphi + \lambda\varphi^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \varkappa\psi + \varkappa\psi^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v,$$

ex qua expedite reperitur anomalia vera $v$, cum sit

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \frac{\varkappa\psi - \lambda\varphi}{\lambda\varphi^2 - \varkappa\psi^2}.$$

30. **Coroll. 3.** Invento ergo hoc modo angulo $v$, ex eo statim angulus $r$, hincque longitudo perihelii $p$ innotescit per aequationes $\sin (r - v) = \frac{\sin g}{\sin s}$ et $\operatorname{tang} (p - q) = \operatorname{tang} r \cos s$. Tum vero etiam numerus $N$ definitur ex aequatione

$$N = \frac{\varphi}{2\varkappa \cos^4 \frac{1}{2} v} + \frac{\varphi^2 \sin \frac{1}{2} v}{2\varkappa \cos \frac{1}{2} v}$$

ex quo porro distantia perihelii a sole $a$ determinatur.

31. **Scholion.** Si ob cosinum anguli $\frac{1}{2} v$ valde parvum, series, qua numerus $N$ definitur, parum convergat, calculus sine approximatione, postquam $\varphi$ et $\psi$ sunt inventa, institui poterit hoc modo: Cum sit $Nk = \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v$, erit

$$N(k - \varkappa) = \operatorname{tang} \frac{v - \varphi}{2} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v - \varphi}{2}$$

hincque $N\varkappa = \operatorname{tang} \frac{1}{2} v - \operatorname{tang} \frac{v - \varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v - \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{v - \varphi}{2}$. Sit $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = t$ et $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \mu$, itemque $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi = \nu$, erit $\operatorname{tang} \frac{v - \varphi}{2} = \frac{t - \mu}{1 + \mu t}$ et $\operatorname{tang} \frac{v - \psi}{2} = \frac{t - \nu}{1 + \nu t}$. His substitutis erit

$$N\varkappa = \frac{\mu(1+tt)}{1+\mu t} + \frac{\mu tt(1+tt) - \mu^2 t(1-t^4) + \frac{1}{3}\mu^3(1+t^6)}{(1+\mu t)^3}$$

$$\text{et} \quad N\lambda = \frac{\nu(1+tt)}{1+\nu t} + \frac{\nu tt(1+tt) - \nu^2 t(1-t^4) + \frac{1}{3}\nu^3(1+t^6)}{(1+\nu t)^3}.$$

Ex his eliminando $N$ prodibit ista aequatio

$$\frac{\lambda(1+\nu t)^3}{\varkappa(1+\mu t)^3} = \frac{\nu(1+\nu t)^2 + \nu tt - \nu^2 t(1-tt) + \frac{1}{3}\nu^3(1-tt+t^4)}{\mu(1+\mu t)^2 + \mu tt - \mu^2 t(1-tt) + \frac{1}{3}\mu^3(1-tt+t^4)}$$

$$\text{sive} \quad \frac{\lambda(1+\nu t)^3}{\varkappa(1+\mu t)^3} = \frac{\nu + \nu^2 t + \frac{1}{3}\nu^3(1+tt)}{\mu + \mu^2 t + \frac{1}{3}\mu^3(1+tt)}.$$

Ex hac igitur aequatione etsi quinti gradus, si methodo praecedente jam prope valor ipsius $t$ innotuerit, satis cito verus valor ipsius $t$ colligi poterit. Quo invento tam numerus $N$ quam tempus $k$ dierum assignabitur.

**32. Scholion 2.** Quanquam ante valores $\varphi$ et $\psi$ tantum per approximationem invenimus, observationes tres invicem proximas assumentes, tamen inveniri quoque possunt exacte, etiamsi observationes maxime a se invicem distent. Inventis enim $q$ et $s$ modo praescripto, qui nulla approximatione nitebatur, statim innotescit angulus $r - v$, cum sit

$$\text{vel} \quad \sin(r-v) = \frac{\sin g}{\sin s}, \quad \text{vel} \quad \tang(r-v) = \frac{\tang(f-q)}{\cos s}.$$

Hinc porro innotescit angulus $\varphi$ ex aequatione $\sin(r - v + \varphi) = \frac{\sin g'}{\sin s}$, et angulus $\psi$ ex aequatione $\sin(r - v + \psi) = \frac{\sin g''}{\sin s}$. Inventis ergo $\varphi$ et $\psi$ methodo in Scholio praecedente exhibita reperientur $N$ et $v$. Ex datis ergo tribus quibuscunque locis cometae heliocentricis, longitudinibus scilicet ac latitudinibus, orbita cometae exactissime determinari poterit. Praestat tamen antequam iste modus adhibeatur, ex tribus observationibus invicem proximis et a perihelio longe remotis orbitam cometae vero proxime determinare; quo aequatio superior quinque dimensionum facilius resolvi possit. Cum enim hoc casu fiant $\mu$ et $\nu$ valde parva, erit proxime

$$\frac{\lambda(1+\nu t)^3}{\varkappa(1+\mu t)^3} = \frac{\nu}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{1+\nu t}{1+\mu t} = \frac{\sqrt[3]{\varkappa\nu}}{\sqrt[3]{\lambda\mu}}, \quad \text{unde} \quad t = \frac{\sqrt[3]{\lambda\mu} - \sqrt[3]{\varkappa\nu}}{\mu\sqrt[3]{\varkappa\nu} - \nu\sqrt[3]{\lambda\mu}};$$

ex quo valore prope vero facile valor exactior elicietur.

# XIX.

# Recherche des inégalités causées au mouvement des planètes par des forces quelconques.

---

1. Le plus difficile problème que la théorie de l'Astronomie offre de nos jours, est sans doute celui de déterminer les inégalités qui sont causées dans le mouvement des planètes par l'action des autres corps célestes. C'est de la solution de ce problème que dépend tant la détermination du vrai mouvement de la lune, que celle des inégalités qu'on observe dans les planètes de Jupiter et de Saturne. Or, bien qu'on ne remarque point des inégalités aussi sensibles dans les mouvements des autres planètes, il est cependant certain qu'elles n'en sont pas entièrement exemptes: le mouvement de leurs aphélies et de leurs noeuds, quelque lent qu'il soit, est une preuve suffisante que ces planètes aussi sont assujetties à des forces qui troublent les lois établies par Kepler.

2. Car si chaque planète n'était attirée que vers le soleil par une force réciproquement proportionnelle aux carrés de ses distances au soleil, il est demontré 1° que son mouvement se ferait toujours dans un même plan; 2° que son aphélie et son périhélie répondraient toujours aux mêmes points du ciel, et 3° que son orbite serait une ellipse parfaite dont l'un des foyers se trouverait dans le centre du soleil, ou bien, ce mouvement serait parfaitement conforme aux règles découvertes par Kepler. Par cette raison on dit, que le mouvement d'une planète présente des inégalités, en tant qu'il ne suit pas exactement ces règles, et qu'il s'en écarte ou par quelque mouvement de ses absides, ou de ses noeuds, ou par d'autres irrégularités dont son mouvement est affecté.

3. De là il est clair que le mouvement d'une planète sera irrégulier, lorsqu'elle est sollicitée ou vers le soleil, par une force qui ne suit pas exactement la raison réciproque des carrés des distances, ou encore par des forces qui ne sont pas dirigées vers le soleil. La même chose a aussi lieu dans la lune et les autres satellites, lorsque la force dont ils sont sollicités n'est pas dirigée vers le centre de leur planète principale, ou qu'elle n'est pas proportionnelle réciproquement au carré des distances. On aura donc, pour déterminer ces irrégularités, à résoudre le problème suivant:

*Les forces dont un corps céleste est sollicité, étant données, trouver le mouvement de ce corps.*

Car suivant la théorie de Newton, on peut regarder ces forces comme connues, puisqu'on ne saurait plus douter, que tous les corps célestes ne s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés de leurs distances.

4. Pour résoudre cette question, il conviendra de considérer deux cas: l'un, où le mouvement du corps se fait toujours dans le même plan, ce qui arrive lorsque les forces sollicitantes se trouvent dans ce même plan. L'autre cas est plus général et comprend les mouvements qui ne s'effectuent point dans un même plan; ce qui arrive lorsque les forces sollicitantes ont des directions quelconques, dont la moyenne ne tombe pas dans le plan où le corps se meut à chaque instant. Car quel que soit le mouvement du corps, on peut toujours concevoir un plan dans lequel le mouvement ait lieu pendant un temps infiniment petit, et c'est à cette variation du plan, qu'il faut avoir égard dans la détermination du mouvement du second cas. Je tâcherai donc de développer les règles les plus sûres pour déterminer le mouvement dans l'un et l'autre cas, et je commencerai par le premier cas, puisqu'il est le plus simple et qu'il servira de guide pour la résolution de l'autre.

5. **Problème 1.** (Fig. 218) Le corps étant sollicité par des forces quelconques données qui le font décrire la ligne courbe $AQ$ située dans le même plan, trouver les changements instantanés de ce mouvement.

**Solution.** Qu'on choisisse dans le plan où le mouvement se fait, un point fixe $C$ auquel on rapporte le mouvement du corps. Pour cet effet, l'on tirera par le point $C$ une ligne droite fixe $CA$, et l'on connaîtra pour chaque temps proposé, le vrai lieu du corps $Q$, lorsqu'on pourra assigner tant sa distance $CQ$ au point fixe $C$, que l'angle $ACQ$ qui exprimera en astronomie la longitude du corps $Q$. Soit donc la distance $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, et que $t$ marque le temps écoulé depuis une certaine époque où cela arrive.

Ensuite, quelles que soient les forces qui sollicitent le corps en $Q$, puisque le mouvement se fait dans le plan $ACQ$, elles se pourront toujours réduire à deux forces, dirigées dans le même plan, dont l'une tend directement vers le point $C$ selon $QC$, et l'autre selon la direction $QV$, perpendiculaire à $QC$. Comme il ne s'agit ici que de forces accélératrices, soit la force accélératrice

$$\text{selon } QC = P$$
$$\text{et celle qui agit selon } QV = Q$$

et ce sera de ces deux forces qu'il faudra déduire le mouvement du corps, ou les valeurs des lettres $x$ et $\varphi$ pour un temps quelconque.

Pour ramener cette recherche aux premiers principes de la Mécanique, on doit rapporter le mouvement à des coordonnées orthogonales: Qu'on tire à cet effet, du point $Q$ sur la droite fixe $CA$, la perpendiculaire $QP$, et à cause de $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, on aura $CP = x\cos\varphi$ et $PQ = x\sin\varphi$, valeurs que nous désignerons, pour abréger,

$$\text{l'abscisse } CP = x\cos\varphi \text{ par } p$$
$$\text{l'ordonnée } PQ = x\sin\varphi \text{ par } q.$$

Qu'on décompose ensuite aussi les forces $P$ et $Q$ selon ces mêmes directions, et la force $P$ suivant $QC$ donnera une force selon $QT$ parallèle à $PC$, $= P\cos\varphi$, et selon $QP$, $= P\sin\varphi$. De même, l'autre force $Q$ suivant $QV$ donnera pour la direction $QT$ la force négative $-Q\sin\varphi$, et pour la direction $QP$, la force $Q\cos\varphi$, à cause de l'angle $PQV = PCQ$. Donc le corps en $Q$ sera sollicité

$$\text{selon } QT, \text{ par une force } = P\cos\varphi - Q\sin\varphi$$
$$\text{et selon } QP, \text{ par une force } = P\sin\varphi + Q\cos\varphi.$$

Maintenant, sachant ces forces accélératrices, ou plutôt retardatrices, puisqu'elles tendent à diminuer les coordonnées $p$ et $q$, les principes de Mécanique nous fourniront, en prenant l'élément $dt$ du temps pour constant, les deux formules suivantes:

$$\frac{2ddp}{dt^2} = -P\cos\varphi + Q\sin\varphi \quad \text{et} \quad \frac{2ddq}{dt^2} = -P\sin\varphi - Q\cos\varphi,$$

d'où nous tirons

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi = -\tfrac{1}{2}Qdt^2 \quad \text{et} \quad ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}Pdt^2.$$

Mais ayant $p = x\cos\varphi$ et $q = x\sin\varphi$, l'on aura

$$q\cos\varphi - p\sin\varphi = 0 \quad \text{et} \quad q\sin\varphi + p\cos\varphi = x;$$

donc en prenant les différentielles

$$dq\cos\varphi - dp\sin\varphi - qd\varphi\sin\varphi - pd\varphi\cos\varphi = dq\cos\varphi - dp\sin\varphi - xd\varphi = 0$$

$$dq\sin\varphi + dp\cos\varphi + qd\varphi\cos\varphi - pd\varphi\sin\varphi = dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx,$$

on obtiendra les formules suivantes

$$dq\cos\varphi - dp\sin\varphi = xd\varphi \quad \text{et} \quad dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx.$$

Prenons encore les différentielles, pour avoir

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi - dqd\varphi\sin\varphi - dpd\varphi\cos\varphi = dxd\varphi + xdd\varphi$$

qui, à cause de $dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx$, se change en

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi = 2dxd\varphi + xdd\varphi.$$

De même, l'autre équation différentiée donne

$$ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi + dqd\varphi\cos\varphi - dpd\varphi\sin\varphi = ddx$$

qui, à cause de $dq\cos\varphi - dp\sin\varphi = xd\varphi$, se change en

$$ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi = ddx - xd\varphi^2.$$

Et partant nous aurons les deux équations différentio-différentielles suivantes, qui détermineront mouvement du corps par les variables $x$ et $\varphi$:

$$2dxd\varphi + xdd\varphi = -\tfrac{1}{2}Qdt^2$$

$$ddx - xd\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}Pdt^2.$$

Mais il faut tâcher d'en tirer des équations simplement différentielles, ce qui pourra se faire de la manière suivante: Je multiplie d'abord la première par $2x^3d\varphi$, pour avoir

$$4x^3dxd\varphi^2 + 2x^4d\varphi dd\varphi = -dt^2 \cdot Qx^3d\varphi$$

dont l'intégrale est

$$x^4d\varphi^2 = -dt^2\int Qx^3d\varphi.$$

Ensuite, multipliant la première par $2xd\varphi$, et l'autre par $2dx$, leur somme sera:

$$4xdxd\varphi^2 + 2xxd\varphi dd\varphi + 2dxddx - 2xdxd\varphi^2 = -dt^2\,(Qxd\varphi + Pdx)$$

dont l'intégrale est:

$$dx^2 + xxd\varphi^2 = -dt^2\int(Pdx + Qxd\varphi).$$

Posons pour abréger $-\int Qx^3d\varphi = X$ et $-\int(Pdx + Qxd\varphi) = Y$, et nous aurons

$$x^4d\varphi^2 = Xdt^2 \quad \text{et} \quad dx^2 + xxd\varphi^2 = Ydt^2$$

d'où nous tirons

$$Xdx^2 + Xxxd\varphi^2 = Yx^4d\varphi^2$$

et partant

$$d\varphi = \frac{dx\sqrt{X}}{x\sqrt{(Yxx - X)}} \quad \text{et} \quad dt = \frac{xxd\varphi}{\sqrt{X}} = \frac{xdx}{\sqrt{(Yxx - X)}}$$

ou bien

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx - X)}.$$

Par conséquent, nous connaissons, pour chaque élément $dt$ du temps, les changements que subissent tant la longitude ou l'angle $\varphi$ que la distance $CQ = x$.

6. **Coroll. 1.** Si l'on considère l'élément de la courbe $Qq$, décrit dans le temps $dt$, l'élément de l'aire ou le triangle $QCq$ est $= \frac{1}{2}xxd\varphi$. Donc posant l'aire $ACQ = S$, on aura $xxd\varphi = 2dS = dt\sqrt{X}$ et $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{X}$. D'où l'on voit que si la force $QV = Q$ est évanouissante, à cause de $X = \text{const.} = C$, on aura $dS = \frac{1}{2}dt\sqrt{C}$, et partant $S = \frac{1}{2}t\sqrt{C}$, ou bien les aires $ACQ$ seront proportionnelles aux temps pendant lesquels elles sont décrites.

7. **Coroll. 2.** On peut nommer $\frac{dS}{dt}$ la vitesse dont l'aire $ACQ$ croît, ou bien la vitesse de la description des aires; donc cette vitesse sera $= \frac{1}{2}\sqrt{X}$ et le carré de cette vitesse $= \frac{1}{4}X$. Et partant, lorsque $X$ n'est pas une quantité constante, ce qui arrive lorsque la force $Q$ n'est pas $= 0$, la vitesse de la description des aires n'est pas constante, ou bien les aires ne seront pas proportionnelles aux temps.

8. **Coroll. 3.** Ensuite, l'élément de la courbe même étant $Qq = \sqrt{(dx^2 + xxd\varphi^2)}$, la vitesse du corps en $Q$ sera

$$= \frac{\sqrt{(dx^2 + xxd\varphi^2)}}{dt} = \sqrt{Y},$$

donc la racine carrée de la quantité $Y = -\int(Pdx + Qxd\varphi)$ exprime la vitesse du corps en $Q$, et partant la quantité $Y$ même le carré de cette vitesse.

9. **Coroll. 4.** Je remarque de plus, que la longitude $ACQ = \varphi$ va toujours en augmentant avec le temps $t$, à moins que ni $x$ ne devienne infinie, ni la quantité $X$ n'évanouisse. Cependant il peut arriver, que $\sqrt{X}$ étant devenue $= 0$, prenne ensuite une valeur négative, et alors le mouvement du corps sera rétrograde.

10. **Coroll. 5.** Ayant pour la différentielle de la distance $dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx - X)}$, la distance ira en croissant, tandis que la valeur de la quantité $\sqrt{(Yxx - X)}$ demeure affirmative et jusqu'à ce qu'elle évanouisse. Ensuite, elle pourra devenir négative, et le corps se rapprochera du centre $C$. Dans ce cas, la distance $x$ croîtra et décroîtra alternativement.

11. **Coroll. 6.** Il faut donc principalement avoir égard à la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$, en tant que sa valeur est tantôt affirmative, tantôt négative, et aux changements mêmes $= 0$. Or puisque le signe radical porte en soi l'ambigüité du signe $\pm$, et que les deux signes ne sauraient avoir lieu à la fois, il est absolument nécessaire de délivrer cette expression de toute ambigüité de signe.

12. **Scholie 1.** Le moyen le plus sûr pour fixer le signe de la quantité $\sqrt{(Yxx - X)}$ est, sans doute, de la réduire au sinus d'un certain angle, puisque le sinus d'un angle variable peut subir les mêmes variations auxquelles cette formule est assujettie. Car posant $\sqrt{(Yxx - X)} = Z \sin v$, de sorte que $dx = \frac{Z \sin v}{x}\, dt$, on voit que tandis que l'angle $v$ subsiste entre $0°$ et $180°$, la distance $x$ va en croissant, et qu'elle diminue, lorsque l'angle $v$ passe de 180 à $360°$. Donc quand l'angle $v$ est $= 0$, la distance $CQ = x$ sera la plus petite; elle sera la plus grande lorsque $v$ est de $180°$, c'est à dire qu'alors le corps passe par ses absides à l'égard du point $C$. De sorte que, si le point $C$ est pris au centre du soleil, le corps $Q$ se trouvera dans son périhélie lorsque $v = 0$, et dans son aphélie lorsque $v = 180°$. Ainsi l'angle $v$ est dans un certain rapport avec l'élongation du corps de ses absides, et exprime, par conséquent, ce qu'on nomme en Astronomie l'anomalie d'une planète. Car quoiqu'on ait plusieurs espèces d'anomalies, comme l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie, toutes conviennent en ce qu'elles évanouissent ou deviennent $180°$, lorsque le corps se trouve dans ses absides. C'est donc de la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ qu'il faut tirer la détermination de l'anomalie du corps, de même que de la variabilité de la ligne des absides, s'il y en a.

13. **Scholie 2.** Mais il n'est presque pas possible de tirer en général de ces formules quelques conclusions d'où l'on puisse connaître le mouvement du corps. Car regardant les quantités $P$ et $Q$ qui expriment les forces, comme des fonctions quelconques de nos variables $x$, $\varphi$ et $t$, les formules intégrales $X$ et $Y$ renferment déjà ce qui est en question, c'est à dire le rapport entre nos variables. Mais lorsque la force $Q$ s'évanouit, et que la force $P$ dépend uniquement de la distance $x$, la valeur de $X$ deviendra constante, et $Y$ marquera une fonction de $x$, de sorte que la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ sera aussi fonction de $x$. En l'égalant donc à $Z \sin v$, on obtiendra la distance $x$ exprimée par l'anomalie $v$, ce qui pourra se faire d'une infinité de manières différentes, puisque $Z$ peut être prise à volonté; il sera donc aisé de choisir la manière qu'on

jugera la plus convenable pour le calcul. Or quoique le corps $Q$, en tant qu'il représente une planète, soit sollicité par plusieurs forces, il s'en trouvera toujours une, dirigée selon $QC$ et exprimée par une fonction de $x$, par rapport à laquelle les autres soient très petites; et c'est dans ce cas que nos formules pourront fournir des approximations assez propres pour nous représenter le vrai mouvement du corps.

14. **Problème 2.** Le corps étant d'abord attiré au point $C$ par une force qui est réciproquement proportionnelle aux carrés de ses distances à ce point, et ensuite, par d'autres forces quelconques, très petites à l'égard de la première, et situées dans le plan du mouvement du corps, trouver la nature de ce mouvement.

**Solution.** Posant, comme auparavant, la distance $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, soit la première force agissant selon $QC = \frac{A}{xx}$, et, que les petites forces se réduisent à deux, $P$ et $Q$, dont la première $P$ soit dirigée vers $QC$, et l'autre $Q$ vers $QV$, perpendiculaire à $QC$. Ainsi la force exprimée dans le problème précédent par $P$, sera ici $\frac{A}{xx} + P$, et la force $Q$ sera $Q$. Nous aurons donc, comme auparavant, $X = -\int Qx^3 d\varphi$, et à cause de $\int \frac{-Adx}{xx} = \frac{A}{x}$, si nous posons $Y = -\int (Pdx + Qxd\varphi)$, ce que $Y$ était ci-dessus, sera ici $Y + \frac{A}{x}$, $X$ et $Y$ renfermant les constantes qui entrent dans le calcul par ces deux intégrations. Mais on voit que les parties variables renfermées dans les lettres $X$ et $Y$ seront fort petites, puisqu'elles résultent des petites forces $P$ et $Q$. Cela posé, nos deux équations différentielles, qui contiennent le mouvement du corps, seront

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx + Ax - X)}$$

où il faut remarquer, que si les petites forces $P$ et $Q$ étaient $= 0$, les quantites $X$ et $Y$ seraient constantes, et le corps décrirait une section conique autour du foyer $C$, selon les règles de Kepler. On aurait donc, dans ce cas,

$$x = \frac{b}{1 - g\cos v}$$

où $b$ marquerait le demi-paramètre de la section, $g$ l'excentricité, et $v$ l'anomalie vraie, ou l'élongation de la plus haute abside. Gardons donc pour le cas proposé la même formule avec cette différence, que les quantités $b$ et $g$ ne soient plus constantes, mais variables; et il est évident, que leur variabilité dépendra des forces $P$ et $Q$. Soit donc

$$x = \frac{p}{1 - q\cos v}$$

et par là nous introduisons, au lieu d'une variable $x$, trois nouvelles variables $p$, $q$ et $v$, mais dont deux seront déterminées par cette condition, que la valeur de $dx$ doit être exprimée par une telle formule $Zdt\sin v$, ou plutôt par $-Zdt\sin v$, parce que depuis l'angle $v = 0$, la distance $x$ va en diminuant. Ayant donc

$$dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx + Ax - X)}, \quad \text{ou} \quad dx = dt\sqrt{\left(Y + \frac{A}{x} - \frac{X}{xx}\right)}$$

et substituant pour $x$ sa valeur $\frac{p}{1-q\cos v}$, nous aurons

$$dx = \frac{dt}{p}\sqrt{(ppY + Ap(1-q\cos v) - X(1-q\cos v)^2)}$$

Développons la quantité qui se trouve sous le signe radical, nous aurons

$$ppY + Ap - X - Apq\cos v + 2qX\cos v - qqX\cos^2 v$$

et faisons d'abord évanouir les termes qui contiennent $\cos v$; nous aurons $Ap = 2X$, partant $p = \frac{2X}{A}$. Donc notre quantité sera

$$ppY + X - qqX\cos^2 v = ppY + X(1-qq) + qqX\sin^2 v$$

et partant, afin que le seul terme $qqX\sin^2 v$ reste, posons

$$ppY + X(1-qq) = 0, \quad \text{ou} \quad qq = 1 + \frac{Y}{X}pp$$

et ainsi nous aurons pour $p$ et $q$ les valeurs suivantes

$$p = \frac{2X}{A} \quad \text{et} \quad qq = 1 + \frac{4XY}{AA}$$

et pour $dx$ nous aurons cette valeur

$$dx = -\frac{dt}{p}\sqrt{qqX\sin^2 v} = \frac{-qdt\sin v}{p}\sqrt{X}$$

$$\text{et} \quad d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{X} = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{X}.$$

Mais puisque $x = \frac{p}{1-q\cos v}$, nous en tirons $q\cos v = 1 - \frac{p}{x}$, et par la différentiation

$$dq\cos v - qdv\sin v = \frac{-dp}{x} + \frac{pdx}{xx}; \quad \text{donc} \quad qdv\sin v = dq\cos v + \frac{dp}{x} - \frac{pdx}{xx}$$

équation qui sert à déterminer l'anomalie $v$. Pour cet effet, ayant déjà $dx = -\frac{qdt\sin v}{p}\sqrt{X}$, il faut aussi chercher les valeurs des différentielles $dp$ et $dq$. Or à cause de

$$dX = -Qx^3 d\varphi = -Qxdt\sqrt{X}$$

$$\text{et} \quad dY = -Pdx - Qxd\varphi = \frac{Pqdt\sin v}{p}\sqrt{X} - \frac{Qdt}{x}\sqrt{X}$$

nous aurons

$$dp = -\frac{2Qxdt}{A}\sqrt{X}.$$

Ensuite puisque $qq = 1 + \frac{4XY}{AA} = 1 + \frac{2pY}{A}$ et partant $\frac{2Y}{A} = \frac{qq}{p} - \frac{1}{p}$, nous aurons

$$\frac{2Pqdt\sin v}{Ap}\sqrt{X} - \frac{2Qdt}{Ax}\sqrt{X} = \frac{dp}{pp}(1-qq) + \frac{2qdq}{p}$$

et en resubstituant pour $dp$ sa valeur trouvée

$$\frac{Pqdt\sin v}{Ap}\sqrt{X} - \frac{Qdt}{Ax}\sqrt{X} = -\frac{Q(1-qq)xdt}{App}\sqrt{X} + \frac{qdq}{p}$$

donc
$$dq = \frac{Pdt \sin v}{A} \sqrt{X} - \frac{Qxdt\sqrt{X}}{Aq}\left(\frac{p}{xx} - \frac{(1-qq)}{p}\right).$$

Or à cause de $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$ on aura

$$\frac{p}{xx} - \frac{1+qq}{p} = \frac{1 - 2q\cos v + qq\cos^2 v - 1 + qq}{p} = \frac{-2q\cos v + qq(1+\cos^2 v)}{p}$$

et partant
$$dq = \frac{Pdt\sin v}{A}\sqrt{X} + \frac{Qdt\sqrt{X}}{A}\left(\frac{2\cos v - q - q\cos^2 v}{1 - q\cos v}\right)$$

donc
$$dq\cos v + \frac{dp}{x} = \frac{Pdt\sin v\cos v}{A}\sqrt{X} - \frac{Qdt\sin^2 v\sqrt{X}}{A}\left(\frac{2 - q\cos v}{1 - q\cos v}\right).$$

Ces valeurs étant substituées pour $dv$, à cause de $\frac{-pdx}{xx} = \frac{qdt\sin v}{xx}\sqrt{X}$ donneront

$$dv = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} + \frac{dt\sqrt{X}}{Aq}\left(P\cos v - Q\sin v\left(\frac{2 - q\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right).$$

Donc posant $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, on aura les changements de toutes les quantités qui se rencontrent dans l'élément $dt$ du temps, savoir

$$dx = -\frac{qdt\sin v}{p}\sqrt{X}, \qquad d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{X} = \frac{dt(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{X}$$

$$dp = -\frac{2Qxdt}{A}\sqrt{X}, \text{ ou } p = \frac{2X}{A}, \qquad dq = \frac{dt\sqrt{X}}{A}\left(P\sin v + 2Q\cos v - \frac{Qq\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)$$

$$dv = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} + \frac{dt\sqrt{X}}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right).$$

Si l'on met pour $X$ sa valeur $\frac{1}{2}Ap$, on aura

$$dp = -\frac{2Q\,pdt}{A(1 - q\cos v)}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

et dans les autres formules on éliminera la quantité $X$.

15. **Coroll. 1.** Si les petites forces $P$ et $Q$ étaient $= 0$, on aurait tant $dp = 0$ que $dq = 0$, et partant le paramètre $p$ et l'excentricité $q$ seraient constants. De plus, on aurait $dv = d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\frac{1}{2}Ap}$, et l'anomalie $v$ croîtrait également avec la longitude $\varphi$, ou bien, la longitude $\varphi$ serait égale à l'anomalie $v$, plus une quantité constante. Ce qui s'accorde parfaitement avec les lois du mouvement de Kepler.

16. **Coroll. 2.** Mais si les forces $P$ et $Q$ ne sont pas évanouissantes, ni le paramètre $p$, ni l'excentricité $q$ ne sera constante. Le paramètre $p$ se trouvera alors par l'intégration de cette équation

$$dp = -\frac{2Qpdt}{A(1 - q\cos v)}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

et l'excentricité $q$ par l'intégration de celle-ci

$$dq = \frac{dt\sqrt{\frac{1}{2}Ap}}{A}\left(P\sin v + 2Q\cos v - \frac{Qq\sin^2 v}{1-q\cos v}\right).$$

17. **Coroll. 3.** Pour l'anomalie $v$, elle se trouvera par l'intégration de cette équation

$$dv = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{dt\sqrt{\frac{1}{2}Ap}}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right).$$

Or ayant trouvé l'anomalie vraie $v$, avec le paramètre $p$ et l'excentricité $q$, on aura de suite la vraie distance de $Q$ au point fixe $C$, savoir $x = \frac{p}{1-q\cos v}$.

18. **Coroll. 4.** Pour la longitude du corps, ou l'angle $ACQ = \varphi$, on la tirera de cette équation

$$d\varphi = \frac{dt\,(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}.$$

Or quoique les variables $p$, $q$, $v$ soient mêlées entre elles, on trouvera moyen de déterminer chacune, puisqu'on sait le rapport de la différentielle de chacune à l'élément $dt$ du temps.

19. **Coroll. 5.** Puisque l'angle $v$ représente l'élongation du corps de l'aphélie (supposant en $C$ le centre du soleil), si l'on prend $QC\alpha = v$, la droite $C\alpha$ passera par l'aphélie, et l'angle $AC\alpha = \varphi - v$ donnera la longitude de l'aphélie, pour laquelle on aura par conséquent

$$AC\alpha = \varphi - v = -\int\frac{dt\sqrt{\frac{1}{2}Ap}}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)$$

d'où l'on connaîtra les changements de l'aphélie, s'il y en a. Car si les forces $P$ et $Q$ étaient $= 0$, on aurait $\varphi - v = \text{const.}$, ou le lieu de l'aphélie $\alpha$ serait fixe.

20. **Coroll. 6.** Si le corps n'était sollicité que par la seule force $\frac{A}{xx}$, on aurait $p = b$ et $q = g$, et partant pour l'anomalie vraie $v$ au temps donné $= t$, cette équation

$$dv = \frac{dt\,(1-g\cos v)^2}{bb}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ab}, \quad \text{ou} \quad dt\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{dv}{(1-g\cos v)^2}$$

dont l'intégrale est

$$t\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{g}{1-gg}\cdot\frac{\sin v}{1-g\cos v} + \frac{1}{(1-gg)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc.}\cdot\cos\frac{g-\cos v}{1-g\cos v}.$$

Or si l'excentricité $g$ est fort petite, il vaudra mieux se servir de cette intégrale

$$t\sqrt{\frac{A}{2b^3}} = (1+\tfrac{3}{2}gg)\,v + 2g\,(1+\tfrac{3}{2}gg)\sin v + \tfrac{3}{4}gg\sin 2v + \tfrac{1}{3}g^3\sin 3v$$

et alors on aura $\varphi = \text{Const.} + v$ et $x = \frac{b}{1-g\cos v}$.

21. **Scholie 1.** Si nous ajoutons à la force principale $\frac{A}{xx}$ encore la force $\frac{2a}{x^3}$, et que nous retranchions cette même force de $P$, pour conserver le même cas que nous avons développé dès

le problème, nous obtiendrons des formules plus générales pour la résolution du même problème. Car ayant comme auparavant

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = dt\sqrt{\left(Y + \frac{A}{x} + \frac{\alpha}{xx} - \frac{X}{xx}\right)},$$

nous n'avons qu'à écrire $P - \frac{2\alpha}{x^3}$ au lieu de $P$. Posant donc $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, la formule irrationelle nous fournit $X = \alpha + \frac{1}{2}Ap$ et $Y = \frac{-A(1-qq)}{2p}$, pour avoir

$$dx = \frac{-q dt \sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}.$$

Ensuite différentions les valeurs $X$ et $Y$, et nous aurons

$$dX = -Qx^3 d\varphi = -\frac{Qpdt}{1 - q\cos v}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)} = \tfrac{1}{2}Adp$$

$$dY = -Pdx + \frac{2\alpha dx}{x^3} - Qxd\varphi = \frac{Pqdt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{2\alpha q dt \sin v}{px^3}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{Qdt(1 - q\cos v)}{p}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}$$

$$\text{Or } dY = \frac{Adp(1-qq)}{2pp} + \frac{Aqdq}{p} = -\frac{Qdt(1-qq)}{p(1 - q\cos v)}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)} + \frac{Aqdq}{p}$$

à cause de $\frac{1}{2}Adp = -\frac{Qpdt}{1 - q\cos v}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}$. Donc

$$\frac{Aqdq}{p} = \frac{qdt\sin v}{p}\left(P - \frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{Qdt\sqrt{(\alpha + \frac{1}{2}Ap)}}{p(1 - q\cos v)}\left(1 - qq - (1 - q\cos v)^2\right)$$

ou bien
$$dp = \frac{-2Qpdt\sqrt{(\alpha + \frac{1}{2}Ap)}}{A(1 - q\cos v)}$$

$$dq = \frac{dt\sin v}{A}\left(P - \frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{Qdt}{A}\left(2\cos v - \frac{q\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}.$$

Enfin, parce que $qdv\sin v = dq\cos v + \frac{dp}{x} - \frac{pdx}{xx}$, nous aurons en substituant pour $dq$, $dp$ et $dx$ les valeurs trouvées

$$dv = \frac{dt(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{dt\cos v}{Aq}\left(P - \frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{Qdt}{Aq}\left(2\sin v + \frac{q\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}$$

où l'on peut prendre pour $\alpha$ une quantité constante quelconque, ce qui aura dans la suite un très grand avantage. Car, puisque l'excentricité $q$ est à l'ordinaire fort petite, les termes dans l'expression de $dv$, qui sont divisés par $q$, pourraient devenir fort grands; alors on prendra pour $\alpha$ une telle valeur qui rende ces termes aussi petits qu'il sera possible.

22. **Scholie 2.** Il n'est pas même nécessaire que $\alpha$ soit une quantité constante; car posant $\frac{\alpha}{xx} = V$, ou $\alpha = Vxx$, on n'a qu'à mettre $\frac{-dV}{dx}$ pour $\frac{2\alpha}{x^3}$, et les formules trouvées seront

$$dx = -\frac{qdt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}, \quad d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}, \quad dp = -\frac{2Qxdt}{A}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

$$dq = \frac{dt \sin v}{A}\left(P + \frac{dV}{dx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{Qdt}{A}\left(2\cos v - \frac{q\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

$$dv = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{dt\cos v}{Aq}\left(P + \frac{dV}{dx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{Qdt}{Aq}\left(2\sin v + \frac{q\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}.$$

Maintenant, s'il était possible de déterminer $V$ en sorte, qu'il devienne

$$\cos v\left(P + \frac{dV}{dx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} = Q\sin v\left(2 + \frac{q\cos v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

$$\text{ou}\quad dV = -Pdx + Qdx\,\text{tang}\,v\left(2 + \frac{q\cos v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{2Vxx}{Ap}\right)}$$

on aurait $$dv = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} \quad\text{et}\quad dq = \frac{2Qdt}{A\cos v}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

et de là la détermination du mouvement de l'aphélie serait fort aisée; car la longitude de l'aphéli[e] étant $= \varphi - v$, on aurait

$$d\varphi - dv = \frac{dt}{xx}\left(\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}\right)$$

et si $V$, ainsi qu'il arrivera dans la plupart des cas, est fort petit par rapport à $A$, on aurait [à] très peu près

$$d\varphi - dv = \frac{Vdt}{\sqrt{2Ap}}.$$

Dans ce cas, le mouvement même du corps se déterminerait fort commodément. Mais cette discus[-]sion dépend de la nature des forces $P$ et $Q$ par lesquelles le corps est sollicité. Or comme o[n] peut supposer, que les corps célestes s'attirent mutuellement en raison de leurs masses divisées pa[r] le carré de leurs distances, voyons quelles seront ces forces, lorsqu'il y a trois corps qui, en s'atti[-]rant mutuellement, se meuvent tous les trois dans le même plan.

23. **Problème 3.** Déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, [et] se meuvent dans le même plan.

**Solution.** Le meilleur moyen est de regarder un de ces corps comme fixe, et de cherch[er] le mouvement des deux autres tel qu'il devrait paraître à un spectateur placé dans le troisièm[e]. A cet effet, on n'aura qu'à transporter les forces qui agissent sur le troisième corps, suivant d[es] directions contraires, sur les deux autres corps. Soit donc Fig. 219. $C$ le corps qu'on veut regard[er] comme fixe, et $E$ et $F$ les deux autres corps. Représentons les masses respectivement par $C$, $E$, [$F$]. Soient en suite les distances $CE = x$, $CF = y$ et $EF = z$. Ayant pris $CA$ pour une ligne fi[xe], soient les angles $ACE = \varphi$, $ACF = \theta$ et $ECF = \varphi - \theta = \eta$, et l'on aura

$$z = \sqrt{(xx + yy - 2xy\cos\eta)}.$$

Maintenant le corps $C$ étant attiré vers $E$ par la force $= \frac{E}{xx}$, et vers $F$ par la force $= \frac{F}{yy}$; qu'[on] transporte ces forces sur les corps $E$ et $F$: alors, tirant les lignes $EJ$ et $FK$ parallèles à $FC$ et $E[C]$, à cause du corps $C$, les deux autres corps seront sollicités par les forces suivantes

le corps $E$ par la force $EC = \frac{E}{xx}$, et par la force $EJ = \frac{F}{yy}$

le corps $F$ par la force $FC = \frac{F}{yy}$, et par la force $FK = \frac{E}{xx}$.

Or le corps $E$ étant actuellement sollicité par

les forces $EC = \frac{C}{xx}$ et $EF = \frac{F}{zz}$

et le corps $F$ par les forces $FC = \frac{C}{yy}$ et $FE = \frac{E}{zz}$,

ces forces doivent être ajoutées aux précédentes qu'on réduira ensuite à deux, dont les unes soient dirigées vers $C$, et les autres leur seraient perpendiculaires. Qu'on mène, à cet effet, $EM$ perpendiculaire à $EC$, et $FN$ perpendiculaire à $FC$.

Pour le corps $E$ on a d'abord, dans la direction $EC$, la force $\frac{C+E}{xx}$; et la force $EJ = \frac{F}{yy}$, à cause de l'angle $CEJ = \eta$, donnera

$$\text{une force } EC = \frac{F \cos \eta}{yy}, \text{ et une force } EM = \frac{-F \sin \eta}{yy}.$$

Or la force $EF = \frac{F}{zz}$ donnera

$$\text{pour la direction } EC, \text{ la force } \frac{F \cos CEF}{zz} = \frac{-F(y \cos \eta - x)}{z^3}$$

$$\text{pour la direction } EM, \text{ la force } \frac{F \sin CEF}{zz} = \frac{Fy \sin \eta}{z^3}$$

et ainsi les deux forces par lesquelles le corps $E$ est sollicité, seront

$$\text{la force } EC = \frac{C+E}{xx} + \frac{F(x - y \cos \eta)}{z^3} + \frac{F \cos \eta}{yy}$$

$$\text{la force } EM = \frac{Fy \sin \eta}{z^3} - \frac{F \sin \eta}{yy}.$$

Pour l'autre corps $F$ on a d'abord pour la direction $FC$, la force $\frac{C+F}{yy}$; et la force $FK = \frac{E}{xx}$, à cause de l'angle $CFK = \eta$, donnera

$$\text{une force } FC = \frac{E \cos \eta}{xx} \text{ et une force } FN = \frac{E \sin \eta}{xx}.$$

Enfin la force $FE = \frac{E}{zz}$ donne

$$\text{pour la direction } FC, \text{ la force } = \frac{E \cos EFC}{zz} = \frac{E(y - x \cos \eta)}{z^3}$$

$$\text{pour la direction } FN, \text{ la force } = \frac{-E \sin EFC}{zz} = \frac{-Ex \sin \eta}{z^3}$$

donc les deux forces qui agissent sur le corps $F$ sont

*

$$= \text{la force } FC = \frac{C+F}{yy} + \frac{E(y - x\cos\eta)}{z^3} + \frac{E\cos\eta}{xx}$$

$$= \text{la force } FN = -\frac{Ex\sin\eta}{z^3} + \frac{E\sin\eta}{xx}.$$

Et partant, pour le mouvement du corps $E$, en y appliquant le problème précédent, nous auron

$$A = C + E,\quad P = \frac{F(x - y\cos\eta)}{z^3} + \frac{F\cos\eta}{yy} \text{ et } Q = F\sin\eta\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right);$$

donc, posant $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, il y aura

$$dp = -\frac{2Fpdt\sin\eta}{(C+E)(1-q\cos v)}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$dq = \frac{Fdt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}}{C+E}\left(\frac{x\sin v}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right)$$

$$dv = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} + \frac{Fdt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\left(\frac{x\cos v}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)$$

$$\text{et enfin } d\varphi = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}.$$

De la même manière, pour le mouvement de l'autre corps $F$, en supposant sa distance $y = \frac{r}{1 - s\cos u}$ sa longitude étant $= \theta$, on aura

$$dr = \frac{2Erdt\sin\eta}{(C+F)(1-s\cos u)}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

$$ds = \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{C+F}\left(\frac{y\sin u}{z^3} - \left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1 - s\cos u}\right)\right)$$

$$du = \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r} + \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{(C+F)s}\left(\frac{y\cos u}{z^3} - \left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

$$\text{et}\quad d\theta = \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

d'où l'on aura

$$d\eta = d\varphi - d\theta = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} - \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r},$$

de sorte que les changements que subissent tous les éléments du mouvement de l'un et de l'aut corps pendant le temps $dt$ sont connus.

24. **Coroll. 1.** Le mouvement des absides de l'un et de l'autre corps se trouvera par formules suivantes. Pour le corps $E$ on aura

$$d\varphi - dv = \frac{-Fdt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\left(\frac{x\cos v}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)$$

et pour le corps $F$

$$d\theta - du = \frac{-Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{(C+F)s}\left(\frac{y\cos u}{z^3} - \left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\right).$$

25. **Coroll. 2.** On pourra aussi chercher par le Scholie (22) la quantité $V$. Soit

$$dV = \frac{-Fxdx}{z^3} + Fdx\cos\eta\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right) + Fdx\sin\eta\,\mathrm{tang}\,v\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(2 + \frac{q\cos v}{1 - q\cos v}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{2Vxx}{Ap}\right)}$$

où $dx = -\frac{qdt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$ et $A = C + E$, et alors on aura

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}, \qquad dv = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

$$dp = \frac{-2Fxdt\sin\eta}{A}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

$$\text{et}\quad dq = \frac{2Fdt\sin\eta}{A\cos v}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}.$$

26. **Coroll. 3.** De la même manière, pour l'autre corps $F$, on cherchera la quantité $U$. Soit

$$dU = \frac{-Eydy}{z^3} + Edy\cos\eta\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right) - Edy\sin\eta\,\mathrm{tang}\,u\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(2 + \frac{s\cos u}{1 - s\cos u}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{2Uyy}{Br}\right)}$$

où $dy = -\frac{sdt\sin u}{r}\sqrt{\tfrac{1}{2}Br}$ et $B = C + F$. Alors on aura

$$d\theta = \frac{dt}{yy}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Br + Uyy)}, \qquad du = \frac{dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}Br}$$

$$dr = \frac{2Eydt\sin\eta}{B}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Br + Uyy)}$$

$$ds = \frac{-2Edt\sin\eta}{B\cos u}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Br + Uyy)}.$$

27. **Scholie.** Jusqu'ici nous n'avons employé aucune approximation, et partant les formules trouvées sont toutes exactes à la rigueur. Mais dans cet état on n'en peut aussi tirer aucune conclusion pour la connaissance du mouvement. Or, j'ai déjà remarqué que, pour que cette méthode puisse réussir, il faut que le mouvement des corps qu'on cherche, ne s'écarte pas beaucoup des règles de Kepler, ce qui arrive lorsque les forces $P$ et $Q$ sont fort petites à l'égard de la force $\frac{A}{xx}$. Donc pour les corps $E$ et $F$ cette méthode sera applicable lorsque les quantités

$$\frac{Fxx}{C+E}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right) \text{ et } \frac{Eyy}{C+F}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right), \text{ avec celles-ci } \frac{Fx^3}{(C+E)z^3} \text{ et } \frac{Ey^3}{(C+F)z^3}$$

seront fort petites, ou des fractions beaucoup moindres que l'unité.

A cet effet, considérons les forces $P$ et $Q$ au cas de leur maximum, et il suffira d'avoir égard à la seule force $P$: l'on voit d'abord que, dans le cas de $y = x$, cette force pourrait devenir infinie. C'est donc une condition absolument nécessaire, que les distances $x$ et $y$ soient toujours inégales entre elles. Posons donc $y > x$, et soit $y = \lambda x$ où $\lambda$ sera un nombre plus grand que l'unité. Or nous admettrons pour $\lambda$ le plus petit nombre possible qui puisse résulter de $\frac{y}{x}$. La plus petite valeur de $z$ sera donc $(\lambda - 1)x$ qui a lieu lorsque $y = 0$, et alors la force $P$ deviendra

$$= \frac{F(1-\lambda)}{(\lambda-1)^3 xx} + \frac{F}{\lambda\lambda xx} = \frac{-F(2\lambda-1)}{\lambda\lambda(\lambda-1)^2 xx}$$

laquelle étant divisée par la force

$$\frac{A}{xx} = \frac{C+E}{xx} \text{ donnera } \frac{F(2\lambda-1)}{(C+E)\lambda\lambda(\lambda-1)^2}$$

dont la valeur doit être fort au dessous de l'unité. De même, pour le corps $F$, la force $P$ étant

$$= \frac{E(y-x)}{z^3} + \frac{E}{xx} = \frac{E}{(\lambda-1)^2 xx} + \frac{E}{xx} = \frac{E(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2 xx}$$

cette force divisée par

$$\frac{C+F}{yy} = \frac{C+F}{\lambda\lambda xx}, \text{ donne } \frac{E\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(C+F)(\lambda-1)^2}$$

dont la valeur doit aussi être fort au-dessous de l'unité. Il faut donc qu'il y ait

$$\frac{F}{C+E} < \frac{\lambda\lambda(\lambda-1)^2}{2\lambda-1} \text{ et } \frac{E}{C+F} < \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}$$

d'où l'on voit dans quels cas cette méthode peut être employée avec succès. Et d'abord, puisque $\lambda > 1$, il est clair que $C+F$ doit être beaucoup plus grand que $E$, puisque

$$\frac{C+F}{E} > \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2},$$

ce qui nous fournit les deux cas que voici:

I. Si la masse $C$ est extrêmement grande, supposant, par exemples que le soleil se trouvât en $C$; alors, puisque

$$\frac{F}{C+E} < \frac{\lambda\lambda(\lambda-1)^2}{2\lambda-1},$$

les inégalités causées dans le corps $E$ seront assez petites, pourvu que $\lambda - 1$ ne soit pas trop petit: mais les inégalités causées dans le corps $F$, qui est plus éloigné, seront d'autant plus considérables, plus la quantité

$$\frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2}$$

sera grande. Or, elle devient même infinie tant pour $\lambda = 1$ que pour $\lambda = \infty$, c'est à dire soit que $x = y$, soit que $x = 0$, d'où l'on voit que les planètes plus voisines du soleil causent des dérangements plus considérables aux planètes plus éloignées, que celles-ci à celles-là, les masses étant égales. Ce cas sert donc à determiner les dérangements que les planètes principales se causent mutuellement.

II. Si le corps $F$ est extrêmement grand par rapport aux autres $C$ et $E$, ce qui arrive quand $C$ marque une planète principale, $E$ un satellite et $F$ le soleil. Or, puisque alors $\lambda$ est un nombre très grand, il faut qu'il y ait

$$\frac{F}{C+E} < \tfrac{1}{2}\lambda^3 \text{ et } \frac{F+C}{E} > \lambda\lambda;$$

car si ces conditions n'avaient point lieu, ou le mouvement du satellite, ou celui de la planète deviendrait si irrégulier qu'il ne s'accorderait plus avec les règles de Kepler. Ce cas servira donc

à déterminer le mouvement des satellites, de même que les dérangements qu'ils peuvent opérer dans le mouvement de la planète principale.

Ce cas étant plus aisé à développer par le calcul que l'autre, — puisque le nombre $\lambda$ est fort grand, ou la distance $y$ incomparablement plus grande que la distance $x$, ce qui procure la facilité de convertir la quantité irrationnelle $z = \sqrt{(xx + yy - 2xy\cos\eta)}$ en une série fort convergente, — je traiterai d'abord ce cas, et ensuite, je passerai à l'autre, celui de deux planètes principales.

28. **Problème 4.** Trouver les inégalités élémentaires dans le mouvement d'un satellite et de sa planète principale qui se meuvent dans le même plan.

**Solution.** Que $C$ représente la planète principale, $E$ son satellite et $F$ le soleil; pour trouver le mouvement du satellite, tel qu'il doit paraître à un spectateur placé au centre de la planète $C$, en gardant les mêmes de nominations que dans le problème précédent, nous pourrons ici regarder la distance $y$ comme incomparablement plus grande que la distance $x$; ce qui nous fournit l'avantage de convertir la distance $z = \sqrt{(yy + xx - 2xy\cos\eta)}$ en une série fort convergente dont il suffira de prendre quelques uns des premiers termes. Ayant donc

$$\frac{1}{z^3} = (yy + xx - 2xy\cos\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{y^3} + \frac{3x\cos\eta}{y^4} + \frac{3xx}{2y^5}(5\cos^2\eta - 1)$$

nous obtiendrons

$$\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy} = \frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1) \quad \text{et} \quad \frac{x}{z^3} = \frac{x}{y^3} + \frac{3xx\cos\eta}{y^4}$$

en négligeant les termes divisés par des puissances de $y$ supérieures à la quatrième.

Posant donc pour le mouvement du satellite $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, nous aurons

$$dp = \frac{-2Fxdt\sin\eta}{C+E}\left(\frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1)\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$dq = \frac{Fdt\sqrt{\frac{1}{2}(C+E)p}}{C+E}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{x}{y^3}\left(\sin v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \dfrac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right) \\ + \dfrac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\sin v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \dfrac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right) \end{array}\right.$$

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} = \frac{dt(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

t $dv = d\varphi + \frac{Fdt\sqrt{\frac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{x}{y^3}\left(\cos v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \dfrac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right) \\ + \dfrac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\cos v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \dfrac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right). \end{array}\right.$

r pour le mouvement apparent du soleil, ou de la planète principale même, il suffira de poser

$\ldots - \frac{1}{xx} = -\frac{1}{xx}$ et $\frac{y}{z^3} = \frac{1}{yy}$. Donc faisant $y = \frac{r}{1 - s\cos u}$ nous aurons

$$dr = \frac{-2Eydt\sin\eta}{(C+F)xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

$$ds = \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{C+F}\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

$$d\theta = \frac{dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r} = \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

$$\text{et}\quad du = d\theta + \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{(C+F)s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

où l'on voit qu'on pourrait encore omettre les termes divisés par $yy$ par rapport à ceux qui sont divisés par $xx$.

Si nous considérons un corps qui décrirait autour du centre $C$ un cercle dont le rayon $= a$, et que ce corps, attiré vers le point $C$ par la force $\frac{A}{aa}$, parcourt dans le temps $t$ un angle $= \omega$, nous aurons $d\omega = \frac{dt}{aa}\sqrt{\tfrac{1}{2}Aa}$, et partant $dt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{aad\omega}{\sqrt{Aa}}$, et nous pourrons introduire ce mouvement uniforme au lieu du temps dont il nous servira de mesure. Soit donc pour abréger

$$\frac{F\sqrt{(C+E)}}{(C+E)\sqrt{A}} = \frac{F}{\sqrt{A(C+E)}} = m, \qquad \frac{E\sqrt{(C+F)}}{(C+F)\sqrt{A}} = \frac{E}{\sqrt{A(C+F)}} = n$$

et nous aurons pour le mouvement du satellite

$$x = \frac{p}{1-q\cos v}, \qquad d\varphi = \frac{d\omega}{xx}\sqrt{\frac{(C+E)a^3p}{A}}$$

$$dp = -2mxd\omega\sin\eta\left(\frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1)\right)\sqrt{a^3p}$$

$$dq = md\omega\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{y^3}\left(\sin v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\right)\\ +\frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\sin v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\right)\end{array}\right\}\sqrt{a^3p}$$

$$dv = d\varphi + \frac{md\omega}{q}\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{y^3}\left(\cos v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)\\ +\frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\cos v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)\end{array}\right\}\sqrt{a^3p}$$

et pour le mouvement apparent du soleil, ou plutôt de la planète principale

$$y = \frac{r}{1-s\cos u}, \qquad d\theta = \frac{d\omega}{yy}\sqrt{\frac{(C+F)a^3r}{A}}$$

$$dr = -\frac{2nyd\omega\sin\eta}{xx}\sqrt{a^3r}$$

$$ds = nd\omega\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1-s\cos u}\right)\right)\sqrt{a^3r}$$

$$du = d\theta + \frac{nd\omega}{s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\right)\sqrt{a^3r}$$

et pour le changement élémentaire de l'angle $\eta$ on aura

$$d\eta = d\varphi - d\theta = \frac{d\omega}{xx}\sqrt{\frac{(C+E)a^3p}{A}} - \frac{d\omega}{yy}\sqrt{\frac{(C+F)a^3r}{A}}.$$

29. **Coroll. 1.** Puisque $F$, désignant la masse du soleil, est une quantité très grande par rapport à $C$ et $E$, le nombre $m$ sera aussi fort grand, à moins que la masse $A$ ne soit prise extrêmement grande. Mais le calcul ne dépend point de cette masse $A$, puisqu'elle a été introduite conjointement avec la distance $a$ pour nous fournir une mesure propre du temps.

30. **Coroll. 2.** Cependant ce nombre $m$ étant multiplié par $\frac{x}{y^3}\sqrt{a^3p}$ qui, $y$ étant beaucoup plus grand que $x$, sera un nombre très petit, — ce produit, disons nous, sera réduit à une fraction très petite; ou bien, si cela n'arrivait point, alors le mouvement du satellite s'écarterait trop des règles de Kepler, pour qu'on puisse le déterminer par cette méthode.

31. **Coroll. 3.** Or le nombre $n$ étant extrêmement petit par lui-même, sera considérablement agrandi par le facteur $\frac{\sqrt{a^3r}}{xx}$, et il faut remarquer de même, que s'il devenait alors trop grand, le mouvement de la planète principale résulterait trop irrégulier, pour pouvoir être représenté par cette méthode. Or, heureusement, ces cas ne se rencontrent point dans notre système planétaire.

32. **Coroll. 4.** Il sera aussi bon de réduire les produits des sinus et cosinus, qui se trouvent dans nos formules, à des sinus ou cosinus simples. Ainsi, ayant

$$\sin\eta\cos\eta = \tfrac{1}{2}\sin 2\eta,\quad 5\cos^2\eta - 1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}\cos 2\eta \quad \text{et partant}$$

$$\sin\eta\,(5\cos^2\eta - 1) = \tfrac{1}{4}\sin\eta + \tfrac{5}{4}\sin 3\eta, \quad \text{nous aurons}$$

$$dp = -3mxd\omega\left(\frac{x\sin 2\eta}{y^3} + \frac{xx}{4y^4}(\sin\eta + 5\sin 3\eta)\right)\sqrt{a^3p}.$$

33. **Coroll. 5.** De la même manière on trouvera

$$\frac{dq}{nd\omega\sqrt{a^3p}} = \frac{x}{y^3}\Big(-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v) - \frac{3q}{8(1-q\cos v)}\big(2\sin 2\eta - \sin(2\eta - 2v) - \sin(2\eta + 2v)\big)\Big)$$

$$+ \frac{3xx}{2y^4}\Big(\tfrac{5}{8}\sin(\eta - v) - \tfrac{1}{8}\sin(\eta + v) + \tfrac{15}{8}\sin(3\eta - v) + \tfrac{5}{8}\sin(3\eta + v)\Big)$$

$$\frac{-3qxx}{y^4(1-q\cos v)}\Big(\tfrac{1}{8}\sin\eta - \tfrac{1}{16}\sin(\eta - 2v) - \tfrac{1}{16}\sin(\eta + 2v) + \tfrac{5}{8}\sin 3\eta - \tfrac{5}{16}\sin(3\eta - 2v) - \tfrac{5}{16}\sin(3\eta + 3v)\Big)$$

et

$$\frac{(dv - d\varphi)}{nd\omega\sqrt{a^3p}} = \frac{x}{y^3}\Big(-\tfrac{1}{2}\cos v - \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v) - \frac{3\eta}{8(1-q\cos v)}\big(\cos(2\eta - 2v) - \cos(2\eta + 2v)\big)\Big)$$

$$+ \frac{3xx}{2y^4}\Big(-\tfrac{5}{8}\cos(\eta - v) - \tfrac{1}{8}\cos(\eta + v) - \tfrac{15}{8}\cos(3\eta - v) + \tfrac{5}{8}\cos(3\eta + v)\Big)$$

$$\frac{-3qxx}{2y^4(1-q\cos v)}\Big(\tfrac{1}{16}\cos(\eta - 2v) - \tfrac{1}{16}\cos(\eta + 2v) + \tfrac{5}{16}\cos(3\eta - 2v) - \tfrac{5}{16}\cos(3\eta + 2v)\Big)$$

34. **Coroll. 6.** Pour le mouvement apparent du soleil ou le vrais mouvement de la planète, nous aurons après cette réduction

$$dr = \frac{-2ny\,d\omega \sin\eta}{xx} \sqrt{a^3 r}$$

$$ds = n\,d\omega\Big(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\Big(\tfrac{1}{2}\sin(\eta - u) + \tfrac{3}{2}\sin(\eta + u) - \frac{s}{4(1 - s\cos u)}\big(2\sin\eta - \sin(\eta - 2u) - \sin(\eta + 2u)\big)\Big)\sqrt{a^3 r}$$

$$du = d\theta + \frac{n\,d\omega}{s}\Big(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\Big(-\tfrac{1}{2}\cos(\eta - u) + \tfrac{3}{2}\cos(\eta + u) - \frac{s}{4(1 - s\cos u)}\big(\cos(\eta - 2u) - \cos(\eta + 2u)\big)\Big)\sqrt{a^3 r}$$

Ainsi toutes les différentielles de nos éléments sont réduits à l'élément $d\omega$ du temps.

35. **Scholie 1.** Ces expressions affectées par $m$ et $n$ contiennent les inégalités ou plutôt les aberrations de l'un et de l'autre mouvement des règles de Kepler. Car si ces lettres $m$ et $n$ étaient $= 0$, tant les demi-paramètres $p$ et $r$, que les excentricités $q$ et $s$ seraient constantes, et le mouvement des absides, ou bien $d\varphi - dv$ et $d\theta - du$ s'évanouirait, tout comme les règles de Kepler le supposent. De là on comprend, en quoi les inégalités, causées par les lettres $m$ et $n$ consistent: les demi-paramètres $p$ et $r$, de même que les excentricités $q$ et $s$, ne seront plus constants, mais contiendront, outre les valeurs constantes qu'ils auraient s'il y avait $m = 0$ et $n = 0$ encore des parties variables affectées de $m$ et $n$, d'où dépendra aussi le mouvement des absides, de sorte que les angles $\varphi - v$ et $\theta - u$ ne seront plus constants, mais contiendront aussi des membres variables affectés des valeurs $m$ et $n$. Ce seront donc les inégalités dont il faut chercher les valeurs; or, pour que cela puisse se faire par la voie d'approximation, je remarque d'abord, que les termes affectés de $m$ et $n$ doivent être fort petits par rapport aux autres qui ne contiennent pas ces lettres, et parmi ces termes il y en aura deux espèces pour le mouvement du satellite: les uns étant multipliés par $\frac{x}{y^3}$, et les autres par $\frac{xx}{y^4}$ dont ceux-ci seront incomparablement plus petits que ceux-là; c'est pourquoi aussi nous avons déjà négligé les termes qui seraient multipliés par $\frac{x^3}{y^5}$, $\frac{x^4}{y^6}$ etc. comme quantités tout à fait evanouissantes. Il conviendra donc de commencer par la recherche des termes affectés par $\frac{x}{y^3}$ comme de ceux qui renferment les inégalités principales; et ensuite, on pourra procéder à la recherche de ceux qui ont $\frac{xx}{y^4}$ pour facteur et qu'on nomme les inegalités parallactiques. Ensuite on parviendra aussi à des termes affectés de $mm$, ou $mn$, ou $nn$ car si, par exemple, les valeurs de $p$, $r$, $q$, $s$, $v$ et $u$ contiennent des termes affectés de $m$ et $n$ ces quantités sont jointes dans nos formules aux facteurs $m$ et $n$, il en résultera des termes affect de $mm$, $mn$ et $nn$ qui seront, par conséquent, incomparablement plus petits que ceux qui contiennent simplement $m$ et $n$; on pourra donc les négliger, à moins qu'il ne s'agisse du mouvement de la ligne des absides dont il faut connaître les moindres inégalités. Or, par cette raison, on omettra entièrement les termes dérivatifs de ceux qui seraient affectés des dimensions plus élevées de $m$ et $n$. On aura donc trois sortes d'inégalités pour le mouvement du satellite: 1° les inégalités principales qui contiennent simplement $\frac{mx}{y^3}$, 2° les inégalités parallactiques qui contiennent $\frac{mxx}{y^4}$, et 3° les inégalités dérivatives qui renferment $mm$ ou $mn$ ou $nn$ et qui résultent des principales; car quoique les

inégalités parallactiques fournissent aussi de pareilles dérivées, on pourra s'en passer à cause de leur extrême petitesse.

36. **Scholie 2.** Outre cela, il faut avoir égard à une autre circonstance qui favorisera l'approximation: c'est la petitesse des excentricités $q$ et $s$; car, si elles étaient trop considérables, il faut avouer qu'il serait extrêmement difficile de réussir dans cette besogne. Mais il arrive encore fort heureusement qu'il n'y a point dans notre système planétaire des excentricités assez grandes pour rendre cette méthode inutile ou impraticable. Les quantités $q$ et $s$ seront donc exprimées par des fractions assez petites, en sorte que les formules $q \cos v$ et $s \sin \omega$ seront considérablement plus petites que l'unité. De là nous tirerons cet avantage, que même dans les termes fournis par les lois de Kepler, ou qui ne sont affectés ni de $m$ ni de $n$, on puisse négliger ceux qui renferment des puissances de $q$ et $s$, supérieures à la troisième, à la quatrième ou tout au plus à la cinquième. Donc dans les inégalités principales, on n'aura pas besoin de les pousser au delà des carrés des excentricités, ou bien on négligera les termes affectés des degrés supérieurs aux carrés des excentricités $q$ et $s$. Or dans les inégalités parallactiques et dérivées, on pourra même négliger les parties affectées des carrés de $q$ et de $s$. Telle sera donc la marche à suivre dans la recherche des inégalités qui altèrent le mouvement tant du satellite que de la planète principale.

37. **Problème 5.** Trouver les inégalités principales qui doivent se trouver dans le mouvement d'un satellite.

**Solution.** Puisque $x = \frac{p}{1 - q \cos v}$ et $y = \frac{r}{1 - s \cos u}$, nous aurons pour les inégalité principales

$$\frac{x}{y^3} = \frac{p(1 - s \cos u)^3}{r^3 (1 - q \cos v)}.$$

Donc, puisque ce terme est fort petit par lui-même, nous négligerons les termes qui contiendraient plus d'une dimension de $q$ et $s$, et partant nous aurons

$$\frac{x}{y^3} = \frac{p}{r^3}(1 + q \cos v - 3s \cos u), \text{ et par conséquent } \frac{xx}{y^3} = \frac{pp}{r^3}(1 + 2q \cos v - 3s \cos u).$$

Donc, ayant pour les inégalités principales $dp = \frac{-3mxxd\omega \sin 2\eta}{y^3} \sqrt{a^3 p}$, nous aurons

$$\text{I.}\quad dp = \frac{-3mppd\omega \sqrt{a^3 p}}{r^3}\left(\sin 2\eta + q \sin(2\eta - v) + q \sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{2} s \sin(2\eta - u) - \tfrac{3}{2} s \sin(2\eta + u)\right).$$

Ensuite, pour $dq$, posant $q$ pour $\frac{q}{1 - q \cos v}$, de sorte que nous ayons pour les inégalités principales

$$\frac{dq}{md\omega \sqrt{a^3 p}} = \frac{x}{y^3}\left(-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{7}{4}\sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{4} q \sin 2\eta + \tfrac{3}{8} q \sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{8} q \sin(2\eta + 2v)\right)$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\text{II.}\quad dq = \frac{mpd\omega \sqrt{a^3 p}}{r^3}\Big[ & -\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v) + \tfrac{3}{4} q \sin 2\eta - \tfrac{1}{4} q \sin 2v \\ & + \tfrac{3}{2} q \sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4} q \sin(2\eta + 2v) + \tfrac{3}{4} s \sin(v - u) + \tfrac{3}{4} s \sin(v + u) \\ & - \tfrac{27}{8} s \sin(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8} s \sin(2\eta - v + u) - \tfrac{9}{8} s \sin(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8} s \sin(2\eta + v + u)\Big].\end{aligned}$$

*

Enfin nous aurons

$$\text{III. } q(dv - d\varphi) = \frac{mpd\omega\sqrt{a^3p}}{r^3}\Big[-\tfrac{1}{4}q - \tfrac{1}{2}\cos v - \tfrac{3}{4}\cos(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v) - \tfrac{1}{4}q\cos 2v$$

$$- \tfrac{3}{4}q\cos 2\eta - \tfrac{3}{2}q\cos(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}q\cos(2\eta + 2v) + \tfrac{3}{4}s\cos(v - u)$$

$$+ \tfrac{3}{4}s\cos(v + u) + \tfrac{27}{8}s\cos(2\eta - v - u) + \tfrac{27}{8}s\cos(2\eta - v + u)$$

$$- \tfrac{9}{8}s\cos(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}s\cos(2\eta + v + u)\Big].$$

Or puisque nous ne cherchons que les inégalités principales qui sont simplement multipliées par $m$, nous négligerons, dans les membres de ces équations affectés par $m$, les termes qui dépendent déjà de $m$ ou de $n$, et partant les quantités $p$, $r$, $q$ et $s$, y seront constantes. De plus, dans ces mêmes termes nous supposerons $dv = d\varphi$ et $du = d\theta$. Donc puisque

$$d\varphi = \frac{d\omega(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\frac{(C+E)a^3p}{A}}, \text{ on aura}$$

$$dv = d\omega(1 - 2q\cos v)\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ap^3}}$$

ou $p$ et $q$ seront regardées comme constantes. De même nous aurons

$$du = d\omega(1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ar^3}}$$

et partant $$d\eta = d\omega\left((1 - 2q\cos v)\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ap^3}} - (1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ar^3}}\right).$$

Or $\sqrt{\frac{C+E}{A}} = \frac{F}{mA}$ et $\sqrt{\frac{C+F}{A}} = \frac{E}{nA}$, de sorte que

$$dv = \frac{Fd\omega}{mA}(1 - 2q\cos v)\sqrt{\frac{a^3}{p^3}}, \qquad du = \frac{Ed\omega}{nA}(1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}$$

$$\text{et } d\eta = d\omega\left(\frac{F}{mA}(1 - 2q\cos v)\sqrt{\frac{a^3}{p^3}} - \frac{E}{nA}(1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}\right).$$

Maintenant, parce que nous regardons $p$, $q$, $r$ et $s$ comme constantes, soit

$$p = b + \ldots, \qquad q = g + \ldots, \qquad r = c + \ldots, \qquad s = h + \ldots;$$

ce sont les valeurs naturelles ou moyennes de ces lettres, auxquelles il faut ensuite ajouter les particules qui leur conviennent à cause des inégalités. Soit donc pour abréger

$$\frac{F}{mA}\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ab^3}} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{E}{nA}\sqrt{\frac{a^3}{c^3}} = \sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ac^3}} = \nu,$$

et partant

$$\frac{dv}{d\omega} = \mu - 2\mu g\cos v, \quad \frac{du}{d\omega} = \nu - 2\nu h\cos u \quad \text{et}$$

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \mu - \nu - 2\mu g\cos v + 2\nu h\cos u.$$

Soit de plus $\frac{m\sqrt{a^3 b^3}}{c^3} = \varkappa$, pour qu'il y ait

$$\frac{dp}{d\omega} = -3\varkappa b\left(\sin 2\eta + g\sin(2\eta - v) + g\sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{2}h\sin(2\eta - u) - \tfrac{3}{2}h\sin(2\eta + u)\right)$$

et qu'on pose pour intégrer

$$p = b\left(1 + \varkappa\mathfrak{A}\cos 2\eta + \varkappa\mathfrak{B}g\cos(2\eta - v) + \varkappa\mathfrak{C}g\cos(2\eta + v) - \varkappa\mathfrak{D}h\cos(2\eta - u) - \varkappa\mathfrak{E}h\cos(2\eta + u)\right).$$

Donc pour trouver ces coefficients, qu'on différentie cette valeur supposée

$$\begin{aligned}\frac{dp}{\varkappa b d\omega} = &-2(\mu - \nu)\mathfrak{A}\sin 2\eta + 2\mu g\mathfrak{A}\sin(2\eta - v) + 2\mu g\mathfrak{A}\sin(2\eta + v) - 2\nu h\mathfrak{A}\sin(2\eta - u) - 2\nu h\mathfrak{A}\sin(2\eta + u)\\ &\qquad\qquad -(\mu - 2\nu)g\mathfrak{B} \qquad -(3\mu - 2\nu)g\mathfrak{C} \qquad +(2\mu - 3\nu)h\mathfrak{D} \qquad +(2\mu - \nu)h\mathfrak{E}\end{aligned}$$

d'où il faut qu'il soit

$$-2(\mu - \nu)\mathfrak{A} = -3 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} = \frac{3}{2(\mu - \nu)}$$

$$2\mu\mathfrak{A} - (\mu - 2\nu)\mathfrak{B} = -3 \qquad \mathfrak{B} = \frac{2\mu\mathfrak{A} + 3}{\mu - 2\nu} = \frac{3(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)}$$

$$2\mu\mathfrak{A} - (3\mu - 2\nu)\mathfrak{C} = -3 \qquad \mathfrak{C} = \frac{2\mu\mathfrak{A} + 3}{3\mu - 2\nu} = \frac{3(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(3\mu - 2\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{A} + (2\mu - 3\nu)\mathfrak{D} = +\tfrac{9}{2} \qquad \mathfrak{D} = \frac{4\nu\mathfrak{A} + 9}{2(2\mu - 3\nu)} = \frac{3(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - 3\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{A} + (2\mu - \nu)\mathfrak{E} = +\tfrac{9}{2} \qquad \mathfrak{E} = \frac{4\nu\mathfrak{A} + 9}{2(2\mu - \nu)} = \frac{3(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - \nu)}$$

et de là nous tirons

$$\frac{p}{b} = 1 + \frac{3\varkappa}{2(\mu - \nu)}\cos 2\eta + \left\{\begin{aligned}&\frac{+3\varkappa(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)}g\cos(2\eta - v) - \frac{3\varkappa(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - 3\nu)}h\cos(2\eta - u)\\ &\frac{+3\varkappa(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(3\mu - 2\nu)}g\cos(2\eta + v) - \frac{3\varkappa(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - \nu)}h\cos(2\eta + u)\end{aligned}\right.$$

C'est donc en ces termes que sont comprises les inégalités principales du demi paramètre $p$ cherchons de la même manière les inégalités principales de l'excentricité $q$, pour la quelle nous avons cette équation

$$\begin{aligned}\frac{dq}{\varkappa d\omega} = &-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v)\\ &+\tfrac{3}{4}g\sin 2\eta - \tfrac{1}{4}g\sin 2v + \tfrac{3}{2}g\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}g\sin(2\eta + 2v)\\ &+\tfrac{3}{4}h\sin(v - u) + \tfrac{3}{4}h\sin(v + u)\\ &-\tfrac{27}{8}h\sin(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8}h\sin(2\eta - v + u) - \tfrac{9}{8}h\sin(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}h\sin(2\eta + v + u).\end{aligned}$$

Posons donc

$$\begin{aligned}q = g &+ \varkappa\mathfrak{A}\cos v + \varkappa\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) + \varkappa\mathfrak{C}\cos(2\eta + v)\\ &+ \varkappa\mathfrak{D}g\cos 2\eta + \varkappa\mathfrak{E}g\cos 2v + \varkappa\mathfrak{F}g\cos(2\eta - 2v) + \varkappa\mathfrak{G}g\cos(2\eta + 2v)\end{aligned}$$

$$+ \varkappa\mathfrak{H}h\cos(v-u) + \varkappa\mathfrak{J}h\cos(v+u)$$

$$+ \varkappa\mathfrak{L}h\cos(2\eta-v-u) + \varkappa\mathfrak{M}h\cos(2\eta-v+u) + \varkappa\mathfrak{N}h\cos(2\eta+v-u) + \varkappa\mathfrak{O}h\cos(2\eta+v+u)$$

et la différentielle sera

$$\frac{dq}{\varkappa d\omega} = -\mu\mathfrak{A}\sin v - (\mu-2\nu)\mathfrak{B}\sin(2\eta-v) - (3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\sin(2\eta+v)$$

$$+ \mu\mathfrak{B}g\sin 2\eta + \mu\mathfrak{A}g\sin 2v + \mu\mathfrak{B}g\sin(2\eta-2v) + 3\mu\mathfrak{B}g\sin(2\eta+2v)$$

$$+ 3\mu\mathfrak{E}g \qquad -2\mu\mathfrak{E}g \qquad +2\nu\mathfrak{F}g \qquad -2(2\mu-\nu)\mathfrak{G}g$$

$$-2(\mu-\nu)\mathfrak{D}$$

$$-(\mu-\nu)\mathfrak{H}h\sin(v-u) - (\mu+\nu)\mathfrak{J}h\sin(v+u)$$

$$-2\nu\mathfrak{B}h\sin(2\eta-v-u) - 2\nu\mathfrak{B}h\sin(2\eta-v+u) - 2\nu\mathfrak{E}h\sin(2\eta+v-u) - 2\nu\mathfrak{E}h\sin(2\eta+v+u)$$

$$-(\mu-3\nu)\mathfrak{L}h \qquad -(\mu-\nu)\mathfrak{M}h \qquad -(3\mu-3\nu)\mathfrak{N}h \qquad -(3\mu-\nu)\mathfrak{O}h$$

d'où nous concluons

$$\mu\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{2\mu}$$

$$-(\mu-2\nu)\mathfrak{B} = \tfrac{9}{4} \qquad \mathfrak{B} = \frac{-9}{4(\mu-2\nu)}$$

$$-(3\mu-2\nu)\mathfrak{C} = \tfrac{3}{4} \qquad \mathfrak{C} = \frac{-3}{4(3\mu-2\nu)}$$

$$\mu\mathfrak{B} + 3\mu\mathfrak{E} - 2(\mu-\nu)\mathfrak{D} = \tfrac{3}{4} \qquad \mathfrak{D} = \frac{-9\mu}{2(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)} - \frac{3}{8(\mu-\nu)}$$

$$\mu\mathfrak{A} - 2\mu\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4} \qquad \mathfrak{E} = \frac{3}{8\mu}$$

$$\mu\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{F} = \tfrac{3}{2} \qquad \mathfrak{F} = \frac{3(5\mu-4\nu)}{8\nu(\mu-2\nu)}$$

$$3\mu\mathfrak{E} - 2(2\mu-\nu)\mathfrak{G} = \tfrac{3}{4} \qquad \mathfrak{G} = \frac{-3(3\mu-\nu)}{4(2\mu-\nu)(3\mu-2\nu)}$$

$$-(\mu-\nu)\mathfrak{H} = \tfrac{3}{4} \qquad \mathfrak{H} = \frac{-3}{4(\mu-\nu)}$$

$$-(\mu+\nu)\mathfrak{J} = \tfrac{3}{4} \qquad \mathfrak{J} = \frac{-3}{4(\mu+\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{B} - (\mu-3\nu)\mathfrak{L} = -\tfrac{27}{8} \qquad \mathfrak{L} = \frac{+9(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-3\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{B} - (\mu-\nu)\mathfrak{M} = -\tfrac{27}{8} \qquad \mathfrak{M} = \frac{+9(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{E} - (3\mu-3\nu)\mathfrak{N} = -\tfrac{9}{8} \qquad \mathfrak{N} = \frac{+3(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-3\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{E} - (3\mu-\nu)\mathfrak{O} = -\tfrac{9}{8} \qquad \mathfrak{O} = \frac{+3(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-\nu)}$$

et partant nous aurons

$$q = g + \frac{\varkappa}{2\mu}\cos v - \frac{9\varkappa}{4(\mu-2\nu)}\cos(2\eta - v) - \frac{3\varkappa}{4(3\mu-2\nu)}\cos(2\eta + v)$$

$$- \left(\frac{9\mu}{2(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)} + \frac{3}{8(\mu-\nu)}\right)\varkappa g\cos 2\eta + \frac{3\varkappa}{8\mu} g\cos 2v$$

$$+ \frac{3\varkappa(5\mu-4\nu)}{8\nu(\mu-2\nu)} g\cos(2\eta-2v) - \frac{3\varkappa(3\mu-\nu)}{4(2\mu-\nu)(3\mu-2\nu)} g\cos(2\eta+2v)$$

$$- \frac{3\varkappa}{4(\mu-\nu)} h\cos(v-u) - \frac{3\varkappa}{4(\mu+\nu)} h\cos(v+u)$$

$$+ \frac{9\varkappa(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-3\nu)} h\cos(2\eta-v-u) + \frac{9\varkappa(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-\nu)} h\cos(2\eta-v+u)$$

$$+ \frac{3\varkappa(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-3\nu)} h\cos(2\eta+v-u) + \frac{3\varkappa(9\mu-2\nu)'}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-\nu)} k\cos(2\eta+v+u).$$

Enfin, pour le mouvement des absides nous avons

$$\frac{q(d\varphi - dv)}{\varkappa d\omega} = \tfrac{1}{4} g + \tfrac{1}{2}\cos v + \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) - \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v)$$

$$+ \tfrac{1}{4} g\cos 2v + \tfrac{3}{4} g\cos 2\eta + \tfrac{3}{2} g\cos(2\eta-2v) - \tfrac{3}{4} g\cos(2\eta+2v)$$

$$- \tfrac{3}{4} h\cos(v-u) - \tfrac{3}{4} h\cos(v+u)$$

$$- \tfrac{27}{8} h\cos(2\eta-v-u) - \tfrac{27}{8} h\cos(2\eta-v+u) + \tfrac{9}{8} h\cos(2\eta+v-u) + \tfrac{9}{8} h\cos(2\eta+v+u).$$

Posons donc

$$\varphi - v = \varkappa O\omega + \varkappa\mathfrak{A}\sin v + \varkappa\mathfrak{B}\sin(2\eta - v) + \varkappa\mathfrak{C}\sin(2\eta + v)$$

$$+ \varkappa\mathfrak{D} g\sin 2\eta + \varkappa\mathfrak{E} g\sin 2v + \varkappa\mathfrak{F} g\sin(2\eta-2v) + \varkappa\mathfrak{G} g\sin(2\eta+v)$$

$$+ \varkappa\mathfrak{H} h\sin(v-u) + \varkappa\mathfrak{J} h\sin(v+u)$$

$$+ \varkappa\mathfrak{L} h\sin(2\eta-v-u) + \varkappa\mathfrak{M} h\sin(2\eta-v+u) + \varkappa\mathfrak{N} h\sin(2\eta+v-u) + \varkappa\mathfrak{O} h\sin(2\eta+v+u)$$

et la différentielle sera

$$\frac{d\varphi - dv}{\varkappa d\omega} = O + \mu\mathfrak{A}\cos v + (\mu-2\nu)\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) + (3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\cos(2\eta+v)$$

$$- \mu\mathfrak{A} g - \mu\mathfrak{B} g\cos 2\eta - \mu\mathfrak{A} g\cos 2v - \mu\mathfrak{B} g\cos(2\eta-2v) - 3\mu\mathfrak{C} g\cos(2\eta+2v)$$

$$\qquad - 3\mu\mathfrak{C} g \qquad + 2\mu\mathfrak{E} g \qquad - 2\nu\mathfrak{F} g \qquad + 2(2\mu-\nu)\mathfrak{G} g$$

$$+ 2(\mu-\nu)\mathfrak{D} g$$

$$+ (\mu-\nu)\mathfrak{H} h\cos(v-u) + (\mu+\nu)\mathfrak{J} h\cos(v+u)$$

$$+ 2\nu\mathfrak{B} h\cos(2\eta-v-u) + 2\nu\mathfrak{B} h\cos(2\eta-v+u) + 2\nu\mathfrak{C} h\cos(2\eta+v-u) + 2\nu\mathfrak{C} h\cos(2\eta+v+u)$$

$$+ (\mu-3\nu)\mathfrak{L} h \qquad + (\mu-\nu)\mathfrak{M} h \qquad + (3\mu-3\nu)\mathfrak{N} h \qquad + (3\mu-\nu)\mathfrak{O} h.$$

Qu'on la multiplie par $q = g + \alpha\cos v + \beta\cos(2\eta - v) - \gamma\cos(2\eta + v)$, posant pour abréger

$$\alpha = \frac{\varkappa}{2\mu}, \quad \beta = \frac{9\varkappa}{4(\mu-2\nu)} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{3\varkappa}{4(3\mu-2\nu)}$$

et l'on aura

$$\frac{q\,(d\varphi - dv)}{\varkappa\, d\omega} = Og + \mu\mathfrak{A}g\cos v + (u-2\nu)\mathfrak{B}g\cos(2\eta - v) + (3\mu - 2\nu)\mathfrak{C}g\cos(2\eta+v)$$

$$-\mu\mathfrak{A}gg + O\alpha \qquad\qquad -O\beta \qquad\qquad\qquad\qquad -O\gamma$$

$$+\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\alpha \qquad -\mu\mathfrak{B}gg\cos 2\eta - \mu\mathfrak{A}gg\cos 2v - \mu\mathfrak{B}gg\cos(2\eta - 2v) - 3\mu\mathfrak{C}gg\cos(2\eta+2v)$$

$$-\tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\mathfrak{B}\beta \qquad -3\mu\mathfrak{C}gg \qquad +2\mu\mathfrak{E}gg \qquad -2\nu\mathfrak{F}gg \qquad +2(2\mu-\nu)\mathfrak{G}gg$$

$$-\tfrac{1}{2}(3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\gamma + 2(\mu-\nu)\mathfrak{D}gg \qquad +\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\alpha + \tfrac{1}{2}(\mu-2v)\mathfrak{B}\alpha \qquad +\tfrac{1}{2}(3\mu-2v)\mathfrak{C}\alpha$$

$$+\tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\mathfrak{B}\alpha \qquad\qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\beta \qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\gamma$$

$$+\tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\mathfrak{C}\alpha$$

$$-\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\beta$$

$$-\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\gamma$$

$$+(\mu-\nu)\mathfrak{H}gh\cos(v-u) + (\mu+\nu)\mathfrak{I}gh\cos(v+u)$$

$$+2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta-v-u) + 2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta-v+u) + 2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta+v-u) + 2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta+v+u)$$

$$+(\mu-3\nu)\mathfrak{L}gh \qquad +(\mu-\nu)\mathfrak{M}gh \qquad +(3\mu-3\nu)\mathfrak{N}gh \qquad +(3\mu-\nu)\mathfrak{O}gh$$

Donc $\mu\mathfrak{A}g + O\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\mu\mathfrak{A} = \frac{1-2\,O\alpha}{2g}$

$$(\mu-2\nu)\mathfrak{B}g - O\beta = \tfrac{9}{4} \qquad (\mu-2\nu)\mathfrak{B} = \frac{9-4\,O\beta}{4g}$$

$$(3\mu-2\nu)\mathfrak{C}g - O\gamma = -\tfrac{3}{4} \qquad (3\mu-2\nu)\mathfrak{C} = \frac{-3+4\,O\gamma}{4g}$$

et ces valeurs substituées dans le premier terme constant donnent

$$Og - \tfrac{1}{2}g + O\alpha g + \frac{\alpha - 2O\alpha\alpha}{4g} - \frac{9\beta - 4O\beta\beta}{8g} + \frac{3\gamma - 4O\gamma\gamma}{8g} = \tfrac{1}{4}g$$

$$\text{ou}\quad O\left(g + \alpha g - \frac{\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma}{2g}\right) = \tfrac{3}{4}g - \frac{2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8g}$$

$$\text{donc}\quad O = \frac{6gg - 2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8gg\,(1+\alpha) - 4\alpha\alpha - 4\beta\beta - 4\gamma\gamma}.$$

Ensuite on aura

$$2(\mu-\nu)\mathfrak{D}gg = \mu(\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C})gg - \frac{3\alpha}{4g} + \frac{(\beta+\gamma)(1-4O\alpha)}{4g} + \tfrac{3}{4}g$$

$$2\mu\mathfrak{E}gg = \mu\mathfrak{A}gg - \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\alpha + \tfrac{1}{4}g$$

$$-2\nu\mathfrak{F}gg = \mu\mathfrak{B}gg - \tfrac{1}{2}(\mu-2\nu)\mathfrak{B}\alpha + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\beta + \tfrac{3}{2}g$$

$$2(2\mu-\nu)\mathfrak{G}gg = 3\mu\mathfrak{C}gg - \tfrac{1}{2}(3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\alpha + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\gamma - \tfrac{3}{4}g$$

$$(\mu-\nu)\mathfrak{H}gh = -\tfrac{3}{4}h, \qquad (\mu+\nu)\mathfrak{I}gh = -\tfrac{3}{4}h$$

$$(\mu-3\nu)\mathfrak{L}gh = -2\nu\mathfrak{B}gh - \tfrac{27}{8}h, \qquad (\mu-\nu)\mathfrak{M}gh = -2\nu\mathfrak{B}gh - \tfrac{27}{8}h$$

$$(3\mu-3\nu)\mathfrak{N}gh = -2\nu\mathfrak{C}gh + \tfrac{9}{8}h, \qquad (3\mu-\nu)\mathfrak{O}gh = -2\nu\mathfrak{C}gh + \tfrac{9}{8}h.$$

)r les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des fractions extrêmement petites, on aura à peu près

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\mu g}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{9}{4(\mu - 2\nu) g}, \qquad \mathfrak{C} = -\frac{3}{4(3\mu - 2\nu) g},$$

$$\mathfrak{D} g = \frac{9\mu\mu}{4(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)(3\mu - 2\nu)} + \frac{3}{8(\mu - \nu)} + \frac{\beta + \gamma - 3\alpha}{8(\mu - \nu) gg}, \quad \mathfrak{E} g = \frac{3}{8\mu} - \frac{\alpha}{8\mu gg}$$

$$\mathfrak{F} g = -\frac{3(5\mu - 4\nu)}{8\nu(\mu - 2\nu)} + \frac{9\alpha - 2\beta}{16\nu gg}, \quad \mathfrak{G} g = -\frac{3(3\mu - \nu)}{4(3\mu - 2\nu)(2\mu - \nu)} + \frac{3\alpha + 2\gamma}{16(2\mu - \nu) gg}$$

$$\mathfrak{H} h = -\frac{3h}{4(\mu - \nu) g} \qquad \mathfrak{J} h = -\frac{3h}{4(\mu + \nu) g}$$

$$\mathfrak{L} h = -\frac{9(3\mu - 2\nu) h}{8(\mu - 2\nu)(\mu - 3\nu) g} \qquad \mathfrak{M} h = -\frac{9(3\mu - 2\nu) h}{8(\mu - 2\nu)(\mu - \nu) g}$$

$$\mathfrak{N} h = \frac{3(9\mu - 2\nu) h}{8(3\mu - 2\nu)(3\mu - 3\nu) g} \qquad \mathfrak{O} h = \frac{3(9\mu - 2\nu) h}{8(3\mu - 2\nu)(3\mu - \nu) g}$$

'où l'on aura la longitude de l'abside $\varphi - \nu$.

38. **Scholie 1.** Il est évident que ces formules n'auraient pas lieu, si l'excentricité moyenne était trop petite, voire même évanouissante, puisque alors tous les coefficients deviendraient infinis. ar, en effet, si l'on supposait dans nos formules $q = g$ et qu'on négligeait, par conséquent, les égalités de $q$, cela reviendrait au même que de supposer $g$ incomparablement plus grand que les efficients des inégalités de $q$. Ainsi, à moins que $g$ ne soit beaucoup plus grand que

$$\frac{\varkappa}{2\mu} \text{ et } \frac{9\varkappa}{4(\mu - 2\nu)} \text{ etc.,}$$

ı se tromperait fort si l'on voulait faire usage de ces formules. Ensuite, puisqu'il a été supposé ıssi que l'excentricité ne soit pas trop grande, on voit que pour que les formules trouvées puissent oir lieu, il faut que l'excentricité moyenne $g$ ne soit ni trop grande, ni trop petite. Donc puisque

$$\frac{\varkappa}{\mu} = \frac{Fb^3}{(C + E) c^3},$$

ı faut que cette fraction soit extrêmement petite, et que l'excentricité moyenne $g$ tienne, pour ainsi ıre, le milieu entre cette petite fraction et l'unité. Cela se comprend aussi fort aisément, car ısque l'excentricité est fort petite, les autres inégalités du mouvement changeront très considéra- ıment les points de l'orbite où la direction du mouvement est perpendiculaire au rayon vecteur, ı $dx = 0$, en sorte qu'à proprement parler, les absides ne seront plus marquées. Dans ces cas, ı faudra donc recourir à une autre méthode, où l'on ne considère plus ces points mêmes, mais ıtôt des points rapprochés où l'on placerait le lieu des vraies absides. Dans cette méthode l'ano- ılie $v$ ne serait donc plus comptée depuis la vraie abside, mais de ce point imaginaire, de sorte ıe $dx$ ne s'évanouirait plus lorsque $\sin v = 0$. Cependant il faut aussi remarquer, que lorsque ıcentricité est fort petite, une faute assez considérable dans le lieu des absides n'exerce presque ıcune influence sur la longitude du satellite.

39. **Coroll. 1.** L'expression que nous venons de trouver pour la longitude des absides $\varphi - v$ renferme d'abord le terme $\varkappa O\omega$ qui marque la longitude moyenne; d'où l'on voit que cette longitude est variable, et que la ligne des absides a un mouvement progressif $= \varkappa O\omega$, pendant le temps exprimé par $\omega$.

40. **Coroll. 2.** Dans la valeur trouvée

$$O = \frac{6gg - 2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8gg - 4\alpha\alpha - 4\beta\beta - 4\gamma\gamma},$$

puisque les quantités

$$\alpha = \frac{\varkappa}{2\mu}, \; \beta = \frac{9\varkappa}{4(\mu - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{3\varkappa}{4(3\mu - 2\nu)}$$

sont fort petites par rapport à $g$, leurs carrés pourront bien être rejetés par rapport à $gg$; mais ces quantités mêmes pourront être de la même grandeur que $gg$, et partant changer très sensiblement le numérateur.

41. **Coroll. 3.** Si la quantité

$$-2\alpha + 9\beta - 3\gamma = \frac{\varkappa(111\mu\mu - 56\mu\nu - 8\nu\nu)}{2\mu(\mu - 2\nu)(3\mu - 2\nu)}$$

était incomparablement plus petite que $gg$, ou $6gg$, alors on aurait $O = \frac{3}{4}$, et le mouvement moyen des absides serait $= \frac{3}{4}\varkappa\omega$, mouvement que l'on trouve par les méthodes ordinaires, lorsqu'on ne fait pas attention à ce que les inégalités y peuvent changer.

42. **Coroll 4.** Pour les inégalités qui se trouvent dans le mouvement des absides, elles peuvent devenir assez considérables, vu que les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. sont divisés par l'excentricité $g$, et elles le seront d'autant plus, que l'excentricité sera plus petite.

43 **Scholie 2.** Ayant ainsi trouvé les valeurs assez approchantes des quantités $p$, $q$ et $v$, il sera aisé de les déterminer plus exactement et de découvrir les inégalités dérivées. Car, soit pour abréger, $p = b(1 + \pi)$, où $\pi$ marque les inégalités principales de $p$, et $q = g + \xi$, et l'on aura

$$d\varphi = d\omega(1 - (g + \xi)\cos v)^2 \sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ab^3(1+\pi)^3}}$$

donc à cause de $\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ab^3}} = \mu$ et $\sqrt{\frac{1}{(1+\pi)^3}} = 1 - \frac{3}{2}\pi$, on aura

$$d\varphi = \mu d\omega(1 - \tfrac{3}{2}\pi)(1 + \tfrac{1}{2}(g+\xi)^2 - 2(g+\xi)\cos v + \tfrac{1}{2}(g+\xi)^2\cos 2v)$$

ou bien

$$d\varphi = \mu d\omega(1 + \tfrac{1}{2}gg - 2g\cos v + \tfrac{1}{2}gg\cos 2v + g\xi - 2\xi\cos v + g\xi\cos 2v - \tfrac{3}{2}\pi$$
$$+ 3g\pi\cos v)$$

en négligeant les termes trop petits. De là on aura

$$dv = d\varphi - \frac{\varkappa d\omega}{q}(\tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{2}\cos v + \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) - \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v) \text{ etc.}).$$

Or, pour les éléments de nos angles, dont nous nous servirons dans les intégrations, nous pourrons considérer le mouvement du soleil comme règulier, admettant $du = d\theta = \nu\,(1 + \frac{1}{2}\,hh) - 2\nu h \cos u$, et dans les petits termes il suffira de poser $q = g$. Soit donc

$$\mu\,(1 + \tfrac{1}{2}\,gg) - \tfrac{1}{4}\,\varkappa = \alpha,\ \ \mu g + \frac{\varkappa}{4g} = \beta,\ \ \nu\,(1 + \tfrac{1}{2}\,hh) = \gamma,\ \ \mu\,(1 + \tfrac{1}{2}gg) - \nu\,(1 + \tfrac{1}{2}\,hh) = \delta,$$

et nous aurons

$$\frac{dv}{d\omega} = \alpha - 2\beta\cos v - \frac{9\varkappa}{4g}\cos(2\eta - v) + \frac{3\varkappa}{4g}\cos(2\eta + v)$$

$$\frac{du}{d\omega} = \gamma - 2\nu h \cos u$$

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \delta - 2\mu g \cos v + 2\nu h \cos u$$

et ces éléments peuvent être suffisants pour trouver les inégalités des quantités $p$, $q$ et de $\varphi - v$, puisqu'elles sont peu considérables en elles-mêmes. Ensuite nous aurons

$$\frac{mp\sqrt{a^3p}}{r^3} = \varkappa\sqrt{(1 + \pi)^3} = \varkappa\,(1 + \tfrac{3}{2}\,\pi)\ \text{ à cause de } r \text{ constant} = c.$$

Or les variations trouvées pour $p$ et $q$ étant assez exactes puisqu'elles sont extrêmement petites, nous n'aurons besoin que de déterminer plus exactement les inégalités des absides, ou l'angle $\varphi - v$. Car supposant pour $\varphi - v$ la même valeur que dans la solution, avec ces termes

$$\varkappa\mathfrak{P}\sin(4\eta - 2v) + \varkappa\mathfrak{Q}\sin 4\eta + \varkappa\mathfrak{R}\sin(4\eta + 2v)$$

nous aurons

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{d\varphi - dv}{\varkappa d\omega} = 0 & + \alpha\mathfrak{A}\cos v & + (2\delta - \alpha)\,\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) & + (2\delta + \alpha)\,\mathfrak{C}\cos(2\eta + v) \\
\quad - \beta\mathfrak{A} & & & \\
\quad + \dfrac{9\varkappa\mathfrak{B}}{8g} & & & \\
\quad + \dfrac{3\varkappa\mathfrak{C}}{8g} & & & \\
\quad - \beta\mathfrak{A}\cos 2v & - \dfrac{3\varkappa\mathfrak{A}}{4g}\cos 2\eta & - \dfrac{9\varkappa\mathfrak{A}}{8g}\cos(2\eta - 2v) & + \dfrac{3\varkappa\mathfrak{A}}{8g}\cos(2\eta + v) \\
\quad - \dfrac{3\varkappa\mathfrak{B}}{8g} & - (2\mu g - \beta)\mathfrak{B} & - (2\mu g - \beta)\,\mathfrak{B} & - (2\mu g + \beta)\,\mathfrak{C} \\
\quad - \dfrac{9\varkappa\mathfrak{C}}{8g} & - (2\mu g + \beta)\mathfrak{C} & + 2\,(\delta - \alpha)\,\mathfrak{F}g & + 2\,(\delta + \alpha)\,\mathfrak{G}g \\
\quad + 2\alpha\mathfrak{E}g & + 2\delta\mathfrak{D}g & & \\
 & + (\alpha - \gamma)\,\mathfrak{H}h\cos(v - u) & + (\alpha + \gamma)\,\mathfrak{I}h\cos(v + u) &
\end{array}$$

*

$$+2\nu h\mathfrak{B}\cos(2\eta-\nu-u)+2\nu h\mathfrak{B}\cos(2\eta-\nu+u)+2\nu h\mathfrak{C}\cos(2\eta+\nu-u)+2\nu h\mathfrak{C}\cos(2\eta+\nu+u)$$
$$+(2\delta-\alpha-\gamma)\mathfrak{L}h \quad +(2\delta-\alpha+\gamma)\mathfrak{M}h \quad +(2\delta+\alpha-\gamma)\mathfrak{N}h \quad +(2\delta+\alpha+\gamma)\mathfrak{O}h$$
$$+\frac{9\varkappa\mathfrak{B}}{8g}\cos(4\eta-2\nu)-\frac{3\varkappa\mathfrak{B}}{8g}\cos 4\eta+\frac{3\varkappa\mathfrak{C}}{8g}\cos(4\eta+2\nu)$$
$$+(4\delta-2\alpha)\mathfrak{P} \quad -\frac{9\varkappa\mathfrak{C}}{8g} \quad +(4\delta+2\alpha)\mathfrak{R}$$
$$+4\delta\mathfrak{Q}.$$

Cette valeur étant multipliée par

$$q=g+A\cos\nu-B\cos(2\eta-\nu)-C\cos(2\eta+\nu)-Dg\cos 2\eta+Eg\cos 2\nu+Fg\cos(2\eta-2\nu)-Gg\cos(2\eta+2\nu)$$

où les quantités $A$, $B$, $C$, $D$ etc. sont connues par la valeur de $q$, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{q(d\varphi-d\nu)}{\varkappa d\omega}=\;&\mathfrak{O}g \quad +\alpha\mathfrak{A}g\cos\nu+(2\delta-\alpha)\mathfrak{B}g\cos(2\eta-\nu)+(2\delta+\alpha)\mathfrak{C}g\cos(2\eta+\nu)-(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g\cos 2\eta\\
&-\beta\mathfrak{A}g+OA \qquad -OB \qquad -OC \qquad -(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g\\
&+\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{B} \qquad\qquad +2\delta\mathfrak{D}gg\\
&+\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C} \qquad\qquad -\tfrac{3}{4}\varkappa\mathfrak{A}\\
&+\tfrac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A} \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B}\\
&-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\mathfrak{B} \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C}\\
&-\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\mathfrak{C} \qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A}\\
&\qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}\\
&-\beta\mathfrak{A}g\cos 2\nu \quad -\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{A}\cos(2\eta-2\nu)+\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{A}\cos(2\eta+2\nu)\\
&-\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B} \quad -(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g \quad -(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g\\
&-\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C} \quad +2(\delta-\alpha)\mathfrak{F}gg \quad +2(\delta+\alpha)\mathfrak{G}gg\\
&+2\alpha\mathfrak{E}gg \quad +\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B} \quad +\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C}\\
&+\tfrac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A} \quad -\tfrac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A} \quad -\tfrac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}\\
&-\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\mathfrak{C}\\
&-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\mathfrak{B}\\
&+(\alpha-\gamma)\mathfrak{H}gh\cos(\nu-u)+(\alpha+\gamma)\mathfrak{J}gh\cos(\nu+u)\\
&+2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta-\nu-u)+2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta-\nu+u)+2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta+\nu-u)-2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta+\nu+u)\\
&+(2\delta-\alpha-\gamma)\mathfrak{L}gh \quad +(2\delta-\alpha+\gamma)\mathfrak{M}gh \quad +(2\delta+\alpha-\gamma)\mathfrak{N}gh \quad +(2\delta+\alpha+\gamma)\mathfrak{O}gh\end{aligned}$$

$$+\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{B}\cos(4\eta-2v)\quad -\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B}\cos 4\eta\quad +\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C}\cos(4\eta+2v)$$

$$+2(2\delta-\alpha)\mathfrak{P}g\quad -\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C}\quad +2(2\delta+\alpha)\mathfrak{R}g$$

$$-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\mathfrak{B}\quad +4\delta\mathfrak{Q}g\quad -\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\mathfrak{C}$$

$$-\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\mathfrak{C}$$

$$-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\mathfrak{B}$$

De là nous tirerons

$$\tfrac{1}{4}g=Og-\beta\mathfrak{A}g+\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{B}+\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C}+\tfrac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A}-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\mathfrak{B}-\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\mathfrak{C}$$

$$+\tfrac{1}{2}D\left(\tfrac{3}{4}\varkappa\mathfrak{A}+(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g+(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g-2\delta\mathfrak{D}gg\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}E\left(2\alpha\mathfrak{E}gg-\beta\mathfrak{A}g-\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B}-\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}F\left(2(\delta-\alpha)\mathfrak{F}gg-\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{A}-(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}G\left(2(\delta+\alpha)\mathfrak{G}gg+\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{A}-(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g\right)\quad \text{etc.}$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}=\alpha\mathfrak{A}g+OA,\qquad \tfrac{9}{4}=(2\delta-\alpha)\mathfrak{B}g-OB,\qquad -\tfrac{3}{4}=(2\delta+\alpha)\mathfrak{C}g-OC$$

$$\tfrac{1}{4}g=-\beta\mathfrak{A}g-\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B}-\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C}+2\alpha\mathfrak{E}gg+\tfrac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A}-\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\mathfrak{C}-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\mathfrak{B}$$

$$\tfrac{3}{4}g=2\delta\mathfrak{D}gg-(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g\quad -\tfrac{3}{4}\alpha\mathfrak{A}+\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B}\quad -\tfrac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A}$$

$$-(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g\qquad +\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C}\quad -\tfrac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}$$

$$\tfrac{3}{2}g=2(\delta-\alpha)\mathfrak{F}gg-\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{A}-(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g+\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B}-\tfrac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A}$$

$$-\tfrac{3}{4}g=2(\delta+\alpha)\mathfrak{G}gg+\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{A}-(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g+\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C}-\tfrac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}$$

$$-\tfrac{3}{4}h=(\alpha-\gamma)\mathfrak{H}gh,\qquad -\tfrac{3}{4}h=(\alpha+\gamma)\mathfrak{J}gh$$

$$-\tfrac{27}{8}h=(2\delta-\alpha-\gamma)\mathfrak{L}gh+2\nu\mathfrak{B}gh,\qquad -\tfrac{27}{8}h=(2\delta-\alpha+\gamma)\mathfrak{M}gh+2\nu\mathfrak{B}gh$$

$$+\tfrac{9}{8}h=(2\delta+\alpha-\gamma)\mathfrak{N}gh+2\nu\mathfrak{C}gh,\qquad +\tfrac{9}{8}h=(2\delta+\alpha+\gamma)\mathfrak{O}gh+2\nu\mathfrak{C}gh$$

$$o = \tfrac{9}{8}\,\varkappa\mathfrak{B} + 2\,(2\delta - \alpha)\,\mathfrak{P}g - \tfrac{1}{2}\,(2\delta + \alpha)\,B\mathfrak{B}$$

$$o = -\tfrac{3}{8}\,\varkappa\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\,\varkappa\mathfrak{C} + 4\delta\mathfrak{Q}g - \tfrac{1}{2}\,(2\delta + \alpha)\,B\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\,(2\delta - \alpha)\,C\mathfrak{B}$$

$$o = \tfrac{3}{8}\,\varkappa\mathfrak{C} + 2\,(2\delta - \alpha)\,\mathfrak{R}g - \tfrac{1}{2}\,(2\delta + \alpha)\,C\mathfrak{C}$$

Et si nous substituons dans la première égalité les valeurs des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. que les équa-tions suivantes (?) fournissent, et que nous écrivions

$$B \text{ pour } \frac{9\varkappa}{4\,(2\delta - \alpha)}, \text{ et } C \text{ pour } \frac{3\varkappa}{4\,(2\delta + \alpha)},$$

pluisieurs termes se détruiront et nous trouverons en négligeant les termes $D$, $E$, $F$ etc.

$$O = \frac{\frac{1}{4}\,g + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\Delta}{4g}}{g + \frac{\beta\Delta}{\alpha} - \frac{\Delta\Delta}{4g}} = \frac{\frac{1}{4}\,g + \frac{\mu g}{2\alpha}}{g + \frac{\mu\Delta g}{\alpha} + \frac{\varkappa\Delta}{8\alpha g}} = \frac{2\alpha gg + 4\mu gg}{8\alpha gg + 8\mu\Delta gg + \varkappa\Delta}$$

et partant

$$O = \frac{6\mu - \frac{1}{2}\,\varkappa}{8\mu + 2\varkappa},$$

de sorte que l'augmentation du mouvement des absides, qui a été trouvée auparavant, s'évanoui[t] maintenant.

# PHYSICA.

Et si nous substituons dans la première égalité les valeurs des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. [illegible]
[illegible] suivantes [illegible], et que nous écrivions

$$b \text{ pour } [illegible] \quad \text{et} \quad C \text{ pour } [illegible]$$

[illegible] se détruiront et nous trouverons en négligeant les termes $D$, [illegible]

[illegible]

[illegible]

de sorte que l'augmentation du [illegible]
[illegible]

# XX.

# Anleitung zur Natur-Lehre, worin die Gründe zu Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen festgesetzet werden.

---

## I. Capitel.

### Von der Naturlehre überhaupt.

1) *Die Naturlehre ist eine Wissenschaft die Ursachen der Veränderungen, welche sich an den Körpern ereignen zu ergründen.*

Wo eine Veränderung vorgeht, da muss auch eine Ursache sein, welche dieselbe hervorbringt, weil gewiss ist, dass nichts ohne einen zureichenden Grund geschehen kann. Wer also den Grund anzeigen kann, warum eine Veränderung vorgegangen, der erkennet die Ursache derselben, und leistet dadurch dem Endzweck der Naturlehre ein Genügen. Die eigentliche Absicht dieser Wissenschaft ist demnach nur auf die Veränderungen gerichtet, denn so lang eine Sache in eben demselben Zustand verbleibet, so lässt sich davon kein anderer Grund anzeigen, als die Abwesenheit solcher Ursachen, welche vermögend sind eine Veränderung hervorzubringen: so bald sich aber eine Veränderung ereignet, so ist man auch befugt nach der Ursache derselben zu fragen, und die Naturlehre ist bemüht die Ursachen aller Veränderungen ausfindig zu machen. Hierin ist aber unsere Wissenschaft noch sehr unvollkommen, indem man von den wenigsten Veränderungen die Ursachen mit Gewissheit anzuzeigen im Stande ist; und deswegen kann man auch von der Naturlehre nicht verlangen, dass sie von allen Veränderungen die Ursachen wirklich anzeigen soll. In dieser Absicht ist demnach die Beschreibung der Naturlehre so eingerichtet worden, dass dieselbe nur bemühet ist, die Ursachen der vorgehenden Veränderungen zu ergründen. Ferner wird die Naturlehre nur auf die Veränderungen, welche sich an den Körpern ereignen, eingeschränkt, und dieselbe von der

Geisterlehre abzusondern, als welche mit Erklärung der bei dem Geiste vorgehenden Veränderungen beschäftigt ist.

2) *Alle Veränderungen welche sich an den Körpern ereignen, müssen ihren Grund in dem Wesen und den Eigenschaften der Körper selbst haben.*

Entweder ist die Ursache einer solchen Veränderung in dem Körper selbst, oder ausser dem Körper: im ersteren Falle ist der Satz klar, indem sowohl die Ursache als die Veränderung, welche dadurch gewirket wird, in dem Wesen und den Eigenschaften der Körper gesucht werden muss. Im anderen Falle aber, wann gleich die Ursache nicht in den Körpern befindlich ist, so geschieht doch die Veränderung selbst in den Körpern, und muss folglich in dem Wesen und den Eigenschaften der Körper gegründet sein. Denn hieraus erkennt man, was für Veränderungen an den Körpern möglich sind, ohne auf die Ursachen zu sehen, durch welche dieselben gewirket werden. Es kommen nämlich in der Naturlehre immer zwei Sachen zu betrachten vor: erstlich die Veränderung selbst, welche vorgegangen und dann zweitens die Ursache, welche dieselbe hervorgebracht. Die erste ist zweifelsohne allezeit in dem Wesen und den Eigenschaften der Körper gegründet, und dieses ist genug zu Behauptung unseres Satzes. Ist aber die Ursache nicht in den Körpern befindlich, so muss sie nothwendig einem Geiste zugeschrieben werden, weil in der Welt man keine andere Wesen als Geister und Körper behaupten kann. Allein solche Veränderungen an den Körpern, welche von Geistern hervorgebracht werden, überschreiten die Gränzen der Naturlehre, sowohl als die Wunderwerke, welche unmittelbar durch eine göttliche Kraft gewirket werden. Inzwischen ist so viel zu merken, dass wann eine Veränderung unmöglich aus dem Wesen der Körper erkläret werden kann, dieselbe nothwendig einem Geiste zugeschrieben oder gar für ein Wunderwerk gehalten werden müsse.

3) *Vor allen Dingen ist also nöthig, dass man sich bemühe das Wesen und die Eigenschaften der Körper zu erforschen.*

Das Wesen der Körper wird von den meisten Weltweisen für eine unergründliche Sache gehalten, zu dessen Erkenntniss man nimmermehr gelangen könne. Dieser Meinung zufolge müssen wir uns mit der Erkenntniss einiger Eigenschaften begnügen, und keine andere Veränderungen in den Körpern erklären wollen, als welche in diesen Eigenschaften gegründet sind. Allein hier ist der Ort noch nicht von der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer vollständigen Erkenntniss zu urtheilen; wir müssen vorher allen gehörigen Fleiss anwenden um zu einer solchen Erkenntniss zu gelangen und alsdann wird es nicht schwer sein zu urtheilen, wie weit wir das Wesen der Körper erkannt haben. Es sind aber in dem Wesen alle Eigenschaften gegründet, welche den Körpern immer zukommen, und wer das Wesen derselben einmal erkannt hat, dem können auch alle Eigenschaften nicht mehr verborgen sein: wie dann auch demjenigen der alle mögliche Eigenschaften der Körper ergründet hat, das Wesen nicht unbekannt sein kann. Die erste und vornehmste Bemühung der Naturlehrer gehet also dahin, dass wir aus einer genauen Betrachtung der Körper ihre Eigenschaften zu erkennen trachten.

4) *Was allen Körpern ohne einige Ausnahme zukommt, wird eine Eigenschaft der Körper genannt, und daher werden alle Dinge in welchen sich diese Eigenschaft nicht findet, von dem Geschlecht der Körper ausgeschlossen.*

Hier ist die Rede von den allgemeinen Eigenschaften der Körper, welche allen Körpern ohne Ausnahme zukommen; und diese müssen wohl unterschieden werden von denjenigen Eigenschaften, welche nur einer besonderen Art der Körper eigen sind. Wir müssen aber vorher die Eigenschaften aller Körper überhaupt kennen lernen, ehe wir zur Untersuchung der besonderen Eigenschaften, welche nur gewissen Arten der Körper zukommen, fortschreiten können: denn die Erwägung der allgemeinen Eigenschaften wird uns lehren, was für Veränderungen der Körper überhaupt in denselben ihren Grund haben und folglich aus denselben erklärt werden können, da sich hingegen in besonderen Arten der Körper solche Veränderungen ereignen können, welche aus den besonderen Eigenschaften einer jeglichen Art erkläret werden müssen. Wir haben aber zwei Wege um zur Erkenntniss der allgemeinen Eigenschaften der Körper zu gelangen; der erste Weg bestehet darin, dass wir erforschen, was alle Körper unter sich gemein haben; weilen wir aber über die wenigsten Körper, welche sich in der Welt befinden, eine solche Untersuchung anzustellen vermögend sind, so bedienen wir uns mit grösserer Sicherheit des anderen Weges, welcher darauf beruhet, dass wir alles dasjenige für Eigenschaften der Körper annehmen, ohne welches die Körper aufhören würden Körper zu sein. Denn was den Körpern dergestalt zukommt, dass wir alle diejenige Dinge in welchen sich dieses nicht befindet, auch nicht für Körper halten würden, dasselbe ist mit Recht für eine allgemeine Eigenschaft der Körper zu halten. Da wir nun einen solchen Begriff von den Körpern voraussetzen, welcher aber gleich noch unvollständig doch hinlänglich ist, die Körper von denjenigen Dingen, welche nicht Körper sind, zu unterscheiden, so können wir auch vermittelst dieses Begriffes, die allgemeinen Eigenschaften der Körper ausfindig machen. Und eben diese Entwickelung der allgemeinen Eigenschaften wird uns nach und nach zu einem vollständigen Begriff der Körper leiten, durch welchen wir endlich mit aller Gewissheit zu einer vollkommenen Erkenntniss aller Eigenschaften und sogar des Wesens der Körper selbst werden gelangen können.

5) *Das Wesen der Körper bestehet in einer solchen Eigenschaft, welche nicht nur allen Körpern gemein, sondern auch dergestallt eigen ist, dass alle Dinge, welchen diese Eigenschaft zukommt, auch nothwendig für Körper gehalten werden müssen.*

Für eine blosse Eigenschaft ist es genug, dass wir alle Dinge, in welchen sich dieselbe nicht befindet, aus dem Geschlechte der Körper mit Recht ausschliessen können: es kann aber noch sein, dass auch anderen Dingen diese Eigenschaft zukommt, welche doch nicht Körper sind; und dieses ist alsdann eine blosse Eigenschaft, worin das Wesen der Körper noch nicht gesetzt werden kann. Eine solche Eigenschaft aber, welche den Körpern dergestalt eigen ist, dass sobald sich dieselbe bei einem Dinge befindet, dieses Ding auch sogleich für einen Körper gehalten werden muss, enthält auch nothwendig das Wesen der Körper in sich. Denn wann eine Eigenschaft so beschaffen ist, dass alle Dinge, welche damit begabet sind, auch sogleich für Körper gehalten werden müssen, und es unmöglich ist, dass eine Sache, in welcher sich diese Eigenschaft befindet, nicht ein Körper

sein sollte, so muss das Wesen der Körper nothwendig in derselben bestehen. Hieraus ist auch klar, dass nur eine einzige solcher Eigenschaften das Wesen der Körper ausmacht; denn wenn zwei oder mehr dergleichen Eigenschaften dazu erfordert würden, so würde ein Ding, das nur mit einer derselben begabet wäre, noch nicht für einen Körper zu halten sein, welches demjenigen so angenommen worden, wiederspräche. So bald wir also eine einzige solcher Eigenschaften werden entdecket haben, so können wir auch sicher behaupten, dass in derselben das Wesen der Körper bestehe, und haben also eine vollständige Erkenntniss der Körper erlanget.

6) *Alle allgemeine Eigenschaften der Körper sind in ihrem Wesen gegründet, und es kann den Körpern keine allgemeine Eigenschaft zugeschrieben werden, welche nicht in ihrem Wesen enthalten wäre.*

Sobald sich diejenige Eigenschaft, in welcher das Wesen der Körper bestehet, bei einem Dinge befindet, so ist dasselbe ein Körper, wenn es auch gleich keine andere Eigenschaften hat, welche mit jener in keiner Verknüpfung stehen. Daher sind alle diejenigen Eigenschaften, welche nicht nothwendig aus dem Wesen der Körper herfliessen, keine allgemeine Eigenschaften derselben, weil die Körper auch ohne dieselben Körper bleiben würden, und also können den Körpern keine andere allgemeine Eigenschaften zugeschrieben werden, als welche aus ihrem Wesen nothwendig folgen. Wer demnach das Wesen der Körper erkannt hat, dem kann auch keine einzige allgemeine Eigenschaft derselben verborgen sein.

7) *Alle besondere Arten von Körpern haben auch ihre besondere Eigenschaften, welche aber nichts anderes sind, als sonderbare Einschränkungen der allgemeinen Eigenschaften.*

Der Begriff von den Körpern, welchen wir bisher betrachtet haben, ist ein allgemeiner Begriff, weil er alle Körper überhaupt in sich begreiffet; und deswegen nothwendig unbestimmt. Ebenso ist auch das Wesen der Körper überhaupt nebst den daraus herfliessenden Eigenschaften unbestimmt, und leidet demnach unterschiedene Bestimmungen und Einschränkungen, aus welchen die besonderen Arten der Körper entstehen. Wenn also das Wesen der Körper überhaupt auf eine gewisse Art bestimmt und eingeschränket wird, so entsteht daher das Wesen einer besonderen Art von Körpern, deren Eigenschaften ebenfalls aus diesem eingeschränkten Wesen entspringen, welche folglich von den allgemeinen Eigenschaften nicht anders unterschieden sein können, als in Absicht auf dieselbe besondere Bestimmung des Wesens. Wird das Wesen nach seinem ganzen Umfang in allen Stücken bestimmt, so entsteht daher ein einzelner Körper, in welchem gar nichts unbestimmtes mehr vorhanden ist, dergleichen alle Körper sind, welche als Theile der Welt wirklich da sind: indem nichts wirklich da sein kann, als was in allen Stücken völlig bestimmt ist. Wenn also das allgemeine Wesen der Körper nur in einigen Stücken bestimmet wird, so entstehen daher die besonderen Arten der Körper, und in diesen sind ferner die einzelnen Körper enthalten, wann die Bestimmung ganz und gar vollendet wird, dass daran nichts unbestimmtes mehr übrig bleibt.

8) *Die Naturlehre wird also am füglichsten dergestalt abgehandelt werden, dass man erstlich die allgemeinen Eigenschaften und daher das Wesen der Körper erforschet, hernach aber alle besondere Arten der Körper auf gleiche Weise untersuchet.*

Die Veränderungen, welche in den Körpern vorgehen, können nicht anders als aus den Eigenschaften und dem Wesen der Körper erkannt werden, und die Ursachen derselben, in sofern dieselben in den Körpern zu suchen sind, müssen auch nothwendig aus eben dieser Quelle hergeleitet werden. Da nun die Naturlehre eine Wissenschaft ist die Ursachen der Veränderungen, so an den Körpern vorgehen zu ergründen, so kann man dazu auf keine andere Art gelangen, als dass man sowohl die allgemeinen als besonderen Eigenschaften der Körper fleissig untersuchet, um daraus zu erkennen, was für Veränderungen bei den Körpern möglich sind, und von was für Ursachen dieselben hervorgebracht werden können. Und nach dieser Erkenntniss muss hernach die Untersuchung der Ursachen aller bei den Körpern sich ereignenden besonderen Veränderungen angestellet werden.

---

## II. Capitel.

### Von der Ausdehnung als der ersten allgemeinen Eigenschaft der Körper.

9) *Die erste allgemeine Eigenschaft der Körper bestehet in der Ausdehnung, dergestallt dass alles, was keine Ausdehnung hat, auch für keinen Körper gehalten werden kann.*

Wir sind nicht nur durch die Erfahrung überzeugt, dass alle Körper so wir kennen, eine Ausdehnung haben, sondern unser Begriff von den Körpern schliesset auch die Ausdehnung dergestalt in sich, dass wir vermöge desselben, alle Dinge, welche keine Ausdehnung haben, aus der Zahl der Körper mit Recht ausschliessen. Hieran hat nicht nur keine Naturlehre jemals gezweifelt, sondern Cartesius ist auch so weit gegangen, dass er das Wesen der Körper in der Ausdehnung gesetzt: wir werden aber weiter unten sehen, dass dieses keineswegs mit Recht geschehen kann; denn obgleich alle Körper ohne Zweifel ausgedehnt sind, so folget nicht, dass alle Dinge, welche ausgedehnt sind, sogleich zu Körper werden. Ein leerer Raum mag möglich sein oder nicht, so ist doch soviel gewiss, dass der Begriff eines leeren Raumes, welcher unstreitig möglich ist, von dem Begriff der Körper abgesondert werden muss; woraus erhellet, dass unser Begriff von den Körpern, noch etwas mehreres als die Ausdehnung allein in sich schliesse. Die übrigen Eigenschaften, welche nebst der Ausdehnung den Begriff der Körper ausmachen, sollen im Folgenden angezeigt werden, nachdem wir alle Neben-eigenschaften, welche mit der Ausdehnung nothwendig verbunden sind, werden untersuchet haben. Denn eine jegliche Haupt-Eigenschaft schliesset verschiedene Neben-Eigenschaften in sich, welche folglich den Körpern ebenso nothwendig müssen zugeeignet werden, als die Haupt-Eigenschaft selbst.

10) *Was also auch immer von der Ausdehnung, in sofern sie Ausdehnung ist, gesagt werde kann, dasselbe kann auch ohne Ausnahme allen Körpern zugeeignet werden.*

Weil die Ausdehnung den Körpern nothwendig zukommt, so kommt ihnen auch alles dasjenig eben so nothwendig zu, was mit der Ausdehnung verbunden ist: folglich alle Eigenschaften de Ausdehnung sind auch zugleich Eigenschaften der Körper. Denn sobald den Körpern die Ausdeh nung zugeschrieben wird, so muss ihnen zugleich auch alles dasjenige zugeeignet werden, was mi der Ausdehnung in einer nothwendigen Verknüpfung stehet; sonsten wären sie nicht ausgedehnt und also nicht einmal Körper. Da das Wesen der Körper nicht in der blossen Ausdehnung beste het, so sind ausgedehnte Dinge möglich, welche nicht Körper sind; und der Begriff von einem aus gedehnten Ding überhaupt, enthält den Begriff eines Körpers in sich; daher müssen auch alle Eigen schaften eines ausgedehnten Dinges überhaupt, als Eigenschaften der Körper angesehen werder Gegen diesen Schluss wird zwar von einigen eingewendet, dass die Ausdehnung nur ein abgeson derter Begriff sei, und daher die Eigenschaft derselben keineswegs den Körpern als wirklichen Dinge beigelegt werden könne. Hierauf dient aber zur Antwort, dass alle allgemeine Begriffe auch abge sonderte Begriffe sind; und Niemand hat sich noch einfallen lassen zu behaupten, dass die Begriff der Geschlechter nicht abgesonderte Begriffe sein sollten. Dem ungeachtet bleibet die Regel auf da festeste gegründet, dass alle Eigenschaften der Geschlechter auch allen darunter befindlichen beson deren Arten und einzelnen Dingen zukommen, und auf dieser Regel gründet sich sogar unser ganze Erkenntniss. Gleichwie nun alles, was von den Körpern überhaupt, welches ein abgesondert Begriff ist, gesagt werden kann, auch allen besonderen Arten und sogar allen einzelnen Körper zugeeignet werden muss; so muss auch von den Körpern sowohl überhaupt als insbesondere all dasjenige gelten, was von der Ausdehnung als einem noch allgemeinen Begriff gesagt werden kan und wer sich diesen Schluss zu läugnen untersteht, der stösst die sichersten Regeln der Vernunftleh um. Wer demnach den Körpern die Eigenschaften so mit der Ausdehnung nothwendig verbund sind abspricht, derselbe entzieht ihnen die Ausdehnung selbst, und schliesst sie folglich von de Geschlecht der Körper aus.

11) *Alles was ausgedehnt ist, ist theilbar, und gehet zugleich die Theilbarkeit ohne En immer weiter fort; daher müssen auch alle Körper unendlich theilbar sein.*

Der dagegen von dem abgesonderten Begriff der Ausdehnung hergeleitete Einwurf ist sch entkräftet worden, wann nur gesagt wird, dass die unendliche Theilbarkeit der Ausdehnung in fern sie Ausdehnung ist, zukomme. Dieser Beweiss wird aber in der Geometrie geführt, allwo das bündigste dargethan wird, dass alles was ausgedehnt ist, ohne Ende immerfort theilbar s müsse: und wann wir weiter nachsuchen, warum die unendliche Theilbarkeit der Ausdehnung zu schrieben werde, so finden wir ganz deutlich, dass solches aus der Natur der Ausdehnung no wendig folge. Wo also immer eine Ausdehnung vorhanden ist, da findet auch die unendlic Theilbarkeit statt; und da alle Körper ausgedehnt sind, so müssen sie auch nothwendig in's uned liche theilbar sein. Wir wissen sogar aus der Erfahrung, dass die wirkliche Zertheilung vi Körper erstaunlich weit getrieben werden kann; und es ist klar, dass nur unsere Werkzeuge nd

lie Sinne selbst zu stumpf sind, dass die Zertheilung nicht noch weiter fortgesetzt werden kann. Allein hier ist nicht die Rede von dem was wirklich bewerkstelligt werden kann, sondern vielmehr von der blossen Möglichkeit die Zertheilung noch immer weiter zu treiben. Man setze ein Körper sei schon wirklich in 1000 Theile zertheilet worden, so wird ein jeder Theil noch eine gewisse Grösse haben, und ist daher gewiss, dass ein jeder Theil noch einer weitern Eintheilung fähig sei; und da die Theile, so weit man auch immer in den Gedanken mit der Zertheilung gekommen sein mag, doch noch immer eine gewisse Grösse und Ausdehnung behalten; so bleibt auch die fernere Fortsetzung eben so möglich als von Anfang. Hier scheinen zwar unsre Sinne zu stutzen, allein die Wahrheit muss nicht nach den Sinnen, sondern allein nach der Vernunft beurtheilet werden. Sollte man nach einer eingebildeten, jedoch bestimmten Zergliederung endlich auf solche Theile gerathen, welche keiner ferneren Zertheilung mehr fähig wären, so müssten dieselben auch aller Grösse beraubet sein, welches einen wahren Widerspruch in sich enthält, denn so widersprechend es ist, dass die Hälfte oder der dritte Theil eines Körpers keine Grösse mehr haben sollte, ebenso widersprechend ist es, wenn man ein solches von den tausendsten, oder millionsten, oder noch weit kleineren Theilen behaupten wollte, denn ehe man auf diese letzten Theile käme, so hätte man unmittelbar vorher doch noch solche Theile, welche sich theilen liessen, und folglich eine Ausdehnung hätten, von welchen gleichwohl die Hälfte aller Grösse beraubet wäre. Man giebt zwar vor, dass man die unendliche Theilbarkeit durch unumstössliche Gründe widerleget habe; allein die Schwäche derselben soll in den folgenden Sätzen klar erwiesen werden.

12) *Ungeachtet die Körper in's Unendliche theilbar sind, so ist doch der Satz: dass ein jeglicher Körper aus unendlich vielen Theilen bestehe: schlechterdings falsch, und stehet sogar mit der unendlichen Theilbarkeit in offenbarem Widerspruch.*

Man sieht gemeiniglich diese zwei Sätze:

*Ein jeder Körper ist in's Unendliche theilbar: und*

*Ein jeder Körper ist aus unendlich vielen Theilen zusammengesetzt*

als gleichgültig an, und beweist durch unumstössliche Gründe, dass der letztere unmöglich mit der Wahrheit bestehen könne. Es ist so fern, dass ich diese Gründe wollte zu entkräften suchen, dass ich denselben vielmehr die Kraft eines völligen Beweises beilege, und den letzten Satz gänzlich verwerfe. Ich werde aber zeigen, dass dieser Satz einen offenbaren Widerspruch in sich selbst fasse, und dem ersteren schnurgerade entgegen stehe; daher alle Einwürfe so wider den letzteren gemacht werden, den ersteren ganz und gar nicht treffen, und die unendliche Theilbarkeit der Körper im geringsten nicht bestreiten. Dann wann gesagt wird, dass ein Körper aus unendlich vielen Theilen bestehe, so stellt man sich den Körper als in Theile zertheilt vor, und sagt dass die Anzahl dieser Theile unendlich sei. Nun frage ich, von was für Theilchen die Anzahl unendlich sei? Es giebt allerlei Theile, als halbe, drittel, zehntel, hundertstel und so fort; niemand wird aber sagen, dass die Anzahl der halben Theile, oder der drittel, oder der hundertstel oder tausendsten Theile unendlich sei, sondern man giebt zu erkennen, dass von den letzten Theilen, in welche ein Körper

nach einer ohne Ende fortgesetzten Zergliederung zertheilet wird, die Rede sei: und muss folglich der Satz also ausgelegt werden, dass die Anzahl der letzten Theile eines Körpers unendlich sei. Nach dem ersten Satz aber wird ausdrücklich geläugnet, dass es letzte Theilchen gäbe; denn da behauptet wird, dass so weit auch immer die Theilung fortgesetzet sein mag, dieselbe doch noch immer mit gleicher Möglichkeit fortgesetzet werden könne, und dieses ohne Ende; so werden die letzten Theile als unmöglich ganz und gar ausgeschlossen. Wer demnach sagt, dass ein Körper unendlich theilbar sei, und dabei aus einer unendlichen Anzahl Theile bestehe, der widerspricht sich selbst, und ist kein Wunder, dass eine solche ungereimte Meinung durch die stärksten Beweise umgestossen werden kann.

13) *Ungeachtet ferner ein Körper wegen seiner Theilbarkeit als ein zusammengesetztes Ding anzusehen ist, so ist derselbe doch keineswegs aus einfachen Dingen zusammengesetzt; denn wenn er aus einfachen Dingen zusammengesetzt wäre, so wäre er nicht unendlich theilbar und also nicht ausgedehnt.*

Die Ausdehnung schliesst nehmlich an und für sich selbst schon alle einfachen Theilchen aus, weil nach derselben keine letzten Theilchen zugegeben werden können. Denn man mag einen Körper in so viel Theile theilen als man immer will, so behalten doch diese Theile noch allezeit eine Ausdehnung, kraft welcher dieselben noch immer weiter zertheilet werden können. Demnach hält dieser Satz: *dass wo zusammengesetzte Dinge sind, daselbst auch einfache sein müssen*, keineswegs Stich; indem alle Theile, welche man sich in einem Körper vorstellen kann, noch ausgedehnt und folglich zusammengesetzt sind. Die Vertheidiger der einfachen Dinge sagen zwar, dass die einfachen Dinge, welche einen Körper darstellen, sich in einer Entfernung von einander befinden und wegen dieser ihrer Entfernung eine Ausdehnung vorstellen. Allein wenn alle diese einfachen Dinge von einander entfernt wären, und sich also nichts zwischen denselben befände, so würde auch nicht im Wege sein, dass man dieselben so nah zusammentreiben könnte, bis keine Entfernung mehr zwischen denselben vorhanden wäre, und in diesem Falle, da alle Theile keine Ausdehnung haben, so würden sie auch in einem Punkte zusammengebracht werden können, welches doch sowohl wider die Erfahrung als Vernunft streitet. Man giebt zwar gern zu, dass sich in einem jeglichen Körper eine grosse Menge solcher Räumchen befinde, welche keine zum Körper eigentlich gehörende Materie enthalten; allein ausser dem, dass hier noch kein Unterschied zwischen der eigenthümlichen und fremden Materie eines Körpers gemacht wird, in der unter dem Namen eines Körpers alles dasjenige mit begriffen wird, was in dem Umfang seiner Ausdehnung enthalten ist: so muss doch auch in diesem Unterschied die eigenthümliche Materie einen gewissen Theil der ganzen Ausdehnung anfüllen, und folglich gilt auch von diesem Theil, dass derselbe ins unendliche theilbar sein müsse. Wofern man also die Körper nicht völlig in nichts verwandeln und zu einem blossen leeren Raume machen will, so kann man ihnen die Theilbarkeit in's Unendliche nicht absprechen. Aber auch allem diesen ungeachtet, weil wir unter einem Körper hauptsächlich seine Ausdehnung verstehen, so kann kein Zweifel übrig bleiben, dass nicht diese Ausdehnung in's Unendliche theilbar sein sollte.

14) *Wann demnach von den Theilen eines Körpers die Rede ist, so ist diese Redensart unbestimmt, wofern man nicht hinzusetzt, was für, oder die wievielsten Theile des Körpers verstanden werden.*

Dass man die letzten Theile, weil keine vorhanden sind, nicht verstehen könne, ist schon gewiesen worden, setzt man aber hinzu die wievielsten Theile, als die halben, oder dritten oder zehnten oder hundertsten man meinet, so hat die Sache keine Schwierigkeit, und kann daher kein Einwurf gegen die unendliche Theilbarkeit der Körper hergenommen werden. Man pflegt aber dagegen einzuwenden, dass wenn die Körper aus keiner bestimmten Anzahl einfacher Theile bestünden, Gott selbst dieselben nicht vollkommen erkennen könnte, welches höchst ungereimt wäre. Dieser Einwurf scheint zwar etwas verlegen zu sein, indem man behaupten will, Gott könne ausgedehnte und folglich zusammengesetzte Sachen nicht anders als aus ihren letzten Theilen erkennen: allein wer wird läugnen, dass Gott nicht alle wirkliche Theile, als die halben, drittel und so fort vollkommen erkennen sollte? Von Theilen aber die nicht vorhanden sind, als die letzten, kann auch nicht einmal bei Gott eine Erkenntniss gesucht werden. Diese Einwürfe aber gegen die unendliche Theilbarkeit sind von geringem Gewicht, und da wir alle diejenigen, welche gegen die unendliche Anzahl der Theile gemacht werden, aus dem Wege geräumet, so bleibt wohl die unendliche Theilbarkeit ausser allem Zweifel gesetzt.

15) *Ein jeglicher Körper hat aber nicht nur eine Ausdehnung, sondern ist immer nach den sogenannten drei Ausmessungen in die Länge, Breite und Tiefe ausgedehnt, und muss folglich eine nach allen Gegenden bestimmte Figur haben.*

Was nur nach einer Gegend ausgedehnt ist, wird eine Linie und was nach zwei Gegenden ausgedehnt ist, eine Oberfläche genannt; beide sind ihrer Art auch Ausdehnungen, aber doch keine Körper, und wir haben also hier schon ein Zeugniss, dass nicht alle Dinge, so ausgedehnt sind, für Körper gehalten werden können. Ein Körper muss eine dreifache Ausdehnung haben, in die Länge, Breite und Tiefe oder Dicke. Mehr Arten von Ausdehnungen sind auch nicht möglich, und daher müssen sich in einem Körper alle möglichen Ausdehnungen finden, das ist, er muss nach allen Gegenden ausgedehnt sein. Ein Körper ist also ringsherum eingeschränkt, und der äussere Umfang der Ausdehnung wird seine Figur genannt, wovon unendlich viel verschiedene Gattungen möglich sind, wie in der Geometrie gelehret wird. Diese Figur ist bei allem einzelnen Körper in allen Stücken bestimmt, wenn aber von dem Körper insgemein die Rede ist, so kann ihm nicht mehr als die Eigenschaft, eine Figur anzunehmen, zugeschrieben werden: man muss nehmlich diese Eigenschaft selbst als unbestimmt ansehen. Von den Theilen eines Körpers aber überhaupt, kann man nicht sagen, dass sie eine bestimmte Figur haben, auch nicht einmal wenn gesagt wird der wievielte Theil es ist: denn man kann aus einem gegebenen Körper auf unendlich vielerlei Arten ein Stück ausschneiden, welches die Hälfte des ganzen beträgt, daher seine Figur auch unendlich verschieden sein kann. Demnach ist die Frage, wie die Figur der Theile eines Körpers beschaffen sei? ganz ungereimt, und kann nur bei denen Statt finden, welche in den Kör-

pern letzte Theile behaupten, bei welchen jedoch, von ihnen alle Grösse abgesprochen, der Begriff von der Figur völlig wegfällt. Dieses scheint hinlänglich zu sein, um uns einen vollständigen Begriff von der Ausdehnung und den damit verknüpften Eigenschaften zu geben, daher wir zu Untersuchung anderer allgemeinen Eigenschaften der Körper fortschreiten wollen.

---

## III. Capitel.

### Von der Beweglichkeit als der zweiten allgemeinen Eigenschaft der Körper.

16) *Kein Körper ist dergestalt an den Ort, wo er sich befindet, gebunden, dass es nicht möglich sein sollte denselben an einen jeglichen anderen Ort zu versetzen. Diese Möglichkeit einen anderen Ort einzunehmen, wird die Beweglichkeit genannt, welche folglich den Körpern als die zweite allgemeine Eigenschaft zugeschrieben werden muss.*

Was wir uns auch für einen Begriff von dem Raume machen, so können wir uns keinen Körper anders vorstellen, als dass er einen gewissen Theil des Raumes einnimmt und gleichsam ausfüllt. Dieser von einem Körper eingenommene Theil des Raumes, welcher der Ausdehnung nach dem Körper vollkommen gleich sein muss, wird sein Ort genannt; ob nun wohl ein Körper zugleich an nicht mehr als einem Orte sein kann, so ist er doch nicht dergestalt daran verknüpfet, dass er nicht zu einer anderen Zeit sich an einem anderen Orte sollte befinden können; denn weder in dem Raume noch dem Körper selbst ist nichts, wodurch dieser Möglichkeit widersprochen würde. Diese Möglichkeit einen Körper von einem Orte zu einem anderen zu versetzen, ist unserem Begriff von den Körpern so eigen, dass man sich keinen Körper vorstellen kann, wo dieselbe nicht Platz haben sollte. Man kann sich wohl einen Körper immer an ebendemselben Orte vorstellen; allein hier ist nicht die Frage, ob ein Körper immer wirklich an einem Orte verbleibe oder nicht? sondern bloss ob es nicht möglich wäre, dass derselbe an einen anderen Ort versetzet würde. In dieser blossen Möglichkeit besteht nun die Beweglichkeit, welche mit allem Rechte von allen Naturlehrern unter die allgemeinen Eigenschaften der Körper gezählet wird. Es ist also möglich dass ein Körper welcher jetzt hier ist, sich nach einiger Zeit an einem jeglichen anderen Ort befinden könnte: und weil dieses ohne Bewegung nicht geschehen kann, so wird diese Eigenschaft die Beweglichkeit oder Möglichkeit sich zu bewegen genannt.

17) *So lange sich ein Körper an ebendemselben Orte befindet, so sagt man derselbe sei in Ruh; rückt er aber von einem Orte zu einem anderen fort, so wird ihm eine Bewegung zugeeignet. Also besteht die Ruhe in der Verbleibung eines Körpers an ebendemselben Orte die Bewegung aber in der Fortrückung von einem Orte zu dem andern.*

Ein Körper kann sich nach seinem äusserlichen Umfange an einerlei Ort befinden, wenn gleich in seinen inwendigen Theilen eine Bewegung vorgeht; also kann von einer Uhr, ihrem äusserlichen

Umfange nach gesagt werden, dass sie in Ruhe sei, ungeachtet sich das inwendige Räderwerk in einer beständigen Bewegung befindet; daher muss der Zustand eines ganzen Körpers von dem Zustande seiner Theile wohl unterschieden werden: wenn inzwischen alle Theile in einer vollkommenen Ruhe befindlich sind, so ist es gewiss, dass auch das Ganze in Ruhe sein muss, gleichwie hinwiederum das Ganze sich nicht bewegen kann, ohne dass zugleich seine Theile mit beweget werden. In diesen allgemeinen Untersuchungen wird aber nur von der Ruhe und Bewegung des Ganzen hauptsächlich gehandelt werden, und alles was da vorgefunden werden wird, muss auch hernach von der Ruhe und Bewegung eines jeglichen Theiles insbesondere gelten. Hier wird also bloss auf das Verhältniss in welchem der äussere Umfang eines Körpers mit dem Raume stehet in Betrachtung gezogen und wenn dieses Verhältniss unverändert bleibt, so befindet sich der Körper in Ruhe, wird aber dieses Verhältniss verändert, so ist der Körper in Bewegung.

18) *Insofern also durch die Bewegung bloss allein das Verhältniss, in welchem der äussere Umfang eines Körpers mit dem Raume steht, verändert wird, so leidet daher der innere Zustand eines Körpers keine Veränderung, und demnach kann die Bewegung weder unter die Eigenschaften noch Zufälligkeiten eines Körpers gerechnet werden.*

Es ist unter den Schullehrern stark gestritten worden, ob die Bewegung unter die Eigenschaften (*proprietates*), oder Zufälligkeiten (*accidentiae*) eines Körpers gezählt werden müsse oder nicht? Eine Eigenschaft kann dieselbe nicht sein, weil die Eigenschaften eines Dinges unveränderlich sind; und da die Zufälligkeiten also erklärt werden, dass alle Veränderungen eines Dinges in den Zufälligkeiten vorgehen, dergestalt, dass wenn diese verändert werden, das Ding selbst eine Veränderung leide: so ist es klar, dass man die Bewegung auch nicht unter die Zufälligkeiten eines Körpers zählen könne. Man muss aber zweierlei Zufälligkeiten zugeben: davon die einen das Ding an und für sich selbst angehen, die anderen aber nur in seinem Verhältnisse mit anderen Dingen bestehen; und alsdann bleibt kein Zweifel übrig, dass nicht die Bewegung unter diese letztere Art von Zufälligkeiten zu rechnen sei. Solchergestalt fallen alle Schwierigkeiten weg, welche sowohl gegen die Bewegung selbst, als die Mittheilung derselben vorgebracht zu werden pflegen. Dieses ist aber nur in Ansehung der Bewegung des ganzen Körpers, insofern sein äusserer Umfang mit dem Raume in Vergleichung gezogen wird; denn wenn die inneren Theile unter sich in Bewegung gesetzet werden, so wird dadurch nicht nur der wahre Zustand des Körpers verändert, sondern es wird auch unten gezeigt werden, dass sich in einem Körper keine andere Veränderungen als aus eben diesem Grunde ereignen können. Die Bewegung des ganzen kann zwar öfters auch etwas dazu beitragen, allein dieses geschieht nicht wegen der Bewegung an und für sich selbst, sondern wegen besonderer Folgen, so daraus nothwendig fliessen, wie aus den nachfolgenden Untersuchungen deutlicher erhellen wird.

19) *Wenn sich ein Körper bewegt, so rücket er immer von einem Orte in einen anderen, so nächst daran liegt, fort, und befindet sich also alle Augenblicke an einem anderen Orte, ohne sich an irgend einem nur im geringsten aufzuhalten.*

Indem sich ein Körper bewegt, so lässt sich nicht füglich sagen, dass er sich inzwischen

jemals an einem gewissen Orte befinde, indem diese Redensart einen Aufenthalt anzudeuten scheint. Das Wort durchgehen würde sich besser schicken, weil die Bewegung ein beständiger Durchgang von einem Orte zu dem anderen ist. Eine unrichtige Erklärung dergleichen Redensarten, kann leicht in grobe Irrthümer verleiten; daher meinen einige, dass die Bewegung nicht anders als eine Folge vieler kleinen Verbreitungen an Mittelorten anzusehen sei. Mann nenne den Ort, von welchem der Körper ausgeht $A$, und den an welchen er nach einiger Zeit hinkommt: $Z$; so stellen sie sich eine gewisse Anzahl Mittelorte vor, als $B$, $C$, $D$, $E$ etc. und sagen dass der Körper gleichsam hüpfend von $A$ zu $B$ springe, und in $B$ sich ein wenig verbreite und gleichsam ausruhe: gleichergestalt springe er ferner von $B$ nach $C$, von da nach $D$ und so weiter. Eine solche hüpfende und durch kleine Verbreitungen unterbrochene Bewegung lässt sich zwar wohl vorstellen, und möchte in gewissen Fällen auch möglich sein; allein hier würde doch der Sprung von $A$ zu $B$ eine wahre Bewegung bleiben, dergleichen wir hier betrachten, und durch keine fernere kleine Verweilung unterbrochen sein. Wollten sie aber sagen dass zwischen $A$ und $B$ wieder einige Ruhplätze kämen, und zwischen diesen wiederum andere und so fort ohne Ende, so ist klar, dass der Körper nimmer von seiner Stelle kommen würde, indem er sich auf einem jeglichen Ruheplatz etwas verweilen müsste; oder man müsste sagen, dass eine jede Verweilung unendlich kurz dauerte, das ist, von gar keiner Dauer wäre, wodurch dieser sonderbare Begriff von selbst zernichtet würde. Geht aber der Körper von $A$ bis nach $Z$ fort ohne unterdessen irgendwo auszuruhen: so durchläuft er alle Mittelorte $B$, $C$, $D$ etc. und es würde ungereimt sein, wenn man alle mögliche Mittelorte zählen wollte. Denn kein Ort kann dem andern so nahe sein, dass zwischen denselben nicht noch ein Mittelort, und das in's Unendliche, vorhanden sein sollte, welche sogar alle von dem Körper wirklich durchlaufen werden. Hierauf gründet sich der Begriff des Stetigen, welcher sowohl der Ausdehnung als Bewegung wesentlich zukommt, worin sich zwar Theile begreifen lassen, in der That aber nicht als von einander abgesondert angesehen werden können. In dem Stetigen hängt gleichsam alles an einander und findet darin keine wirkliche Abtheilung, wonach man die Theile zählen könnte, statt.

20) *Wenn sich ein Körper bewegt, so beschreiben alle Punkte, welche man sich in demselben vorstellen kann, gewisse Linien, welche man den von einem jeglichen Punkte beschriebenen Weg zu nennen pflegt.*

So lang man sich einen ganzen Körper zugleich vorstellt, so ist es schwer sich einen richtige Begriff von seiner Bewegung zu machen, indem in den verschiedenen Theilen, welche sich in einem jeglichen Körper begreifen lassen, ganz verschiedene Bewegungen stattfinden können. Daher pfleg man um unserm Verstande zu Hülfe zu kommen, alle Punkte welche man sich in einem Körpe vorstellen kann, besonders zu betrachten; und da ein jeglicher Punkt mit dem Körper fortgehe so hat man nur nöthig den Weg, das ist die Linie, in der sich ein jeder bewegt, in Erwägung z ziehen. Man stellt sich hier nämlich einen Punkt, wie in der Geometrie, ohne Theile vor, und d also keine Verschiedenheit darin Platz findet, so kann die Bewegung desselben aus dem durchlau fenen Wege am füglichsten erkannt werden. Weiss man aber für einen jeglichen Punkt des Körpe den Weg, so derselbe während der Bewegung beschreibet, anzuzeigen, so hat man einen zureicher

den Begriff von der Bewegung des Körpers selbst. Es scheint zwar, dass wegen der Unendlichkeit der Punkte, so man sich an einem Körper vorstellen kann, diese Art zur Erkenntniss seiner Bewegung zu gelangen viel zu weitläuftig und zu unmöglich sein müsste. Allein ausser dem, dass es bei vielen Körpern genug ist, wenn man die Bewegung nur von einigen Punkten erforschet hat, indem die Bewegung aller anderen daraus von selbsten bestimmt wird, so hat man in der Auflösungskunst solche sichere Hülfsmittel, durch welche auch alle Schwierigkeiten, so sich wegen der Unendlichkeit der zu betrachtenden Stücke ereignen, überwunden werden können.

21) *Zu einer vollständigen Erkenntniss aber der Bewegung eines Punktes wird nicht nur erfordert, dass man den von demselben beschriebenen Weg anzuzeigen wisse, sondern man muss in diesem Wege für einen jeglichen Zeitpunkt die Stelle bestimmen können, wo sich der bewegte Punkt damals befunden.*

Hier ist also bloss von der Bewegung eines Punktes die Rede, nicht als wenn wir die Punkte als Theile eines Körpers ansehen; sondern weil sich die Bewegung eines Körpers, durch die Bewegung der darinn betrachteten Punkte am füglichsten begreifen lässt. Wenn man aber auf einen jeglichen Zeitpunkt den Ort bestimmen kann, wo sich der bewegte Punkt alsdann befindet, oder durch welchen derselbe vielmehr durchstreichet, so hat man eine vollständige Erkenntniss von desselben Bewegung, und hierin ist sogar auch schon der beschriebene Weg selbst mit begriffen. Denn wenn alle Punkte in dem Raume bestimmt werden, durch welchen der bewegte Punkt zu einer jeglichen Zeit durchgegangen; so wird durch dieselben zugleich der ganze beschriebene Weg bestimmet. Wenn man also ferner auf diese Art die Bewegung aller in dem Körper eingebildeten Punkte erkannt hat, so kann man sich einer vollständigen Erkenntniss der Körper selbst rühmen. Denn es lässt sich nichts in der Bewegung der Körper begreifen, welches nicht aus dieser Erkenntniss allein völlig erörtert werden könnte. Viele stellen sich die Lehre von der Bewegung als höchst dunkel und geheimnissvoll vor, welches daher rühret, dass ihnen die Art alle Umstände, so dabei vorkommen, deutlich zu entwickeln und auseinander zu setzen, verborgen gewesen. Die Wissenschaft der Bewegung ist aber heutzutage in ein solches Licht gesetzet worden, dass alle Schwierigkeiten welche darin noch vorkommen, nicht die Wissenschaft selbst, sondern einzig und allein der Auflösungskunst zugeschrieben werden müssen: an der Erweiterung dieser Kunst ist also hauptsächlich alles gelegen.

22) *Eine gradlinichte und gleichförmige Bewegung ist, wenn der Punkt sich erstlich nach einer graden Linie beweget, und hernach in gleichen Zeiten gleiche Theile dieser Linie durchläuft: woraus zugleich verstanden wird, was eine krummlinichte und ungleichförmige Bewegung sei.*

Diese zwei Umstände, dass der Punkt erstlich in einer graden Linie fortgehet und hernach in gleichen Zeiten gleiche Wege durchläuft, stellen ohne Zweifel diejenige Art der Bewegung vor, welche sich am leichtesten begreiffen lässt, und von welcher man sich vor allen Dingen einen deutlichen Begriff machen muss. Dieser ist um so viel nöthiger, weil nach demselben auch die krumm-

linichten Bewegungen beurtheilt werden müssen. Die grade Linie und die Beschreibung gleicher Wege in gleichen Zeiten machen also diesen Hauptfall der Bewegung aus, denn man sieht leicht, dass sich ein Punkt nach einer geraden Linie bewegen könnte, ohne in gleichen Zeiten gleiche Wege durchzulaufen; oder ein Punkt könnte in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen, ohne eine gerade Linie zu beschreiben. Wenn aber hier von gleichen Wegen, so in gleichen Zeiten durchlaufen werden die Rede ist, so muss solches von allen gleichen, auch den kleinsten Theilen der Zeit, verstanden werden: es ist nämlich nicht genug dass alle Stunden gleiche Wege durchlaufen werden, sondern es müssen auch die Wege, so alle Minuten durchlaufen werden, unter sich gleich sein, wie auch diejenigen so alle Secunden, ja Tertien und sofort durchlaufen werden. Dieser Umstand kann am bequemsten nach der Lehre der Verhältnisse also ausgesprochen werden, dass die Wege sich immer wie die Zeiten verhalten müssen. Wenn demnach durch eine solche Bewegung in einer Stunde 60 Ruthen, zurück gelegt werden, so wird in einer jeglichen Minute eine Ruthe, in einer jeglichen Secunde der sechszigste Theil einer Ruthe und so weiter durchlaufen werden: und hierauf beruhet der Begriff von einer gleichförmigen Bewegung.

23) *Bei einer gradlinichten und gleichförmigen Bewegung wird die gerade Linie die Richtung der Bewegung genannt; die Geschwindigkeit aber ist das Verhältniss des Weges zu der Zeit, in welcher derselbe durchlaufen wird.*

Wenn man den Weg weiss, welcher bei einer solchen Bewegung in einer gewissen Zeit beschrieben wird, so kann man daraus auch den Weg finden, welcher in einer jeglichen anderen Zeit beschrieben wird: denn um wieviel grösser oder kleiner die Zeit ist, um so viel grösser oder kleiner wird auch der Weg sein, oder der Weg wird zu der Zeit immer einerlei Verhältniss haben. Von einer solchen Bewegung wird nun gesagt, dass sie immer mit einerlei Geschwindigkeit geschehe. Wenn wir uns aber zwei Punkte vorstellen, deren jeder sich gleichförmig bewegt, der erste aber alle Secunden 2 Schuh, hingegen der andere alle Secunden 4 Schuh beschreibet: so sagen wir dass die Geschwindigkeit des letzteren zweimal so gross sei als die des ersteren; und sollte der letztere alle Secunden 6 oder 8 Schuh durchlaufen, so würde seine Geschwindigkeit 3 mal, oder 4 mal so gross sein. Je ein grösseres Verhältniss folglich der Weg hat zu der Zeit, in welcher er durchlaufen wird, um so viel grösser wird auch die Geschwindigkeit geschätzet; jenes Verhältniss wird aber gefunden, wenn man den Weg durch die Zeit theilet. Also wenn ein Punkt in der Zeit $T$ den Weg $S$, ein anderer aber in der Zeit $t$ den Weg $s$ durchläuft, so ist die Geschwindigkeit jenes, zur Geschwindigkeit dieses Punktes wie $\frac{S}{T}$ zu $\frac{s}{t}$. Nimmt man für die Zeit und den Weg gewisse und bestimmte Maasse an, so kann man sagen dass die Geschwindigkeit gleich sei dem Weg getheilt durch die Zeit: diesemnach wird der Weg gleich der Geschwindigkeit mit der Zeit multiplicirt, und die Zeit gleich dem Weg durch die Geschwindigkeit getheilt; welche Bestimmungen man sich wohl bekannt zu machen hat. Was ferner die Richtung anlangt, so zeigt bei einer gradlinichten Bewegung die grade Linie an, nach was für einer Gegend der bewegte Punkt läuft, und weil sie grad ist, so erkennet man, dass die Bewegung immer nach einerlei Gegend gerichtet ist; daher wird auch die grade Linie die Richtung der Bewegung genannt.

24) *Ist die Bewegung aber krummlinicht und ungleichförmig, so kann man sich für einen jeglichen Zeitpunkt eine gradlinichte und gleichförmige Bewegung vorstellen, welche in diesem Augenblicke mit derselben völlig übereinkommt; und sowohl die Richtung als die Geschwindigkeit dieser letzten Bewegung wird auch für diesen Augenblick der ersteren Bewegung zugeschrieben.*

Man pflegt zu sagen eine jegliche Bewegung könne für einen einzigen Augenblick als gradinicht und gleichförmig angesehen werden, eben wie in der Geometrie die unendlich kleinen Theilchen einer jeglichen krummen Linie mit Recht für grad gehalten werden. Weil aber eine unrichtige Erklärung des unendlich Kleinen leicht Schwierigkeiten machen möchte, so habe ich die Sache auf eine andere Art vorgestellt, welches aber auf eines hinausläuft. Hieraus begreift man nun leicht, dass wenn sich ein Punkt in einer krummen Linie bewegt, die berührenden graden Linien derselben an einem jeden Ort die Richtung der Bewegung anzeigen: hernach wird durch die Differential-Rechnung die Geschwindigkeit gefunden, wenn man das Differentiale des Weges durch das Differentiale der Zeit theilet; eben als wenn die Bewegung durch einen unendlich kleinen Weg gleichförmig wäre. Es kann also sein dass bei einer Bewegung sowohl die Richtung als die Geschwindigkeit alle Augenblick verändert werde; man sieht aber deutlich dass die ganze Erkenntniss einer krummlinichten und ungleichförmigen Bewegung darauf beruhe, dass man alle Augenblicke die Richtung und Geschwindigkeit, so dem bewegten Punkte zukommt, anzeigen könne, und hierauf ist auch die ganze Lehre von der Bewegung der Körper gerichtet.

25) *Die Beweglichkeit unterscheidet die Körper von dem Raume, als welchem diese Eigenschaft keineswegs kann zugeschrieben werden. Doch kann das Wesen der Körper nicht in der blossen Beweglichkeit gesetzet werden.*

Die Körper haben die Ausdehnung mit dem Raume gemein: weil immer der Ort, welchen ein Körper einnimmt, mit demselben eine gleiche Ausdehnung hat: da sich aber an dem Raume selbst keine Grenzen begreifen lassen, und folglich seine Ausdehnung unendlich ist, so kommt die Ausdehnung dem Raume auf eine andere Art zu, als dem Körper. Ein Ort aber, wie wir uns denselben vorstellen, kann eigentlich nicht anders als ein Theil des unendlichen Raumes angesehen werden, als insofern er von einem Körper eingenommen wird. Ohne die Körper würde sich in den verschiedenen Orten kein Unterschied befinden, aus welchem man dieselben von einander unterscheiden könnte: viel weniger wäre es möglich dass ein Ort auf eine andere Stelle versetzet würde. Daher kann die Beweglichkeit weder dem unmesslichen Raume selbst, noch den Theilen, welche wir uns nur in Ansehung der Körper in demselben vorstellen, zugeschrieben werden. Von einem leeren Raume, wie sich denselben einige Weltweise zwischen den Körpern vorstellen, kann man auch nicht sagen, dass er beweglich sei: denn, wenn zum Exempel in meinem Zimmer ein leerer Raum wäre, derselbe aber nach einiger Zeit ausgefüllt würde, zugleich aber in einem anderen Zimmer ein leerer Raum entstände, so könnte man nicht sagen, dass der leere Raum, so in meinem Zimmer gewesen, in das andere Zimmer wäre übergetragen worden. Denn dieser hätte entstehen

können, ohne dass jener wäre ausgefüllt worden. Ich rede aber hier nach dem gemeinen Begriff vom Raume ohne Absicht auf die Frage, ob der Raum für etwas Wirkliches zu halten sei oder nicht? Wir müssen uns erst um einen vollständigen Begriff von den Körpern bewerben, ehe wir uns an diese Frage wagen dürfen. Endlich kann man auch nicht sagen, dass das Wesen der Körper in der blossen Beweglichkeit bestehe. Diese Eigenschaft schliesst zwar noch andere Eigenschaften in sich, welche das Wesen der Körper noch mehr zu erschöpfen scheinen; doch sind auch diese noch nicht hinlänglich, wie wir hernach sehen werden, um ein ausgedehntes Ding zu einem Körper zu machen. Ein Ding kann nämlich ausgedehnt und beweglich sein, und deswegen doch noch kein Körper.

---

## IV. Capitel.

### Von der Standhaftigkeit als der dritten allgemeinen Eigenschaft der Körper.

26) *Ein Körper, der einmal in Ruhe ist, wird immer in Ruhe verbleiben, wofern er nicht von einer äusseren Ursache in diesem Zustande gestöret und in Bewegung gesetzet wird.*

Wenn sich ein Körper in Ruhe befindet, und von aussen nichts vorhanden ist, welches auf denselben wirken könnte, so lässt sich nicht begreifen, wie derselbe sollte können in Bewegung gesetzet werden. Denn sollte er anfangen sich zu bewegen, so müsste solches nach einer gewissen Gegend geschehen; es ist aber kein Grund da, warum er sich viel mehr nach dieser, als nach einer anderen Gegend bewegen sollte: und aus dem Mangel eines solchen hinreichenden Grundes können wir sicher schliessen, dass ein Körper, welcher einmal in Ruhe ist, immer fort in diesem Zustand verbleiben müsse, wofern nämlich keine Ursache von aussen dazu kommt, welche vermögend ist, den Körper in Bewegung zu setzen. Dieser Grundsatz lehret uns also dass in dem Körper selbst keine Ursache vorhanden ist, denselben, wenn er einmal in Ruhe ist, in Bewegung zu setzen; und dadurch werden alle diejenigen eingebildeten Kräfte, welche von einigen Naturlehrern den Körpern zugeschrieben werden, wodurch sie sich bemühen sollen in Bewegung zu gerâthen, aus dem Wege geräumet. Wenn demnach ein Körper, welcher bisher geruhet, anfängt sich zu bewegen, so muss diese Veränderung einer ausser dem Körper befindlichen Ursache zugeschrieben werden. Die Eigenschaft nun, wodurch ein ruhender Körper in dem Ruhestand verharret, ist der Natur des Körpers gemäss, und muss in dem Wesen der Körper ihren Grund haben: insofern diese Eigenschaft den ruhenden Körpern zukommt, so begreife ich dieselbe unter dem Namen der Standhaftigkeit, also dass die Standhaftigkeit eines ruhenden Körpers darin besteht, dass derselbe immer fort in Ruhe verbleiben muss; so lang nämlich von aussen sich keine Ursachen ereignen, welche vermögend sind, den Körper in seiner Ruhe zu stören und in Bewegung zu setzen.

27) *Der Ruhestand eines Körpers kann nicht also erkläret werden, dass demselben eine Bemühung sich nach allen Gegenden zugleich zu bewegen zugeschrieben wird, und dass wegen der Gleichheit aller dieser Bemühungen der Körper dennoch in Ruhe verbleibe.*

Man läugnet nicht, dass ein Körper, welcher von aussen nach allen Gegenden gleich stark angetrieben wird, in Ruhe verbleibe, weil alle diese Triebe einander im Gleichgewichte halten, und die Wirkung eines jeden durch den Entgegenstehenden zernichtet wird. Wie denn ein in das Wasser versenkter Körper in Ruhe bleibt, ungeachtet er von dem Druck des Wassers nach allen möglichen Gegenden angetrieben wird. Dass sich aber in einem Körper solche innerliche Triebe befinden sollen, von welchen er nach allen Gegenden gleich stark gedränget wird, lässt sich auf keine Weise behaupten; denn wenn ein jeglicher Theil des Körpers gleiche Triebe hätte, sich sowohl vorwärts als rückwärts zu bewegen, so zernichten diese Triebe einander vollkommen, und es ist eben so viel, als wenn diese Triebe garnicht vorhanden wären. Einige Naturforscher sind aber deswegen auf solche Triebe verfallen, weil sie nicht begreifen konnten, wie bei dem Stoss der Körper einer auf den andern wirken und ihn in Bewegung setzen könnte: sie vermeinten demnach die Sache also begreiflich zu machen, dass sie sagten, es werde durch den Stoss der innerliche Trieb nach einer Gegend aufgehoben, und dadurch gewinne der entgegengesetzte Trieb die Oberhand, durch welchen folglich der Körper wirklich in Bewegung gebracht werde. Allein diese Leute scheinen nicht bedacht zu haben, dass einerlei Kraft erfordert wird, einen Trieb, welchen ein Körper hat sich nach einer gewissen Gegend zu bewegen, aufzuheben, als dem Körper selbst eben diejenige Bewegung einzudrücken, welche von einem gleichen entgegengesetzten Triebe entstehen müsste: also das auf diese Art die Erklärung der durch den Stoss mitgetheilten Bewegung im geringsten nicht erleichtert wird. Solche eingebildete Kräfte werden demnach billig verworfen, nachdem ausgemacht worden, dass ein ruhender Körper vermöge seiner Natur immerfort in Ruhe verbleiben muss. Dagegen müssen aber nicht mit einer Federkraft begabte Körper angeführt werden, in welchen allerdings ein Trieb zu einer Bewegung vorhanden ist: derselbe aber rührt von dem ganz besonderen Bau dieser Körper her, dessen Erklärung schon eine weit tiefere Einsicht in die Lehre von der Bewegung erfordert. Hier ist aber allein die Rede von den allgemeinen Eigenschaften aller Körper, mit welchen nothwendig der Anfang gemacht werden muss.

28) *Ein Körper welcher sich in Bewegung befindet, muss seine Bewegung vermöge seiner Natur immer nach ebenderselben Gegend fortsetzen, das ist, er muss sich beständig nach einer graden Linie fortbewegen, so lange diese seine Richtung nicht durch eine äusserliche Ursache geändert wird.*

Hier ist die Frage noch nicht, ob die Körper die Bewegung fortsetzen, oder plötzlich in Ruhe gestellt werden? Wollte man auch das letztere sagen, so würde man unserem Satze nicht widersprechen; denn da in der Ruhe keine Richtung ferner Platz findet, so könnte man auch nicht einwenden, dass die Richtung wäre verändert worden. Das erstere soll aber sogleich erwiesen werden, und da kommt es in Ansehung der Richtung auf diese Frage an, ob ein Körper, welcher sich jetzt in Bewegung befindet, seine Bewegung nach einer graden oder krummen Linie fortsetzen

werde. Wir betrachten hier aber den Körper als einen Punkt: denn da die Bewegung eines Körpers nicht anders als aus der Bewegung aller in demselben begreiflichen Punkte erkannt werden kann, so müssen wir auch unsere Untersuchung von diesen anfangen, welche durch ihre Bewegung eine Linie, so entweder grad oder krumm ist beschreiben. Weil wir nun alle äusseren Umstände beiseit setzen, so sieht man sogleich, dass in dem Körper selbst kein Grund vorhanden sein könne, warum derselbe von seiner Richtung viel mehr nach dieser als irgend einer anderen Gegend ausweichen sollte: daher muss derselbe vermöge seiner Natur die Bewegung nach einer graden Linie fortsetzen. Wo wir also bemerken, dass ein Körper seine Richtung verändert und sich nach einer krummen Linie beweget, da können wir sicher schliessen, dass eine äusserliche Ursache vorhanden sein müsse, welcher diese Veränderung in der Richtung zuzuschreiben sei. Ein Körper behält demnach vermöge seiner Natur in seiner Bewegung beständig einerlei Richtung; und diese Beibehaltung ebenderselben Richtung ist eine zweite Folge derjenigen Eigenschaft, welche wir hier durch den Namen der Standhaftigkeit andeuten. Es wird aber bald gezeigt werden, dass wir diese Benennung mit Recht, anstatt des sonst gewöhnlichen Namens der Trägheit gebrauchen, weil dieser zu unrichtigen Begriffen Anlass gegeben.

29) *Ein Körper, welcher sich in Bewegung befindet, muss dieselbe nicht nur vermöge seiner Natur, nach einer graden Linie fortsetzen, sondern auch beständig einerlei Geschwindigkeit behalten, und also in gleichen Zeiten, immer gleiche Wege durchlaufen: wofern diese Gleichförmigkeit nicht durch äussere Ursachen gestöret wird.*

Hier ist nur die Rede, was in einem bewegten Körper kraft seiner eigenen Natur vorgehen muss, und werden also alle äusserliche Ursachen beiseit gesetzt. Die Natur des Körpers muss also eine gewisse Bestimmung in sich schliessen, nach welcher die Fortsetzung der Bewegung sich richtet; oder in derselben muss der Grund vorhanden sein, warum die Bewegung viel mehr so, als anders fortgesetzet wird. Die Bewegung wird aber durch die Richtung und Geschwindigkeit bestimmet und bleibt also unverändert, so lange die Richtung und Geschwindigkeit nicht verändert werden. Da nun erwiesen worden, dass ein bewegter Körper vermöge seiner Natur allezeit einerlei Richtung behalten muss, so ist noch übrig zu entscheiden, was es für eine Bewandniss mit der Geschwindigkeit habe; ob dieselbe verändert werde oder einerlei bleibe. Es lässt sich aber in dem Körper selbst nichts begreifen, weswegen seine Geschwindigkeit einer Veränderung unterworfen sein sollte: und weil kein Grund zu einer solchen Veränderung vorhanden, so muss man schliessen, dass ein bewegter Körper vermöge seiner Natur auch beständig einerlei Geschwindigkeit behalte. So fest aber dieser Schluss in der Vernunft gegründet ist, so scheinet demselben die Erfahrung zu widersprechen, da wir wahrnehmen dass alle von uns hervorgebrachten Bewegungen, nach und nach abnehmen und endlich gar aufhören. Allein die Ursache hiervon ist auch offenbar in einem ausserordentlichen Widerstand von Seiten der Luft oder des Reibens an einen anderen Körper gelegen, woher wir dann sicher schliessen können, dass wenn kein solcher Widerstand vorhanden wäre, die Bewegung auch keinen Abgang an der Geschwindigkeit leiden würde. Die Erhaltung ebenderselben Geschwindigkeit ist demnach einem Körper ebenso natürlich als die Erhaltung der Richtung, und w

n der einen oder der anderen eine Veränderung vorgeht, da muss die Ursache davon ausser dem bewegten Körper gesucht werden. Folglich kommt allen Körpern diese Eigenschaft zu, dass sie sich bestreben ihre Bewegung nach einerlei Richtung mit einerlei Geschwindigkeit fortzusetzen.

30) *Man sagt ein Körper verbleibe in ebendemselben Zustande, wenn derselbe entweder in Ruhe verbleibt, oder seine Bewegung nach ebenderselben Richtung mit einerlei Geschwindigkeit fortsetzet.*

Man kann sich in einem Körper einen doppelten Zustand vorstellen, den äusserlichen und den innerlichen: Dieser bestehet in der Art der Theile, aus welchen der Körper bestehet und ihrer Zusammensetzung selbst; der äusserliche Zustand aber, von welchem allhier allein die Rede ist, besteht in den Verhältnissen des Körpers mit dem Raume. So lange sich nun ein Körper in Ruhe befindet, so bleibt er an ebendemselben Ort, und ist also kein Zweifel dass er nicht in ebendemselben Verhältnisse mit dem Raume verharren sollte. Wenn sich aber ein Körper beweget, so verändert er zwar beständig seinen Ort; wenn aber dieses immer nach einerlei Richtung und mit ebenderselben Geschwindigkeit geschieht, so bleibt in der Veränderung des Orts selbst eine beständige Gleichheit, und daher lässt sich auch in diesem Fall sagen, dass das Verhältniss gegen den Raum einerlei bleibe. In beiden Fällen aber wird gesagt, dass der Körper in einerlei Zustand verharre. Wenn aber entweder ein ruhender Körper in Bewegung gesetzt, oder bei einem bewegten Körper entweder die Richtung oder Geschwindigkeit oder beides zugleich verändert wird, so leidet auch sein Zustand eine Veränderung, wovon die Ursache, wie gewiesen worden, nicht in dem Körper selbst befindlich sein kann, sondern ausser demselben gesucht werden muss. So lang aber ein Körper entweder in Ruhe verbleibet, oder seine Bewegung nach einerlei Richtung gleichgeschwind fortsetzet, das ist, gleichförmig in einer graden Linie fortgeht, so steckt die Ursache dieser Verharrung in einerlei Zustand, in dem Körper selbst: und muss daher einem jeglichen Körper ein Vermögen zugeschrieben werden in seinem Zustande unverrückt zu verharren. Dieses Vermögen ist also eine allgemeine Eigenschaft der Körper, welche aus der Beweglichkeit unmittelbar und nothwendig folgt.

31) *Diese Eigenschaft aller Körper, in ihrem Zustand zu verharren, soll hier unter dem Namen der Standhaftigkeit begriffen werden; welche sich also ebensowohl auf die Bewegung als auf die Ruhe erstrecket.*

Diese Eigenschaft wird sonst die Trägheit, nach dem lateinischen Worte *inertia* genannt, welche Benennung in Ansehung der ruhenden Körper, und ihres Vermögens in Ruhe zu verharren, nicht ungeschickt wäre, indem dadurch etwas, so sich der Bewegung widersetzet, angedeutet wird. Da aber diese Eigenschaft einem bewegten Körper ebensowohl zukommt, und man von einem Körper, welcher immer gleichgeschwind fortläuft, nicht füglich sagen kann, dass er träg sei, so will sich die Benennung der Trägheit hier nicht wohl schicken. Denn ungeachtet die Worte gleichgültig sind, wofern man nur die Begriffe, so dadurch angedeutet werden, richtig bestimmt, so lässt sich doch die aus diesem Wort fliessende irrige Meinung, als wenn die Körper eine gewisse Neigung

zur Ruhe hätten, kaum vermeiden. Wenn man hingegen das Wort *Standhaftigkeit* einführt, so scheint dadurch die Verharrung in einerlei Zustand am schicklichsten angedeutet zu werden: denn es mag ein Körper in Ruhe verbleiben, oder nach einer graden Linie gleichgeschwind fortlaufen, so ist dabei eine Art von Standhaftigkeit zu bemerken. Mit dem Worte Trägheit ist man auch gewohnt eine Kraft zu verbinden, und dem Körper die Kraft der Trägheit zuzuschreiben, wodurch grosse Verwirrungen veranlasset werden; denn da eine Kraft eigentlich dasjenige genannt wird, welches vermögend ist den Zustand eines Körpers zu verändern, so kann dasjenige, worauf sich die Erhaltung eben desselben Zustandes gründet, unmöglich als eine Kraft angesehen werden. Wird nun anstatt dieses verführerischen Worts ein anders, so die Beschaffenheit der Sache genauer ausdrückt in Gebrauch gebracht, so werden alle dergleichen Verwirrungen vermieden.

32) *Wenn die äusserlichen Ursachen, wodurch der Zustand eines Körpers bisher verändert worden, aufhören zu wirken, so verharret der Körper in demjenigen Zustand, in welchem er sich denselben Augenblick befunden, als die äusserlichen Ursachen aufgehört zu wirken.*

Vermöge der Standhaftigkeit bemühet sich ein Körper in demjenigen Zustand zu verharren, in welchem er sich wirklich befindet; so sehr demnach durch äusserliche Ursachen der Zustand eines Körpers verändert wird, so befindet sich derselbe doch einen jeglichen Augenblick in einem gewissen Zustand, und in demselben würde er fernerhin unverrückt verbleiben, wenn dieselben äusserlichen Ursachen aufhören sollten auf ihn zu wirken. Man stelle sich einen Körper vor, welcher durch äusserliche Ursachen genöthigt worden sich ungleichförmig nach einer krummen Linie zu bewegen, und dass diese Ursachen nun plötzlich aufhören auf den Körper zu wirken; so wird die Standhaftigkeit darinn bestehen, dass der Körper von diesem Augenblick an seine Bewegung nach einer graden Linie gleichgeschwind fortsetzet, nämlich nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit, welche er in demselben Augenblick gehabt. Wenn also ein Körper bisher in Ruhe gewesen, durch die Wirkung einer äusserlichen Ursache aber in Bewegung gesetzet worden, so wird er mit eben dem Vermögen, von nun an diese Bewegung fortsetzen, mit welchem er in dem Ruhestand würde verharret haben, wenn er nicht darin wäre gestöret worden. Die Standhaftigkeit ist also nicht mehr mit einem Zustand verbunden, als mit einem jeglichen anderen und in was für einen Zustand auch immer ein Körper mag sein gesetzet worden, so hat er ein gleiches Vermögen in demselben immerfort zu beharren. Daher sagt man, dass sich ein Körper gegen alle möglichen Zustände gleichgültig verhalte, und keine grössere Neigung zu einem als zu irgend einem anderen besitze: er mag sich nun in Ruhe oder Bewegung befinden, so muss dieser Zustand ins künftige unverändert fortgesetzet werden, wofern derselbe nicht durch äusserliche Ursachen gestöret wird.

33) *Sobald die Standhaftigkeit der Körper festgesetzet worden, so ist es ein offenbarer Widerspruch, wenn man den Körpern noch gewisse Kräfte ihren Zustand zu verändern, zueignen will.*

Wenn die Körper mit einer Kraft begabet wären ihren Zustand zu verändern, wie von einige

Weltweisen behauptet wird, so wäre es falsch, dass sie ein Vermögen hätten, in ihrem Zustande unverrückt zu verharren, und ist also ein offenbarer Widerspruch zwischen solchen Kräften und der Standhaftigkeit. Da ferner die Standhaftigkeit eine allgemeine Eigenschaft aller Körper ist, so kann auch keiner besondern Art von Körpern eine Kraft beigemessen werden, vermöge welcher sie sich bemühen sollten, ihren Zustand zu verändern. Denn so oft es sich zuträgt, dass der Zustand eines Körpers verändert wird, so ist es gewiss, dass die Veränderung von einer äusserlichen Ursache herrühre, und folglich keiner innerlichen Kraft der Körper zugeschrieben werden könne. Wenn also gleich eingewendet wird, dass uns nicht alle Eigenschaften der Körper bekannt sind, so können wir doch sicher behaupten, dass sich in denselben unmöglich solche Eigenschaften befinden, welche mit denjenigen, so wir kennen, in einem offenbaren Widerspruch stehen. Denn wie es ungereimt wäre, den Körpern eine Eigenschaft zuzuschreiben, wodurch die Ausdehnung oder Beweglichkeit aufgehoben würde; ebenso ungereimt würde es sein, wenn man, nachdem die Standhaftigkeit bewiesen worden, noch behaupten wollte, dass die Körper mit Kräften begabet seien, welche auf Veränderung ihres Zustandes abzielten. Man muss sich also verwundern, wie einige Naturforscher den Körpern zugleich solche Kräfte und diejenige Eigenschaft, welche wir hier Standhaftigkeit nennen, zueignen können: sie sind aber zu den ersteren, durch übereilte Schlüsse verleitet worden; und da auf der Standhaftigkeit alle Grundsätze der Bewegung, deren Wahrheit unmöglich in Zweifel gezogen werden kann, beruhen, so waren sie genöthigt auch dieselbe zuzugeben, wodurch sie gleichsam unvermerkt in einen solchen offenbaren Widerspruch hingerissen worden.

34) *So oft also in dem Zustande eines Körpers eine Veränderung vorgeht, so ist es gewiss dass die Ursache dieser Veränderung nicht in dem Körper selbst befindlich ist, sondern ausser demselben gesucht werden muss.*

Wenn entweder ein Körper, der bisher in Ruhe gewesen, sich zu bewegen anfängt, oder ein bewegter Körper entweder nicht nach einer graden Linie oder mit einer ungleichen Geschwindigkeit fortgehet, so wird sein Zustand verändert, und da der Grund dieser Veränderung nicht in dem Körper selbst sein kann, so muss derselbe ausser demselben gesucht werden. Wo aber derselbe Grund anzutreffen sei, ist hier der Ort noch nicht zu untersuchen; wir müssen erst noch zu einer vollständigen Erkenntniss der Körper gelangen, und alsdann wird derselbe von selbst offenbar werden. Wenn daher einige also zu schliessen pflegen:

*In der Welt gehen beständig Veränderungen vor, und kein Körper verbleibet lange in demjenigen Zustande, in welchem er sich einmal befunden; daher muss in den Körpern eine Kraft befindlich sein, ihren Zustand unaufhörlich zu verändern*, so ist dieses ein sehr übereilter Schluss und widerspricht schnurgerad den ersten Eigenschaften der Körper, welche wir auf das deutlichste erkennen: man will auf solche Art die Ursache, der in den Körpern vorgehenden Veränderungen ausfindig machen, ehe man die Umstände, unter welchen solche vorgehen, genugsam in Erwägung gezogen, welches ein Irrweg ist, den man in Erforschung der Natur der Dinge auf das sorgfältigste vermeiden muss. Der Vordersatz des erwähnten Schlusses, dass der Zustand fast eines jeglichen Körpers in der Welt, unaufhörlichen Veränderungen unterworfen sei, mag wohl seine Richtigkeit haben,

allein daraus folgt keineswegs, dass die Ursache davon in ebendemselben Körper, in welchem die Veränderung vorgeht, befindlich sei: dieselbe liegt vielmehr, wie unten gezeigt werden soll, in andern Körpern, welche unter gewissen Umständen in andern eben deswegen Veränderungen hervorbringen müssen, weil sie selbst mit der Standhaftigkeit begabet sind, und sich aller Veränderung widersetzen.

---

## V. Capitel.

### Von der Undurchdringlichkeit als der vierten allgemeinen Eigenschaft und dem Wesen der Körper.

35) *Ein jeglicher Körper muss in dem Raume einen besonderen Ort einnehmen, und es ist unmöglich, dass zwei Körper zugleich an eben demselben Orte sein könnten.*

Unser Begriff von den Körpern schliesst die Undurchdringlichkeit so nothwendig in sich, das Niemand ein Ding, welches mit dieser Eigenschaft nicht begabt ist, für einen Körper halten würde. Deswegen werden auch die Bilder, so durch Hülfe der Spiegel vorgestellt werden, nicht für Körper gehalten, ob sie gleich ausgedehnt und beweglich sind, und also aus dieser Ursach allein, weil sie einander frei durchdringen. Es ist daher eine wesentliche und allgemeine Eigenschaft aller Körper, dass sich keiner an ebendemselben Ort befinden kann, welchen ein anderer wirklich einnimmt. Das Dasein eines Körpers an einem gewissen Ort, schliesst alle andere Körper von diesem Ort aus, so lang nämlich, sich jener darin aufhält; und kein anderer kann diesen Ort einnehmen, ohne zugleich denselben daraus zu vertreiben. Hierin besteht auch ein wesentlicher Unterschied zwischen dem blossen Raume und einem Körper, da sich jener von allen Körpern frei durchdringen lässt, ein Körper aber an keinen Ort kommen kann, wo ein anderer sich schon wirklich befindet. Es ist also eine völlige Unmöglichkeit, dass zwei Körper zugleich ebendenselben Ort einnehmen könnten; folglich muss ein jeglicher Körper seinen besonderen Ort haben, in welchen kein anderer kommen kann, so lang jener daraus nicht vertrieben wird. So wenig ebenderselbe Körper zugleich an mehr als einem Ort vorhanden sein kann, ebensowenig können zwei Körper zugleich an ebendemselben Orte sein. Diese Eigenschaft wird auch von allen denjenigen, welche von der Natur der Körper geschrieben, ohne einige Ausnahme zugegeben, und ungeachtet *Cartesius* das Wesen der Körper in der blossen Ausdehnung gesetzt, so hat er doch geglaubt, dass die Undurchdringlichkeit mit der Ausdehnung verbunden sei.

36) *Dass ein Körper ziemlich frei durch die Luft, das Wasser und andere flüssige Materien durchgehen kann, streitet keineswegs mit der Undurchdringlichkeit sowohl des Körpers selbst als der flüssigen Materien.*

Wenn die Luft kein Körper wäre, so würde der Undurchdringlichkeit eines Körpers kein Abbruch geschehen, wenn derselbe gleich, ganz frei durch die Luft bewegt werden könnte: da aber

die Luft so wie andere flüssige Materie auch ein Körper ist, so kann sich auch kein Körper durch die Luft bewegen, ohne beständig diejenigen Theile der Luft von dem Platze zu vertreiben, an welchen derselbe hinrückt. Die Erfahrung bezeuget solches auch augenscheinlich, indem sich kein Körper durch die Luft bewegen kann, ohne zugleich diese in eine Bewegung zu setzen und daher rühret auch der Widerstand, welchen ein Körper, so sich in der Luft oder einer andern flüssigen Materie beweget, leidet, und wodurch seine Bewegung immerfort vermindert wird, wie in der Lehre von der Bewegung gezeigt zu werden pflegt. Von allen Orten also, welche der Körper nach und nach einnimmt, wird die Luft immerfort vertrieben, dass niemals an ebendemselben Orte zugleich Luft und der Körper sein kann. So bald aber der Körper einen Ort verlassen, so hindert nichts, dass derselbe nicht sogleich von der Luft oder einem anderen Körper eingenommen werde. Ebenso verhält es sich auch mit dem Wasser und anderen flüssigen Materien, da die Unmöglichkeit, dass zwei Körper zugleich an einem Ort sein können, um so handgreiflicher wird, je gröber die flüssige Materie ist: denn da wird der Widerstand um so viel grösser, welches ein deutliches Zeichen der Undurchdringlichkeit ist. Ungeachtet wir also die Natur der flüssigen Körper noch nicht erforschet haben, so kann doch daher kein Einwurf gegen die allgemeine Eigenschaft, von welcher hier die Rede ist, gemacht werden.

37) *Wenn es bisweilen scheint, dass sich ein Körper in einen andern völlig hinein begiebt, so findet doch auch alsdann keine Durchdringung statt; sondern die Poren des einen nehmen die Theilchen des andern in sich, nachdem die in denselben vorher befindliche Materie daraus vertrieben worden.*

Wenn ein Stück Zucker mit Wasser angefeuchtet wird, so dringt das Wasser dergestalt in den Zucker hinein dass es scheint, dass eben der Ort welchen vorher der Zucker allein eingenommen nun auch zugleich mit Wasser angefüllt werde. Allein wenn man die Sache genauer betrachtet, so findet sich, dass der ganze Umfang des Orts nicht allein von Zucker eingenommen gewesen, sondern dass sich in dem Zucker eine Menge kleiner Löcher, so Poren genannt werden, befinde, welche mit Luft oder einer anderen unsichtbaren Materie angefüllt sind. In diese Poren dringt nun das Wasser hinein, doch dergestalt dass die darin vorher befindlich gewesene Materie daraus vertrieben worden. Wenn man nun auf diesen Umstand nicht Acht giebt, so scheint es allerdings als wenn sich Zucker und Wasser zugleich an einem Ort befänden. Ein gleiches ist auch bei allen Vermischungen zu bemerken, wo zwei Körper in ganz kleine Theilchen aufgelöset, und diese unter einander vermenget werden, und nimmermehr kann es sich zutragen, dass zwei solche Theilchen an ebendemselben Orte sein sollten. In Ansehung des erst erwähnten Falles vom Zucker, ist hier zu erinnern, dass alle Körper welche wir kennen, mit einer grossen Menge von Poren durch und durch angefüllt sind, welche Luft oder eine andere unsichtbare Materie enthalten. Diese fremde Materie muss also von der eigenthümlichen Materie der Körper selbst wohl unterschieden werden; und da es öfters geschehen kann, dass diese Poren mit einer anderen sichtbaren Materie angefüllt werden, nachdem nämlich die erste daraus vertrieben worden, so fallen alle Zweifel, welche daher gegen die Undurchdringlichkeit der Körper entstehen könnten, von selbsten weg.

38) *Die Undurchdringlichkeit schliesset für sich schon die Ausdehnung und Beweglichkeit, und folglich auch die Standhaftigkeit in sich. Wenn man also dem Körper die Undurchdringlichkeit zueignet, so muss man ihm auch die übrigen Eigenschaften zuschreiben.*

Wo keine Ausdehnung vorhanden ist, da findet auch der Begriff von der Undurchdringlichkeit nicht statt, denn ein Ding das keine Ausdehnung hat, kann auch keinen Ort einnehmen, und folglich nicht einmal die Frage entstehen, ob ein anderes Ding zugleich an ebendemselben Orte sein könne, oder nicht? Ein undurchdringliches Ding ist also nothwendig ausgedehnt, und das nach allen drei Ausmessungen, denn von einer blossen Linie oder Oberfläche kann auch nicht füglich gesagt werden, dass sie undurchdringlich sei. Man kann sich ferner auch ein Ding das undurchdringlich ist, nicht anders als beweglich vorstellen; denn wenn dasselbe auch gleich an einem Ort so befestigt wäre, dass es durch keine Gewalt lossgerissen werden könnte; so wäre doch dieses eine äusserliche Gewalt, und in dem Dinge selbst kann nichts angetroffen werden, warum es nicht sollte von dieser Stelle gerückt werden können. Hier ist aber von der blossen Möglichkeit den Ort zu verändern, die Rede, und demnach muss einem undurchdringlichen Ding auch die Beweglichkeit zugeschrieben werden. Mit der Beweglichkeit aber, ist die Standhaftigkeit unmittelbar verbunden, denn sobald ein Ding beweglich ist, so muss demselben auch die Standhaftigkeit zugeeignet werden, weil sonst eine jegliche Veränderung ohne einen hinreichenden Grund geschehen würde. Daher sind in der Undurchdringlichkeit schon alle vorher erklärten Eigenschaften, nämlich die Ausdehnung, Beweglichkeit und Standhaftigkeit enthalten.

39) *Alles was undurchdringlich ist, gehört in das Geschlecht der Körper, und daher besteht das Wesen der Körper in der Undurchdringlichkeit, in welcher folglich alle übrigen Eigenschaften ihren Grund haben müssen.*

Das Wesen der Körper besteht in einer solchen Eigenschaft, welche nicht nur allen Körpern gemein, sondern auch so eigen ist, dass sie keinem andern Ding zukommt. Um dieser Ursache willen, kann das Wesen der Körper nicht in der Ausdehnung gesetzt werden, weil der Raum auch ausgedehnt ist, und wer den Raum nicht zugeben will, dem kann der Schatten, und durch Spiegel oder Gläser vorgestellte Bilder entgegengesetzt werden, welchen weder die Ausdehnung noch Beweglichkeit abgesprochen werden kann; dem ungeachtet aber wird Niemand dieselben für Körper halten. Woraus erhellet, dass auch die Beweglichkeit, wenn sie gleich mit der Ausdehnung verbunden wird, das Wesen der Körper nicht ausmachen kann. Von der Standhaftigkeit kann solches ebenso wenig behauptet werden, weil dieselbe eine nothwendige Folge der Beweglichkeit ist. Niemand aber wird zweifeln, dass die gedachten Bilder, wenn sie mit der Undurchdringlichkeit begabet wären, nicht mit allem Recht unter das Geschlecht der Körper gehören sollten. Da nun ein jegliches Ding, welches undurchdringlich ist, mit Recht für einen Körper gehalten wird, so ist offenbar, dass das Wesen der Körper in der Undurchdringlichkeit bestehe. Wer dieses läugnen wollte, der müsste behaupten, dass undurchdringliche Dinge entweder wirklich vorhanden, oder doch möglich wären, welche doch nicht Körper genannt werden könnten. Da wir nun das Wesen der Körper entdeckt haben, so ist klar, dass alle Eigenschaften der Körper in der Undurchdring-

lichkeit ihren Grund haben müssen, wie solches von dem vorhererklärten schon gezeiget worden; und dass den Körpern keine Eigenschaften zukommen können, welche nicht mit der Undurchdringlichkeit nothwendig verbunden sind.

40) *Weil die Körper kraft ihres Wesens undurchdringlich sind, so ist auch keine Gewalt vermögend, so gross dieselbe auch immer sein mag, zwei Körper dergestalt zusammen zu pressen, dass auch nur in den kleinsten Theilen derselben eine wirkliche Durchdringung geschehe.*

Wenn durch irgend eine Gewalt zwei Körper in einander und in einen Ort gedrängt werden önnten, so könnte man nicht sagen dass dieselben undurchdringlich wären, sondern dass nur etwa ine grosse Gewalt erfordert würde, um die Durchdringung zu bewerkstelligen. Da aber das Wesen ler Körper in der Undurchdringlichkeit besteht, so ist eine Durchdringung platterdings unmöglich, ınd wenn auch die allergrösste Gewalt zwei Körper gegen einander stiesse. Man weiss zwar aus ler Erfahrung, dass viele Körper durch eine hinreichende Gewalt in einen weit kleineren Raum edrängt werden können; allein hier geschieht nichts anderes, als dass die eigenthümlichen Theilhen der Körper näher zusammen getrieben und die dazwischen befindlichen Poren kleiner gemacht verden, nachdem die Luft oder andere unsichtbare Materien, womit dieselben angefüllt waren, laraus vertrieben worden, wie solches durch einen Schwamm begreiflich gemacht werden kann. )ie Luft ist insbesondere ein solcher Körper, welcher sich in einen weit kleineren Raum zusammenrücken lässt; allein es ist kein Zweifel, dass dieselbe nicht sehr viel leere, oder mit einer noch ubtileren Materie angefüllte Räumchen in sich enthalten sollte. Von dem Wasser aber hat man so iel erfahren, dass keine Gewalt vermögend ist, dasselbe in einen kleinern Raum zu treiben: daher t die Undurchdringlichkeit stark genug, auch der grössten Gewalt zu widerstehen und aller wirkchen Durchdringung vorzubeugen.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *)

49) *Alle Veränderungen, welche in der Welt an den Körpern vorgehen, insofern dazu von Geistern nichts beigetragen wird, werden von den Kräften der Undurchdringlichkeit der Körper hervorgebracht, und finden also in den Körpern keine anderen als diese Kräfte statt.*

Hier werden diejenigen Veränderungen mit Fleiss ausgeschlossen, welche unmittelbar von Gott ler einem Geiste hervorgebracht werden. Wenn wir also in der Welt nichts als Körper betrachn, so ist klar, dass ein jeder Körper so lange in seinem Zustande verbleiben muss, als sich von ssen keine Ursache ereignet, welche vermögend ist in demselben eine Veränderung zu wirken. lange aber die Körper von einander entfernt, so verhindert keiner, dass die Uebrigen nicht in em Zustande verharren könnten: ja wenn die Körper einander frei durchdringen könnten, so irde der Zustand keines einzigen durch die Uebrigen gestört werden. Hieraus folget, dass der stand der Körper nur in sofern verändert wird, als dieselben nicht darin verharren können, ohne

*) Die Paragraphen 41 bis 48, d. h. die letzten des gegenwärtigen V. und die ersten des folgenden VI. Capitels fehlen.

einander durchzudringen: und aus dieser Quelle entspringen folglich alle Veränderungen in dem Zustande der Körper. Da nun keine Veränderung ohne eine Kraft geschehen kann, so nehmen alle Kräfte, welche die Veränderungen in der Welt hervorbringen aus der Undurchdringlichkeit der Körper ihren Ursprung, und daher sind in der körperlichen Welt keine anderen Kräfte anzutreffen, als die, welche aus der Undurchdringlichkeit der Körper entstehen. Hier haben wir also überhaupt die wahre Ursache aller Veränderungen, so in der Welt vorgehen; und da die Körper dergestalt mit einander vereinbaret sind, das fast keiner nur einen Augenblick in seinem Zustande verharren kann, ohne andere in dem Ihrigen zu stören, so sehen wir auch überhaupt, warum in der Welt beständig Veränderungen vorgehen müssen. Anstatt also dass einige Weltweise aus den immerwährenden Veränderungen der Welt geschlossen haben, dass die Körper mit Kräften begabet sein müssen ihren Zustand zu verändern, so sehen wir jetzt dass eben diese Veränderungen eine nothwendige Folge der Undurchdringlichkeit und Standhaftigkeit der Körper sind, ungeachtet diese letztere Eigenschaft mit dergleichen Kräften in einem offenbaren Widerspruche stehet.

50) *Die ganze Naturlehre besteht also darin, dass man bei einer jeglichen vorfallenden Veränderung zeige, in was für einem Zustand sich die Körper befunden, und dass wegen ihrer Undurchdringlichkeit eben diejenige Veränderung habe entstehen müssen, welche wirklich vorgegangen.*

Wer auf solche Art die Veränderungen, so sich in der Natur zutragen, zu erklären im Stande ist, derselbe leistet der Naturlehre ein vollkommenes Genügen, indem er die wahre Ursache aus ihren ersten und unumstösslichen Gründen herleitet. Denn da keine Veränderung in dem Zustande der Körper vorgehen kann, als insofern dieselben nicht ein jeglicher in seinem Zustande verbleiben kann, ohne die Uebrigen in dem Ihrigen zu stören; so entstehen alle Veränderungen aus den Kräften der Undurchdringlichkeit, in sofern dadurch das wirkliche Durchdringen verhütet werden muss; daher kommt alles in der Naturlehre darauf an, dass man in einem jeglichen Falle zeige, wie di Körper unmöglich in ihrem Zustande hätten verbleiben können, ohne einander durchzudringen, un dass durch die Kräfte der Undurchdringlichkeit, wodurch dem Durchdringen vorgebeugt werde musste, eben die Veränderungen hervorgebracht werden müssen, welche wirklich vorgegangen Weil aber hiezu eine genaue Erkenntniss aller Körper nach ihren besonderen Arten erfordert wird so kann man selten zu einer solchen vollkommenen Erklärung gelangen. Man muss sich oft begnü gen einige Begebenheiten als bekannt anzunehmen um daraus andere zu erklären, welche vermittels dieser Grundsätze aus denselben entspringen. Um aber im Stande zu sein in einem jeglichen Fall zu bestimmen, was für eine Veränderung durch die Kräfte der Undurchdringlichkeit hervorgebrac worden, so ist vor allen Dingen nöthig, die Lehre von den Kräften überhaupt abzuhandeln, a worauf der Grund aller vollkommenen Erklärung beruhen muss. Hieraus wird man aber schon d Ursachen von einer grossen Menge Veränderungen anzeigen können, auf welche die besonder Arten der Körper keinen Einfluss haben: denn wo es nöthig ist diese zugleich mit in Betrachtu zu ziehen, da trifft man gemeiniglich die grössten Schwierigkeiten an.

---

## VII. Capitel.

### Von der Wirkung der Kräfte auf die Geschwindigkeit der Körper.

51) *Um die Geschwindigkeit eines Körpers allein zu verändern wird eine Kraft erfordert, welche auf den Körper nach seiner eigenen Richtung wirket, und denselben entweder vorwärts oder rückwärts stösst, im ersteren Falle wird seine Geschwindigkeit vermehret, im anderen aber vermindert werden.*

Wir haben gesehen, dass alle Kräfte, welche aus der Undurchdringlichkeit entspringen in einem Druck bestehen, wodurch die Körper an dem Orte ihrer Berührung auf einander wirken und einer den andern gleichsam von sich wegzustossen bemühet ist. Bei einer jeglichen Kraft kommen also zwei Stücke zu betrachten vor: erstlich ihre Grösse, und hernach ihre Richtung: weil eine jede Kraft mit einer gewissen Gewalt nach einer gewissen Gegend stösst. Wir sehen hier erstlich auf die Richtung der Kraft in Ansehung der Richtung des bewegten Körpers, auf welchen dieselbe wirket. Lasst uns also setzen, der Körper $A$ (Fig. 220.) bewege sich nach der Richtung $CE$ mit einer gewissen Geschwindigkeit, und werde von einer Kraft nach eben dieser Gegend $CE$ gestossen, so ist klar dass dadurch seine Geschwindigkeit müsse vermehret werden, ohne seine Richtung zu verändern und in diesem Falle sagt man, der Körper werde vorwärts gestossen. Sollte aber die Kraft den Körper rückwärts nach $CF$ stossen, so würde er dadurch ebenfalls in seiner Richtung keine Aenderung leiden, seine Geschwindigkeit aber würde vermindert werden. Hieraus begreift man, dass wenn die Kraft den Körper $A$ so seitwärts nach der Gegend $CG$ stösst, dass die Linie $CG$ auf $CE$ winkelrecht ist: alsdann die Geschwindigkeit des Körpers daher zum wenigsten im ersten Augenblicke keine Veränderung leiden, sondern die Richtung des Körpers allein von $AE$ seitwärts gegen $CG$ gelenket werden müsse. Wenn aber die Kraft den Körper nach einer schiefen Richtung $CI$ stösst, so ist aus der Lehre von dem Gleichgewicht bekannt, dass eine solche schiefe Kraft $CI$ eben die Wirkung hervorbringe als zwei andere $CG$ und $CH$, aus welchen ein solches rechtwinklichtes Viereck $CGIH$ gemacht werden kann, davon $CI$ die Querlinie vorstellt. Von der Kraft $CH$ wird nun allein die Geschwindigkeit, von der Kraft $CG$ aber die Richtung des Körpers allein verändert werden.

52) *Wenn ein bewegter Körper von einer Kraft vorwärts getrieben wird, so ist der Zuwachs der Geschwindigkeit um so viel grösser, je länger diese Kraft auf den Körper wirket, und ebenso verhält es sich mit dem Verlust der Geschwindigkeit, wenn die Kraft rückwärts auf den Körper wirket.*

Hier muss die Zeit, so lang der Körper von der Kraft gedrückt wird nothwendig in Betrachtung gezogen werden, denn wenn ein Druck eine Wirkung hervorbringen soll, so muss derselbe von einiger Dauer sein, so kurz dieselbe auch sein mag. Je länger also ebendieselbe Kraft auf den Körper wirket, je grösser muss die Veränderung sein, welche in dem Zustande desselben hervorgebracht wird; in einer doppelten Zeit wird nämlich die Veränderung zweimal, in einer dreifachen Zeit dreimal so gross sein und so fort. Da wir nun setzen dass der Körper von der Kraft vorwärts

fortgestossen werde, so besteht die Veränderung seines Zustandes in der Vermehrung seiner Geschwindigkeit, und also muss von ebenderselben Kraft die Geschwindigkeit in einer doppelten Zeit einen zweimal so grossen Zuwachs erhalten, in einer dreifachen Zeit einen dreimal so grossen und so fort: das ist, der Zuwachs der Geschwindigkeit, so von ebenderselben Kraft in dem Körper gewirket wird, muss sich wie die Zeit verhalten. Wenn wir demnach die Geschwindigkeit, welche der Körper jetzt hat durch $v$ andeuten, und den Zuwachs derselben durch $dv$ welcher in der Zeit $dt$ gewirket wird, so verhält sich $dv$ wie $dt$: nämlich in einer anderen Zeit $ndt$, wird der Zuwachs der Geschwindigkeit sein $ndv$, und dieses ist wahr, man mag die Zeit $dt$ nebst dem inzwischen gewirkten Zuwachs der Geschwindigkeit $dv$ als unendlich kleine Grössen ansehen oder als endliche, wenn nur die Kraft die ganze Zeit über einerlei Grösse behält. Da nun der Zuwachs der Geschwindigkeit, welche in einer endlichen Zeit hervorgebracht wird, nicht anders als endlich sein kann, so muss der Zuwachs der Geschwindigkeit $dv$, so in einem unendlich kleinen Zeitpunkt $dt$ gewirket wird, unendlich klein sein. Eine gleiche Bewandniss hat es mit dem Verluste der Geschwindigkeit, wenn der Körper von der Kraft rückwärts gedrückt wird: alsdann aber wird derselbe Verlust durch $-dv$ ausgedruckt, und verhält sich also $-dv$ wie $dt$.

53) *Wenn ein bewegter Körper vorwärts gestossen wird, so ist der Zuwachs der Geschwindigkeit, welcher in einer gewissen Zeit hervorgebracht wird, um so viel grösser oder kleiner, je grösser oder kleiner die Kraft ist, welche auf den Körper wirket: und ebenso verhält es sich mit dem Verlust der Geschwindigkeit, wenn der Körper von der Kraft rückwärts gestossen wird.*

Eine doppelte Kraft muss in einerlei Zeit eine doppelte Wirkung hervorbringen, denn eben deswegen halten wir sie für doppelt so gross. Wenn also eine Kraft, deren Grösse durch $p$ ausgedrückt wird, den Körper fortstösst, und die Zeit, so lang der Stoss dauert, wie vorher durch $dt$ angedeutet wird, so verhält sich der Zuwachs der Geschwindigkeit, welcher $dv$ sein soll, wie die Kraft $p$, wenn die Zeit $dt$ einerlei ist. Wir haben aber gesehen, dass wenn die Kraft einerlei ist, die Zeit $dt$ aber als veränderlich angesehen wird, der Zuwachs der Geschwindigkeit $dv$ sich wie die Zeit $dt$ verhalten müsse: woraus folget, dass sich $dv$ verhalten müsse wie $pdt$; nämlich der Zuwachs der Geschwindigkeit verhält sich wie die Kraft $p$ mit der Zeit $dt$ multiplicirt. Hieraus sehen wir dass auch die kleinste Kraft vermögend sei den Zustand eines Körpers zu verändern; denn da von einer grossen Kraft gewiss ist, dass dieselbe in einem Körper eine gewisse Aenderung wirken müsse, so wird eine Kraft die tausendmal kleiner ist, in gleicher Zeit eine tausendmal kleinere Wirkung hervorbringen: und wenn diese eine tausendmal längere Zeit auf den Körper wirken sollte, so würde sie sogar ebendieselbe Veränderung verursachen, als die grosse Kraft. Also ist es ungegründet, wenn einige vorgeben, dass eine Kraft von einer gewissen Grösse sein müsse, ehe sie vermögend sei den Zustand eines Körpers zu verändern.

Endlich begreift man von selbst, dass wenn eben die Kraft $p$ den Körper rückwärts stossen sollte, der daher in der Zeit $dt$ erlittene Verlust der Geschwindigkeit $-dv$ sich wie $pdt$ verhalten müsse.

54) *Wenn ein bewegter Körper von einer gewissen Kraft vorwärts gestossen wird, so ist der Zuwachs der Geschwindigkeit, welche in einer gewissen Zeit hervorgebracht wird, um so viel grösser, je kleiner die Standhaftigkeit des Körpers ist: oder dieser Zuwachs verhält sich umgekehrt wie die Standhaftigkeit.*

Weil es vermöge der Standhaftigkeit ist, dass ein Körper sich bemühet in seinem Zustande unverrückt zu verharren, so widersetzt sich die Standhaftigkeit aller Veränderung, und eben deswegen werden Kräfte erfordert, um eine Veränderung hervorzubringen. Je grösser also die Standhaftigkeit ist, je eine grössere Kraft ist nöthig, wenn ebendieselbe Veränderung in ebenderselben Zeit gewirkt werden soll, und hieraus begreift man dass die Standhaftigkeit in das Geschlecht der Grössen gehöre, und sich ausmessen lasse. Weil demnach eine doppelte Standhaftigkeit eine doppelte Kraft erfordert, wenn die Wirkung einerlei sein soll, so wird eine einfache Kraft nur eine halb so grosse Wirkung hervorbringen: das ist, die Wirkung ebenderselben Kraft in einerlei Zeit wird um so viel kleiner sein, je grösser die Standhaftigkeit ist. In unserm Falle aber bestehet die Wirkung in dem Zuwachs der Geschwindigkeit; wenn derhalben die Kraft durch $p$, die Zeit durch $dt$, der Zuwachs der Geschwindigkeit durch $dv$, und die Standhaftigkeit des Körpers durch $M$ angedeutet wird, so verhält sich $dv$ umgekehrt wie $M$, oder $dv$ ist wie $\frac{1}{M}$, wenn die Kraft $p$ und Zeit $dt$ einerlei ist. Lasst uns nun dasjenige, was vorher von dem Verhältniss des Zuwachses der Geschwindigkeit $dv$ gegen die Zeit $dt$ und die Kraft $p$ erwiesen worden, zusammen nehmen, so wird sich finden, dass der Zuwachs der Geschwindigkeit $dv$ sich verhalten müsse wie $\frac{pdt}{M}$: derselbe ist nämlich wie die Kraft $p$ multiplicirt mit der Zeit $dt$ dividirt durch die Standhaftigkeit $M$. Wenn die Kraft den Körper zurückstossen sollte, so würde der Verlust der Geschwindigkeit, nämlich $-dv$, ebenfalls sich verhalten wie $\frac{pdt}{M}$.

55) *Die Grösse der Standhaftigkeit in einem jeglichen Körper, wird seine Masse, oder Menge der Materie, woraus er bestehet, genannt; und also muss die Masse eines Körpers mit in Betrachtung gezogen werden, wenn man die Veränderung, so eine gegebene Kraft in dem Zustand desselben hervorbringt, bestimmen will.*

Auf diese Art gelangen wir zu einem deutlichen Begriffe von demjenigen, was die Masse oder Menge der Materie eines jeden Körpers genannt zu werden pflegt. Man unterscheidet deswegen die Masse eines Körpers von der Grösse seiner Ausdehnung, weil öfters ein kleiner Körper eine ebenso grosse Kraft erfordert, um in seinem Zustande eine gewisse Aenderung hervorzubringen als ein grosser, und hieraus hat man geschlossen dass man die Menge der Materie, woraus ein Körper besteht, nicht aus der Grösse seiner Ausdehnung urtheilen müsse. Einige schätzen die Masse aus dem Gewicht; da aber das Gewicht von einer äusserlichen Ursache herkommt, und nach Verschiedenheit des Orts und der Umstände verschieden sein kann, so kann dasselbe nicht füglich zu Ausmessung einer wesentlichen Eigenschaft aller Körper gebraucht werden. Nur alsdann wenn die Körper an ebendemselben Orte auf der Erde gewogen werden, und das in einem luftleeren Raume, so kann man zuverlässig sagen, dass ihre Massen sich wie ihre Gewichte verhalten, sonst nicht.

Andere schätzen die Masse eines Körpers aus der sogenannten Kraft der Trägheit, welches mit gegenwärtigem Begriffe vollkommen übereinstimmt, indem wir an die Stelle dieser unbequemen Benennung, die Standhaftigkeit setzen. Hier äussert sich gleich eine unrichtige Folge dieser Benennung, da einige behaupten, keine Kraft sei vermögend einen Körper in Bewegung zu setzen, wofern dieselbe nicht grösser sei als seine Kraft der Trägheit. Ausserdem aber dass gezeigt worden, dass diese Eigenschaft auf keinerlei Weise als eine Kraft angesehen und folglich mit den wahren Kräften in keine Vergleichung gezogen werden könne; so erkennen wir aus dem Vorhergehenden, dass auch die kleinste Kraft vermögend ist den grössten Körper in Bewegung zu setzen, oder sonst seinen Zustand zu verändern. Denn da sich verhält $dv$ wie $\frac{pdt}{M}$, so sieht man dass die Standhaftigkeit oder Masse $M$ nicht so mit der Kraft $p$ in Vergleichung stehe, das $p$ grösser sein müsse als $M$: sondern, dass so klein auch $p$, und so gross hingegen $M$ sein mag, dennoch allezeit Mitwirkung erfolgen müsse.

56) *Wenn also ein bewegter Körper von einer Kraft vorwärts angetrieben wird, so verhält sich der Zuwachs seiner Geschwindigkeit, welcher in einer gewissen Zeit hervorgebracht wird, wie die Kraft multiplicirt mit der Zeit und dividirt durch die Masse des Körpers.*

Dieses ist in dem Vorigen schon erwiesen worden, wenn man nur anstatt der Grösse der Standhaftigkeit die Masse setzet, und dieses ist der Grundsatz auf welchem die ganze Lehre von der Bewegung einzig und allein beruhet. Da nun diese Lehre durch die genauste Uebereinstimmung mit der Erfahrung in die grösste Gewissheit gesetzt worden, so könnte auch die Wahrheit dieses Grundsatzes im geringsten nicht in Zweifel gezogen werden, wenn derselbe gleich nicht durch solche unumstössliche Gründe wäre befestigt worden. Wer also die Stärke dieser Gründe einzusehen nicht im Stande ist, den verweisen wir auf die unstreitige Wahrheit der ganzen Lehre von der Bewegung, als welche in ihrem ganzen Umfange aus diesem einzigen Grundsatze hergeleitet worden. Setzt man nun die fortstossende Kraft $= p$; die Zeit, während welcher sie auf den Körper wirket $= dt$, den hervorgebrachten Zuwachs der Geschwindigkeit $= dv$ und die Masse des Körpers $= M$, so verhält sich wie schon gewiesen worden $dv$ wie $\frac{pdt}{M}$. Wenn man also in einem einzigen Falle weiss, einen wie grossen Zuwachs der Geschwindigkeit eine gegebene Kraft in einer gegebenen Zeit an einem gegebenen Körper hervorgebracht, so kann man durch Hülfe dieses Verhältnisses in allen andern Fällen die Wirkung bestimmen. Es kommt hier nur darauf an, dass man die verschiedenen Grössen welche hier vorkommen, als die Kraft, die Zeit, die Geschwindigkeit und die Masse auf eine bestimmte Art, welche willkührlich ist und auf eines jeden Belieben ankommt, durch Zahlen ausdrücke, und wenn man in allen andern Fällen eben diese Art auszudrücken beibehält, so kann man auch die Wirkung durch Hülfe dieser Verhältnisse anzeigen. Also wenn nach angenommenen gewissen Maassen in einem Falle gefunden wird $dv = \frac{npdt}{M}$, so muss auch in einem jeglichen anderen Falle sein $dv = \frac{npdt}{M}$.

57) *Wenn ein Körper A* (Fig. 221.), *der bisher in C geruhet, von einer beständigen Kraft nach der Gegend CS fortgetrieben wird, so wird demselben eine Bewegung nach eben dieser Gegend eingedrückt werden, und nach einiger Zeit wird sich seine Geschwindigkeit verhalten wie die Kraft multiplicirt mit der Zeit und dividirt durch seine Masse.*

Weil der Körper anfänglich in Ruh gesetzet wird, so muss ihm von der Kraft, welche ihn nach der Gegend $CS$ stösst, sogleich eine Bewegung nach eben dieser Gegend eingedrückt werden, und weil die Kraft beständig nach eben dieser Gegend wirket, so wird auch der Körper in seiner Bewegung eben diese Richtung behalten, seine Geschwindigkeit aber wird immerfort vermehrt werden. Weil ferner auch die Kraft von gleicher Grösse bleibt, so wird der Zuwachs der Geschwindigkeit sich wie die Zeit verhalten: da aber der Körper anfänglich keine Geschwindigkeit gehabt, so wird nach Verfliessung einiger Zeit, seine ganze Geschwindigkeit dem während dieser Zeit erhaltenen Zuwachs gleich sein. Wenn wir also wie bisher die Kraft durch $p$, die Masse des Körpers durch $M$, und die in der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit durch $v$ andeuten, so wird sich diese Geschwindigkeit $v$ verhalten wie $\frac{pt}{M}$. Eben dieses erhalten wir auch durch die Integral-Rechnung, wenn wir nur den in einem jeglichen unendlich kleinen Zeitpunkt gewirkten Zuwachs der Geschwindigkeit betrachten. Denn es sei die in der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit $= v$, und der in dem Zeitpunkt $dt$ erzeugte Zuwachs derselben $= dv$, so muss aus dem Vorhergehenden sein $dv = \frac{npdt}{M}$, wenn nämlich die hier vorkommenden Grössen nach gewissen Maassen ausgedrückt werden und der Werth der Zahl $n$ aus einem bekannten Falle bestimmt worden ist. Nun aber sind hier $np$ und $M$ unveränderliche Grössen; und daher erhält man durch das integriren den ganzen in der Zeit $t$ erhaltenen Zuwachs, das ist die ganze Geschwindigkeit des Körpers $v = \frac{npt}{M}$. Aus dieser letzteren Berechnung sieht man zugleich, wie man verfahren müsse, wenn die Kraft $p$ von einer veränderlichen Grösse wäre, gleichwohl aber beständig einerlei Richtung behielte: da müsste bei der Integration der Formul $\frac{npdt}{M}$ zugleich die Veränderlichkeit der Kraft $p$, in Betrachtung gezogen werden: man würde nämlich erhalten $v = \frac{n}{M} \int pdt$. Was aber eine auf die Richtung des Körpers schief wirkende Kraft für eine Veränderung sowohl in der Geschwindigkeit als Richtung desselben hervorbringen müsse, wird im folgenden Capitel gezeigt werden.

58) *Unter eben diesen Umständen wird der Weg CS, durch welchen der Körper A in einer gewissen Zeit fortbeweget worden, sich verhalten wie die Kraft multiplicirt mit dem Quadrat der Zeit und dividirt durch die Masse des Körpers.*

Da der Körper in der graden Linie $CS$ fortläuft, so sei $CS = s$ der Weg, welchen derselbe in der Zeit $t$ zurücklegt, und am Ende desselben $S$ seine Geschwindigkeit $= v$. Wenn nun die Kraft $= p$ und die Masse des Körpers $= M$ gesetzt wird, so ist aus dem Vorigen: $v = \frac{npt}{M}$; und mit dieser Geschwindigkeit würde er in dem Zeitpunkt $dt$ den unendlich kleinen Weg $Ss = ds$ gleichförmig durchlaufen, weil der inzwischen erzeugte Zuwachs der Geschwindigkeit unendlich klein und folglich für nichts zu achten. Wir haben aber oben gesehen dass bei einer gleichförmigen

Bewegung die Geschwindigkeit gefunden wird, wenn man den Weg durch die Zeit dividirt, also ist hier $v = \frac{ds}{dt}$, und demnach $\frac{ds}{dt} = \frac{npt}{M}$ oder $ds = \frac{nptdt}{M}$; daher man durch die Integration erhält $s = \frac{nptt}{2M}$, weil $\frac{np}{M}$ eine beständige Grösse ist; und also verhält sich der Weg $s$ wie $\frac{ptt}{M}$, das ist wie die Kraft $p$ mit dem Quadrat der Zeit $tt$ multiplicirt und durch die Masse des Körpers dividirt. Die vollständige Erkenntniss dieser Bewegung ist also in diesen zwei Gleichungen enthalten

$$v = \frac{npt}{M} \text{ und } s = \frac{nptt}{2M},$$

woraus man auf eine jegliche Zeit, sowohl die Geschwindigkeit des Körpers als den inzwischen durchlaufenen Weg anzeigen kann. Wenn man die letztere Gleichung durch die erstere dividirt, so bekommt man

$$\frac{s}{v} = \frac{t}{2} \text{ oder } s = \tfrac{1}{2}\, tv.$$

Nun aber drückt $tv$ den Weg aus, welchen ein Körper mit der Geschwindigkeit $v$ gleichförmig in der Zeit $t$ durchlaufen würde; welcher folglich just zweimal so gross sein wird, als der im gegenwärtigen Falle beschriebene Weg $CS = s$. Ferner da $t = \frac{2s}{v}$, wenn man diesen Werth für $t$ in die erste Gleichung setzt, so bekommt man

$$v = \frac{2nps}{Mv} \text{ oder } vv = \frac{2nps}{M}.$$

Also verhält sich in dieser Bewegung das Quadrat der Geschwindigkeit wie die Kraft $p$ multiplicirt mit dem durchlaufenen Weg $s$ und dividirt durch die Masse des Körpers $M$. Dieser Umstand kann aber unmittelbar aus dem folgenden Satz hergeleitet werden.

59) *Wenn ein bewegter Körper von einer Kraft vorwärts getrieben wird, so verhält sich der Zuwachs des Quadrats der Geschwindigkeit, wie die Kraft multiplicirt mit dem Weg, den der Körper inzwischen durchlaufen und dividirt durch die Masse desselben.*

Es sei $M$ die Masse des Körpers, und $v$ seine gegenwärtige Geschwindigkeit mit welcher derselbe in dem Zeitpunkt $dt$ den unendlich kleinen Weg $ds$ durchlaufe, inzwischen aber von der Kraft $p$ vorwärts getrieben werde: und also wird man haben $dv = \frac{npdt}{M}$. Weil nun aus der Bewegung durch $ds$, als welche für gleichförmig gehalten werden kann, folget

$$v = \frac{ds}{dt} \cdot \text{ so ist } ds = vdt;$$

man multiplicire also obige Gleichung mit $2v$ und schreibe in dem letztern Glied $ds$ für $vdt$ so bekommt man:

$$2vdv = \frac{2npvdt}{M} = \frac{2npds}{M}.$$

Allhier drückt aber $2vdv$ den Zuwachs des Quadrats der Geschwindigkeit aus, weil es das differentiale ist von $vv$, und daher verhält sich der Zuwachs des Quadrats der Geschwindigheit wie $\frac{pds}{M}$

as ist wie die Kraft $p$ multiplicirt mit dem Weg $ds$ und dividirt durch die Masse des Körpers. ehält die Kraft $p$ immer einerlei Grösse und Richtung, so erhält man durch die Integration $v = \frac{2nps}{M}$ · wie vorher, wenn nämlich der Körper anfänglich in $C$ in Ruhe gewesen. Wenn aber ie Kraft $p$ veränderlich sein sollte, so kann man doch für einen jeglichen Zeitpunkt die in dem ustand des Körpers erzeugte Veränderung durch die Differential-Gleichung $2vdv = \frac{2npds}{M}$ ausrücken: und für diesen Fall haben wir also zweierlei Formeln, nachdem man die Veränderung ntweder aus der Zeit $dt$ oder aus dem durchlaufenen Weg $ds$ bestimmen will. Wir haben nämlich:

$$dv = \frac{npdt}{M} \quad \text{und} \quad 2vdv = \frac{2npds}{M},$$

elche zwar in dem Grunde einerlei, darin aber unterschieden sind, dass die erstere den Zuwachs r Geschwindigkeit selbst, die andere aber den Zuwachs des Quadrats der Geschwindigkeit anzeiget. Venn aber die Kraft den Körper zurück drückte, so hätte man diese Gleichungen:

$$-dv = \frac{npdt}{M} \quad \text{und} \quad -2vdv = \frac{2npds}{M}.$$

60) *Wenn ein in Ruhe befindlicher Körper durch eine beständige Kraft in Bewegung gebracht wird, so verhält sich erstlich die Masse des Körpers mit der Geschwindigkeit multiplicirt, wie die Kraft multiplicirt mit der Zeit; hernach verhält sich die Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt, wie die Kraft multiplicirt mit dem durchlaufenen Weg.*

Die Wahrheit dieser beiden Verhältnisse fliesset unmittelbar aus unsern beiden Gleichungen

$$v = \frac{npt}{M} \quad \text{und} \quad vv = \frac{2nps}{M},$$

elche mit $M$ multiplicirt geben:

$$Mv = npt \quad \text{und} \quad Mvv = 2nps$$

ırch die erstere wird also das Product der Masse mit der Geschwindigkeit selbst, durch die andere er das Product der Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit bestimmt. Weil nun diese Proıcte auf eine solche vorzügliche Art in Betrachtung kommen, so pflegen denselben besondere ımen beigelegt zu werden. Das erstere wird nämlich die Grösse der Bewegung, das andere aber e lebendige Kraft genannt. Ob nun gleich dergleichen Benennungen willkührlich sind, so kann ch die letztere hier nicht füglich stattfinden, nachdem wir einmal für das Wort Kraft einen stimmten Begriff festgesetzet haben. Denn erstlich kann das Product $Mvv$, so wenig als das andere $v$, an und für sich selbst nicht als eine Kraft angesehen werden, und insofern dasselbe demProct $2nps$ gleich ist, wo $p$ eine wahre Kraft andeutet, so kann dasselbe auch nicht schlechtweg t einer Kraft in Vergleichung gezogen, sondern muss vielmehr mit dem Product einer Kraft rch einen Weg, das ist durch eine Linie verglichen werden, gleichwie die Grösse der Bewegung mit dem Product der Kraft durch die Zeit in Vergleichung steht. Wenn man also für ein ches Product einen schicklichen Namen erwählte, so könnte derselbe auch wohl dem Producte $v$ beigelegt werden: wobei doch wohl in Acht zu nehmen, dass dieses eigentlich nur insofern

geschehen könnte, als man sich vorstellt dass dieses Product $Mvv$ in einem ruhenden Körper dur eine Kraft hervorgebracht worden. In diesem Falle sieht man also dass die Kraft $p$ mit der Z $t$ multiplicirt, die erzeugte Grösse der Bewegung, hingegen aber die Kraft $p$ mit dem Weg mult plicirt die sogenannte lebendige Kraft anzeige. Im übrigen aber, wenn man sich an den hier geg benen bestimmten Begriff einer Kraft fest hält, so fallen alle Schwierigkeiten, welche sich bei de Streite über die lebendigen Kräfte ereignen, von selbst weg: und die beiden gefundenen Forme müssen in allen Fällen die Wahrheit anzeigen.

61) *Ein in Bewegung befindlicher Körper wird wiederum zu Ruhe gebracht, wenn eine gleic Kraft rückwärts auf denselben wirket und ebenso lange Zeit, als nöthig wäre um dies Körper, wenn er geruhet hätte, seine Bewegung einzudrücken.*

Es sei $M$ die Masse des Körpers und $v$ seine Geschwindigkeit, ferner $p$ die Kraft, welc rückwärts auf denselben wirket und also seine Geschwindigkeit nach und nach vermindert, $t$ d Zeit in welcher der Körper völlig zu Ruhe gebracht wird, und $s$ der Weg den derselbe bis dah durchläuft. Dieses vorausgesetzt, weil eine rückwärts wirkende Kraft der Geschwindigkeit eben viel abnimmt, als sie derselben zusetzen würde, wenn sie vorwärts auf den Körper wirkte, würden die zwei folgenden Gleichungen Statt finden:

$$Mv = npt \quad \text{und} \quad Mvv = 2nps.$$

Wenn also zwei verschiedene bewegte Körper in einerlei Zeit zu Ruhe gebracht werden sollen, müssen sich die dazu erforderten Kräfte verhalten, wie $Mv$, das ist, wie die Grösse der Bewegu der Körper. Wenn aber dieselben Körper nicht in gleichen Zeiten, sondern indem sie gleic Wege $s$ durchlaufen, zu Ruhe gebracht werden sollen, so müssen die Kräfte sich verhalten w $Mvv$, das ist, wie die Massen mit dem Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt, oder wie ihre sog nannten lebendigen Kräfte Hierauf beruhet nun der Grund des Streits da einige behaupten, dass Kraft eines bewegten Körpers aus dem Product der Masse mit der Geschwindigkeit, andere a aus dem Produckt der Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit geschätzet werden müsse. I Missverstand kommt aber augenscheinlich daher, dass man einem bewegten Körper eine eigentli Kraft beilegen will, da doch weder $Mv$ noch $Mvv$ mit einer Kraft verglichen werden kann, sond bei jenem die Kraft noch mit der Zeit, bei diesem aber mit dem Weg verbunden werden mu Man kann auch nicht auf eine unbedingte Art sagen, wie eine grosse Kraft erfordert werde, einen bewegten Körper in Ruhe zu bringen, indem eine jede Kraft dieses zu leisten im Stande i soll es aber in einer gewissen und bestimmten Zeit geschehen, so haben die Recht, welche sag die Kraft müsse sich verhalten wie die Grösse der Bewegung: soll es aber in einem bestimm Wege geschehen, so haben die andern Recht, und in dieser Absicht läuft die ganze Sache geni niglich auf einen blossen Wortstreit hinaus. Wenn man aber die Kraft $p$ für bekannt annimt so verhält sich die Zeit, in welcher der Körper zu Ruhe gebracht wird, wie die Grösse der Be gung: der Weg aber, welchen der Körper durchlaufen muss ehe er zu Ruhe kommt, wie die so nannte lebendige Kraft, oder die Masse mit dem Quadrat die Geschwindigkeit multiplicirt.

# VIII. Capitel.

## Von der Wirkung der Kräfte auf die Richtung der Körper.

62) *Wenn ein bewegter Körper seitwärts gedrückt wird von einer Kraft, deren Richtung auf die Richtung des Körpers winkelrecht ist, so wird dadurch der Weg, welchen der Körper beschreibt, gekrümmt, ohne dass die Geschwindigkeit desselben daher einige Veränderung leidet.*

Weil die Kraft weder vorwärts noch rückwärts auf den Körper wirket, so kann die Geschwindigkeit desselben weder vermehret noch vermindert werden und die Wirkung der Kraft wird also nur darin bestehn, dass der Körper von seiner gradlinichten Bewegung abgeleitet wird, und folglich eine krumme Linie beschreiben muss. Sobald aber sein Lauf gekrümmt wird, so hört die Richtung der Kraft auf darauf winkelrecht zu sein, wenn nämlich die Kraft immer einerlei Richtung behält, daher denn bald freilich eine Veränderung der Geschwindigkeit entstehen kann. Wir müssen also diese Krümmung des Wegs nur durch einen unendlich kleinen Zeitraum betrachten, damit inzwischen keine merkliche Veränderung in der Geschwindigkeit entspringen könne. Der Körper, dessen Masse $= M$, sei also bisher in der graden Linie $EA$ (Fig. 222.) mit einer Geschwindigkeit $= v$ gelaufen, in $A$ aber fange eine Kraft $= p$ an auf denselben zu wirken, und nach der Richtung $AC$, so auf $EA$ winkelrecht ist, zu stossen, welche Kraft immer einerlei Richtung behalte, diese Kraft wird nun verursachen, dass der Körper seinen Lauf nicht nach der graden Linie $AF$ fortsetzt, sondern nach einer gewissen krummen Linie $AM$ lenket, welche man folgender Gestalt wird bestimmen können. Wenn die Kraft gar nicht vorhanden wäre, so würde der Körper mit seiner Geschwindigkeit $v$ nach der graden Linie $AF$ fortlaufen, und in einer Zeit $= t$ den Weg $AQ$ durchlaufen, so dass $AQ = vt$, weil in einer gleichförmigen Bewegung der Weg gefunden wird, wenn man die Geschwindigkeit mit der Zeit multiplicirt. Wenn aber der Körper in $A$ stillstände und von der Kraft $p$ nach der Linie $AC$ getrieben würde, so würde er in eben der Zeit $t$ durch einen Weg $AP = \frac{nptt}{2M}$ bewegt werden (58). Wenn also der Körper beides, seine Bewegung behält und zugleich von der Kraft $p$ angetrieben wird, so wird sich derselbe nach Verfliessung der Zeit $t$ weder in $Q$ noch in $P$ befinden, sondern in $M$, wenn man nämlich die Linie $QM$ aus $Q$ der Linie $AP$ gleich und gleichlaufend zieht. Um also den wahren Ort des Körpers nach der Zeit $t$ zu bestimmen, so nehme man auf der Linie $AF$ den Weg $AQ = vt$, und setze davon in $Q$ winkelrecht die Linie $QM = \frac{nptt}{2M}$, so wird $M$ den gesuchten Ort des Körpers anzeigen.

63) *Der krumme Weg nach welchem ein Körper, der von einer seitwärts wirkenden Kraft getrieben wird, seinen Lauf lenket, kann als ein Zirkelbogen angesehen werden, dessen Durchmesser sich verhalten wird wie die Masse des Körpers multiplicirt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, und dividirt durch die Kraft: das ist wie die sogenannte lebendige Kraft des Körpers durch die wirkende Kraft selbst dividirt.*

Die krumme Linie $AM$ ist nach dem vorhergehenden Satz so beschaffen, dass nach der Zeit

$= t$ für dieselbe herauskommt: $AP = \frac{nptt}{2M}$ und $PM = AQ = vt$. Wenn wir nun für diese Linie setzen

$$AP = \frac{nptt}{2M} = x \text{ und } PM = vt = y$$

so bekommen wir für die Zeit $t$ einen doppelten Werth, nämlich:

$$tt = \frac{2Mx}{np} \text{ und } t = \frac{y}{v} \text{ oder } tt = \frac{yy}{vv}$$

folglich wird die Natur der krummen Linie $AM$ durch diese Gleichheit ausgedrückt:

$$\frac{2Mx}{np} = \frac{yy}{vv} \text{ oder } yy = \frac{2Mvv}{np} x\cdot$$

welche eine Parabel andeutet, deren Parameter ist $\frac{2Mvv}{np}\cdot$ Weil wir aber hier nur einen unendlic kleinen Theil dieser Linie betrachten müssen, so können wir denselben als einen unendlich kleine Zirkelbogen ansehen, und der Durchmesser des Zirkels, davon $AM$ ein Bogen ist, wird dem obige Parameter gleich, also $= \frac{2Mvv}{np}\cdot$ Demnach ist der halbe Durchmesser dieses Zirkels, oder de Radius der Krümmung des Weges $AM = \frac{Mvv}{np}\cdot$ Folglich verhält sich derselbe wie die Masse de Körpers mit dem Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt und durch die Kraft $p$ dividirt: weil eine gewisse Zahl andeutet, welche ihre Bestimmung durch die Art die Massen-Kräfte un Geschwindigkeiten auszumessen, erhält. Hat man nun eine solche Art nach Belieben erwählt un derselben gemäss für einen einzigen Fall den gehörigen Werth für die Zahl $n$ bestimmt, so kan man sogar die wahre Grösse des halben Durchmessers der Krümmung $AM$ anzeigen, denn wenn das Centrum des Bogens $AM$ andeutet, so wird man haben $CA = \frac{Mvv}{np}\cdot$ Auf solche Art wird nu die von einer seitwärts wirkenden Kraft verursachte Krümmung des Weges am füglichsten vorge stellt, und da die Zeit hier nicht mehr in Betrachtung kommt, indem in einer grössern oder klei nern Zeit, der Körper nur einen grössern oder kleinern Bogen ebendesselben Zirkels beschreibe so erkennt man hieraus am deutlichsten die Krümmung des Weges, und also die Wirkung, welch eine Kraft deren Richtung winkelrecht auf die Richtung der Bewegung ist, in dem Zustande de Körpers hervorbringen muss.

64) *Wenn die Bewegung eines Körpers von einer seitwärts wirkenden Kraft gekrümmt wird, ist der halbe Durchmesser der Krümmung doppelt so gross als der Weg auf welchem de Körper, wenn ebendieselbe Kraft rückwärts auf ihn wirkte, seine Bewegung gänzlich ve lieren würde.*

Wenn ein Körper dessen Masse $= M$. sich mit einer Geschwindigkeit $= v$ beweget und inzw schen auf denselben seitwärts eine Kraft $= p$ wirket, so wird seine Bewegung nach einem Zirke bogen gelenket werden, dessen halber Durchmesser ist $= \frac{Mvv}{np}$, wie in dem vorigen Satz gezei worden. Wenn aber dieser Körper durch eben diese Kraft $p$, so jetzt rückwärts auf ihn wirke soll, zu Ruhe gebracht werden sollte, so müsste derselbe einen Weg $s$ durchlaufen, dergestalt das

la wäre $Mvv = 2nps$ (61): dieser Weg, auf welchem der Körper seine ganze Bewegung, durch die ückwärts treibende Kraft $p$ einbüsste, würde demnach sein $s = \frac{Mvv}{2np}$, und folglich halb so gross ls der oben gefundene halbe Durchmesser der Krümmung. Woraus dann folget, dass der halbe Durchmesser der Krümmung zweimal so gross sein müsse als der Weg, auf welchem eben diese Kraft, wenn sie rückwärts auf den Körper wirkte, denselben seiner ganzen Bewegung berauben würde. Die Vergleichung dieser beiden Fälle, da eben dieselbe Kraft einmal seitwärts, hernach ückwärts auf den Körper zu wirken angenommen wird, leitet uns also zu einer solchen Bestimmung des halben Durchmessers der Krümmung im erstern Falle, welche nicht mehr von der Zahl und der Art die verschiedenen Grössen durch Zahlen auszudrücken abhängt, sondern uns sofort ine Linie anzeigt, welche demselben halben Durchmesser gleich ist. Denn wenn der gedachte Weg, auf welchem der Körper durch die Kraft $p$ seiner Bewegung beraubet werden kann, durch angedeutet wird, so ist der gesuchte halbe Durchmesser $= 2s$. Hier kann noch angemerket erden, dass $2s$ auch den Weg ausdrückt, welchen der Körper mit seiner Geschwindigkeit $v$ gleichförmig durchlaufen würde in eben der Zeit, in welcher derselbe von der rückwärts wirkenden Kraft zu Ruhe gebracht werden kann.

65) *Wenn die Kraft beständig einerlei Grösse behält, ihre Richtung aber immerfort also ververändert, dass sie auf die Richtung des Körpers allezeit winkelrecht bleibt, so wird der Körper in einem Zirkel immer gleich geschwind herumlaufen, dessen halber Durchmesser demjenigen gleich sein wird, welcher eben bestimmt worden.*

Wenn der Körper, dessen Masse $= M$ sich anfänglich mit einer Geschwindigkeit $= v$ beweget, und on einer Kraft $p$, die auf die Richtung des Körpers winkelrecht ist, getrieben wird, so wird derselbe inen Lauf nach einem Zirkelbogen krümmen, dessen halber Durchmesser $= \frac{Mvv}{np}$, und zum wenigsten einer unendlich kleinen Zeit keine Veränderung an seiner Geschwindigkeit leiden, als welche nur sofern Statt findet, als die Kraft nicht mehr winkelrecht auf die Richtung des Körpers wirket. Weil wir aber annehmen, dass die Kraft $p$ beständig winkelrecht auf die Bewegung des Körpers eibe, so kann keine Veränderung in der Geschwindigkeit des Körpers stattfinden, und derselbe uss mit einer gleichförmigen Bewegung allzeit in diesem Zirkel herumlaufen, dessen halber Durchesser ist $= \frac{Mvv}{np}$ oder auch $= 2s$, wenn nach dem vorigen Satze $s$ den Weg andeutet, auf elchem der Körper von der Kraft $p$, wenn sie rückwärts wirkte, seine ganze Bewegung verlieren irde. Der Körper wird also beständig mit einerlei Geschwindigkeit $v$ in dem Zirkel herumlaufen: d wenn wir den halben Durchmesser dieses Zirkels $= r$ setzen, so haben wir $r = \frac{Mvv}{np}$ oder $= 2s$: woraus man ersehen kann, wie gross die Geschwindigkeit des Körpers $v$ sein müsse, damit in einem gegebenen Zirkel herumliefe, es müsse nämlich sein $vv = \frac{npr}{M}$ oder $v = \sqrt{\frac{npr}{M}}$. Ist aber r Zirkel, in welchem der Körper herumlaufen soll gegeben, und auch die Geschwindigkeit $v$, so nn man daraus die Grösse der Kraft $p$ bestimmen, welche auf den Körper immer winkelrecht

wirken muss: denn es wird sein $p=\frac{Mvv}{nr}\cdot$ Da übrigens die Kraft immer winkelrecht auf die Rich tung des Körpers wirken muss, so ist klar dass der Körper immer nach dem Mittelpunkte d Zirkels getrieben werden müsse.

66) *Damit also ein Körper mit einer gegebenen Geschwindigkeit in einem Zirkel herumlau so muss derselbe beständig gegen den Mittelpunkt des Zirkels getrieden werden, mit ein Kraft, welche sich verhält wie die Masse des Körpers multiplicirt mit dem Quadrat sei Geschwindigkeit und dividirt durch den halben Durchmesser des Zirkels.*

Wenn die Masse des Körpers $=M$, die Geschwindigkeit $=v$, der halbe Durchmesser d Zirkels $=r$, und die dazu erforderte Kraft $=p$ gesetzt wird, so haben wir gefunden dass da s müsse: $p=\frac{Mvv}{nr}\cdot$ Wenn diese Kraft rückwärts auf den Körper wirken sollte, so würde sie dens ben zu Ruhe bringen, indem er einen Weg durchläuft, welcher der Hälfte des halben Durchmess $r$ gleich käme. Denn wenn dieser Weg $=s$ genannt wird, so haben wir gefunden $Mvv=2n$ woraus hier entspringt $p=\frac{2nps}{nr}$, und also: $s=\frac{1}{2}r$. Wir können also die zur Beschreibung ei Zirkels erforderte Kraft also ausdrücken, dass dieselbe gleich sein müsse derjenigen Kraft, welc indem sie auswärts auf den Körper wirkte, vermögend wäre denselben zu Ruhe zu bringen, ind er einen Weg, so dem vierten Theil des Durchmessers gleich ist, durchliefe. Sollte aber die na dem Mittelpunkte treibende Kraft plötzlich aufhören, so würde der Körper von diesem Augenbl an mit seiner Geschwindigkeit nach einer graden Linie fortlaufen, welche den Zirkel berüh Der Körper bemühet sich nämlich vermöge seiner Standhaftigkeit alle Augenblicke mit sei Geschwindigkeit nach seiner Richtung fortzulaufen, und sobald daher die nach dem Mittelpun treibende Kraft aufhört, so folgt er diesem seinem natürlichen Triebe. Sollte der Körper mit ein Faden an dem Mittelpunkte befestigt sein, und also von dem Faden in dem Zirkel erhalten werd so würde der Faden die Stelle der Kraft vertreten, und durch seine Spannung den Körper Zirkel erhalten. Weil demnach der Faden mit einer solchen Kraft als bestimmt worden, näml $p=\frac{Mvv}{nr}$, gespannt sein wird, so sagt man dass der Körper in diesem Zustande eine Kraft h den Faden zu spannen: und dieses ist die Kraft, welche sonst *Vis centrifuga* genannt wird, u also mit der obenbestimmten Kraft einerlei ist, welche zur zirkelförmigen Bewegung erfordert w

67) *Wenn sich aber ein Körper mit ungleicher Geschwindigkeit in einer krummen Linie bewe soll, so werden dazu immer zwei Kräfte erfordert, eine welche den Körper entweder v wärts oder rückwärts treibet und die Veränderung in der Geschwindigkeit wirket, die an aber, welche den Körper seitwärts treibt und ihn nach der Krümmung der Linie len*

Lasst uns setzen der Körper, dessen Masse $=M$, bewege sich mit einer veränderlic Geschwindigkeit in der krummen Linie *AME* (Fig. 223.) und seine Geschwindigkeit sei in $M=$ Weil nun in einer unendlich kleinen Zeit die Bewegung als gleichförmig angesehen werden k da der Zuwachs oder Verlust der Geschwindigkeit, so inzwischen erwächst, unendlich klein ist, u

uch der unendlich kleine Weg $Mm$ so inzwischen durchlaufen wird, als ein Zirkelbogen angesehen verden kann, dessen Mittelpunkt in $R$ und der halbe Durchmesser sei $RM = r$, so wird um iese Krümmung hervorzubringen eine Kraft erfordert, welche den Körper seitwärts nach der Richung $MR$ antreibt, und diese Kraft wird nach dem vorigen Satze sein $= \frac{Mvv}{nr}$.

Insofern hernach die Geschwindigkeit verändert wird, so lasst uns setzen der, in der unendlich leinen Zeit $dt$ erzeugte Zuwachs der Geschwindigkeit, sei $= dv$. Hiezu wird demnach eine Kraft rfordert, welche den Körper vorwärts treibt nach seiner Richtung, das ist nach der in $M$ erührenden graden Linie $MT$. Diese Kraft sei nun $= p$, und da haben wir aus dem obigen $v = \frac{npdt}{M}$, folglich $p = \frac{Mdv}{ndt}$: welche Kraft also mit der vorhergefundenen seitwärts wirkenden raft diese Bewegung nach der krummen Linie $AME$ hervorzubringen im Stande sein wird. Sollte e Geschwindigkeit abnehmen, so würde $dv$ negativ und für die Kraft $p$ auch ein negativer Werth efunden werden, in welchem Falle also diese Kraft rückwärts nach der Richtung $M\Theta$ auf den örper wirken müsste.

Will man anstatt der unendlich kleinen Zeit $dt$ den inzwischen durchlaufenen unendlich kleinen Veg $Mm$ in die Rechnung bringen, so setze man den ganzen Weg oder den Bogen $AM = s$, so ird $Mm = ds$, und da $v = \frac{ds}{dt}$, weil die Bewegung durch $Mm$ als gleichförmig angesehen werden ınn, so hat man $\frac{1}{dt} = \frac{v}{ds}$, und daher findet man die nach $MT$ wirkende Kraft $p = \frac{Mvdv}{nds}$.

Von diesen zwei erforderten Kräften pflegt die erstere so nach $MR$ wirket die winkelrechte raft (*vis normalis*), die letztere aber so nach $MT$ oder auch $M\Theta$ wirket, die berührende Kraft *is tangentialis*) genannt zu werden.

68) *Hieraus kann man hinwiederum die Veränderung bestimmen, welche eine auf die Bewegung des Körpers schiefwirkende Kraft hervorbringen muss, denn eine solche Kraft lässt sich in zwei andere zerlegen, deren eine entweder vorwärts oder rückwärts auf den Körper wirket, die andere aber seitwärts, und eine jede wird in dem Zustande des Körpers eben diejenige Veränderung hervorbringen, welche vorher bestimmt worden.*

Wir wollen die Kraft sowohl nach ihrer Grösse als Richtung veränderlich annehmen, und wenn r Körper in $M$ (Fig. 224.) gekommen, wo seine Richtung nach $MT$ und Geschwindigkeit $= v$ sein l, so soll eine Kraft $= V$ nach der Richtung $MV$ auf denselben wirken. Nun ziehe man die nie $MR$ winkelrecht auf $MT$, und errichte das rechtwinklichte Viereck $VNMT$, davon $MV$ eine erlinie sei, so ist bekannt, dass die Kraft $MV$ gleich gültig sei mit den zweien Kräften, so durch Seiten $MT$ und $MN$ ausgedrückt werden, davon jene die vorwärts- diese aber die seitwärtswirnde Kraft anzeigt. Man setze nun die vorwärtstreibende Kraft $MT = T$ und die seitwärtstreibende $V = N$, so hat man nach den Verhältnissen der Seiten $MT$ und $MN$ mit der Querlinie $MV$ diese stimmungen:

$$T = \frac{MT}{MV} V \text{ und } N = \frac{MN}{MV} \cdot V.$$

Von der ersteren wird die Geschwindigkeit des Körpers einen Zuwachs erhalten, welcher der unendlich kleinen Zeit $= dt$, betragen wird $dv = \frac{nTdt}{M}$, wo $M$ die Masse des Körpers andeut oder wenn man den inzwischen durchlaufenen unendlich kleinen Weg $Mm = ds$ setzet; w $ds = vdt$, so wird man haben $vdv = \frac{nTds}{M}$. Die andere Kraft $N$ wird den Körper nöthigen se Bewegung zu krümmen, und das dergestalt, dass wenn man den halben Durchmesser der Krü mung $MR = r$ nennt, sein wird $r = \frac{Mvv}{nN}$. Also wird die Veränderung welche alle Augenblicke dem Zustande des Körpers vorgeht durch die zwei folgenden Gleichungen ausgedrückt,

$$dv = \frac{nTdt}{M} \text{ oder } vdv = \frac{nTds}{M} \text{ und } r = \frac{Mvv}{nN}.$$

Wie aber hieraus in einem jeglichen Falle die Bewegung des Körpers selbst, das ist die Linie und die Geschwindigkeit in einem jeglichen Punkte derselben gefunden werden könne, ist h nicht der Ort zu zeigen, sondern es gehört in die besondere Lehre von der Bewegung, doch s im folgenden Capitel ein leichterer Weg vorgeschlagen werden.

---

## IX. Capitel.

### Bestimmung der Bewegung eines Körpers, welcher von Kräften getrieben wird.

69) *So lange sich ein Körper gleichförmig nach einerlei Richtung beweget, so entfernt er s von einer nach Belieben festgesetzten Fläche oder nähert sich derselben gleichgeschw Hieraus ist klar, was wir durch die Bewegung eines Körpers von einer Fläche verste und dass in dem angeführten Falle diese Bewegung gleichförmig sein werde.*

Wenn wir bei der Beweguug eines Körpers nur auf seine Entfernung von einer gewissen Flä sehen, so nennen wir die Veränderung dieser Entfernung die Bewegung des Körpers von di Fläche. Diese Bewegung können wir also als eine Geschwindigkeit ansehen und ausmessen, w wir den Zuwachs dieser Entfernung durch die Zeit dividiren. Also wenn wir jetzt die Entfern des Körpers von der Fläche durch $x$ nach Verfliessung aber einer unendlich kleinen Zeit $dt$ d $x + dx$ andeuten, so dass die Entfernung in dieser Zeit $dt$ um $dx$ gewachsen, so sagen wir a in diesem Augenblicke seine Bewegung von dieser Fläche sei $\frac{dx}{dt}$, eben wie die wahre Geschi digkeit eines Körpers aus dem Wege durch die Zeit dividirt erkannt wird. Dieser Begriff von d Bewegung eines Körpers von einer Fläche wird uns auf eine leichtere und allgemeinere Art le um uns eine jegliche Bewegung deutlicher vorzustellen und die Veränderungen so darin vorge aus den Kräften zu bestimmen. Es ist hier aber vor allen Dingen aus der Geometrie zu me dass die Entfernung des Körpers von einer Fläche durch die winkelrechte grade Linie, so o Körper auf die Fläche gezogen wird, ausgedrückt werde.

Wenn demnach ein Körper gleichgeschwind in einer graden Linie fortläuft, so behält diese inie von einer angenommenen Fläche entweder immer einerlei Entfernung oder nicht. Im ersteren alle bleibt also der Körper von dieser Fläche immer gleich weit entfernt, und seine Bewegung on derselben wird durch $o$ ausgedrückt werden. Im letzteren Falle aber weil der Körper in seiner inie in gleicher Zeit, gleiche Wege zurücklegt, so nimmt seine Entfernung von der Fläche in leicher Zeit um gleichviel ab oder zu, und wird also seine Bewegung von dieser Fläche gleichgechwind sein. Nimmt die Entfernung zu, so werden wir diese Bewegung mit dem Zeichen $+$, mmt sie aber ab, mit dem Zeichen $-$ anzeigen.

70) *Wird ein Körper durch eine Kraft von einer Fläche gerade fortgestossen, so wird seine Bewegung von dieser Fläche dergestalt zunehmen, dass sich der Zuwachs derselben verhalten wird wie die Kraft multiplicirt mit der Zeit und dividirt durch die Masse des Körpers.*

Es sei die Masse des Körpers $= M$ und seine Bewegung von der gedachten Fläche $= u$, odurch eigentlich die Geschwindigkeit dieser Bewegung von der Fläche angedeutet wird; wir ollen aber um der Kürze willen $u$ die Bewegung von der Fläche nennen, weil keine Zweideutigit zu befürchten steht. Dieses vorausgesetzt so würde, wie wir eben gesehen haben, $u$ immer nerlei bleiben, wenn keine Kraft auf den Körper wirkte, indem derselbe alsdann gleichförmig nach ier graden Linie fortlaufen müsste. Die Wirkung der Kraft, welche wir durch $P$ andeuten ollen, muss also darin bestehen, dass diese Bewegung $u$ vermehrt werde, weil wir annehmen, ss der Körper von dieser Kraft von der Fläche weg gestossen werde. Was wir demnach oben n dem Zuwachs einer Geschwindigkeit gezeigt haben, wenn die Kraft den Körper vorwärts stösst, s findet auch hier statt, und daher wird der in der unendlich kleinen Zeit $dt$ erzeugte Zuwachs r Bewegung $u$ sein $du = \frac{nPdt}{M}$ oder man wird haben $Mdu = nPdt$, wo $n$ eben die Zahl andeutet, elche aus der Art die hier vorkommenden Grössen durch Zahlen auszudrücken, ihre Bestimmung hält. Will man die Entfernung des Körpers von der Fläche, welche $= x$ sein soll, in die Rechng bringen, so darf man nur $\frac{dx}{dt}$ anstatt $u$ schreiben, und wird, wenn man den Zuwachs der it $dt$ für beständig annimmt, der Zuwachs der Bewegung werden $du = \frac{ddx}{dt}$. Hieraus bekommt in $\frac{Mddx}{dt} = nPdt$ oder $Mddx = nPdt^2$, welches also eine Differential-Gleichung von dem zweiten ade ist.

Wenn ausser dieser Kraft $P$ noch eine andere $Q$ vorhanden wäre, welche aber auf den Körper ch einer Richtung, so mit der Fläche gleichlaufend ist, wirkte, so würde von derselben keine ränderung in der Bewegung von der Fläche entstehen, und würde also gleichfalls sein $Mdu =$ $dt$ oder $Mddx = nPdt^2$. Denn wenn die Kraft $P$ gar nicht vorhanden wäre, so würde der rper ungeachtet der Kraft $Q$ sich gleichgeschwind von der Fläche entfernen, weil diese Kraft, mit der Fläche gleichlaufend, nichts in seiner Entfernung von derselben ändert: welcher stand, um die folgenden Sätze zu verstehen, wohl in Acht zu nehmen ist.

71) *Wenn die ganze Bewegung auf einer Fläche geschieht, und die Kräfte also auch nac derselben wirken, so wird diese Bewegung erkannt, wenn man die Bewegung des Körpe von zwei graden Linien, welche in dieser Fläche winkelrecht auf einander gezogen sin bestimmt.*

Lasst uns setzen der Körper, dessen Masse $= M$ (Fig. 225.), bewege sich auf der Fläche die Kupferplatte vorstellt, und beschreibe darauf die Linie $DME$, so müssen auch die Kräfte so a denselben wirken, ihre Richtung in dieser Fläche haben. Man stelle sich nun eine andere Fläc vor, welche auf dem Papier nach der Linie $OA$ winkelrecht aufsteht, und betrachte die Bewegu des Körpers von dieser Fläche, so wird seine Entfernung wenn er in $M$ ist, durch die Linie $M$ so auf $OA$ winkelrecht aufsteht, angezeigt werden; also hat man nur nöthig zu untersuchen, w sich die Entfernung des Körpers von der Linie $OA$ nach und nach verändre, das ist, man darf n die Bewegung des Körpers von dieser Linie $OA$ erforschen. Man stelle sich noch eine andere Fläc vor, welche auf dem Papiere ebenfalls winkelrecht nach der Linie $OB$ aufstehe, so dass $OB$ mit $O$ einen rechten Winkel mache, und suche gleichfalls die Bewegung des Körpers von der Linie $O$ so ist klar dass, wenn man für eine jegliche Zeit anzeigen kann, wie weit der Körper von beid Linien $OA$ und $OB$ entfernt ist, daraus der wahre Ort des Körpers erkannt werde. Die Kra welche auf den Körper in $M$ wirket mag nun beschaffen sein, wie man will, so kann dieselbe zwei Kräfte $MP$ und $MQ$ zerleget werden, deren jene $MP$ den Körper von der Linie $OA$, die $MQ$ aber von der Linie $OB$ wegstösst; und weil $MQ$ mit der Linie $OA$, $MP$ aber mit der Linie $O$ gleichlaufend ist, so wird die Wirkung der einen Kraft durch die andere nicht gestört werde also dass man die Wirkung einer jeden besonders wird bestimmen können.

Es sei also die Entfernung des Körpers $M$ von $OA$ oder $MX = x$. Die Bewegung von die Linie $OA = u$, und die Kraft $MP$ so von dieser Linie wegtreibt, $= P$. Gleichergestalt sei Entfernung des Körpers $M$ von $OB$ oder $MY = y$, die Bewegung von dieser Linie $OB = v$ und von dieser Linie $OB$ wegstossende Kraft $MQ = Q$. Die Wirkung dieser beiden Kräfte wird a in der unendlich kleinen Zeit $dt$ folgende Veränderungen hervorbringen:

$$Mdu = nPdt \quad \text{oder} \quad Mddx = nPdt^2$$
$$Mdv = nQdt \quad \text{oder} \quad Mddy = nQdt^2.$$

Wenn nämlich der Zeitpunkt $dt$ für beständig angenommen wird. Es ist aber aus dem vorigen k dass $u = \frac{dx}{dt}$ und $v = \frac{dy}{dt}$.

72) *Hat man die Bewegung eines Körpers, welche auf einer Fläche geschieht, von zwei Lin so auf dieser Fläche gegeneinander winkelrecht stehen, bestimmt, so erkennt man dar seine wahre Bewegung, das ist, seine Geschwindigkeit und Richtung für einen jeglic Zeitpunkt.*

Wir haben oben zwei besondere Regeln gegeben, eine um die Veränderung so in der Geschw digkeit vorgeht, die andere aber um die Veränderung, so in der Richtung vorgeht, zu bestimm

Bei dieser gegenwärtigen Art aber brauchen wir nur eine einzige Regel, welche uns lehret, wie lie Bewegung eines Körpers von einer jeglichen Fläche verändert werde, die wirkende Kraft mag uch beschaffen sein wie man will; weil sich dieselbe immer in zwei andere zerlegen lässt, deren ine von der Fläche grade abstösst, die andere aber mit der Fläche gleichlaufend ist und also die Virkung jener nicht störet. In dem vorigen Satze haben wir aus diesem Grunde bestimmt, welche 'eränderung in der Bewegung des Körpers von beiden Linien $OA$ und $OB$ (Fig. 225.) besonders orgehen muss und in diesen zwei Gleichungen enthalten ist:

$$Mdu = nPdt \text{ und } Mdv = nQdt.$$

lat man nun hieraus für einen jeden Zeitpunkt die beiden Bewegungen $u$ und $v$ gefunden, deren ne nach $Mp$, diese aber nach $Mq$ gerichtet ist, so sieht man dass der Körper durch $Mm$ laufen erde, so dass $Mm$ die Querlinie des rechtwinklichten Vierecks $Mpmq$ sein wird; wenn nämlich $Mp$ nd $Mq$ durch $u$ und $v$ ausgedrückt werden. Daher wird die wahre Geschwindigkeit, welche der örper in $M$ nach der Richtung $Mm$ hat, sein $= \sqrt{(uu + vv)}$: ferner erkennt man aber auch hieraus ie Richtung, oder die Lage der Linie $Mm$ nach den beiden angenommenen Linien $OA$ und $OB$. enn da $Mp = u$ und $Mq = v$, so findet man in dem rechtwinklichten Dreiecke $Mqm$, sogleich den Vinkel $QME$, dessen tangente ist $\frac{u}{v}$, welchen die Richtung der Bewegung $Mm$ mit der Linie $lQ$ macht; und gleichergestalt wird des Winkels $PME$ tangente sein $= \frac{v}{u}$. Kann man auch noch rner für eine jede Zeit die beiden Entfernungen $MX = x$ und $MY = y$ anzeigen, so wird dadurch er wahre Ort $M$, wo sich der Körper alsdann befindet, bestimmt. Wenn man aber für einen jegchen Zeitpunkt den Ort des Körpers anzeigen kann, so ist dieses die vollständigste Erkenntniss, elche man immer von der Bewegung eines Körpers wünschen kann

73) *Wenn die Bewegung eines Körpers nicht in einer Fläche geschieht, so kann man sich dieselbe am deutlichsten vorstellen, wenn man nach Belieben drei Flächen annimmt, welche auf einander winkelrecht stehen, und die Bewegung des Körpers von einer jeden dieser drei Flächen in Betrachtung zieht.*

Eine von diesen drei Flächen werde durch die Kupferplatte vorgestellt, auf welcher man nach lieben zwei Linien $OB$ und $OC$ (Fig. 226.) winkelrecht auf einander ziehe, und aus dem Punkte $O$ e Linie $OA$ auch winkelrecht auf die Fläche der Platte aufrichte, welche folglich auf die beiden nien $OB$ und $OC$ winkelrecht sein wird. Diese drei Linien $OA$, $OB$ und $OC$ stellen uns also drei ächen vor, als: $AOB$, $AOC$ und $BOC$, welche aufeinander rechtwinklicht sind, und wovon man e letztere $BOC$ als die Grundfläche, die beiden andern $AOB$ und $AOC$ aber als zwei darauf senkcht aufgerichtete Wände ansehen kann. Der Körper mag sich nun befinden wo er will, als in , so lässt sich begreifen, wie weit derselbe von einer jeden der drei angenommenen Flächen ent-nt sein werde: man ziehe nämlich aus $M$ erstlich die Linie $MX$ winkelrecht auf die Fläche $AOB$, rnach die Linie $MY$ winkelrecht auf die Fläche $AOC$ und endlich die Linie $MZ$ winkelrecht auf e Fläche $BOC$, so werden diese Linien die gesuchten Entfernungen anzeigen: man setze also diese

Entfernungen: $MX = x$; $MY = y$ aus $MZ = z$, ferner ziehe man winkelrecht von $X$ auf $OB$ die Linie $XT$, und von $Z$ auf $OC$ die Linie $ZV$, so wird auch sein $OV = x$, $VZ = OT = y$ und $ZM = z$. Wenn man also diese drei Linien weiss, so kann man daraus die Punkte $V$, $Z$ und $M$ und also den wahren Ort des Körpers $M$ anzeigen. Bewegt sich nun der Körper, wie es auch immer sein mag, so erwäge man um wieviel sich die drei Entfernungen $x$, $y$, $z$ in dem Zeitpunkt $dt$ verändern, und deute diese Veränderungen durch $dx$, $dy$ und $dz$ an. Daher werden die Brüche $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Bewegungen des Körpers von diesen drei Flächen anzeigen. Setzen wir nun die Bewegung von der Fläche $AOB = u$, von der Fläche $AOC = v$ und von der Fläche $BOC = w$, so werden wir haben $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$. Nehmen wir endlich in diesen Richtungen $Mp = u$, $Mq = v$ und $Mr = w$, *oder* $Mp = u$, $pv = v$ und $vM = w$, so wird die Linie $Mm$ die Richtung der Bewegung des Körpers, und $\sqrt{(uu + vv + ww)}$ die wahre Geschwindigkeit desselben anzeigen, folglich wird durch diese Vorstellung die wahre Bewegung des Körpers am deutlichsten erkannt.

74) *Die Kräfte, welche auf den Körper wirken, mögen auch beschaffen sein wie sie wollen, so können dieselben immer in drei zerlegt werden, welche den Körper von einer jeden der angenommenen drei Flächen grade wegstossen, und die Wirkung einer jeden wird von den zwei übrigen nicht gestört.*

Es sei der Körper in $M$, und alle Benennungen blieben wie in dem vorhergehenden Satze. Nun ist bekannt, dass wie auch immer die Kräfte so auf den Körper wirken, beschaffen sein mögen allezeit drei Kräfte angezeigt werden können nach den Richtungen $MP$, $MQ$, $MR$, welche denselben gleichgültig sind. Man nenne also die Kraft $MP = P$, die Kraft $MQ = Q$, die Kraft $MR = R$ von welchen die erste $P$ den Körper von der Fläche $AOB$, die andere $Q$ von der Fläche $AOC$ und die dritte $R$ von der Fläche $BOC$ grade wegtreibt, und sollten diese Kräfte den Körper gegen die Flächen zustossen, so müssten dieselben wie bekannt mit dem Zeichen — bemerket werden. Es ist aber klar dass die Wirkung der Kraft $MP = P$ von den beiden übrigen $Q$ und $R$ nicht gestört werde, weil ihre Richtungen $MQ$ und $MR$ mit der Fläche $AOB$ gleichlaufend sind, und die Entfernung des Körpers von dieser Fläche weder zu vermehren noch zu vermindern bemüht sind: und ebenso verhält es sich auch mit den beiden übrigen. Daher kann die Wirkung einer jeden ohne Absicht auf die übrigen besonders bestimmt werden, woraus wir für die in dem Zeitpunkte $dt$ erzeugten Veränderungen die drei nachfolgenden Gleichungen erhalten:

$$Mdu = nPdt, \quad Mdv = nQdt, \quad Mdw = nRdt,$$

anstatt dieser können wir auch folgende gebrauchen, wo das Differentiale der Zeit $dt$ für beständig angenommen wird:

$$Mddx = nPdt^2, \quad Mddy = nQdt^2, \quad Mddz = nRdt^2.$$

Wir können auch die Betrachtung der Zeit ausschliessen, und weil

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt,$$

so bekommen wir

$$Mdu = nPdx, \quad Mvdv = nQdy, \quad Mwdw = nRdz,$$

wobei aber zu merken, dass $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$. Wenn nun die Kräfte bekannt, so sind diese Gleichungen hinlänglich den wahren Ort des Körpers für eine jegliche Zeit zu bestimmen, und daher auch eine wahre Bewegung anzuzeigen.

75) *Wir verstehen durch die Wirksamkeit einer Kraft die Integral-Grösse, welche gefunden wird, wenn man die Kraft mit dem Differentiale ihrer Entfernung von der Fläche, von welcher sie den Körper wegstösst, multiplicirt und alsdann integrirt.*

Die letztgegebenen Gleichungen leiten uns auf diesen neuen Begriff, welchen wir mit dem Worte Wirksamkeit verbinden; indem aus demselben durch die Integration gefunden wird:

$$Muu = 2n\int Pdx, \quad Mvv = 2n\int Qdy, \quad Mww = 2n\int Rdz$$

und hieraus die Bewegung des Körpers von einer jeden Fläche angezeigt werden kann. Dieser Begriff ist hier um so viel mehr von der grössten Wichtigkeit, weil die Summe der Wirksamkeit der Kräfte $\int Pdx + \int Qdy + \int Rdz$ immer gleich gross bleibt, wenn wir auch drei andere Flächen angenommen hätten, und wenn diese drei Kräfte aus einer Kraft durch die Zerlegung entstanden, so ist die Summe ihrer Wirksamkeit gleich der Wirksamkeit der einzigen Kraft aus der sie entstanden: also dass die Willkührlichkeit der drei angenommenen Flächen auf die ganze Wirksamkeit keinen Einfluss hat, als welche immer einerlei Werth behält. Ein solcher merkwürdiger Vorzug findet bei der andern Formel nicht statt, und würde zum Exempel die aus der ersten hergenommene Grösse $\int Pdt + \int Qdt + \int Rdt$ immer einen anderen Werth erhalten, je nachdem wir die drei Flächen veränderten, ausserdem dass den Kräften mit dem Zeitpunkte $dt$ keine solche Verbindung zugeschrieben werden kann, als mit den Differentialen, $dx$, $dy$, $dz$. Was aber diesen Begriff der Wirksamkeit schon für sich höchst merkwürdig macht, ist, dass die ganze Lehre von dem Gleichgewicht auf denselben gegründet ist. Denn es kann bewiesen werden, dass kein Gleichgewicht stattfinden kann, wo nicht die Summe der Wirksamkeiten aller Kräfte so dabei vorkommen, am allerkleinsten oder auch zuweilen am allergrössten ist. Dieser herrliche Grundsatz ist auch zuerst von dem weltberühmten Herrn Präsidenten von Maupertuis erfunden worden und stehet mit dem anderen allgemeinen Gesetze der Sparsamkeit, in der genausten Verbindung. Hieraus sehen wir zum wenigsten, dass die Wirksamkeit auf alle Bewegungen so irgend aus Kräften hervorgebracht werden können, einen wesentlichen Einfluss habe, und allerdings verdiene, dass sie mit einem besonderen Namen belegt werde.

76) *Wie auch immer die Bewegung eines Körpers durch Kräfte verändert werden mag, so verhält sich jederzeit die sogenannte lebendige Kraft oder die Masse des Körpers, mit dem Quadrat seiner Geschwindigkeit multiplicirt, wie die Wirksamkeit aller Kräfte so auf den Körper wirken.*

Wenn wir die drei obigen Integral-Gleichungen zusammenthun, so bekommen wir

$$Muu + Mvv + Mww = 2n\int Pdx + 2n\int Qdy + 2n\int Rdz$$

$$\text{oder}\quad M(uu + vv + ww) = 2n\int(Pdx + Qdy + Rdz).$$

Da wir oben gezeigt haben, dass die wahre Geschwindigkeit des Körpers durch $\sqrt{(uu + vv + ww}$ ausgedrückt werde, so ist $uu + vv + ww$ das Quadrat der Geschwindigkeit, und folglich $M(uu + vv + ww)$ die sogenannte lebendige Kraft des Körpers. Ferner ist, wie wir gesehen habe $\int Pdx + \int Qdy + \int Rdz$ die Wirksamkeit der auf den Körper wirkenden Kräfte, woraus denn vo selbst erhellet, dass die lebendige Kraft des Körpers gleich sei der Wirksamkeit mit der Zahl 2 multiplicirt. Nur ist hiebei zu erinnern, dass die Wirksamkeit als eine durch die Integration gefundene Grösse an sich nicht bestimmt sei, sondern eine beständige willkührliche Grösse zu sic nehmen könne. Dieses erfordert auch die Natur der Sache, indem die gegenwärtige Bewegung de Körpers mit von der ihm anfänglich eingedrückten Bewegung, so willkührlich ist, abhängt. Ha man aber für den Anfang diejenige beständige Grösse, welche zur Wirksamkeit hinzugethan werde muss um die lebendige Kraft herauszubringen, bestimmt, so gilt dieselbe hernach immer für di ganze Bewegung, und kann hernach für eine jegliche Zeit und für einen jeglichen Ort des Körper seine wahre lebendige Kraft richtig bestimmt werden. Dieses ist ein beträchtlicher Vorzug, welche das Product der Masse eines Körpers durch das Quadrat seiner Geschwindigkeit vor dem Produc der Masse durch die Geschwindigkeit selbst hat, und den Begriff der lebendigen Kraft über di Grösse der Bewegung weit erhebet, indem aus unsern Gleichungen, welche alle mögliche Bewegungen in sich begreifen, nicht erhellte, dass die Grösse der Bewegung, welche wäre $M\sqrt{(uu + vv + ww}$ für sich selbst irgend in Betrachtung kommt.

---

## X. Capitel.

### Von der scheinbaren Bewegung.

77) *Die scheinbare Bewegung bezieht sich auf einen Zuschauer, und wird durch zwei Stüc bestimmt, erstlich aus der Gegend nach welcher dem Zuschauer ein Körper erscheint, u hernach aus der Entfernung desselben von dem Zuschauer. Dieses ist der scheinbare O des Körpers, und aus der Veränderung desselben wird die scheinbare Bewegung geschät*

Der Zuschauer mag sich befinden wo er will, so setzt man voraus, dass er sich die wahr Gegenden des Raumes richtig vorstellen könne. Alle graden Linien, welche aus dem Auge d Zuschauers rundherum gezogen werden können, bezeichnen gewisse Gegenden, und wenn wir zw Zuschauer setzen, so sind ihnen diejenigen Gegenden einerlei, welche durch Linien so einand gleichlaufend oder parallel sind, bestimmt werden. Wenn wir also zwei Zuschauer annehmen d einen in $O$ den andern in $o$ (Fig. 227.), so deuten die Linien $OM$ und $ON$ dem Zuschauer $O$ gewis Gegenden an, und eben diese Gegenden werden von dem Zuschauer $o$ nach den Linien $om$ und

geschätzet, wenn nämlich *om* mit *OM* und *on* mit *ON* gleichlaufend gezogen wird. Wenn demnach ler Zuschauer *O* in *M* einen Körper erblickt, der Zuschauer *o* aber einen in *m*, so dass die Entfer-ungen *OM* und *om* einander gleich sind, so erscheint der Körper *M* dem Zuschauer *O* an eben-emselben Orte, an welchem der Körper *m* dem Zuschauer *o* erscheint, obgleich die beiden Körper *I* und *m* sich an ganz verschiedenen Orten befinden. Ebenso wird auch der scheinbare Ort zweier .örper in *N* und *n* in Ansehung der beiden Zuschauer *O* und *o* einerlei sein. Wie sich nun ferner er scheinbare Ort eines Körpers mit der Zeit verändert, so wird aus der Veränderung der Gegend nd der Entfernung die scheinbare Bewegung geschätzet. Von dieser Bewegung ist um so viel öthiger hier zu handeln, da wir uns in der Welt keinen andern Begriff als von der scheinbaren ewegung machen können; denn wir können die Oerter der Körper nicht anders als nach dem Orte nseres Aufenthalts schätzen, und wenn wir uns nicht immer an ebendemselben Orte befinden, so uss sich ein grosser Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Bewegung eines Körpers efinden. Dieser Unterschied kann noch weit grösser werden, wenn wir nicht diejenigen Gegenden ir einerlei halten, welche durch gleichlaufende Linien, sondern durch solche Linien bestimmt erden, die gegen den Ort unseres Aufenthalts einerlei Verhältniss haben. Aus diesem Grunde :hreiben wir auch den Fixsternen eine Bewegung zu, weil dieselben ihren Ort in Ansehung der egenden, welche wir auf unserer beweglichen Erde für einerlei halten, verändern. Bei dieser :heinbaren Bewegung kommt es also nicht darauf an, welche Gegenden nach der obigen Erklärung ı der That einerlei sind, sondern welche wir aus Irrthum für einerlei halten.

78) *Wenn der Zuschauer an ebendemselben Orte immer unbeweglich verharret, und die Gegenden durch einerlei Linien schätzet, so ist die scheinbare Bewegung eines jeglichen Körpers von seiner wahren Bewegung nicht unterschieden, und also kommt das Urtheil dieses Zuschauers von der Bewegung aller Körper mit der Wahrheit überein.*

Der Zuschauer bleibe unbeweglich in *O* (Fig. 227.), und erblicke jetzt einen Körper in *M*, so ird er desselben Ort nach der Gegend *OM* und der Entfernung *OM* schätzen. Nach einiger Zeit i dieser Körper nach *N* gekommen, dessen Ort also von dem Zuschauer aus der Gegend und Veite *ON* geschätzet wird; und weil er die Gegenden noch nach ebendenselben Linien beurtheilt, wird er auch jetzt noch den vorigen Ort des Körpers in *M* schätzen, und also den Schluss achen, dass der Körper in dieser Zeit von *M* nach *N* fortgerückt sei, welches auch mit der Vahrheit überein kommt. Wenn aber der Zuschauer inzwischen seinen Begriff von den Gegenden ändert hätte, so würde er sich den vorigen Ort des Körpers nicht mehr in *M* sondern anderswo orstellen, und also von seiner Bewegung ein unrichtiges Urtheil fällen; ist aber in der Einbildung s Zuschauers keine solche Veränderung der Gegenden vorgegangen, so erscheinen ihm alle Bewegungen der Körper wie sie in der That sind. Diejenigen Körper, welche ihm scheinen zu ruhen, finden sich auch wirklich in Ruhe, und welche ihm scheinen gleichförmig in einer graden Linie laufen, die haben auch diese Bewegung in der That. Dieser Zuschauer irrt also nicht, wo er ch den Regeln der Bewegung glaubt, dass entweder zu einer Bewegung Kräfte erfordert werden er nicht: denn diejenigen Körper die ihm scheinen in ihrem Zustand zu verharren, verharren

darin auch wirklich: und eben diejenigen Veränderungen die ihm scheinen vorzugehen, die gehe auch wirklich vor, und werden zu deren Hervorbringung eben diejenigen Kräfte erfordert, welch im Vorigen bestimmt worden: und überhaupt alles was bisher von der wahren Bewegung gesag worden, gilt auch von dieser scheinbaren Bewegung, wenn der Zuschauer still steht und einerl Begriff von den Gegenden beibehält. Ungeachtet dieses an sich selbst ganz klar ist, so war doch nöthig hier wohl bemerkt zu werden, damit man um so viel leichter den Unterschied zwische der wahren und scheinbaren Bewegung einsehen möge, wenn der Zuschauer seine Stelle veränder

79) *Wenn der Zuschauer nicht nur seinen Ort, sondern auch seinen Begriff von den Gegende beständig verändert, so muss er ganz anders von dem Zustand der Körper, das ist vo ihrer Ruhe oder Bewegung urtheilen, als sich derselbe in der That verhält.*

In solchen Umständen befinden wir uns, insofern wir die Stelle der himmlischen Körper nac unserem Gesichtskreise bestimmen, und die Linien, welche wir durch unsern Scheitelpunkt aufwärt ziehen, für einerlei Gegenden halten. Denn da sich die Erde nicht nur um die Sonne sonder auch zugleich um ihren Mittelpunkt herumdrehet, so verändern wir nicht nur alle Augenblicke unser Stelle, sondern auch unsere Gegenden. Um dieses deutlich zu zeigen, so sei jetzt der Mittelpunk der Erde in $C$ und der Zuschauer in $O$ (Fig. 228.), welcher in seiner Scheitellinie $OM$, so aus aufwärts gezogen wird, in $M$ einen Körper erblicke, welchen wir in Ruhe annehmen wollen. Nac einiger Zeit komme der Mittelpunkt der Erde in $c$, der Zuschauer aber wegen der Herumdrehun der Erde in $o$, so wird er jetzt den Körper, als welcher noch an seiner vorigen Stelle steht i der Gegend $oM$ erblicken. Da er ihn aber vorher über seinen Scheitel gesehen, so bildet er sic jetzt ein, er habe ihn vorher in $m$ gesehen, wenn nämlich die Linie $com$ gezogen und $om = O$ genommen wird: und glaubt also der Körper habe sich unterdessen von $m$ in $M$ beweget. Den er vergleichet den gegenwärtigen Ort nicht mit dem vorhergesehenen, sondern mit demjenigen, de er jetzt für ebendenselben hält, welchen er vorhergesehen; er vermeint aber jetzt die Gegend $o$ sei einerlei mit der Gegend $OM$, in welcher er vorher den Körper $M$ gesehen hätte. Sollte er ab die Gegenden richtig schätzen, und jetzt die Gegend $o\mu$, welche der Linie $OM$ gleichlaufend gez gen worden, für ebendieselbe halten, welche er vorher, da er noch in $O$ war, nach der Linie $O$ geschätzt, so würde er sich jetzt einbilden er habe den Körper in $\mu$ gesehen, und weil er i jetzt in $M$ nach der Gegend $oM$ erblickt, glauben, der Körper habe sich unterdessen von $\mu$ bis $M$ bewegt, da derselbe doch unterdessen stillgestanden. Hieraus lässt sich nun leicht schliess wie sein Urtheil ausfallen müsste, wenn der Körper sich unterdessen wirklich bewegt hätte. Es si aber hier zwei Fälle wohl von einander zu unterscheiden: der erste ist nämlich wenn der Zuschau mit seinem Orte auch die Schätzung der Gegenden verändert, der andere aber, wenn er die Gege den richtig schätzt und in seinen verschiedenen Stellungen diejenigen Gegenden für einerlei hä welche durch gleichlaufende Linien bestimmt werden. Auf diese letztere Art beurtheilen wir d Bewegung der himmlischen Körper, wenn wir den Ort derselben nicht nach unserem Scheitelpun sondern nach den Fixsternen bestimmen, denn da die Fixsterne so erstaunlich weit entfernt sind, sind alle Linien, welche von unserem Orte, so sehr er auch verändert wird, zu einem Fixster gezogen werden, für gleichlaufend zu halten.

80) *Wenn der Zuschauer gleichgeschwind in einer graden Linie fortrücket, und die Gegenden richtig schätzet, so scheinen ihm auch alle Körper, welche entweder ruhen, oder gleichförmig nach grader Linie fortlaufen, unverrückt in ihrem Zustande zu verharren und könnte also diese scheinbare Bewegung in der That ohne Wirkung einiger Kräfte bestehen.*

Lasst uns setzen der Zuschauer bewege sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in der graden Linie $Oo$ (Fig. 229.), der Körper aber auch mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in der graden Linie $MN$, so dass wenn der Zuschauer in $O$, der Körper sich in $M$, wenn aber jener in $o$ dieser sich in $N$ befinde. Wenn demnach der Zuschauer in $O$ ist, so erblickt er den Körper in der Gegend und Weite $OM$: nachgehends aber wenn der Zuschauer in $o$ fortgerückt, so sieht er den Körper in $N$ in der Gegend und Weite $oN$. Jetzt bildet er sich aber ein, er habe den Körper vorher in der Gegend und Weite $om$ gesehen, so dass $om$ mit $OM$ gleichlaufend und gleich gross ist, und vermeint daher der Körper sei in dieser Zeit von $m$ in $N$ gekommen und habe die grade Linie $mN$ mit einer gleichförmigen Bewegung beschrieben: welches daher erhellt, weil so gross auch die inzwischen verflossene Zeit angenommen wird, der Winkel $NMm$ immer gleich gross und das Verhältniss der Linie $MN$ zu $Mm$ einerlei bleibt, daher denn auch der Winkel $MNm$ immer gleich gross und das Verhältniss der Linie $Nm$ zu $Mm$ oder zur Zeit einerlei bleiben muss.

Die scheinbare Bewegung ist also ebenfalls gleichförmig und geschieht nach einer graden Linie: erfordert daher ebenso wenig einige Kraft zu ihrer Unterhaltung als die wahre Bewegung. Wenn demnach ein solcher Zuschauer, der gleichförmig nach einer graden Linie fortrückt, einen Körper entweder in Ruhe wahrnimmt oder in einer solchen Bewegung welche gleichförmig nach einer graden Linie geschieht, so kann er sicher schliessen, dass der Körper in seinem Zustande verharre, und keine äussere Kraft auf denselben wirke; eben als wenn er die wahre Bewegung des Körpers betrachten könnte, ungeachtet die wahre Bewegung sonst sehr von der scheinbaren unterschieden sein mag. Weil wir nämlich niemals die wahre Bewegung eines Körpers sehen können, sondern unsere Wahrnehmungen uns immer unmittelbar nur die scheinbare Bewegung der Körper anzeigen, so sehen wir die scheinbare Bewegung als eine wahre an, und untersuchen, ob zur Erhaltung derselben, Kräfte erfordert werden, oder nicht. Wenn wir hernach durch andere Umstände vergewissert werden, ob Kräfte auf den Körper wirken oder nicht? und in wie weit dieselben mit den gefundenen übereinkommen, so können wir hernach daraus den Schluss machen, wie viel die scheinbare Bewegung von der wahren unterschieden sei.

81) *Wenn der Zuschauer gleichgeschwind in einer graden Linie fortrückt, und die Gegenden richtig, dass ist, nach gleichlaufenden Linien schätzet, so werden zur Unterhaltung der scheinbaren Bewegung, wie sehr dieselbe auch von der wahren unterschieden sein mag, eben diejenigen Kräfte erfordert, als zur Unterhaltung der wahren Bewegung.*

Um dieses deutlich zu zeigen, so wollen wir die wahre Bewegung nach drei aufeinander winkelrecht stehenden Flächen $AOB$, $AOC$ und $BOC$ wie oben (Fig. 226.) betrachten, und die Bewegung von der Fläche $AOB$ durch $u$, von der Fläche $AOC$ durch $v$ und von der Fläche $BOC$ durch $w$ ausdrücken. Gegen diese Flächen vergleiche man ebenfalls die Bewegung des Zuschauers, und da

dieselbe gleichförmig nach einer graden Linie geschieht, so werden seine Bewegungen von diesen Flächen gleichförmig sein. Wenn wir also seine Bewegung von der Fläche $AOB$ durch $\alpha$, von der Fläche $AOC$ durch $\beta$, von der Fläche $BOC$ durch $\gamma$ andeuten, so werden $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beständige Grössen sein. Nun aber wird dem Zuschauer die Bewegung des Körpers von der Fläche $AOB$ um so viel kleiner scheinen, je geschwinder seine eigene Bewegung von dieser Fläche ist, und daher wird die scheinbare Bewegung von dieser Fläche sein $= u - \alpha$. Auf gleiche Weise sieht man, dass die scheinbare Bewegung von der Fläche $AOC$ sein werde $= v - \beta$, und von der Fläche $BOC = w - \gamma$ und diese drei stückweise betrachteten scheinbaren Bewegungen werden zusammen die ganze scheinbare Bewegung vorstellen. Aus den drei obengegebenen Gleichungen aber (74) erhellet, dass zur Unterhaltung der wahren Bewegung drei Kräfte $MP = P$, $MQ = Q$ und $MR = R$ erfordert werden, so dass

$$P = \frac{Mdu}{ndt}, \quad Q = \frac{Mdv}{ndt} \quad \text{und} \quad R = \frac{Mdw}{ndt}.$$

Nun setze man $u - \alpha$, $v - \beta$, $w - \gamma$ anstatt $u$, $v$, $w$, und da wegen der beständigen Grösse von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die Differentialien $du$, $dv$, $dw$ unverändert bleiben wie vorher, so ist klar, dass zur Unterhaltung der scheinbaren Bewegung ebendieselben Kräfte $P$, $Q$ und $R$ erfordert werden als zur wahren Bewegung. Wofern also nur der Zuschauer sich gleichgeschwind in einer graden Linie beweget, so wird er sich nicht in Beurtheilung der Kräfte, welche zur Unterhaltung der Bewegung der Körper erfordert werden, irren, ob er dieselbe gleich aus der scheinbaren Bewegung der Körper herleitet; wie wir denn auch vorher gesehen, dass wenn die wahre Bewegung ohne einige Kraft bestehen kann, die scheinbare gleichfalls keine Kräfte erfordere.

82) *Wenn aber der Zuschauer sich nicht gleichförmig in einer graden Linie bewegt, dennoch aber die Gegenden richtig schätzet, so werden um die scheinbare Bewegung aller Körper zu bewerkstelligen, noch ausser den Kräften, welche wirklich auf dieselben wirken, solche Kräfte erfordert, welche in einem jeden Körper alle Augenblicke eben die Veränderung hervorbringen, welche in dem Orte des Zuschauers vorgeht, aber nach einer umgekehrten Richtung.*

Die Bewegung des Zuschauers mag so veränderlich sein als man will, so kann dieselbe immer in Ansehung der drei angenommenen Flächen durch die drei Bewegungen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vorgestellt werden, wenn man diese Grössen für veränderlich annimmt. Wenn nun die wahre Bewegung die drei folgenden Kräfte erfordert:

$$P = \frac{Mdu}{ndt}, \quad Q = \frac{Mdv}{ndt}, \quad R = \frac{Mdw}{ndt},$$

so ist klar, dass wenn wir für $u$, $v$, $w$ schreiben $u - \alpha$, $v - \beta$, $w - \gamma$, zur Unterhaltung der scheinbaren Bewegung die drei nachfolgenden Kräfte erfordert werden:

$$\text{Kraft } MP = \frac{Mdu}{ndt} - \frac{Md\alpha}{ndt} = P - \frac{Md\alpha}{ndt}$$

$$\text{Kraft } MQ = \frac{Mdv}{ndt} - \frac{Md\beta}{ndt} = Q - \frac{Md\beta}{ndt}$$

$$\text{Kraft } MR = \frac{Mdw}{ndt} - \frac{Md\gamma}{ndt} = R - \frac{Md\gamma}{ndt}.$$

lso ausser den Kräften $P$, $Q$, $R$ welche wirklich auf einen jeglichen Körper wirken, werden noch rei andere Kräfte erfordert, welche in einem jeden Körper eben diejenige Aenderung aber nach rkehrter Richtung hervorbringen, als welche in dem Ort des Zuschauers selbst vorgeht. Setzt an die Masse des ganzen Körpers, worauf sich der Zuschauer befindet $= \mathfrak{M}$, und dass die in emselben vorgehenden Veränderungen auch von dreien Kräften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ herrühren, welche nach en Gegenden $MP$, $MQ$, $MR$ stossen, so haben wir vermöge der obigen Gleichungen $\mathfrak{M}d\alpha = n\mathfrak{P}dt$, $\mathfrak{M}d\beta = n\mathfrak{Q}dt$, $\mathfrak{M}d\gamma = n\mathfrak{R}dt$.

Daher die zur Unterhaltung der scheinbaren Bewegung erforderten Kräfte sein werden:

$$\text{Kraft nach } MP = P - \frac{M\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}$$

$$\text{Kraft nach } MQ = Q - \frac{M\mathfrak{Q}}{\mathfrak{M}}$$

$$\text{Kraft nach } MR = R - \frac{M\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}}.$$

83) *Aus diesem Grunde kann die scheinbare Bewegung aller himmlischen Körper bestimmt werden, wenn man annimmt, dass auf einen jeglichen himmlischen Körper ausser den Kräften, welche wirklich auf denselben wirken, noch eine Kraft ihre Wirkung ausübe, welche sich zu der Kraft, von welcher die Erde getrieben wird, verhalte wie die Masse desselben Körpers zur Masse der Erde, und welche den Körper nach der entgegengesetzten Richtung antreibe.*

Man pflegt sich hier den Zuschauer in dem Mittelpunkte der Erde selbst vorzustellen, weil ein Ort sonst allzugrossen Veränderungen unterworfen wäre, als dass man dieselben also in verehrter Richtung auf die himmlischen Körper übertragen könnte. Man hat aber Mittel, die für iesen Zuschauer gefundene scheinbare Bewegung so zu verändern, dass sie sich für einen jeglichen uf der Oberfläche der Erde befindlichen Zuschauer schicke. Man setzt hernach voraus, dass alle räfte, welche auf einen jeglichen himmlischen Körper wirken bekannt seien, wie auch diejenigen, on welchen die Erde getrieben wird. Man darf also nur hernach diese letzteren Kräfte in verehrter Richtung auf einen jeglichen himmlischen Körper anwenden, nachdem man dieselben nach em Verhältnisse der Masse der Erde zur Masse eines jeden himmlischen Körpers vermehret oder ermindert, wie in dem Satz vorgeschrieben worden. Da man nun solchergestalt weiss, von was ir Kräften ein jeglicher himmlischer Körper getrieben werden muss, damit die scheinbare Bewegung bei demselben Statt finde, so kann man durch Hülfe der gegebenen Gleichungen diese scheinare Bewegung selbst ausfindig machen. Hier ist zwar der Ort nicht dergleichen tiefsinnige Unterachungen anzustellen, allein es war doch nöthig zu zeigen, dass die aus dem Wesen der Körper ergeleiteten Regeln der Bewegung auf alle Fälle ohne Ausnahme angewandt werden können, und ass auch die schwersten Untersuchungen, so man bisher angestellt hat, wirklich vermittelst dieser

Regeln ausgeführt werden. Zu diesem Ende habe ich die Grundsätze in solche Gleichungen verfasst, welche bei einem jeglichen Falle leicht angebracht werden können und wer nur in der Auflösungskunst geübt ist, der ist dadurch im Stande ohne fernere Anleitung die schwersten Fragen, so in der Lehre von der Bewegung vorkommen, aufzulösen; daher hoffentlich Niemand diese allzuausführliche Abhandlung übel deuten wird.

---

## XI. Capitel.

### Allgemeine Grundregeln zur Naturlehre.

84) *Wenn ein Körper entweder in Ruhe verbleibt, oder sich gleichförmig nach einer graden Linie bewegt, so können wir schliessen, dass derselbe von aussen entweder gar nicht gedrückt werde, oder dass die Kräfte, welche je auf ihn wirken, einander im Gleichgewicht halten.*

Diese Regel folget unmittelbar aus dem Begriff der Standhaftigkeit; denn da ein jeglicher Körper von selbst entweder in Ruhe bleibt, oder nach einer graden Linie gleichgeschwind fortläuft, so ist keine äussere Kraft nöthig um denselben in diesem Zustande zu erhalten; sondern eine solche Kraft würde vielmehr den Zustand des Körpers verändern. So lange also ein Körper in ebendemselben Zustande verharret, so ist es ein sicheres Zeichen, dass keine äusserliche Kraft eine Wirkung auf denselben habe. Demnach wird derselbe entweder gar nicht von aussen gedrückt, oder wenn je Kräfte vorhanden sind, welche auf denselben einen Druck ausüben, so ist es gewiss dass dieselben einander im Gleichgewicht halten, und die Wirkung einer jeglichen von den übrigen zernichtet werde. Wie aber mehrere Kräfte, so auf einen Körper wirken einander im Gleichgewicht halten, wird in der Wissenschaft von dem Gleichgewicht gelehret, welche sich ganz auf diesen Fall gründet, dass wenn zwei gleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirken, dieselben in dem Zustande des Körpers gar keine Aenderung hervorbringen, und es also ebenso viel ist, als wenn gar keine Kräfte vorhanden wären. Wenn man also sieht dass ein Körper in seinem Zustande verharret, ungeachtet er von einer Seite gedrückt wird, so kann man sicher schliessen, dass derselbe von der entgegengesetzten Seite gleich stark gedrückt werde. Ich sehe zum Exempel, dass ein auf dem Tische liegender Körper in Ruhe verbleibt, ungeachtet derselbe herunterfallen würde wenn der Tisch durchdringlich wäre, woraus ich schliesse dass die Undurchdringlichkeit des Tisches den Fall desselben aufhalte, und also den Körper aufwärts drücke; weil aber derselbe dieses Drucks ungeachtet in Ruhe verbleibt, so schliesse ich daraus, dass noch eine andere Kraft vorhanden sein müsse, welche den Körper ebenso stark abwärts drücke, und die Schwere genannt wird: also dass in diesen Fall die Schwere, und die aus der Undurchdringlichkeit des Tisches entstehende Kraft einander im Gleichgewicht halten.

85) *Wenn wir aber sehen dass ein ruhender Körper in Bewegung gesetzt wird, oder dass ein bewegter Körper entweder nicht gleichgeschwind fortläuft oder seine Richtung verändert, so können wir sicher schliessen dass auf denselben eine Kraft wirke, und aus dem Vorhergehenden wird man sowohl die Grösse als die Richtung dieser Kraft bestimmen können.*

Da ein jeglicher Körper immerfort in seinem Zustande verharret, so lang derselbe durch keine sserliche Kraft darin gestört wird, so folget hieraus ganz klar, dass wenn der Zustand eines rpers verändert wird, diese Veränderung einer äusserlichen Kraft zugeschrieben werden müsse. nn wollte man dem Körper selbst eine Kraft zueignen, vermöge welcher er seinen Zustand verän-rt hätte, so würde diese Kraft mit der Standhaftigkeit in offenbarem Widerspruche stehen, und se wesentliche Eigenschaft zernichten: indem es nicht mehr wahr sein würde, dass ein jeglicher rper so lange in seinem Zustande verharre, als er von keiner äusserlichen Ursache darin gestört rde. Da nun diese Eigenschaft allen Körpern wesentlich zukommt, so ist gewiss dass von einer lichen vorfallenden Veränderung in dem Zustande eines Körpers, die Ursache einer äusserlichen aft, welche auf den Körper wirkt, müsse zugeschrieben werden. Aus der geschehenen Verän-ung können wir auch sowohl die Grösse als die Richtung dieser Kraft anzeigen. Aus dem obigen n dieses sehr leicht geschehen, denn wenn ein Körper, dessen Masse ist $= M$ jetzt eine schwindigkeit $= v$ hat, welche in der Zeit $dt$ um $dv$ vermehret wird, so wissen wir dass dieser rper inzwischen vorwärts getrieben worden von einer Kraft $= \frac{Mdv}{ndt}$: wäre aber seine Geschwin-keit um $dv$ vermindert worden, so hätte eben diese Kraft rückwärts auf ihn gewirkt. Nehmen aber wahr dass der Körper nicht in einer graden Linie fortgeht, sondern seinen Lauf krümmt, vergleiche man denselben mit einem Zirkelbogen, und setze dessen halben Durchmesser gleich $r$, ist bewiesen worden, dass dieser Körper seitwärts nach dem Mittelpunkte des beschriebenen kelbogens getrieben werde, von einer Kraft, die $= \frac{Mvv}{nr}$. Gehen sowohl in der Geschwindigkeit Richtung Veränderungen vor, so findet man zwei Kräfte, welche aber leicht in eine einzige racht werden können.

86) *Diese Schlüsse sind aber nur alsdann richtig, wenn entweder die wahre Bewegung eines Körpers selbst betrachtet wird, oder die scheinbare Bewegung sich auf einen solchen Zuschauer bezieht, welcher selbst gleichgeschwind nach einer graden Linie fortrückt.*

Wenn wir den wahren Zustand eines Körpers betrachten, so ist kein Zweifel, dass diese lüsse nicht ihre Richtigkeit haben sollten. Da sich aber unsern Sinnen niemals der wahre tand der Körper vorstellt, weil wir uns selbst mit der Erde in Bewegung befinden, und unsere ne Bewegung mit den Körpern zuschreiben, woraus die scheinbare Bewegung erwächst, so ist er Urtheil meistentheils nur auf den scheinbaren Zustand der Körper gerichtet. Allein auch es Urtheil würde richtig sein, wenn unsere eigene Bewegung gleichförmig wäre und nach einer len Linie geschehe, nachdem gezeigt worden, dass auch in diesem Falle die scheinbare Bewegung diejenigen Kräfte zu ihrer Erhaltung fordere, welche zur wahren Bewegung nöthig sind. Wenn unsere eigene Bewegung nicht gleichförmig ist und nicht nach einer graden Linie geschieht,

so irren wir uns, wenn wir glauben, dass die Körper von ebendenselben Kräften getrieben werden auf welche wir nach den gegebenen Regeln aus der scheinbaren Bewegung schliessen. Wir können aber den Irrthum leicht verbessern, wenn wir zu diesen Kräften noch solche hinzusetzen, welche in den Körpern eben diejenigen Veränderungen zu wirken im Stande sind, so in dem Orte unseres Aufenthalts vorgehen und dieses nach ebenderselben Richtung. Denn da man die zur scheinbaren Bewegung erforderten Kräfte findet, wenn man von den wirklichen Kräften diejenigen abzieht, welche eben diejenigen Veränderungen, denen der Ort des Zuschauers unterworfen ist, hervorbringen können; so findet man aus jenen Kräften zurück die wirklichen, wenn man zu jenen diese letzteren wiederum hinzusetzt. Hier wird aber angenommen, dass der Zuschauer die Gegenden immer richtig nach gleichlaufenden Linien schätzet; wenn also dieses nicht geschieht, so ist auch diese Verbesserung nicht hinlänglich. Wenn wir daher in der Einbildung, dass die himmlischen Körper sich innerhalb 24 Stunden um die Erde herumdrehen, die zu einer solchen erstaunlichen Bewegung erforderten Kräfte denselben beilegen wollten, so würden wir uns über die Massen betrügen, und den Fehler nicht leicht verbessern können, weil derselbe daher entspringt, dass wir einerlei Gegenden nicht durch gleichlaufende Linien, sondern solche schätzen, welche gegen unsere Erde einerlei Lage haben.

87) *Diejenigen Kräfte welche zu einer jeglichen vorgehenden Veränderung in dem Zustand eines Körpers erfordert werden, muss man in den nächst daran befindlichen und berührenden Körpern suchen, als aus deren Druck auf denselben diese Kräfte nothwendig entstehen, und aus der Undurchdringlichkeit ihren Ursprung haben müssen.*

Wenn nichts von aussen auf den Körper wirkte, so würde auch keine Veränderung in desselben Zustande vorgehn: wenn also eine Veränderung darin vorgegangen, so muss eine äusserliche Kraft auf denselben gewirkt haben. Diese Kraft aber kann von nichts Anderem herrühren, als von den Körpern, welche denselben unmittelbar berühren; denn wenn dergleichen Körper entweder nicht vorhanden wären, oder auf diesen keine Kraft ausübten, so wäre auch keine Ursache vorhanden, warum in dem Zustande desselben eine Veränderung vorgehen sollte: Die Kräfte bestehen demnach in einem Stoss oder Druck, wodurch die berührenden Körper auf den, von dessen verändertem Zustande die Frage ist, wirken. Solche Wirkung entsteht aber nur in sofern, als die Körper mit dem, davon die Frage ist, nicht in ihrem Zustande verharren können, ohne einander durchzudringen. Weil also in ihrem Zustande eine Veränderung nothwendig vorgehen muss, so reicht die Undurchdringlichkeit diejenigen Kräfte dar, welche vermögend sind diese Veränderungen hervorzubringen: woraus erhellet, dass alle Kräfte welche zur Veränderung des Zustandes irgend eines Körpers erfordert werden, aus der Undurchdringlichkeit ihren Ursprung haben, in sofern die Veränderungen etwa nicht von einem Geiste gewirkt werden. Wenn man also befunden, dass ein Körper nach einer gewissen Gegend angetrieben worden, so muss die Kraft in einem von der entgegengesetzten Seite des Körpers geschehenen Drucke, und dieser in den andern Körpern, so jenen daselbst berühren, gesucht werden, weil der Druck immer winkelrecht auf den Ort der Berührung sein muss. Entweder leidet der Körper von den andern Seiten gar keinen Druck, oder jener ist

um so viel stärker, dass er die übrigen alle um so viel übertreffe als zur geschehenen Veränderung zu Nöthen ist. Also aus der Schwere eines Körpers schliessen wir mit Recht, dass derselbe von oben herab mit einer gleichen Kraft gedrückt werde, es kann aber sein dass dieser Körper von allen andern Seiten auch gedrückt wird, wenn nur der Druck von oben herab das Uebergewicht behält.

88) *Ein Körper wird von anderen gestossen oder gedrückt, wenn er wegen seiner Undurchdringlichkeit ihnen im Wege ist, dass sie in ihrem Zustande nicht verharren können; und durch diesen Stoss oder Druck wird derselbe Körper selbst, in seinem Zustande verändert. Aus solchen Umständen entspringen alle Kräfte welche auf die Körper wirken.*

Es sind hier zwei Hauptfälle zu bemerken; der eine ist, wenn der Körper anderen also im Wege ist, dass sie ihre Geschwindigkeit nicht behalten können, der Richtung aber nicht hinderlich fällt, und hier ereignet sich der eigentliche Stoss. Hernach kann es geschehen, dass der Körper ihrer Geschwindigkeit der anderen keinen Abbruch thut, dieselben aber nöthigt ihre Richtung zu verändern, und in diesem Falle empfindet er diejenige Wirkung, welche eigentlich ein Druck genannt wird, obschon in der That der Stoss von einem Druck nicht unterschieden ist, wie weiter unten gezeigt werden wird. Der erstere Fall ereignet sich, wenn der Körper, den wir in Bewegung gebracht, entweder vor sich einen andern Körper antrifft, welcher sich nach eben der Richtung langsamer bewegt, oder wenn demselben von hinten ein anderer mit einer grössern Geschwindigkeit nach eben der Richtung nachfolgt; so lang nur diese beiden Körper auf einander wirken, so entsteht ein Stoss, durch welchen dieselben an dem Orte ihrer Berührung auf einander drücken, und solchergestalt ihren Zustand verändern. Wenn aber ein Körper eine ausgehöhlte Figur hat als *AB* (Fig. 20.) und ein anderer Körper *C* dergestalt gegen den streift, dass er nach der Richtung *EC* diese Höhlung berührt, und nach derselben seinen Lauf fortzusetzen anfängt, so wird er bald genöthigt, seinen Lauf nach dieser Figur zu krümmen, ohne dabei seine Geschwindigkeit merklich zu verändern, und da er seinen Lauf nach keiner Krümmung lenken kann, er werde dann gegen den Mittelpunkt derselben getrieben, so muss die Undurchdringlichkeit des Körpers *AB* die Stelle dieser Kraft vertreten, und deswegen wird auch der Körper *AB* hinwiederum von dem Körper *C* zurückgedrängt werden. Wenn wir nämlich setzen, dass die Masse des Körpers $C = M$, seine Geschwindigkeit $= v$, und der halbe Durchmesser der Krümmung $AB = r$ sei, so wird die Kraft, mit welcher der Körper *C* immer in dem Berührungspunkte auf den Körper *AB* drückt, gleich sein $\frac{Mvv}{nr}$, wie oben gezeigt worden. Hier sehen wir aber den Körper *AB* als unbeweglich an; sollte derselbe aber dem Drucke nachgeben und seine Stellung gegen die Bewegung des Körpers *C* verändern, so würde auch der Druck einer Aenderung unterworfen sein. Inzwischen ist dieses Exempel hinreichend zu zeigen wie ein Körper ohne einen wirklichen Stoss auf einen andern wirken und eine Kraft ausüben könne, und aus diesen beiden Fällen wird man leicht begreifen was es für eine Bewandniss haben müsse, wenn zwei Körper schief auf einander stossen, welcher Fall hier noch nicht gründlich ausgeführt werden kann.

89) *Wenn ein Körper von andern Körpern verhindert wird, dass er den Kräften, welche a ihn wirken, nicht Folge leisten kann, so drückt er weiter auf diese Körper mit gleich Kräften, und es ist ebenso viel als wenn diese Körper unmittelbar von denselben angetri ben würden.*

Dieses folget ebensowohl aus der Undurchdringlichkeit, als wenn zwei Körper die nicht ihrem Zustande verbleiben können ohne einander durchzudringen, auf einander wirken, denn we ein Körper von einer Kraft gedrückt wird, ihm aber ein anderer Körper im Wege steht, dass d Wirkung dieser Kraft nicht erfolgen kann, welche doch erfolgen würde, wenn dieser andere Körp entweder gar nicht da wäre, oder sich frei durchdringen liesse, so wird dieser Körper von jene mit gleicher Kraft weiter gedrückt, und es ist klar, dass diese zweite fortgesetzte Kraft ebenfa aus der Undurchdringlichkeit entstehe. Wenn diesem zweiten Körper ferner ein dritter im We steht, dass die auf ihn drückende Kraft ihre Wirkung nicht ausüben kann, so empfindet au dieser dritte Körper ebendenselben Druck, welcher solchergestalt weiter auf einen vierten, fünft und so fort, kann fortgesetzt werden. Also wenn ein Körper so auf einem Tische liegt, abwä gedrückt wird, so hindert der Tisch, dass der Körper dieser Kraft zufolge nicht herabfällt, d Tisch erhält also eben diesen Druck, und ist eben so viel als wenn er unmittelbar von derselb Kraft angetrieben würde. Der Tisch steht ferner auf dem Boden, welcher die Wirkung der Kr auf dem Tische aufhält, und also eben den Druck dieser Kraft empfindet. Endlich ruhet der Bod auf der Erde, auf welche also eben diese Kraft ihren Druck ausübt: woraus erhellet, wie ein Dru auf eine sehr grosse Entfernung durch viele Körper fortgepflanzt werden könne. Der ganze Dru erstreckt sich aber nur so weit, wenn derselbe in keinem von den mittleren Körpern seine Wirku hat ausüben können, denn wenn einer von den mittleren Körpern keine Hindernisse vor si gefunden hätte, seinen Zustand der auf ihn wirkenden Kraft gemäss zu verändern, so würde auch keine Kraft auf die folgenden Körper geäussert haben. Hätte aber die Kraft nur zum Th ihre Wirkung auf einen Körper ausgeübt, so wäre auch nur ein Theil der Kraft, nämlich derjeni welcher keine Wirkung hervorgebracht, weiter auf die folgenden Körper fortgepflanzt worden. E Kraft wird also nur in sofern weiter fortgesetzt, als dieselbe nicht ihre ganze Wirkung, wie sol oben bestimmt worden, hat ausüben können.

90) *Wenn demnach ein Körper von einer Kraft gedrückt wird, so muss die Ursache dersel in den unmittelbar anrührenden Körpern gesucht werden, welche allezeit darin best dass diese Körper entweder nicht wirklich in ihrem Zustande verharren, oder den auf i wirkenden Kräften keine völlige Folge leisten können, ohne jenen Körper durchzudrin*

Dass zwei Körper auf einander drücken müssen, wenn sie ohne einander durchzudringen ni in ihrem Zustande verharren können, ist schon zur Genüge gezeigt worden. Es kann aber ei Körper auch von andern, die ihn berühren, gedrückt werden, wenn diese gleich in Ruhe verblei oder ihre Bewegung unverrückt fortsetzen: solches geschieht nämlich wenn diese von an gedrückt werden, die Veränderung aber, welche diesem Drucke gemäss in ihrem Zustande v gehen sollte, wegen der Undurchdringlichkeit des ersten Körpers nicht völlig erfolgen kann: da

nn dieser Theil den Druck, welcher nicht zur Wirkung hat gelangen können, ausstehen muss. f gleiche Art können auch jene dritten Körper von anderen vierten und diese weiter von anderen en Druck erhalten haben, so, dass ein Druck welcher an einem Orte aus der ersten Ursache standen, auf andere weit entlegene Körper kann übergetragen werden. Eine Kraft aber so auf en Körper wirket, erhält alsdann ihre völlige Wirkung wenn sie in seinem Zustande diejenige ränderung, welche nach den obigen Regeln erfolgen sollte, wirklich hervorbringt, und wenn ses geschehen kann, ohne einen andern Körper durchzudringen, so wird auch die Kraft auf nen andern Körper fortgepflanzt. Wo aber eine Kraft in dem Körper, auf welchen sie unmit- bar wirket, ihre Wirkung entweder gar nicht, oder doch nicht völlig ausüben kann, so dass nn dieselbe erfolgen sollte, ein anderer Körper durchgedrungen werden müsste, so empfindet in n ersten Falle dieser Körper den ganzen Druck derselben Kraft, im anderen Falle aber nur einen eil desselben. Dieser Theil aber ist eben derjenige, welcher seine Wirkung nicht hat erreichen nen. Weil nämlich in dem Zustande des Körpers eine kleinere Veränderung vorgeht, als vermöge d auf ihn wirkenden Kraft erfolgen sollte, so kann man sich eine Kraft vorstellen, welche diese inere Veränderung gewirket hätte: und der Ueberschuss der wirklichen Kraft über diese, giebt jenige Kraft, welche weiter auf die Körper so der völligen Wirkung im Wege gestanden, fort- flanzt wird. Hieraus begreift man, wie alle Körper in der Welt einem immerwährenden Drucke allen Seiten ausgesetzt sein können, woraus dann beständig Veränderungen in ihrem Zustande olgen müssen, welche demnach keiner anderen Ursache als den Kräften der Undurchdringlichkeit geschrieben werden können.

---

## XIII. Capitel.

### Von dem Unterschied der Körper in Vergleichung ihrer Ausdehnung mit der Standhaftigkeit.

91) *In einem jeglichen Körper giebt es zwei Eigenschaften, welche eine Grösse haben und also einer Ausmessung fähig sind, nämlich die Ausdehnung und die Standhaftigkeit, aus welcher letzteren die Menge der Materie, welche man einem Körper zueignet, geschätzt wird.*

Da nach der ersten allgemeinen Eigenschaft ein jeglicher Körper ausgedehnt ist, die Ausdeh- g aber in das Geschlecht der Grössen gehört, so lässt sich ein jeder Körper in Ansehung seiner dehnung ausmessen oder bestimmen um wie viel die Ausdehnung eines Körpers grösser oder ner ist als die Ausdehnung eines andern Körpers, und hieraus wird eigentlich die Grösse eines pers beurtheilt. In der Geometrie wird aber gelehrt, wie man die Grösse eines Körpers nach m gewissen Maasse als cubischen Ruthen, Schuhen und Zollen ausmessen soll: und also wenn den Grössen, welche sich in den Körpern befinden die Rede ist, so kommt zu allererst ihre ntliche Grösse oder Ausdehnung zu betrachten vor. Hernach haben wir gesehen, dass sich die

Standhaftigkeit auch ausmessen lasse, indem man sich dieselbe in einem Körper um so viel grösser oder kleiner vorstellen muss als in einem andern je eine grössere oder kleinere Kraft erfordert wird in dem Zustande desselben eine ebenso grosse Veränderung in gleicher Zeit hervorzubringen als in dem andern: und aus dieser Ausmessung ist die Menge der Materie entsprungen, welche einem Körper beigelegt wird. Hieraus ist also leicht zu begreifen wenn man sagt, dass sich in einem Körper ebenso viel, oder zweimal so viel Materie befinde als in einem andern. Wenn man sich zwei gleich grosse Kugeln vorstellt, die eine von Gold, die andere von Silber, so sind diese zwei Körper in Ansehung der Ausdehnung oder der eigentlichen Grösse einander gleich, es ist aber gewiss dass die güldene Kugel eine weit grössere Menge Materie in sich fasse als die silberne; die Menge der Materie in der güldenen verhält sich beinahe zu der Menge der Materie in der silbernen wie 19 zu 11. Die Undurchdringlichkeit liefert an sich selbst keine Grösse dar, indem sich nicht sagen lässt, dass ein Körper mehr oder weniger undurchdringlich sei als ein anderer; alle sind es im höchsten, das ist, in einem gleichen Grade.

92) *Je mehr Materie in einerlei Ausdehnung enthalten ist, je dichter ist ein Körper, und man findet die Dichtigkeit eines Körpers, wenn man seine Materie durch seine Grösse dividirt. Es wird aber in verschiedenen Körpern ein grosser Unterschied in der Dichtigkeit wahrgenommen.*

Hier muss in Sonderheit der Unterschied zwischen der eigenthümlichen und fremden Materie eines Körpers wohl in Betrachtung gezogen werden. Die eigenthümliche Materie eines Körpers wird diejenige genannt, welche sich zugleich mit dem Körper bewegt, und deren Standhaftigkeit überwunden werden muss, wenn man den Zustand des Körpers verändern will; denn da die Menge der Materie aus der Kraft beurtheilt wird, welche nöthig ist um in dem Zustande des Körpers eine gegebene Veränderung in einer gegebenen Zeit hervorzubringen, so muss alle diejenige Materie nur zu einem Körper gerechnet werden, deren Zustand verändert werden muss, wenn man den Zustand des Körpers verändern will. Es befinden sich aber in einem jeglichen Körper eine Menge Poren oder Höhlungen von welchen sich jetzt noch nicht bestimmen lässt, ob dieselben mit einiger Materie angefüllt sind, oder nicht? Ist aber darin eine Materie enthalten, wie aus den folgenden Untersuchungen zur Genüge erhellen wird, so ist dieselbe mehrentheils so subtil und flüchtig, dass sie den Veränderungen, so im Körper vorgehen, nicht unterworfen ist; sondern indem sie durch die Poren frei durchlaufen kann, so zu reden, keinen Antheil an den Veränderungen des Körpers nimmt. Dieses ist nun die obgedachte fremde Materie, welche zwar einen Theil der Ausdehnung des Körpers anfüllt, dabei aber die Standhaftigkeit und Menge der Materie nicht vermehret. Man kann sich einen solchen Körper als ein von allen Seiten durch und durch durchlöchertes Gefäss vorstellen, welches unter dem Wasser bewegt werden soll: denn weil das Wasser nicht nur alle diese Löcher ausfüllt, sondern durch dieselben auch frei durchlaufen kann, so kann dieser Körper bewegt werden, ohne dass man nöthig hätte dem in den Löchern befindlichen Wasser eine gleiche Bewegung einzudrücken, und deswegen würde das Wasser als eine fremde Materie des Körpers zu betrachten sein. Inzwischen ist doch nicht zu läugnen, dass das Wasser nicht einigen Antheil an der Bew-

ung der Körper nehmen, und dazu auch einige Kraft erfordert werden sollte, woher also die igenthümliche Materie einen Zuwachs bekommen müsste. Ob aber die in den Poren eines Körpers efindliche subtile Materie aus gleichem Grunde die Eigenthümliche vermehre, wird unten fleissiger ntersucht werden.

93) *Wenn wir durch die wahre Grösse eines Körpers nur denjenigen Theil seiner Ausdehnung verstehen, welcher mit seiner eigenthümlichen Materie angefüllt ist, und also davon die Poren, in welchen sich entweder gar nichts, oder eine fremde Materie befindet, ausschliessen, so wird die wahre Dichtigkeit eines Körpers herauskommen, wenn man seine eigenthümliche Materie durch seine wahre Grösse dividirt.*

Man muss also die wahre Grösse eines Körpers wohl von seiner scheinbaren Grösse unterscheien, als welche aus dem ganzen Raume, welchen der Körper sammt seinen Poren einnimmt, eschätzt wird. Es ist demnach die wahre Grösse eines Körpers immer kleiner als die scheinbare, nd der Unterschied ist die Grösse, welche alle Poren zusammengenommen, betragen. Ebenso muss ıan auch die wahre Dichtigkeit eines Körpers von der scheinbaren wohl unterscheiden; denn bgleich zu beiden nur die eigenthümliche Materie genommen wird, so muss man dieselbe einmal urch die wahre Grösse und das andere Mal durch die scheinbare Grösse dividiren: weil nun die ahre Grösse kleiner ist als die scheinbare, so muss die wahre Dichtigkeit um ebenso viel grösser erauskommen. Es könnte also sein, dass für alle Körper die wahre Dichtigkeit einerlei wäre. ieses würde nämlich geschehen, wenn die Körper nur deswegen dem Scheine nach mehr oder eniger dicht wären, weil sie weniger oder mehr Poren in sich enthielten. Obgleich nämlich Gold n weit dichterer Körper ist als Holz, so könnte doch in diesen beiden Körpern die wahre Dichgkeit einerlei sein: wenn nämlich im Holz um so viel mehr Poren wären als im Gold. Die angeellten Versuche geben auch zu erkennen, dass sich in einem Körper, so weniger dicht ist, weit ıehr Poren befinden; und daher wenn beide Körper einerlei scheinbare Grösse haben, die wahre rösse des weniger dichten viel kleiner sein müsse als des dichtern. Wenn nun dieses seine Richgkeit hat, so folget daraus zum wenigsten so viel, dass die wahre Dichtigkeit in den Körpern icht so sehr verschieden sein könne, als die scheinbare. Es wird aber unten durch tüchtige ründe dargethan werden, dass in allen irdischen Körpern, über welche wir Versuche anstellen önnen, die wahre Dichtigkeit gleich gross ist. Diese Gründe werden aber daher gezogen, dass in len Körpern sich die Schwere sowohl wie die wahre Grösse, als auch wie die Menge der eigenıümlichen Materie verhält, daher unser Schluss von allen schweren Körpern gelten kann.

94) *Ungeachtet es aber der Wahrheit ziemlich gemäss scheint, dass gar in allen Körpern die wahre Dichtigkeit gleich gross sei, so lässt sich doch dieses von der subtilen Materie, welche die Poren der Körper ausfüllt, keineswegs behaupten, weil sonst keine Bewegung in der Welt Platz finden könnte.*

Ob wir gleich keinen Grund einsehen, warum in allen Körpern die Menge der eigenthümlichen ıterie zu der wahren Grösse einerlei Verhältniss haben sollte, so macht doch die obige Betrach-

*

tung über die wahre Dichtigkeit der Körper diese Meinung sehr wahrscheinlich. Denn wenn all gröbere Körper einerlei wahre Dichtigkeit haben, so scheint fast eine in dem Wesen gegründet Nothwendigkeit vorhanden zu sein, kraft welcher in einem jeglichen Körper diese und keine ander Verhältnisse zwischen der wahren Grösse und der Menge der Materie Statt finden könnte. Allei wenn wir dieses auch von der subtilen, in den Poren der Körper befindlichen Materie behaupten wollten, so würde daraus folgen, dass der ganze Raum der Welt mit einer allenthalben gleic dichten Materie angefüllt wäre, deren Dichtigkeit sogar noch grösser wäre als die scheinbare Dich tigkeit des Goldes. Denn wenn man die Poren der Körper nicht ganz leer zugeben will, welche gar nicht geschehen kann, so gilt es gleichviel ob diese subtile Materie die Luft ausfüllt, oder di Materie der gröberen Körper, weil beide einerlei Dichtigkeit hätten. In diesem Raume könnte sic also kein Körper bewegen, ohne zum wenigsten ebenso viel Materie aus dem Wege zu stossen, al er nach seiner wahren Grösse antrifft; man hätte also den Fall, da sich ein Körper in einer flüssi gen Materie, welche mit ihm einerlei Dichtigkeit hat, bewegen soll: es ist aber ausgemacht, das alsdann wegen des erstaunlichen Widerstandes keine Bewegung Statt finden könnte, oder zu wenigsten sogleich wieder aufhören müsste. Wollte man einwenden, diese Materie wäre selbst i einer Bewegung, und reisse die Körper mit sich, so würde solches nur von denjenigen Körper gelten, welche sich mit der Materie gleichgeschwind nach einerlei Richtung bewegten; weil wi aber wissen, dass ein Körper nach allen Gegenden bewegt werden könne, und sogar wenn kein gröbere Materie vorhanden, fast gar keinen Widerstand antreffe, so lässt sich diese Meinung vo der gleichen wahren Dichtigkeit aller Körper auf keine Weise behaupten.

95) *Man muss also entweder behaupten, dass die Poren der Körper ganz und gar leer sin oder dass die darin befindliche Materie eine viel tausendmal kleinere Dichtigkeit habe, a die eigenthümliche Materie, woraus die gröbern und irdischen Körper bestehen.*

Wollte man sagen dass die Poren der Körper ganz und gar leer wären, so würde man al diejenigen Gründe gegen sich haben, welche gegen den leeren Raum angeführt werden, insonderhe aber, da unumstösslich dargethan werden wird, dass alle Körper rundherum von einer subtile Materie gedrückt werden, so würde zum wenigsten diese in die Poren eindringen. Treten wir ab denjenigen bei, welche allen leeren Raum leugnen, so müssen wir nothwendig zugeben, dass d in den Poren der Körper befindliche subtile Materie eine viel tausendmal kleinere Dichtigkeit hab als die gröbern und irdischen Körper: wer gelernt hat den Widerstand berechnen, welchen die i flüssigen Materien bewegten Körper leiden, der wird dieses ohne Anstand zugeben. Man betrach nur die Bewegung eines Körpers in einem luftleeren Raume, welche, wie die Erfahrung lehret, g keinen merklichen Widerstand leidet: nun aber muss dieser Raum, mit einer subtilen Materie ang füllt sein (es gilt gleichviel ob es eben diejenige ist, welche sich in den Poren der Körper befind oder eine andere; indem die Frage ist, was ausser den gröbern Körpern für subtile Materien in d Welt wirklich vorhanden sind); und da der Körper darin einen weit geringeren Widerstand antrit als in der Luft, deren scheinbare Dichtigkeit doch gegen 20,000mal kleiner ist als die des Goldes,

uss die wahre Dichtigkeit der subtilen Materie zum allerwenigsten 100,000mal kleiner sein als die ahre Dichtigkeit der irdischen Körper. Wollte man sagen dieser Raum, wie auch die Poren der örper wären zum Theil leer und nur zum Theil mit subtiler Materie angefüllt, wofern man den eren Theil nicht über 100,000mal grösser annehmen wollte als den andern angefüllten, so müsste an doch zugeben, dass die Dichtigkeit der subtilen Materie weit geringer wäre als die der Körper. ieses lässt sich auch ohne die Lehre des Widerstandes darthun: denn wenn die Poren mit einer erstaunlich dichten Materie angefüllt wären, so flüssig man auch dieselbe annehmen mag, so äre doch nicht möglich dass der Körper sich bewegen und seinen Zustand verändern könnte, ohne gleich den Zustand dieser Materie zu verändern, wozu besondere Kräfte erfordert würden, welches och der Erfahrung widerspricht.

96) *In der Welt befinden sich also zum wenigsten zwei Hauptarten von Materien, eine grobe und subtile. Die grobe hat einen bestimmten und unveränderlichen Grad der Dichtigkeit, welche sogar grösser ist als die scheinbare Dichtigkeit des Goldes; dahingegen die Dichtigkeit der subtilen Materie viel tausendmal kleiner ist als jene.*

Weil die eigenthümliche Materie aller groben Körper einerlei Dichtigkeit hat, so ist kein weifel, dass dieser Grad der Dichtigkeit nicht seinen Grund in dem besonderen Wesen dieser aterie haben sollte. Ob eine andere ähnliche Materie möglich wäre, welche entweder eine grössere ler kleinere Dichtigkeit hätte, getrauen wir uns hier nicht zu bestimmen: es ist aber doch höchst erkwürdig, dass die wahre Dichtigkeit von allen Körpern, über welche man Versuche anstellen nn, einerlei befunden wird; da sich doch bei diesen Körpern eine solche Mannigfaltigkeit in allen ücken äussert, dass man alle Aehnlichkeit davon ausschliessen will. So gross aber auch die ıähnlichkeit sein mag, so ist doch gewiss, dass in der wahren Dichtigkeit eine vollkommene eichheit Statt findet. Doch muss aber ein solcher bestimmter Grad der Dichtigkeit dem Wesen r Körper überhaupt nicht so eigen sein, dass gar kein anderer möglich wäre, indem wir gezeigt, ss die subtile Materie, welche die Poren der Körper ausfüllt, und allen übrigen Raum, so von n gröbern Körpern ledig gelassen wird, einnimmt, eine viel tausendmal kleinere Dichtigkeit habe. nun diese Materie ebenfalls wirklich vorhanden und wegen ihrer Eigenschaften für einen Körper halten ist, so müssen wir in der Welt zweierlei Materien zugeben, nämlich jene grobe und diese btile, deren vornehmster Unterschied darin besteht, dass jene, nämlich die Grobe, mit einem stimmten Grade der Dichtigkeit begabt ist, welche sogar grösser ist als die scheinbare Dichtigkeit s Goldes: diese subtile hingegen eine viel tausendmal kleinere Dichtigkeit habe. Ob es von dieser btilen Materie weiter verschiedene Arten giebt, von welchen eine dichter sei als die andere, ıssen wir hier an seinen Ort gestellt sein lassen, und wollen zum wenigsten alle diese Arten, nn je mehrere vorhanden wären, unter dem allgemeinen Namen der subtilen Materie begreifen. nn so lange die Erklärung der Begebenheiten der Natur nicht mehrere solche Arten erheischet, würde es verwegen sein, und gegen die Regeln einer gesunden Naturlehre laufen, wenn wir ss aus unserer Einbildung die Anzahl der subtilen Materien vermehren wollten.

97) *Alle Körper in der Welt sind aus diesen zwei Materien, der groben und subtilen, zusam mengesetzt, und aller Unterschied derselben entsteht aus der verschiedenen Vermischun und Zusammensetzung dieser zwei Materien.*

Man behauptet mit Recht, dass alle Körper unmöglich aus einer einzigen gleichartigen Materi zusammen gesetzt sein können, denn da man keinen leeren Raum zugeben kann, so würden all Körper gleich dicht herauskommen, und in denselben kein anderer Unterschied Statt finden, als i ihrer Figur, ungeachtet auch diese wegfallen würde, weil alle Körper einander berühren, und als zusammen nichts anders als einen Klumpen von einer gleichartigen Materie darstellen würden. U nun die grosse Mannigfaltigkeit der Körper zu erklären, so haben einige Naturlehrer alle Theilche der Körper unter sich verschieden behauptet, daher denn unendlich verschiedene Arten der Mater wirklich vorhanden sein müssten. Der Sprung ist aber von einer einzigen gleichartigen Materie a unendlich viel, zu gross, und hätte man zum wenigsten vorher zeigen müssen, dass zwei verschi dene gleichartige Materien nicht hinreichen können alle Verschiedenheiten in den Körpern hervo zubringen. Da wir schon angeführt, und aus dem Folgenden noch deutlicher erhellen wird, da alle grobe Materie einerlei Dichtigkeit habe, so fällt die unendliche Verschiedenheit in den Theilch dieser Materie weg: und da unsere zwei Materien auf unendlich vielerlei Arten mit einander ve mischt und zusammengesetzt werden können, so kann ein Jeder leicht begreifen dass daher a Mannigfaltigkeit, welche in den Körpern der Welt wahrgenommen wird, gar wohl entstehen könn Alles kommt hier auf die Menge, Grösse und Ordnung der Poren an, welche in einem jeglich Körper zwischen den groben Theilen zerstreut sind, und in diesen Stücken findet eine solche Ve schiedenheit statt, welche in der That unendlich ist; und hieraus lässt sich gar leicht begreif wie es möglich sei, dass nicht zwei Körper in allen Stücken einander ähnlich seien, denn da d Schöpfer bei einem jeglichen Körper eine besondere Absicht gehabt, so ist auch höchst wahrsche lich dass seine Zusammensetzung aus der groben und subtilen Materie verschieden sein müs in welcher Absicht der Grundsatz des nicht zu unterscheidenden gar wohl bestehen kann: u wenn dieser Grundsatz recht erklärt wird, so leidet er auch von der Gleichartigkeit der grob Materie keinen Stoss.

---

## XIII. Capitel.

### Von den besonderen Eigenschaften der groben und subtilen Materie.

98) *Ein Körper kann nur insofern in einen kleinern Raum gebracht werden, als seine Po mehr zusammengepresst werden: also kann nur die scheinbare Grösse eines Körpers, n aber seine wahre Grösse verändert werden; wenn nämlich keine grobe Materie davon w genommen oder hinzugesetzt wird.*

Da die subtile Materie, welche sich in den Poren der Körper aufhält, so sehr dünn ist, s kann es gleichviel gelten, ob dieselbe mit zur eigenthümlichen Materie eines Körpers gerech

ird: wir wollen aber doch nur die grobe Materie unter diesem Namen verstehn, und also einem örper so lange ebendieselbe Menge Materie oder Masse zuschreiben, als die Menge der darin findlichen groben Materie einerlei bleibt. Nun ist von vielen Körpern bekannt dass sich dieselben einen kleinern Raum zusammenpressen lassen, wodurch ihre scheinbare Grösse vermindert wird: ss aber auf diese Art auch die wahre Grösse vermindert werde, kann keineswegs geschlossen erden. Denn in einigen Fällen giebt es sogar der Augenschein, dass nur die Poren enger zusamengedrückt werden: es wird aber unten gezeigt werden, dass das Gewicht eines Körpers sich wie ine wahre Grösse verhalten müsse: da nun das Gewicht eines Körpers immer einerlei bleibt, so hr derselbe auch in einen kleinern Raum zusammengepresst werden mag. Wie aus der Luft und deren Körpern, die einer sehr grossen Zusammendrückung fähig sind zur Genüge erhellet; so lget dass seine wahre Grösse immer einerlei bleiben, und die Veränderung nur in der scheinbaren össe vorgehe. Weil auch die Dichtigkeit der groben Materie allenthalben einerlei ist, so scheint eser bestimmte Grad der Dichtigkeit derselben so eigen zu sein, dass auch keine Kraft vermögend i, dieselbe weder in einen engern Raum zusammen zu drücken, noch in einen grössern auszudehn, ohne dass darin Poren entständen: in jenem Falle aber würde die Dichtigkeit vermehret, in esem aber vermindert. Wäre eine Veränderung in der wahren Dichtigkeit möglich, so würden e Versuche über die Schwere der Körper uns nicht immer einerlei Dichtigkeit anzeigen, indem h viele Körper in einem sehr zusammengepressten Zustande befinden, bei welchem folglich die chtigkeit grösser sein müsste. Aus denjenigen Körpern aber, welche gar keiner Zusammendrückung hig sind, kann man auch zuverlässig schliessen, dass sich die Dichtigkeit der groben Materie gar cht verändern lasse.

99) *Die grobe Materie ist also an sich selbst keiner anderen Veränderung fähig als in Ansehung ihrer Figur, welche, wenn hinlängliche Kräfte vorhanden, auf alle mögliche Arten verändert werden kann.*

Wir betrachten hier einen Körper, der nur allein aus grober Materie besteht, und in seiner nzen Ausdehnung keine Poren einschliesst. Von aussen mag er wohl mit der subtilen Materie geben sein, weil man sich sonst von seinen Grenzen keinen Begriff machen könnte. Dieser rper wird also durch und durch einerlei Dichtigkeit haben, und alle Theile welche der Grösse h gleich sind, werden auch gleich viel Materie in sich enthalten: diese Dichtigkeit wird denseln auch so eigen sein, dass keine Kraft vermögend ist, denselben in einen kleinern Raum zusamnzupressen. Dieser ganze Körper wird also einen Klumpen ganz gleichartiger Materie ähnlich n, in welchem keine Verschiedenheit der Theile wahrzunehmen ist; denn da alle Theile, welche n darin begreifen lassen, gleich dicht sind, und auch durch Poren keine Absonderung oder terschied in den Theilen angezeigt wird, so kann zum wenigsten in diesem Stücke keine Verhiedenheit Platz finden. Ob in Ansehung der Härte oder anderer Beschaffenheiten ein Unterschied glich sei? wollen wir hier nicht untersuchen, weil daher kein solcher innerlicher Unterschied tünde, dergleichen hier in Betrachtung gezogen werden. Inzwischen aber ist dieser Körper lbar, und man kann sich vorstellen dass derselbe in so viel Theile, als man immer will, zer-

theilet und wirklich zerlegt werde: setzt man diese Theile anders zusammen, so bekommt de Körper eine andere Figur; und ist also aller möglichen Figuren gleich fähig, wenn nur die dazu erforderten Kräfte vorhanden sind. Also ist es möglich dass ein solcher Körper der jetzt kugel rund ist, zu einer andern Zeit eine viereckigte Figur bekomme. Es kann auch sein, dass wenn seine Theile nicht gleich bewegt werden, seine Figur alle Augenblicke verändert werde, welche geschieht, wenn der Körper leicht und biegsam ist. Ein solcher Körper kann auch flüssig sein, in welchem Falle der geringste Umstand vermögend ist seine Figur zu verändern: doch aber muss sich sein Inhalt immer von gleicher Grösse befinden, und seine Dichtigkeit allenthalben einerlei bleiben Es ist aber nicht sehr wahrscheinlich, dass sich in der Welt solche Körper befinden, vielmeh scheinen alle durch und durch mit Poren angefüllt, und folglich mit der subtilen Materie vermisch zu sein.

100) *Dass die subtile Materie auch allezeit und allenthalben eine beständige Dichtigkeit habe sollte, dergestalt dass dieselbe durch keine Kräfte in einen kleineren Raum getriebe werden könnte, scheint der Wahrheit nicht gemäss zu sein. Vielmehr möchte auch hier ein Hauptunterschied zwischen der groben und subtilen Materie bestehen, dass sich die zusammendrücken liesse.*

In dem Wesen der Materie überhaupt findet sich kein Grund, warum eine gewisse Meng Materie immer nur an eine gewisse Ausdehnung gebunden sein sollte: und da wir schon zweierl Materien entdeckt haben, welche in Ansehung der Dichtigkeit so sehr von einander unterschied sind, so ist gewiss, dass das Wesen der Materie überhaupt keine gewisse und bestimmte Dichtigke erfordere. Die Ursache also, warum die grobe Materie mit einer unveränderlichen Dichtigkeit i muss nicht sowohl in dem allgemeinen Wesen der Körper, als in dem besonderen Wesen dies Materie liegen. Weil nun die subtile Materie von der groben so wesentlich unterschieden ist, hat man keinen hinreichenden Grund zu schliessen, dass die subtile Materie ebenfalls mit ei unveränderlichen Dichtigkeit begabet sei. Aus den bisher festgesetzten Gründen können wir zw auch das Gegentheil nicht schliessen, es ist uns aber genug dass diese Gründe hier nichts entsch den. Weil wir nun aus der allgemeinen Erfahrung allein das Dasein zweierlei Materien in der W und die unveränderliche Dichtigkeit der groben Materie festgesetzt haben, so müssen wir auch Untersuchung der besonderen Eigenschaften der subtilen Materie die Erfahrung zu Rathe zieh Wir werden aber unten bei Erklärung vieler natürlichen Begebenheiten deutlich sehen, dass subtile Materie allerdings einer Veränderung in ihrer Dichtigkeit fähig ist; und wenn wir nur Federkraft der Körper genauer erwägen, so wird man leicht finden, dass sich dieselbe unmöglh erklären lasse, ohne der subtilen Materie selbst eine solche Kraft zuzuschreiben. Es lässt sich a keine solche Kraft begreifen, wo keine Zusammendrückung Statt findet, denn wenn die sub Materie eben wie die grobe gar keine Zusammendrückung zuliesse, so ist aus den hierüber an stellten Untersuchungen zur Genüge abzunehmen, dass die Federkraft der Körper unmöglich erk werden könnte.

101) *Wir müssen zwar der subtilen Materie eine gewisse Dichtigkeit zuschreiben, welche ihrer Natur am meisten gemäss ist, doch aber muss es möglich sein dieselbe in einen kleinern Raum zusammendrücken; allein hiezu werden Kräfte erfordert, und man begreift leicht, dass je mehr dieselbe zusammengedrückt werden soll, dazu eine um so viel grössere Kraft erfordert werde.*

Es kann nicht gleichgültig sein, einen wie grossen Raum eine gewisse Menge subtiler Materie nnehme: denn wenn man sich davon eine gewisse Menge ganz allein ohne einige Verbindung mit nderer Materie vorstellt, so muss dieselbe einen gewissen Ranm einnehmen, in welchem sie auch ermöge ihrer Standhaftigkeit immerfort verharren würde. Hieraus erwächst nun eine gewisse ichtigkeit, welche der Natur der subtilen Materie gemäss zu erachten ist. Inzwischen müssen wir och behaupten, dass ein grösserer Grad der Dichtigkeit mit ihrer Natur nicht ganz und gar streite, dem sonst ihre Dichtigkeit nicht veränderlich sein könnte, wie doch erwiesen worden. Von selbst imlich und ohne Zuthun einer äusserlichen Ursache wird eine solche Materie ebenso wenig ihre itürliche Dichtigkeit, als ihren Zustand verändern; allein wenn dieselbe ringsherum von Kräften edrückt wird, dass sie nirgend entwischen kann, so muss der schon möglich erwiesene Fall Statt nden, dass dieselbe in einen kleinern Raum zusammengepresst, und ihr dadurch ein grösserer Grad er Dichtigkeit beigebracht werde. Dieses muss man nothwendig zugeben, weil man sonst die öglichkeit der Zusammendrückung leugnen müsste. Man ersieht aber hieraus ferner, dass die ırch bestimmte Kräfte gewirkte Zusammendrückung auch bestimmt sein müsse: denn wenn ebeneselben Kräfte die subtile Materie immer weiter zusammendrücken könnten, so müsste sie endlich einen Punkt zusammengepresst werden, welches ungereimt wäre. Eine bestimmte Kraft ist also ır vermögend die Dichtigkeit der subtilen Materie auf einen gewissen Grad zu vermehren, und eht alsdann, so zu reden, mit derselben im Gleichgewicht: sollte sie noch enger zusammengedrückt erden, so müsste man dazu eine grössere Kraft anwenden. Hieraus folget also ganz klar, dass nmer eine um so weit grössere Kraft erfordert werde, je mehr diese subtile Materie zusammengeückt werden soll: deswegen aber lässt sich das wahre Verhältniss nicht bestimmen, ob zu einer ppelten Vermehrung der Dichtigkeit auch just eine doppelte Kraft erfordert werde; eine solche estimmung aber ist auch zu unserm gegenwärtigen Endzweck nicht nöthig.

102) *Wenn die subtile Materie in einen engeren Raum gebracht worden, als ihr natürlicher Zustand mit sich bringt, so übt dieselbe eine Kraft aus, sich auszudehnen, und diese Kraft ist um so viel stärker, jemehr die subtile Materie zusammengedrückt worden.*

Es wird eine Kraft erfordert um die subtile Materie in einen kleinern Raum zusammenzupresn, als ihrem natürlichen Zustande gemäss ist, und dennoch befindet sich in derselben eine Kraft, r Zusammendrückung zu widerstehen. Wenn also eine Menge subtiler Materie, welche natürherweise einen cubischen Schuh einnimmt, in einen halben cubischen Schuh durch eine dazu thige Kraft zusammengedrückt worden, und diese Kraft jetzt zu wirken aufhört, so kann die aterie nicht in diesem zusammengedrückten Zustande verbleiben; denn weil sie in diesem Zustande

eine gleiche Kraft ausübt, welche der äusserlichen Kraft widersteht, und mit derselben im Gleichgewicht steht, sobald diese äusserliche Kraft zu wirken aufhört, so muss die innerliche Kraft ihr Wirkung dadurch ausüben, dass die Materie sich wiederum ausdehne und den ihr natürlichen Raum von einem cubischen Schuh einnehme. Wenn dieses nicht geschehe, so würde folgen, dass de zusammengedrückte Zustand ihr eben natürlich wäre. Ein solcher zusammengedrückter Zustan kann also füglich ein gewaltsamer Zustand genannt werden, weil die Materie darin nicht anders al durch eine äusserliche Kraft erhalten werden kann, und in einem solchen Zustande übt die Materi eine gleiche Kraft aus, um sich auszudehnen, welche die Federkraft oder Elasticität der subtile Materie genannt wird. Es ist demnach die Federkraft der subtilen Materie diejenige Kraft, welch sie ausübt wenn sie sich in einem gewaltsamen Zustande befindet, und welche derjenigen Kra gleich ist, so erfordert wird, um sie in diesen gewaltsamen Zustand zu bringen und darin z erhalten. Je mehr also die subtile Materie zusammengedrückt wird, je grösser wird ihre Federkraft. Es sei $d$ die natürliche Dichtigkeit der subtilen Materie, und man setze dass dieselbe a eine Dichtigkeit $=2d$ zusammengepresst werde, so wird sie in diesem gewaltsamen Zustande ei gewisse Kraft $K$ ausüben, worin alsdann ihre Federkraft besteht. Sollte sie in einen noch kleinere Raum zusammengetrieben werden, dass ihre Dichtigkeit $=3d$ würde, so würde auch die Fedekraft grösser sein als $K$, weil eine grössere Kraft nöthig ist um sie in diesen Zustand zu bringe wie sich aber diese zu jener eigentlich verhalten werde, lässt sich noch nicht bestimmen. So vi wissen wir, dass wenn die Dichtigkeit $D$ mit der Federkraft $K$ verknüpft ist, $K$ dergestalt von abhänge, dass wenn $D=d$ alsdann $K=o$, wenn aber $D=nd$ alsdann $K$ immer grösser werd je mehr Einheit die Zahl $n$ in sich enthält.

103) *Die Zusammendrückung der subtilen Materie steht mit demjenigen, was oben von d Undurchdringlichkeit beigebracht worden, in keinem Widerspruche: und wenn die Begriffe recht auseinander gesetzt werden, so wird man finden, dass die Federkr sogar einerlei Ursprung habe mit denjenigen Kräften, welche oben der Undurchdrinlichkeit sind zugeeignet worden.*

Wenn man sich einen Körper, als aus gewissen Theilen, deren jeder einen bestimmten Ran erfordert, zusammengesetzt vorstellt, so ist nicht möglich zu begreifen, wie ein Körper in ein kleinern Raum zusammengepresst werden könne, ohne dass seine Theile einander durchdringe sollten, wenn man nämlich allen leeren Raum zwischen den Theilen ausschliesst. Allein die Begriff ist darin unrichtig, dass man sich erstlich einbildet es gebe solche Theile, welche vermö ihres Wesens eine gewisse Grösse haben müssen, da doch in dem Wesen nichts ist, welches einer gewissen Menge Materie eine gewisse Ausdehnung verbinden sollte. Hernach stellt man sic diese Theilchen als wirkliche Einheiten vor, aus welchen der Körper zusammengesetzt sein s welches doch mit der Theilbarkeit der Körper streitet. In der Einbildung kann man sich w einen Körper als aus 1000, 10,000 und so viel Theilen als man immer will, zusammengese vorstellen, und diese Theilchen als so viel Einheiten ansehen, allein dieses sind nur willkührige in der Einbildung befindliche Einheiten, in der Natur selbst finden gar keine Einheiten statt.

örper kann demnach zusammengedrückt werden, wenn diese eingebildeten Theilchen kleiner werden nd näher zusammenkommen: und dieses kann geschehen ohne dass eine wirkliche Durchdringung or sich gehen sollte. Wir wollen uns einen Körper vorstellen, welcher jetzt mit seiner Materie inen cubischen Schuh Raum einnehmen soll; man stelle sich ferner eine Kraft vor, welche denelben in einen kleinern Raum zusammenzupressen bemühet sei. Entweder wird nun diese Kraft en Körper wirklich in einen engern Raum zusammentreiben oder nicht, je nachdem das besonere Wesen dieses Körpers beschaffen ist. Kann der Körper nicht in einen kleinern Raum zusamnengetrieben werden, so widersteht er in diesem seinem Zustande der auf ihn wirkenden Kraft it gleicher Gewalt, und aus diesem Falle haben wir eigentlich die Kräfte der Undurchdringlichkeit ergeleitet. Ist aber der Körper einer Zusammendrückung fähig, so wird ihn die gedachte Kraft is auf einen gewissen Grad zusammendrücken, hernach aber wird derselbe eine gleiche Kraft wie n dem ersteren Falle ausüben, um einer weiteren Zusammendrückung zu widerstehen, welche raft jetzt die Federkraft genannt wird; und also in Ansehung ihres Ursprungs von jenen Kräften er Undurchdringlichkeit gar nicht unterschieden ist. Beide gründen sich darauf, dass ein Körper iner jeglichen Kraft, nachdem sie ihn in einen gewissen Zustand gebracht, wozu sie vermögend ewesen, mit gleicher Kraft widerstehe, und sich der fernern Wirkung derselben widersetze.

104) *Daraus aber, dass sich die subtile Materie zusammendrücken lässt, und immer von einer grössern Kraft in einen kleinern Raum zusammengedrückt werden kann, folget keineswegs dass dieselbe endlich gar in einen Punkt gebracht, und also gleichsam zernichtet werden könne.*

Wir haben die Verhältnisse, nach welchen eine grössere Kraft die subtile Materie auf einen rössern Grad der Dichtigkeit zusammendrücke, nicht bestimmt, so viel aber ist leicht zu begreifen, ass wenn eine gewisse Menge solcher Materie in einen unendlich kleinen Raume gebracht werden ollte, weil alsdann die Dichtigkeit unendlich gross sein würde, auch die dazu erforderte Kraft icht kleiner als unendlich gross sein müsste, welches ebenso viel ist als wenn man die Möglichkeit iner solchen Zusammendrückung platterdings läugnete. Es kann aber auch sein, dass schon eine nendliche Kraft erfordert wird, um die subtile Materie nur auf einen gewissen Grad der Dichtigeit zusammenzupressen; dergleichen Verhältnisse zwischen einem jeglichen Grad der Dichtigkeit und er dazu erforderten Kraft kann man sich unendlich viele vorstellen: es sei zum Exempel die natürche Dichtigkeit $= d$, welche mit gar keiner Federkraft verbunden ist, und es wirke auf die subile Materie eine Kraft $= p$, welche dieselbe dergestalt zusammendrücke, dass ihre Dichtigkeit erde $= s$; also dass dem Grade der Dichtigkeit $s$ eine Federkraft $= p$ zukomme. Sollte nun ein olches Verhältniss stattfinden, $s = \frac{np+k}{p+k}\, d$; wo $n$ eine beliebige Zahl grösser als 1 andeute, so ürde daraus folgen, dass wenn die Kraft $p = o$, die Dichtigkeit herauskomme $s = d$, wie es die atur der Sache erfordert. Hernach würde auch immer eine grössere Kraft $p$, eine grössere ichtigkeit hervorbringen; nämlich wenn $p = k$, so würde sein $s = \frac{n+1}{2}\, d$, wenn $p = 2k$ so würde ein $s = \frac{2n+1}{3}\, d$, wenn $p = 3k$, so würde sein $s = \frac{3n+1}{4}\, k$, und also immer grösser je grösser

die Kraft $p$ angenommen wird. Wenn aber die Kraft $p$ sogar unendlich gross gesetzt würde, s bekäme man doch nur $s = nd$, oder es würde unmöglich sein die subtile Materie bis auf diese Grad der Dichtigkeit zusammenzudrücken. Es mag nun ein solches oder irgend ein anderes Ver hältniss in der Natur Statt finden, so bleibt doch immer die Zusammendrückung in einen unendlic kleinen Raum eine unmögliche Sache.

---

## XIV. Capitel.

### Von dem Aether oder der subtilen Himmelsluft.

105) *Der ganze Raum in der Welt, welcher zwischen den gröbern Körpern, die in unser Sinne fallen, ledig gelassen wird, ist mit der obgedachten subtilen Materie angefüll welche daher Aether oder die subtile Himmelsluft genannt wird.*

Entweder ist der Raum zwischen der Erde und den himmlischen Körpern ganz und gar lee oder er ist mit Materie angefüllt; diejenigen, welche das erstere behaupten, können mit ihr Meinung nicht bestehen, indem sie zugeben müssen, dass alles zum wenigsten mit Lichtstrahle angefüllt ist, welcher Umstand allein vermögend ist den leeren Raum zu verwerfen. Ist aber dies ungeheure Himmelsraum mit Materie erfüllt, so muss dieselbe ungemein subtil sein, indem d himmlischen Körper sich darin so frei bewegen, dass kaum die geringste Spur von einigem Wide stande zu merken ist. Wir wissen aus der Erfahrung wie gross der Widerstand ist, den ein i der Luft bewegter Körper empfindet, woraus wir sicher schliessen können, dass jene Materie noc weit subtiler sein müsse: da auch die Luft immer dünner wird, je höher man über der Erde hi aufsteigt, so ist sehr wahrscheinlich, dass dieselbe endlich sich ganz und gar in jene Materie ve liere. Die Luft besteht nämlich theils aus der subtilen Materie, theils aus der groben, welc letztere aber in der Höhe je länger je mehr abnimmt, und endlich gar verschwindet, so dass zulet der ganze Raum allein mit der subtilen Materie angefüllt bleibt. Diese subtile Materie wird n von den Naturforschern Aether oder die subtile Himmelsluft genannt, weil sie in dieser Gege rein und ohne Vermischung mit der groben Materie vorhanden ist: da sie hingegen in den irdisch Körpern nirgend anders als mit der groben Materie vermischt gefunden wird, und eine gleic Bewandniss wird es auch haben mit den Körpern, welche sich in den andern Hauptkörpern d Welt befinden. Also ist der ganze ungeheure Weltraum mit dem Aether oder unserer subtil Materie angefüllt, deren Dichtigkeit folglich viel 1000mal kleiner ist, als die Dichtigkeit der grob Materie, und welche von dieser auch darin hauptsächlich unterschieden ist, dass sie sich in ein kleinern Raum zusammendrücken lässt, und alsdann ihre Federkraft ausübt. Ob aber der Aeth mit der Welt eine eingeschränkte Grösse habe oder nicht? ist eine Frage deren Entscheidung nic hieher gehört.

106) *Die subtile Himmelsluft befindet sich in einem gewaltsamen Zustande und ist weit über ihre natürliche Dichtigkeit zusammengedrückt, daher sie allenthalben eine ungemein grosse Federkraft ausübt und alle Körper zusammendrückt.*

Dass die subtile Materie eine gewisse und ihr natürliche Dichtigkeit haben müsse, und nicht ıders als durch hinreichende Kräfte auf einen grössern Grad der Dichtigkeit gebracht und darin rhalten werden könne, ist schon gewiesen worden. Hier kommt es also darauf an, ob dieselbe in ›r Welt sich in ihrem natürlichen Zustande befinde, oder ob sie wirklich auf einen grössern Grad er Dichtigkeit zusammengedrückt sei, und sich also vermöge ihrer Federkraft bemühe sich auszuɔhnen. Es geben uns aber alle Begebenheiten in der Natur, welche uns von dem Dasein dieser ıbtilen Himmelsluft überführen und ohne dieselbe nicht erklärt werden können, zur Genüge zu ·kennen, dass dieselbe auf einen ziemlichen Grad zusammengedrückt sein und eine sehr grosse ederkraft ausüben müsse. Wir dürfen nur die Geschwindigkeit der Lichtstrahlen betrachten, so üssen wir dieser Materie einen sehr hohen Grad der Zusammendrückung nebst einer unglaublichen ünnigkeit zuschreiben: denn da kein Zweifel ist, dass die Lichtstrahlen durch den Aether auf ne ähnliche Art wie der Ton durch die Luft erregt werden, so kann dieses nicht in Zweifel ezogen werden. Man hat durch unumstössliche Gründe erwiesen, dass eine solche Bewegung um viel schneller sein müsse, je grösser die Federkraft der Materie, in welcher diese Bewegung eschieht und je kleiner zugleich ihre Dichtigkeit sei. Da nun die Geschwindigkeit des Lichts so el tausendmal schneller ist als die des Tons, so muss auch die Federkraft des Aethers gar viel ärker sein als die der Luft. Man könnte zwar einwenden, dass die grosse Dünnigkeit des Aethers ezu allein hinreichend wäre; allein dieselbe muss doch immer mit einer Federkraft verbunden in, woraus ein gewaltsamer Zustand erwächst. Andere Begebenheiten als die Härte der Körper ıd ihre Federkraft, führen uns auch nothwendig auf eine sehr starke Zusammendrückung des ethers, so dass dieser gewaltsame Zustand ausser allem Zweifel gesetzt ist. Da nun der Aether ne so grosse Kraft hat sich auszudehnen, so wird man begierig sein zu wissen, durch was für isserliche Kräfte derselbe in seinen Schranken erhalten werde: denn wenn man sich die Welt ıdlich und ausser derselben nichts als einen leeren Raum vorstellt, so würde nichts hindern, dass ch der Aether nicht wirklich dahin ausbreitete: oder man müsste sich die Welt als in einem sten Gewölbe eingeschlossen einbilden. Behauptet man aber die Welt unendlich gross, so scheiɔn doch die Schwierigkeiten wegen der wirklichen Ausdehnung des Aethers noch nicht gehoben sein. Solche Fragen laufen aber nicht in die Naturlehre, und wir müssen uns begnügen diejegen Umstände zu erforschen, welche auf die Begebenheiten der Welt einen unmittelbaren Einfluss ben, ohne das göttliche Werk der Schöpfung und Erhaltung der Welt ergründen zu wollen.

107) *Wenn der Aether sich in Ruhe befinden soll, so muss seine Federkraft und folglich auch seine Dichtigkeit allenthalben gleich sein: ist aber seine Dichtigkeit an einem Orte grösser als an einem andern, so muss er sich von jenem Orte gegen diesen ausdehnen und also eine Bewegung entstehen.*

Da sich der Aether in einem gewaltsamen Zustande befindet, so ist ein jeglicher Theil desselben

bemüht sich auszubreiten, und durch seine Federkraft um sich herum alle Körper wegzustossen, welche seiner Ausbreitung im Wege stehen. Wenn also die um ihn herum befindlichen Körp entweder gar nicht, oder mit einer kleineren Kraft entgegen drücken, so wird er dieselben wirkli von sich stossen, und sich ausbreiten: widersetzen sich aber jene Körper mit gleicher Kraft v allen Seiten, so wird der Aether im Gleichgewichte erhalten und muss in seinem Zustande verbleibe Drücken aber die herumbefindlichen Körper mit einer grösseren Kraft zurück, als der Aether h sich auszubreiten, so wird er sogar in einen engern Raum zusammengetrieben, bis durch seine ve mehrte Dichtigkeit auch seine Federkraft so gross wird, dass sie der zusammendrückenden Kraft widerstehen im Stande ist. In diesen Fällen, da eine Bewegung entsteht, ist doch zu merken da wenn die Theile des Aethers einmal in Bewegung gesetzt worden, dieselbe alsdann nicht plötzli aufhören könne, wenn seine Federkraft mit der von aussen drückenden Gewalt ins Gleichgewic gekommen, sondern der Aether wird sich noch vermöge seiner Standhaftigkeit entweder weit ausbreiten, oder mehr zusammenziehen, bis durch die widerstehende Kraft seine Bewegung gänzli gehemmt worden, und weil alsdann seine Federkraft kleiner oder grösser sein wird als die äusse Gewalt, so wird er von neuem in Bewegung gesetzt werden. Hieraus erhellet also sattsam, da wenn die verschiedenen Theile des Aethers nicht mit einer gleichen Federkraft begabt sind, denselben nothwendig eine Bewegung entstehen müsse, indem sich diejenigen, welche eine grösse Dichtigkeit haben ausbreiten, und die übrigen mehr zusammendrücken: und eine solche Bewegu muss wegen der Standhaftigkeit zum wenigsten einige Zeit fortdauern. Wenn demnach der Aeth in einer vollkommenen Ruhe verbleiben soll, so ist unumgänglich nöthig, dass alle Theile desselb eine gleiche Federkraft und also eine gleiche Dichtigkeit haben.

108) *Wenn der Aether in Ruhe und in demselben sich ein Körper befindet, so wird dersel von allen Seiten her gleich stark gedrückt, und die auf ihn wirkenden Kräfte sind Gleichgewicht, dergestalt dass der Körper davon in keine Bewegung gesetzt werden wi es wäre denn, dass er sich liesse zusammendrücken, in welchem Falle er von dem Aet in einen kleinern Raum zusammengepresst werden würde.*

Man stelle sich einen Körper *ABCDE* (Fig. 231.) vor, welcher rundherum mit Aether umgeb sei; der Aether aber befinde sich in einer vollkommenen Ruhe, so wird derselbe, weil er allenth ben gleich dicht ist, von allen Seiten her gleich stark auf den Körper drücken. Wenn man s nämlich die ganze Oberfläche des Körpers in gleiche Theilchen als *Ee* eingetheilt vorstellt, so w ein jegliches Theilchen einen gleichen Druck empfinden, dessen Richtung darauf winkelrecht Aus den Regeln vom Gleichgewichte kann nun dargethan werden, dass alle diese gleichen Kr einander im Gleichgewichte halten, und also den Zustand des Körpers nicht verändern könn Dieses lässt sich aber auch deutlich und ohne Rechnung daraus erweisen: dass der Körper e diejenigen Kräfte auf sich auszustehen hat, welchen eine der Grösse und Figur nach ihm glei Masse Aether, wenn dieselbe an seiner Stelle vorhanden wäre, ausstehen würde. Es ist aber gez worden, dass diese Masse Aether mit dem umliegenden im Gleichgewichte sein und also in k Bewegung gesetzt werden würde, wenn dieselbe nur mit dem eine gleiche Dichtigkeit hätte. 

so der Körper keiner Zusammendrückung fähig, so befindet er sich in gleichen Umständen als ne solche gleichdichte Masse von Aether und wird also von dem Drucke des umliegenden Aethers keine Bewegung gesetzt werden. Wenn er nämlich in Ruhe gewesen ist, so wird er auch merfort in Ruhe verbleiben, hat er aber eine Bewegung gehabt, so wird er dieselbe gleichförmig rch einer graden Linie fortsetzen, insofern dieselbe nicht durch den Widerstand nach und nach rmindert wird. Lässt sich aber der Körper zusammendrücken, und die auf ihn wirkenden Kräfte nd dazu hinlänglich, so wird er von denselben wirklich in einen kleinern Raum zusammengetrieln werden. Wofern aber der Körper nun keine Zusammendrückung zulässt, wenn er gleich weich nd biegsam ist, so wird doch durch diesen Druck seine Figur im geringsten nicht verändert erden, welches daraus erhellet, weil eine ganz gleiche Masse Aether auch keine Veränderung in rer Figur leiden würde.

109) *Ist aber der Aether nicht im Gleichgewichte, oder nicht allenthalben von gleicher Dichtigkeit, so wird auch ein Körper, der sich darin befindet, nicht von allen Seiten her gleich stark gedrückt, und wird also nach der Gegend nach welcher der grössere Druck treibt, in Bewegung gesetzt werden.*

Wenn der Druck des Aethers von allen Seiten gleich wäre, so würde dabei der Körper, wie r gesehen, in keine Bewegung gesetzt werden, sondern die auf ihn wirkenden Kräfte würden nander vollkommen aufheben. Wenn wir nun setzen, dass die Seite *AB* (Fig. 231.) einen grössern uck bekomme als die übrigen Seiten des Körpers, so wird nur ein Theil der auf *AB* drückenden räfte von den übrigen im Gleichgewichte gehalten und aufgehoben, der übrige Theil aber wird enso auf den Körper wirken, als wenn derselbe allein vorhanden wäre. Es wird also ebenso viel in, als wenn der Körper nur von der Seite *AB* von einer Kraft, welche dem Ueberschuss gleich , gedrückt würde. Wofern also dem Körper nichts im Wege steht, so wird durch diese Kraft in Zustand geändert werden. Hat er sich nämlich in Ruhe befunden, so wird er in Bewegung setzt, hat er aber schon eine Bewegung gehabt, so wird entweder seine Geschwindigkeit oder chtung, oder beide verändert werden, je nachdem jene Kraft sich gegen seine Richtung verhält. kann also geschehen, dass ein Körper sich in dem Aether mit einer veränderlichen Geschwingkeit nach einer krummen Linie bewege, wenn sich gleich um dieselbe herum nichts als Aether findet; hiezu ist nicht mehr nöthig, als dass in dem Aether das Gleichgewicht gehoben und seine derkraft an verschiedenen Orten verschieden sei. Einer solchen Ursache ist es also ohne Zweifel zuschreiben, dass sich die Planeten und Kometen in dem Aether nach krummen Linien und mit ränderter Geschwindigkeit bewegen, und man hat nur nöthig zu zeigen, wie und warum der ther ausser seinem Gleichgewichte gesetzt sei.

Liegt der vom Aether gedrückte Körper auf einem andern Körper auf, welcher seine Beweng aufhält, so wird jener auf diesen einen gleichen Druck ausüben, woraus man überhaupt greift, was die Schwere der Körper für eine Ursache habe, und dass dieselbe mit der Ursache r Bewegung der Planeten aus einerlei Grund entspringe.

110. *Wenn der Aether nicht im Gleichgewichte ist, und sich also selbst in Bewegung befinde so wirkt er auf die in ihm schwebenden Körper auf eine doppelte Art, nämlich durc den Stoss und den Druck. Doch ist jene Wirkung gegen diese so klein, dass sie gleich sam für nichts zu achten.*

Wenn die Dichtigkeit und Federkraft des Aethers nicht allenthalben gleich gross ist, so kann sic derselbe nicht im Gleichgewichte befinden, sondern es muss in seinen Theilen nothwendig eine Bewe gung entstehen, wie oben gezeigt worden. Wenn sich demnach darin ein Körper als *ABCDE* befinde so leidet er von allen Seiten her nicht nur den Druck der Federkraft, deren Wirkung wir in de vorhergehenden Satze betrachtet haben, sondern der Aether wird auch vermöge seiner Bewegun als ein Strom auf den Körper stossen und dadurch eine besondere Kraft ausüben, welche von jen Kraft des blossen Drucks wohl muss unterschieden werden. Die Kraft des Stosses beruht auss der Geschwindigkeit hauptsächlich auf der Dichtigkeit des Aethers; da nun dieselbe so erstaunlic klein ist, so kann auch die Wirkung auf einen Körper, dessen Dichtigkeit ziemlich gross ist, nich merklich sein: wie wir denn eben deswegen den Aether so dünn annehmen müssen, damit dah in der Bewegung der Planeten kein merklicher Widerstand erwachse, ungeachtet dieselben sich m einer sehr grossen Geschwindigkeit bewegen. Ungeachtet aber der Stoss der subtilen Materie s sehr schwach ist, so kann doch der Druck derselben sehr gross sein, indem dieser von dem Grac der Zusammendrückung herrühret. Wir haben nämlich oben (104) eine solche Formel angeführ welche, wenn sie wirklich Statt fände, so würde der Aether bei einer Dichtigkeit $= nd$ schon ei unendlich grosse Federkraft ausüben, und könnte die Dichtigkeit selbst noch sehr gering sei Wenn sich also der Aether gleich in einer Bewegung befindet und daher auf die Planeten sowo durch den Stoss als den Druck wirket, so ist doch jene Kraft gegen diese für nichts zu achte und ist es ebenso viel, als wenn der Aether stillstände, und bloss allein durch den Druck wirk Denjenigen, welche die Bewegung der Planeten durch den Druck eines Wirbels haben erklär wollen, wird auch mit Recht vorgeworfen, dass der Stoss einer solchen wirbelförmigen Bewegu gegen den Druck sehr beträchtlich sein, und die Wirkung desselben gänzlich verändern müss Diese Einwendung aber, durch welche die Wirbel zu Grunde gerichtet werden, findet gegen di Wirkung des Aethers nicht statt.

111) *Weil der Aether seinen Druck auch in den kleinsten Theilchen nach allen Gegend ausübt, so müssen wir denselben als eine vollkommen flüssige Materie ansehen, wel sogar ihrer Natur nach auch in den kleinsten Theilen vollkommen flüssig ist, und ke feste Theilchen in sich schliesst.*

Einer flüssigen Materie werden feste Körper entgegengesetzt, wovon der Unterschied un deutlicher gezeigt werden soll. Wir sagen also hier erstlich, dass der Aether kein fester Kör sei, und hernach auch nicht aus festen Körpern zusammengesetzt sei. Das erste ist aus den Gr den, welche für das höchst subtile Wesen des Aethers angeführt worden, für sich klar; denn la sich die himmlischen Körper durch denselben ohne einen merklichen Widerstand bewegen, so wü dieses nicht geschehen können, wenn er ein fester Körper wäre: so subtil man sich denselben a

orstellen möchte, so müssten die himmlischen Körper durch denselben durchbrechen, und in Stücke erschmeissen. Darin besteht aber das vornehmste Merkmal der Flüssigkeit, dass da sich der Aether ı einem gewaltsamen Zustande befindet, er seine Federkraft nach allen Seiten gleich ausübt, velches bei keinem festen Körper geschehen kann, daher der Aether für eine vollkommen flüssige laterie gehalten werden muss: dieses wird aber noch mehr dadurch erhellet, dass derselbe auch in ie kleinsten Poren der Körper hinein dringt und dieselben ausfüllt. Am allermeisten aber wird ie Flüssigkeit des Aethers dadurch bestätigt, dass sich alle seine Theile zusammendrücken lassen, nd sich hernach wiederum aus eigner Kraft ausdehnen, wobei sie den Raum, welchen sie einneh-ıen, immer vollkommen ausfüllen, und keine leere Poren zwischen sich lassen. Dieses ist eine igenschaft, welche einem festen Körper unmöglich zukommen kann: denn wenn sich auch ein ılcher Körper in einen grössern Raum ausdehnt, so geschieht solches nur insofern, als die darin efindlichen Poren grösser werden, und wird durch dergleichen Ausdehnung seine wahre Grösse cht vermehret. Weil sich nun der Aether auch in seinen kleinsten Theilchen ausdehnen und ısammenziehen kann, ohne dass solches durch Erweiterung oder Verkleinerung der Poren geschieht, ) können auch die kleinsten Theilchen nicht fest sein: und das Wesen selbst dieser subtilen Materie fordert, dass alle Theilchen, so klein man sich dieselben auch vorstellen mag, mit einer voll-ommenen Flüssigkeit begabt sind. Alle diese Theilchen hängen auch von allen Seiten anein-ıder, und da es keine letzten Theilchen giebt, welche man als wirkliche Einheiten ansehen könnte, fällt die Frage, was diese Theilchen für eine Figur haben, gänzlich weg. Eingebildete Theile ıer, dergleichen man sich nur in der Einbildung vorstellt, haben die Figur, die man ihnen beilegen ill: stelle ich mir nämlich rein würfelförmige oder runde Theilchen vor, so hat dasselbe auch eine ılche Figur.

---

## XV. Capitel.

### Von der Flüssigkeit.

112) *Eine flüssige Materie muss zu allererst diese Eigenschaft haben, dass ihre Theilchen nicht aneinander befestigt sind, so dass ein jegliches Theilchen ohne einigen Widerstand von den übrigen abgesondert und in Bewegung gesetzt werden kann.*

Dieses sieht man am deutlichsten, wenn man den Unterschied zwischen festen und flüssigen ırpern betrachtet. Um einen Theil von einem festen Körper abzureissen gehört mehr Kraft, als nselben, wenn er ganz los wäre, in Bewegung zu setzen: in diesem Falle würde auch die kleinste aft dazu hinreichend sein, wie wir oben zur Genüge gesehen haben; wenn aber ein Theil von ıem festen Körper abgesondert werden soll, so wird dazu eine Kraft erfordert, welche die Befes-ung zu überwältigen im Stande ist; hingegen ist bei den flüssigen Körpern keine solche Befesti-ng der Theile aneinander, und es kann davon ein jeglicher Theil abgesondert werden, ohne eine sondere Kraft auf die Losreissung selbst zu wenden. Wenn hernach eine Kraft gleich nur auf

einen Theil eines festen Körpers wirket, so kann sie denselben doch nicht in Bewegung setzen, ohne auch die übrigen Theile, auf welche sie doch nicht wirket, zu bewegen, welches ebenfalls von der Befestigung der Theile aneinander, herrührt. In so weit ist also ein flüssiger Körper einem Sandhaufen ähnlich, von welchem ein jedes Körnchen frei weggenommen werden kann, weil die Körner durch keine Verbindung aneinander befestigt sind. Es ist wohl wahr, dass aus der Mitte des Haufens kein Körnlein herausgenommen werden kann, ohne eine Menge anderer zugleich mit in Bewegung zu setzen; allein es ist klar, dass dieses nur daher rührt, weil die anderen Theile der Bewegung im Wege stehen, und sich derselben blos wegen ihrer Standhaftigkeit widersetzen. Eben dieses muss man auch von einer flüssigen Materie verstehn, als aus deren Mitte auch kein Theil ohne andere zu stören, herausgezogen oder nur in Bewegung gesetzt werden kann. Doch aber ist bei dem Sandhaufen ein jegliches Körnchen ein fester Körper, und also nicht möglich auf gleiche Art nur die Hälfte eines Körnleins wegzunehmen. Vielleicht befindet sich ein gleicher Umstand bei vielen flüssigen Materien, wie man denn sieht dass sehr kleine Theile einer flüssigen Materie öfters Eigenschaften eines festen Körpers äussern.

113) *Das Wesen der Flüssigkeit besteht darin, dass wenn eine flüssige Materie nur an einem Orte gedrückt wird, und dieser Kraft nirgend ausweichen kann, dieselbe rundherum auf allen Seiten eine gleiche Kraft ausübt. Wenn nämlich die flüssige Materie im Gefäss eingeschlossen ist, drückt sie allenthalben auf die Wände desselben mit einer gleichen Kraft*

Um diese Eigenschaft in ihr völliges Licht zu setzen, so stellt man sich die flüssige Materie am füglichsten vor als in einem Gefässe eingeschlossen, dessen Wände wegen ihrer Festigkeit verhindern, dass die Materie dem Drucke, welcher an einem Orte auf sie wirket, nicht ausweichen kann; in einem solchen Gefässe *AEGFB* (Fig. 232.) sei nun die flüssige Materie eingeschlossen, an welchem wir uns eine Röhre *ABCD* vorstellen wollen, durch welche die flüssige Materie vermittels eines Stöpsels *KS* gedrückt und durch den ganzen Raum des Gefässes ausgebreitet werde: denn wir legen der Materie weder die Schwere, noch irgend eine andere Kraft bei, welche auf die Theilchen wirkte. Hier gilt es gleich viel ob die flüssige Materie sich zusammendrücken lasse oder nicht; denn im ersteren Falle wird der Stöpsel dieselbe so weit zusammentreiben, als er vermögend ist, und wenn dieses geschehen und die drückende Kraft im Gleichgewichte steht, so findet unser Satz in dem Zustande der flüssigen Materie statt. Dieselbe wird nämlich allenthalben auf die Wände des Gefässes gleich stark drücken, wie auch immer die Figur desselben beschaffen sein mag; in allen Punkten *E*, *F* wird der Druck gleich gross sein und darauf eine rechtwinklichte Richtung haben als *EP* und *FQ*. Wenn wir uns also auf der innern Wand einen Theil *ee* vorstellen so wird der Druck darauf um so viel grösser sein, je grösser dieser Theil genommen wird; wenn wir daher diesen Theil *ee* der Weite des Stöpsels *S* gleich nehmen, so muss der Druck darauf der auf den Stöpsel wirkenden Kraft selbst gleich sein. Lasst uns die Weite oder Grundfläche des Stöpsels $S = aa$, und die auf denselben drückende Kraft $= p$ nennen, so wird, wenn die Fläche $ee = aa$ genommen wird, die darauf drückende Kraft auch sein $= p$. Nimmt man aber eine grössere oder kleinere Fläche *ff*, so wird dieselbe einen um so viel grössern oder kleinern Druck auszustehen

ıben. Die auf diese Fläche *ff* drückende Kraft wird nämlich $= \frac{ff}{aa} p$, und ihre Richtung *FQ* auf ie Fläche *ff* selbst rechtwinklicht sein. Diese Eigenschaft schliesst die vorige schon in sich, und ı eine jede Materie, welche mit dieser Eigenschaft begabt ist, für flüssig erkannt werden muss, , setzen wir in diese Eigenschaft mit Recht das Wesen der Flüssigkeit.

114) *Einen gleichen Druck empfinden auch alle in der flüssigen Materie versenkte Körper, als welche von allen Seiten mit einer gleichen Kraft zusammengedrückt werden; wofern sie nicht Festigkeit genug haben dem Drucke zu widerstehen.*

Die Grösse des Druckes auf die inneren Wände des Gefässes beruhet wie wir gesehen haben, stlich auf der Kraft *p*, welche auf den Stöpsel drückt, und hernach auf der Grundfläche $S = aa$ es Stöpsels, durch welche der Druck auf die flüssige Materie ausgeübt wird. Wenn hernach auf er einen Wand eine Fläche $= ff$ genommen wird, so hält dieselbe eine Kraft aus $= \frac{ffp}{aa}$, einen lchen Druck aber empfinden auch alle inneren Theile der flüssigen Materie, und wenn sich dielben ferner zusammendrücken liessen, und diese Kraft dazu hinreichend wäre, so würden sie adurch wirklich in einen kleinern Raum gebracht werden: wir nehmen aber hier an, dass die üssige Materie sich entweder gar nicht zusammendrücken lasse, oder durch die Gewalt des Stöpels schon so weit, als möglich gewesen, zusammengedrückt worden sei. Wenn wir uns nun unter ieser flüssigen Materie einen Körper *MNmn* vorstellen, so wird eine jegliche Seite von einer leichen Kraft gedrückt werden, und die Richtung des Druckes darauf winkelrecht sein: wenn also ne Seite dieses Körpers als $MN = ff$, so wird auch der Druck darauf sein $= \frac{ffp}{aa}$. Dieses ist ämlich der ganze Druck, so darauf geschieht, denn in der That empfinden alle Theilchen derselben eite einen ihrer Grösse gemässen Druck, welcher insgesammt jenen ganzen Druck $= \frac{ffp}{aa}$ ausmachen. m dieser Ursache willen, wenn die Fläche erhaben oder vertieft ist, muss man sich dieselbe als ı unendlich viel kleine Theilchen zertheilt vorstellen, und aus den unendlich kleinen Kräften, elche auf ein jedes drücken, nach ihrer Richtung die ganze Kraft bestimmen, wozu die Lehre om Gleichgewicht die nöthigen Regeln an die Hand giebt. Demnach besteht die Natur der Flüsgkeit darin, dass sich ein jeglicher Druck sogleich durch alle Theile der flüssigen Materie ausbreite nd das mit einer gleichen Kraft: und in diesem Stücke wird ein Sandhaufen von einer flüssigen laterie wesentlich unterschieden; denn wenn das Gefäss *AEGFB* mit Sand angefüllt und durch den töpsel *S* gedrückt wird, so wird sich dieser Druck nimmermehr durch das ganze Gefäss mit leicher Kraft ausbreiten: sondern der Druck seitwärts auf *ee* und *ff* wird kleiner sein, als wenn ie Materie flüssig wäre.

115) *Weil sich der Druck nach der Grösse der Fläche richtet, auf welche er wirket, so wird derselbe am füglichsten durch eine Höhe angezeigt, welche mit einer jeglichen Fläche multiplicirt die Grösse der Kraft ausdrückt, so auf dieselbe Fläche wirket, und besteht also die Gleichheit des Drucks darin, dass diese Höhe allenthalben gleich gross ist.*

Wenn wir die Kraft *p*, welche auf die Grundfläche $S = aa$ des Stöpsels wirket, durch

$aak$ ausdrücken, so wird der Druck auf eine jegliche Fläche $ff = \frac{ffp}{aa} = ffk$. Wenn also $\frac{p}{aa}$, das ist $k$, einerlei ist, so ist der Druck der flüssigen Materie auch einerlei. Wenn man sich nämlich verschiedene Stöpsel vorstellt, dergestalt, dass die darauf drückenden Kräfte sich wie die Grundflächen derselben verhalten, so wirken dieselben in der flüssigen Materie einen gleichen Druck: daher kann auch die kleinste Kraft den grössten Druck hervorbringen, wenn nur die Grundfläche des Stöpsels sehr klein gemacht wird, denn es ist klar, dass wenn auch die Kraft $p$ tausendmal kleiner wäre, dabei aber auch die Grundfläche $aa$ des Stöpsels tausendmal kleiner genommen würde, der Druck dennoch auf eine gegebene Fläche $ff$ gleich bleiben müsste. Wir setzen deswegen $p = aak$ oder $\frac{p}{aa} = k$, weil die Grösse des Drucks bloss allein aus der Grösse $k$ erkannt wird, und der Druck so daher auf die Fläche $ff$ geschieht, herauskommt $= ffk$. Um sich davon einen vollständigen Begriff zu machen, so sieht man $k$ als eine Höhe an, und drückt die Kraft, so auf eine jegliche Fläche $ff$ wirkt, durch den Inhalt einer Walze aus, deren Grundfläche der Fläche $ff$ selbst, die Höhe aber der Höhe $k$ gleich ist, weil solchergestalt der Inhalt dieser Walze $= ffk$ herauskommt. Diese Vorstellung ist auch deswegen sehr bequem, weil man die Kräfte am füglichsten durch ein Gewicht ausdrückt: man erwählt nämlich hiezu eine gleichförmige Materie, und sagt dass die Kraft, von welcher die Fläche $ff$ gedrückt wird, ebenso gross sei als das Gewicht einer solchen Materie, welche den Raum der Walze $ffk$ ausfüllte. Denn man begreift sehr deutlich wie stark ein solches Gewicht eine Fläche, auf welcher es aufliegt, drücken würde; und ebenso gross ist auch der Druck, den die Fläche $ff$ von der flüssigen Materie auszuhalten hat. Also giebt uns eine solche Höhe $k$ eine deutliche Erkenntniss von der Kraft, welche auf die inneren Seiten des mit der flüssigen Materie angefüllten Gefässes, und zugleich auch inwendig auf alle Theile derselben drückt. Denn je grösser oder kleiner diese Höhe ist, nach ebendemselben Verhältnisse wird auch die Kraft des Druckes grösser oder kleiner sein.

116) *Eine flüssige Materie kann nicht in Ruhe verbleiben, wofern die Höhe, durch welche auf die eben erklärte Art der Druck bestimmt wird, nicht allenthalben gleich gross ist. Dieses ist aber von solchen flüssigen Materien zu verstehen, deren Theile nicht durch die Schwere, oder eine andere besonders darauf wirkende Kraft angetrieben werden.*

Wir schliessen hier nicht nur die Schwere aus, von welcher alle Theile der flüssigen Materie abwärts gestossen werden, sondern auch alle andere ähnliche Kräfte, welche auf ein jegliches Theilchen der flüssigen Materie besonders wirken könnten. Wir betrachten demnach eine solche flüssige Materie, deren jegliche Theilchen als *MNmn* bloss allein von der umliegenden flüssigen Materie gedrückt werden, daher man diese Kräfte, welche von der umliegenden flüssigen Materie selbst herrühren, sorgfältig von solchen Kräften, als die Schwere ist, unterscheiden muss. Denn obgleich die Schwere auch von dem Drucke einer anliegenden subtilen flüssigen Materie verursacht wird, so ist dieselbe doch wohl von der gröbern flüssigen Materie selbst, welche hier betrachtet wird, zu unterscheiden, und obgleich eine jegliche gröbere flüssige Materie, als zum Exempel Wasser, mit der subtilen Materie des Aethers auf das innigste durchmischt ist, so wir

ch unten gezeigt werden, wie der Druck so von der subtilen Materie herrührt, sehr genau unter-sieden werde von demjenigen den die gröbere Materie für sich selbst ausübt. Wenn nun ein heilchen *MNmn* in Ruhe verbleiben soll, so muss der Druck von allen Seiten gleich sein, das ist Höhe *k*, welche den Druck bestimmt, muss rundherum einerlei sein. Weil nun dieses von allen dern Theilen gilt, so ist klar, dass die flüssige Materie nicht in Ruhe bleiben könne, wofern ht die den Druck anzeigende Höhe *k* allenthalben gleich gross ist. Denn wenn wir uns das eilchen *MNmn* als einen Würfel vorstellen, so sieht man alsobald, dass wenn der Druck auf zei entgegengesetzte Seiten *MN* und *mn* nicht gleich wäre, der Würfel von dem grössern Drucke i Bewegung gesetzt werden müsste. Die Wahrheit dieses Satzes bleibt unverändert, die flüssige terie mag sich zusammendrücken lassen oder nicht, wenn dieselbe nur einmal von der drücken-d Kraft ins Gleichgewicht gebracht worden; es thut auch zur Sache nichts ob die flüssige Materie anthalben gleich dicht ist, oder nicht.

117) *Um den Zustand, worinn sich eine flüssige Materie befindet, genau zu erkennen, so beruht die Hauptsache auf dem Drucke, welchen alle Theile derselben von den umliegenden auszustehen haben, und wenn dieser Druck oder die Höhe, wodurch er bestimmt wird, bekannt ist, so ist man im Stande von der Ruhe oder den Veränderungen welche darin vorgehen müssen, zu urtheilen.*

Wenn man die Grösse des Drucks, welcher in allen Punkten der flüssigen Materie Statt findet, oder die Höhe wodurch derselbe bestimmt wird, erkannt hat, und es sind zugleich die besonderen Kräfte, welche auf ein jegliches Theilchen wirken, gegeben, so hat man alle Kräfte, von welchen ein jegliches Theilchen der flüssigen Materie angetrieben wird. Aus demselben kann man also urtheilen, ob ein jegliches Theilchen in seinen Zustand verbleiben, oder denselben verändern werde; das erstere wird nämlich geschehen, wenn alle auf ein jegliches Theilchen wirkende Kräfte einander im Gleichgewichte halten; geschieht aber dieses nicht, so muss von den überwältigenden Kräften sein Zustand verändert werden. Hiebei muss man aber auch darauf sehen, ob die Theilchen einer Zusammendrückung fähig sind oder nicht? und ob im ersteren Falle die darauf wirkenden Kräfte dieselben entweder mehr zusammenzudrücken vermögend sind, oder wenn sie zu schwach, ob nicht die Theilchen sich in einen grössern Raum ausdehnen werden. Die Betrachtung dieser Umstände leitet daher zu einer vollständigen Erkenntniss des Zustandes, in welchem sich eine jegliche flüssige Materie befindet, und dieselbe beruht vornehmlich auf einer genauen Erkenntniss des Drucks, wodurch die Theilchen auf einander wirken. Eine flüssige Materie mag nämlich in Ruhe oder in Bewegung sein, so muss dieses immer die erste Frage sein, wie stark die Theilchen derselben in einem jeglichen Punkte auf einander wirken? oder wie gross die Höhe ist, welche nach der oben erklärten Art den Druck daselbst bestimmt? Hier ist es hernach gleich viel, ob der Druck einer äusserlichen Kraft, dergleichen wir uns auf einen Stöpsel wirkend vorgestellt haben, verursacht werde, oder ob er bloss von der Veränderung des Zustandes, welcher in den Theilen vorgeht, und also von ihrer Undurchdringlichkeit herrühre. Und aus diesem Grunde muss die ganze Lehre von dem Gleichgewichte und der Bewegung aller flüssigen Materien hergeleitet werden.

118) *Eine flüssige Materie kann nicht aus einer Menge kleiner Theilchen, welche fest un hart sind entstehen, denn wie auch immer die Figur und Ordnung dieser Theilche beschaffen sein möge, so ist es nicht möglich, dass sich ein Druck, welcher an eine Orte auf dieselben geschieht, nach allen Gegenden mit gleicher Kraft ausbreite.*

Man gebe diesen Theilchen erstlich eine würfelförmige Figur, und stelle sich dieselben ordent lich aufeinander gesetzt vor, so sieht man leicht, dass wenn das oberste von einer Kraft abwär gedrückt wird, das unterste zwar gleich stark auf den Grund drücke, seitwärts aber gar kei Kraft ausgeübt werde; wenn also viele solche Reihen ein Gefäss ausfüllen, und auf dieselben ei Kraft von oben herab drückt, so wird wohl der Boden des Gefässes eine gleiche Kraft, die Seite aber gar keine ausstehn. Sollten solche Theilchen unordentlich untereinander liegen, so könn wohl der Druck auch seitwärts fortgepflanzt werden, nimmermehr würde derselbe aber nach all Seiten gleich stark herauskommen. Was aber von würfelförmigen Theilchen gesagt worden, g ebenfalls von allen andern eckigten Figuren, daher auch die meisten Naturlehrer diesen Theilch eine kugelrunde Figur zueignen; es ist aber auch leicht zu erweisen, dass aus denselben, wenn s fest und hart angenommen werden, ebensowenig diese Haupteigenschaft der Flüssigkeit erhalt werden könne. Man darf sich nur einen Haufen Kugeln vorstellen, wie die Stückkugeln pflege aufgesetzt zu werden, so wird man leicht begreifen, wenn dieselben von oben herab gedrüc werden, dass dieselben seitwärts keine Gewalt ausüben werden oder dass zum wenigsten diese Gew nach allen Seiten nicht gleich gross sein werde. Ueber dieses können auch Kugeln, die ein Gefä ausfüllen, nicht so regelmässig untereinander liegen dass nicht eine grosse Unähnlichkeit in ihr Ordnung daher entstehen sollte, wodurch gleichfalls ein gleichförmiger Druck unterbrochen wi Will man dergleichen Kugeln in einer beständigen Bewegung annehmen, so kann wohl daher d Druck verändert, nimmermehr aber nach allen Gegenden beständig gleich erhalten werden: und m müsste einen Fall, wo je eine Gleichheit in dem Drucke Statt fände, als sehr rar ansehen, da do hierin das Wesen der Flüssigkeit besteht. Man darf nur erwägen, dass wo drei Kugeln in ei graden Linie liegen, die mitlere immer seitwärts getrieben werden könne, was auch für Kräfte die äusseren wirken mögen.

---

## XVI. Capitel.

### Von den verschiedenen Gattungen der Körper.

119) *Den flüssigen Körpern werden die festen und harten Körper entgegengesetzt, und ein kommen harter und fester Körper ist so beschaffen, dass keine Kraft vermögend ist, we denselben in einen kleinern Raum zusammenzutreiben, noch seine Figur zu verändern.*

Ob es wirklich solche Körper gebe, welche von keiner Kraft weder zusammengedrückt in ihrer Figur verändert werden können, ist hier die Frage nicht, indem wir uns nur eine äuss

ttung vorstellen um immer derselben die andere desto besser festzusetzen. Wir haben aber hier ei Kennzeichen zu erwägen: das erste betrifft die Zusammendrückung in einen kleinern Raum, andere aber die Veränderung der Figur. Da wir nun der groben Materie diese Eigenschaft gelegt, dass sie sich durch keine Kraft in einen kleinern Raum zusammendrücken lasse, so müssen derselben nothwendig das erste Kennzeichen zueignen, also dass ein Körper, welcher allein aus ber Materie bestünde, durch keine Kraft in einen kleinern Raum zusammengetrieben werden nte. Was aber die Veränderung der Figur anbelangt, so ist wohl kein Zweifel dass nicht ner eine Kraft, je nachdem sie angewandt wird, vermögend sein sollte, entweder durch Reiben, chen, Hauen, Reissen oder Sägen von einem solchen Körper Theilchen abzusondern, und solchertalt seine Figur zu verändern. Wenn man aber dergleichen Kräfte ausschliesst, und nur solche rachtet, welche durch einen blossen Druck senkrecht auf den Körper wirken, so kann es noch eifelhaft scheinen, ob nicht solche Körper möglich wären, welche auf diese Art aller Veränderung ihrer Figur widerständen. Man kann sich wohl eine solche harte Kugel vorstellen, welche ler von einem darauf liegenden Gewichte, so gross dasselbe auch sein möchte, noch von einem auf geschehenen Stosse, im geringsten platt gemacht werden könnte. Eine solche Kugel könnte Recht für vollkommen hart gehalten werden. Zum wenigsten giebt es aber wirklich solche per, welchen eine gegebene Kraft keine Veränderung in ihrer Figur hervorzubringen vermögend , und in Ansehung dieser oder kleinerer Kräfte können solche Körper als vollkommen hart angen werden, wenn dieselben gleich von grösseren Kräften eine Veränderung in ihrer Figur en sollten.

120) *Unter den Körpern welche nicht vollkommen hart und fest sind, müssen zwei Gattungen wohl unterschieden werden. Zur ersten gehören diejenigen, welche sich von keiner Kraft in einen kleinern Raum zusammentreiben lassen, daher aber dennoch eine Veränderung in ihrer Figur erhalten; zur anderen aber diejenigen, welche sich zugleich zusammendrücken lassen.*

Unter den Körpern, welche sich in keinen engern Raum zusammenpressen lassen, sind insonheit die Metalle zu merken, dennoch aber kann ihre Figur durch einen Druck oder Schlag dert werden. Also lässt sich eine Kugel von Metall durch einen starken Druck oder wieder- Schläge in eine Platte ausdehnen, behält dabei aber doch einerlei Dichtigkeit, oder erfüllet einen gleich grossen Raum. Solche Körper zählen wir also zur ersten Gattung, zur zweiten egen solche, welche sich in einen kleinern Raum zusammentreiben lassen, wodurch zwar auch Figur nothwendig eine Veränderung leiden muss. Unter den Körpern, welche dem Scheine gleichförmig sind, trifft man wenig an, bei welchen eine merkliche Zusammendrückung Statt , wenn wir nämlich die flüssigen Materien ausnehmen. Es ist aber diese Eintheilung, welche von der Möglichkeit einer Zusammendrückung hernehmen, sowohl den flüssigen als festen ern gemein, und giebt es unter beiden Arten solche, welche sich entweder gar nicht, oder zusammendrücken lassen. Zu dieser letzten Art von flüssigen Körpern gehört vornämlich Aether, und hernach die Luft, wovon der erstere seinem Wesen nach, diese aber, wegen der

besonderen Vermischung der subtilen Materie mit der groben, einer sehr merklichen Zusammen drückung fähig ist. Der andere Umstand aber, so in der Veränderung der Figur besteht, mach den vornehmsten Unterschied zwischen den flüssigen und festen Körpern aus. Eine flüssige Materi mag eine Figur haben, wie man will, so ist die geringste Kraft vermögend dieselbe nach der Figu des Gefässes, worin sie befindlich, zu verändern; dahingegen bei den festen Körpern entweder nich eine jegliche Kraft vermögend ist eine gegebene Veränderung in der Figur hervorzubringen, ode doch nicht alle mögliche Veränderungen in der Figur hervorgebracht werden können. Ein Papie lässt sich durch Zusammenlegen in unendlich viel verschiedene Figuren bringen, doch aber kan dasselbe nicht in einen Faden ausgedehnt werden.

121) *Weiche Körper werden genannt, deren Figur durch eine geringe Kraft verändert werde kann, dahingegen solche, wo eine grössere Kraft erfordert wird, hart genannt werden Hieher gehören auch biegsame Körper, welche entweder vollkommen, oder mehr ode weniger biegsam sind, je nachdem die kleinste Kraft hinreichend ist, oder eine kleiner oder grössere erfordert wird, eine gegebene Beugung hervorzubringen.*

Die Benennungen weich und hart, werden zwar einander entgegengesetzt, sie sind aber nu nach Graden von einander unterschieden; also kann ein weniger harter Körper für weich, und ei weniger weicher für hart gehalten werden. Hier kommt es auch auf die Grösse der Kraft an, den ist die Kraft zu klein, als dass sie die Figur eines Körpers sollte verändern können, so ist i Ansehung derselben der Körper hart, wenn gleich seine Figur von einer grössern Kraft veränder werden kann. Dergleichen weiche Körper sind Leim und Wachs; denn wenn wir uns von solche Materien Kugeln vorstellen, so können dieselben durch eine Kraft platt gedrückt werden; und j grösser die drückende Kraft, je platter können dieselben gedrückt werden. Es lassen sich hi unendlich viel Grade der Weiche unterscheiden, wovon der höchste Grad mit der Flüssigkeit einerl ist; wie denn auch Leim und Wachs, wenn sie gänzlich erweicht werden, vollkommen flüssig Materien darstellen, da auch die geringste Kraft vermögend ist, sie in alle mögliche Figuren z drücken. Ist aber der Leim oder das Wachs weniger weich, so lässt sich eine daraus gemach Kugel von einer gegebenen Kraft wohl platt drücken, die Wirkung hört aber doch endlich auf, dass wenn die Kugel noch platter gedrückt werden sollte, dazu eine grössere Kraft erfordert würd Indessen scheint doch auch die geringste Kraft vermögend zu sein, die Figur einer solchen Kug in etwas zu ändern, wenn auch gleich die Veränderung kaum zu merken ist. Solche Körper si auch biegsam, doch giebt es noch andere Arten denen die Biegsamkeit eigentlich zugeeignet wi als: ein Faden, Band, oder Seil, unter welchen diejenigen vollkommen biegsam genannt werd welche auch die kleinste Kraft auf alle mögliche Grade zu biegen vermögend ist, wie etwa i einem ganz zarten Faden geschehen mag. Andere aber sind so beschaffen, dass sie von ein gegebenen Kraft nicht über einen gewissen Grad gebogen werden können: und je kleiner die B gung ist, je weniger sind dergleichen Körper biegsam. Hierin giebt es unendlich viel verschied Arten, welche wir uns nur überhaupt anzuzeigen begnügen.

122) *In Ansehung der ziehenden Kräfte giebt es Körper, welche sich entweder der Länge nach ausdehnen lassen, oder nicht; in beiden Fällen, wenn die Kraft stark genug ist, werden die Körper entzwei gerissen, und solche Körper, welche einer sehr grossen Kraft zu widerstehen im Stande sind, werden zäh genannt.*

Wir betrachten in diesem Kapitel die Körper, wie sie sich in Ansehung der Kräfte verhalten, welche auf sie wirken, und da kommt es vornämlich auf die Art an, wie die Kräfte auf die Körper angewandt werden. In den vorigen Sätzen haben wir solche Kräfte angenommen, welche auf die Körper drücken, nun aber richten wir unsere Absicht auf solche, welche die Körper entzwei zu reissen bemüht sind. Man stelle sich also einen Körper *CDEF* (Fig. 233.) vor, welcher mit dem einen Ende *CD* an einer unbeweglichen Mauer *AB* befestigt, an dem andern Ende *EF* aber von einer Kraft *PQ* gezogen wird. Der Körper mag nun so stark und zäh sein als man will, so kann die Kraft immer so sehr vermehrt werden, dass der Körper endlich von derselben entzwei gerissen wird, wenn nur die Figur desselben so beschaffen ist, dass eine so grosse Kraft darauf angebracht werden kann. Es kommt hier auf die Art an, wie die Theile des Körpers an einander befestigt sind, und da diese Befestigung nicht unendlich sein kann, wie wir bald darthun werden, so muss immer eine Kraft vermögend sein, dieselbe zu überwinden und die Theile von einander zu reissen, ob es gleich öfters unmöglich ist eine so grosse Kraft anzubringen. Ein Diamant wird sich auf solche Art nicht entzwei reissen lassen, nicht weil keine so grosse Kraft, als dazu erfordert würde, vorhanden ist, sondern weil man eine so grosse Kraft dabei nicht anbringen kann. Ehe aber der Körper solchergestalt entzwei gerissen wird, so dehnt sich derselbe entweder aus, oder bricht plötzlich. Im ersteren Falle kann wieder dieser Unterschied bemerkt werden, ob derselbe durch die Ausdehnung in einen grössern oder kleinern Raum gebracht werde, oder nicht? und alsdann wird auch schon eine kleinere Kraft eine Veränderung in der Figur des Körpers hervorbringen. Im letzteren Falle aber, so lang die Kraft kleiner ist, als zum wirklichen Riss erfordert wird, so bleibt die Figur des Körpers unverändert.

123) *Wenn ein fester Körper an einem Ende befestigt, an dem andern aber von einer Kraft seitwärts gezogen wird, so muss, wenn die Kraft stark genug, der Körper entweder abgebrochen, oder umgebogen werden; im ersteren Falle sagt man, der Körper sei brüchig, im andern aber, biegsam.*

Man stelle sich den Körper *CDEF* (Fig. 234.) mit dem einen Ende wiederum in einer unbeweglichen Mauer *AB* befestigt vor, welcher bei dem andern Ende von einer Kraft *PQ* seitwärts gezogen werde. Nachdem nun die Wirkung einer solchen Kraft beschaffen sein wird, so kann man verschiedene Arten der Körper festsetzen. So stark die Körper auch sein mögen, so kann die Kraft doch so weit vermehrt werden, dass von derselben in dem Körper eine Veränderung hervorgebracht werde. Der Körper muss nämlich entweder abgebrochen, oder gekrümmt werden; oder es kann auch geschehen, dass derselbe ehe er bricht, gekrümmt werde. Solche Körper, welche endlich abgebrochen werden, pflegt man brüchig zu nennen, und ein Körper ist um so viel brüchiger, von je einer kleineren Kraft derselbe gebrochen werden kann. Hiebei muss aber die Dicke

des Körpers und insonderheit nicht so wohl die Kraft selbst, als dieselbe mit ihrer Entfernung vo der Mauer multiplicirt, in Betrachtung gezogen werden. Wird aber der Körper von einer solche Kraft nur gekrümmt, so heisst er biegsam, von welcher Beschaffenheit schon vorher gemeld worden. Vollkommen biegsam ist nämlich der Körper, wenn auch die geringste Kraft vermögen ist, denselben gänzlich umzubeugen; hingegen ist er um so viel mehr oder weniger biegsam, mehr oder weniger ebendieselbe Kraft denselben zu beugen vermögend ist. Bisweilen kann auc ebendieselbe Kraft, wenn sie nur lang genug wirket, immer eine grössere Beugung hervorbringe in welchem Falle denn auch die Zeit mit in Betrachtung gezogen werden muss; bisweilen wird d Körper von einer bestimmten Kraft nur bis auf einen gewissen Grad gebogen, und steht alsdan gleichsam mit der Kraft im Gleichgewichte. Alle diese besondern Umstände können unendlich ve schieden sein, woraus denn unendlich viel verschiedene Arten von Körpern entspringen. Man kar aber die Kräfte auch noch auf andere Arten anbringen und nach ihrer Wirkung die Körper unte scheiden; es würde aber überflüssig sein hierin allzuweit zu gehen, ehe wir den Grund von all dergleichen Verschiedenheiten zu untersuchen im Stande sind.

124) *Einige Körper sind so beschaffen, dass wenn in ihrer Figur durch eine Kraft eine Ve änderung gewirkt worden, dieselben in dieser veränderten Figur, nachdem die Kra aufgehört, beständig verbleiben; andere aber sind so beschaffen, dass sie sich wiederu in ihre vorige Figur herstellen. Diese werden elastisch, jene aber unelastisch genann*

Da wir bisher gesehen, was für Veränderungen in der Figur der Körper, durch darauf w kende Kräfte hervorgebracht werden können, so müssen wir jetzt sehen, was in denselben ferr vorgeht, nachdem die Kraft völlig aufgehört hat auf dieselben zu wirken. Hier ist nun soglei klar, dass wenn ein Körper einmal wirklich entzwei gerissen oder gebrochen worden, derselbe au nachdem die Kraft aufgehört, in diesem zerstörten Zustande verbleiben werde. Wenn aber fester Körper durch eine Kraft nur bis auf einen gewissen Grad gebogen, oder seine Figur so verändert worden, so können sich, nachdem die Kraft zu wirken aufgehört, zweierlei Fälle ereign je nachdem der Körper diese veränderte Figur behält, oder sich wiederum in seine vorige Figur h stellt; und da das Letztere durch eine Federkraft oder Elasticität geschieht, so werden diese Kör elastisch, jene aber unelastisch genannt. Also ist eine Kugel von Leim unelastisch, weil sie, w sie einmal plattgedrückt worden, so bleibt; und ein Stab von Blei, weil er krumm bleibt, wenn einmal gekrümmt worden, ist ebenfalls unelastisch. Hingegen ist eine elfenbeinerne Kugel elasti weil sie nach einer geschehenen, obgleich unmerklichen Zusammendrückung ihre vorige Fi wieder annimmt, wie aus dem Zurückprallen derselben erhellet: gleichergestalt, da eine g Degenklinge, wenn sie gleich gekrümmt worden, wieder gerade wird, so ist sie auch elastisch. n solchen Körpern sagt man, dass sie mit einer elastischen Kraft begabt sind; man muss aber n glauben, als wenn diese Kraft mit der Standhaftigkeit in einem Widerspruch stünde; denn es rd gezeigt werden, dass dieselbe von der Federkraft des Aethers herrühre. Weil nun diese mit er Standhaftigkeit bestehen kann, so ist auch eine ähnliche elastische Kraft bei den festen Kör ihrer Standhaftigkeit nicht entgegen.

125) *Es giebt auch Körper, welche weder ganz und gar unelastisch, noch vollkommen elastisch sind, weil sie nach einer in ihrer Figur geschehenen Veränderung sich nur einigermaassen, nicht aber völlig, in ihre vorige Figur herstellen, woher denselben eine grössere oder kleinere elastische Kraft zugeeignet wird.*

Wir haben gesehen, dass bei den Körpern eine doppelte Veränderung in ihrer Figur vorgehen nn. Die eine geschieht nämlich mit Beibehaltung ebenderselben Grösse, die andere aber ist mit ner Zusammendrückung in einen kleinern Raum verbunden, wozu wir noch die Ausdehnung in nem grössern Raume beifügen können. Denn es giebt auch Körper, welche, wenn sie ausgedehnt orden, sich wiederum zusammenziehen, wovon jedoch der Grund einerlei ist. Bei dieser zweichen Veränderung kann nun in festen Körpern eine elastische Kraft Statt finden, welche vollkomen ist, wenn sich der Körper wiederum völlig in seine vorige Figur herstellt; dahingegen dieselbe ivollkommen genannt wird, wenn die Wiederherstellung nur zum Theil geschieht. Flüssige aterien können auch mehr, oder weniger, oder gar nicht elastisch sein; weil dieselben aber gegen le Figuren gleichgültig sind, so muss die elastische Kraft nur daraus beurtheilt werden, ob eine issige Materie, wenn sie in einen kleinern Raum zusammengepresst worden, sich wiederum auszuhnen trachte, welche Eigenschaft insbesondere dem Aether wesentlich zukommt: hernach kann ich nicht in Zweifel gezogen werden, dass die Luft nicht vollkommen elastisch sein sollte. Das Vasser aber sehen viele Naturforscher als eine unelastische flüssige Materie an, weil sich dasselbe uf keinerlei Art in einen kleinern Raum zusammendrücken lässt. Es kommt aber hier nicht auf die rösse der Zusammendrückung an, und wenn das Wasser sich nur, so zu reden, unmerklich wenig isammendrücken liesse, hierauf aber sich in seinen vorigen Zustand völlig wiederum herstellte, so üsste man demselben eine vollkommene Elasticität zueignen. Man kann aber aus einigen Versuchen, o eine Blase mit Wasser angefüllt worden, und bei dem Stoss zurückgesprungen, sicher schliessen, ss das Wasser ein vollkommen elastischer Körper sein müsse. Man darf auch nur mit einem ammer auf eine solche Kugel schlagen, so wird sich die Elasticität bald äussern.

---

## XVII. Capitel.

### Erklärung der Festigkeit der Körper.

126) *Eine Masse von grober Materie wird von dem umliegenden Aether dergestalt zusammengedrückt, dass die Theile derselben nicht anders von einander abgesondert werden können, als durch solche Kräfte, welche dem Druck des Aethers überlegen sind.*

Wir erkennen in der Welt nur zweierlei Grundmaterien, die subtile und grobe. Jene, welche ether genannt wird, ist vollkommen flüssig, viel tausendmal dünner als die grobe Materie, und sst sich in einen kleinern Raum zusammenpressen, da sie eine Kraft ausübt sich wieder auszudehn: und in einem solchen gewaltsamen Zustande füllt sie wirklich allen Raum aus, so von der

groben Materie ledig gelassen wird. Die grobe Materie hingegen, welche viel tausendmal dichter ist, behält immer ebendieselbe Dichtigkeit, so ihrer Natur gemäss ist, und lässt sich durch keine Kraft, so gross dieselbe auch sein mag, in einen engern Raum zusammenpressen. Doch stellen wir uns dieselbe so vor, dass wenn sie allein vorhanden wäre, ihre Theile gar keine Befestigung unter sich haben und die geringste Kraft vermögend sein würde ein jegliches Theilchen von den übrigen abzusondern. Wenn aber ein Körper, so einzig und allein aus der groben Materie besteht, sich in dem Aether befindet, so wird er von demselben ringsherum gedrückt und alle Theile desselben von allen Seiten her zusammengepresst. Diese Kraft ist nämlich die Elasticität des Aethers, und je grösser diese ist, um so viel stärker werden auch die Theilchen des Körpers an einander gedrängt. Wenn man also ein Stück von diesem Körper lossreissen will, so wird dazu eine grössere Kraft erfordert, als die Federkraft des Aethers; und von einer kleineren Kraft kann kein Theil von den übrigen abgesondert werden. Deswegen müssen wir einem solchen Körper eine Festigkeit beilegen, welche um so viel grösser sein wird, je mehr der Aether zusammengedrückt, und dadurch seine Federkraft vermehrt ist: und da diese Festigkeit eine Wirkung des Aethers ist, so kann sie nicht als eine innerliche Eigenschaft der groben Materie angesehen werden.

127) *Die Ursache aller Festigkeit und Härte der Körper ist demnach bloss allein in der groben Materie zu suchen, insofern dieselbe rundherum von dem Aether zusammengedrückt wird. Ausser der Kraft des Aethers würden keine Theile der Körper zusammenhängen, sondern die geringste Kraft würde vermögend sein dieselben von einander zu zerstreuen.*

Es ist viel gestritten worden, ob die kleinsten Theilchen aller Körper für flüssig oder fest gehalten werden müssen, das ist, ob ein flüssiger Körper aus festen Theilchen, oder ein fester Körper aus flüssigen Theilchen zusammengesetzt sein könne. Ob wir nun gleich solche Theilchen, welche man als die letzten und nicht weiter theilbar ansehen könnte, nicht zugeben, so wird doch diese Frage durch die Behauptung der beiden Materien, nämlich der subtilen und der groben, leicht erörtert. Denn die subtile Materie ist dergestalt ihrer Natur nach flüssig, dass aus derselben allein kein fester Körper zusammengesetzt werden könnte. Der groben Materie für sich können wir auch keine Festigkeit zueignen, indem auch die geringste Kraft vermögend wäre, alle Theilchen, welche man sich nur vorstellen kann, von einander gleichsam als einen Staub zu zerstreuen. Wenn aber diese grobe Materie von dem Aether rundherum zusammengedrückt wird, so entsteht daher erst ein fester Körper; und weil die Theilchen nicht anders als von einer hinlänglichen Kraft von einander abgesondert werden können, so hat ein solcher Körper alle Eigenschaften der Festigkeit und Härte. Diese Erklärung kann um so viel weniger in Zweifel gezogen werden, da man in der Welt keine so harte Körper aufweisen kann, deren Härte grösser wäre, als diese, welche aus dem Drucke des Aethers entspringt; und überdies noch aus andern Umständen gewiss ist, dass der Aether wirklich eine ungemein starke Federkraft habe und auch die allerhärtesten Körper zerstücket werden können. Daher es ungereimt wäre, wenn man noch einen besondern Grund der Härte in der Natur der Körper festsetzen wollte.

128) *Wenn zwei Körper, deren jeder allein aus der groben Materie besteht, so aneinander gefügt werden, dass zwischen denselben kein Räumchen, worin sich Aether aufhalten könnte, ledig gelassen wird, so werden diese zwei Körper so stark zusammenhalten, als wenn sie aus einem Stücke beständen, und ihre Festigkeit wird so gross sein, dass sie nicht grösser sein könnte.*

Wenn zwei Körper einander so berühren, dass kein Räumchen zwischen denselben übrig bleibt, so werden sie von dem umliegenden Aether ebenso zusammengedrückt, als wenn sie nie von einander wären abgesondert gewesen, und wenn man sie von einander reissen wollte, so müsste man eine grössere Kraft anwenden, als diejenige ist, welche sie zusammendrückt. Weil nun die Festigkeit und Härte der Körper einzig und allein von dem Druck des Aethers herrührt, so kann keine grössere Festigkeit und Härte in der Welt Statt finden, als welche durch den ganzen Druck des Aethers hervorgebracht wird. Da also dieses in dem Falle unseres Satzes geschieht, so wäre es nicht möglich, dass die zwei Körper fester an einander befestigt würden, als sie wirklich durch den Druck des Aethers zusammengedrückt werden. Wenn aber durch eine solche Zusammenfügung dieser Grad der Härte erhalten werden soll, so müssen die Oberflächen der beiden Körper, welche zusammengefügt werden sollen, so genau auf einander passen, das zwischen denselben auch nicht das geringste Räumchen überbleibt; welches geschehen kann, wenn man dieselben auf das Vollkommenste polirt. Denn wenn sich auf denselben die geringste Ungleichheit fände, so würde eine solche Zusammenfügung kaum möglich sein. Wir wollen uns die beiden Flächen, so auf einander passen, als flach vorstellen, und ihre Grösse durch $ff$ andeuten, und der Druck des Aethers soll durch die Höhe $k$ bestimmt sein, so ist klar, dass der ganze Druck, welcher diese zwei Körper zusammenpresst, sich wie $ffk$ verhalten werde. Wenn die Kraft des Aethers nicht grösser wäre, als die der Luft, und man wollte den Druck durch das Gewicht einer Masse Wasser ausdrücken, so würde $k$ ungefähr 32 Schuh betragen. Nehmen wir nun für den Aether, $k$ nur 100mal grösser an, so wird die zusammendrückende Kraft dem Gewicht einer Masse Wasser, so 3200 $ff$ cubische Schuh, gleich. Setzen wir also die Grösse der Berührung $ff = 1$ Quadratschuh und rechnen das Gewicht eines cubischen Schuhes Wasser auf 70 Pfund, so wird die zusammendrückende Kraft 224,000 Pfund betragen, welche Festigkeit noch zehnmal grösser sein würde, wenn wir die Höhe $k$ tausendmal grösser als 32 Schuh angenommen hätten.

129) *Wenn aber bei Zusammenfügung der obigen zwei Körper, ihre Flächen einander nicht in allen Punkten berühren, sondern zwischen denselben Räumchen übrig bleiben, welche mit der subtilen Materie des Aethers angefüllt sind, so muss die Festigkeit nur aus den Theilchen, welche einander wirklich berühren, geschätzt werden.*

Wo sich zwischen den zwei Körpern eine Höhlung befindet, darin noch Aether enthalten ist, da sucht sich derselbe vermöge seiner Federkraft auszubreiten, und drückt daselbst ebenso stark auf die beiden Körper, als wenn sie von dem offenen Aether berührt würden, wodurch die zusammendrückende Kraft um ebenso viel vermindert wird. Um dieses deutlicher zu zeigen, so sollen die zwei Körper (Fig. 235.) $ABCD$ und $ABEF$ nach der Fläche $AB = ff$ dergestalt zusammengefügt

sein, dass zwischen denselben die Höhlungen *ab*, *cd*, *ef* noch mit der subtilen Materie des Aethers angefüllt bleiben, deren sämmtliche Weite durch *gg* angedeutet werde. Wir wollen diese beiden Körper als walzenförmig ansehen, so dass die äusseren Flächen derselben *CD* und *EF* auch der *ff* gleich sind, und *k* soll die Höhe ausdrücken, wodurch der Druck der subtilen Materie bestimmt wird. Also wird der Körper *ABCD* von dem auf die Fläche *CD* drückenden Aether gegen den andern Körper gedrängt von der Kraft $= ffk$; hingegen aber wird derselbe von dem in den Höhlungen *ab*, *cd*, *ef* befindlichen Aether zurückgedrängt durch die Kraft $= ggk$. Daher ist die Kraft, von welcher der Körper *ABCD* an den andern *ABEF* angedrückt wird, nur $= ffk - ggk = (ff - gg)k$, oder diese zwei Körper werden nur so stark aneinander gedrückt, als wenn die Fläche ihrer Berührung nicht *ff*, sondern nur $ff - gg$ wäre. Man muss also die Weite aller zwischen den beiden Körpern befindlichen Höhlungen von der ganzen Fläche *ff*, nach welcher dieselben aneinander gefügt sind, abziehen und die Festigkeit nur aus dem Ueberrest beurtheilen. Dieser Ueberrest ist aber in der That die wahre Grösse der Berührung, indem die Festigkeit nur in sofern aus dem Drucke des Aethers entspringt, als sich die groben Theilchen der Körper unmittelbar berühren, und daher muss die wahre Berührung sorgfältig von der scheinbaren, welche auch die Berührung der subtilen Materie in sich begreift, unterschieden werden. Die scheinbare Berührung kann demnach sehr gross sein, und doch sehr wenig grobe Theilchen einander berühren, woraus ein geringer Grad der Festigkeit entsteht. Es kann auch geschehen, dass gar keine grobe Theilchen einander berühren, sondern die ganze scheinbare Berührung nur in der subtilen Materie geschieht, in welchem Falle die Körper gar nicht zusammengedrückt werden, und also von der geringsten Kraft wiederum von einander getrennt werden können.

130) *Ein Körper ist also um so viel fester, je mehr grobe Theilchen in demselben einander unmittelbar berühren. Nachdem nun diese Berührung durch den ganzen Körper nach allen Gegenden beschaffen ist, so lässt sich daraus begreifen, wie einige Körper hart, andere weich und biegsam oder brüchig sein können.*

Es wird in der Welt kein Körper gefunden, welcher aus der groben Materie allein bestünde. Die häufigen Poren und Höhlungen, so in allen Körpern wahrgenommen werden, zeigen zur Genüge, dass die subtile Materie einen ziemlichen Theil des Raumes, welchen ein jeder Körper einnimmt, anfülle. Daher ist ein jeglicher Körper nicht anders anzusehn, als eine Vermischung aus der groben und subtilen Materie, und da diese zwei Materien nach der Menge, Grösse und Ordnung der Theilchen beider Art auf unendlich vielerlei Art vermischt werden können, so lässt sich daher leicht begreifen, wie aus diesen zwei Materien allein alle verschiedene Arten der Körper ihren Ursprung haben können, und wie es sogar gegen alle Wahrscheinlichkeit laufe, dass auch nur zwei Körper einander in allen Stücken gleich und ähnlich sein sollten. Hier ist nun erstlich zu merken, dass wo grobe Theilchen durch subtile Materie von einander abgesondert sind, dieselben im Geringsten nicht zusammenhängen; wo aber grobe Theilchen einander unmittelbar berühren, dieselben von der Federkraft um so viel stärker aneinander gedrückt werden, je grösser die Berührung ist. Weil nun hierin eine unendliche Verschiedenheit Statt findet, so ist hieraus leicht de

Grund zu ersehen, wie einige Körper mehr oder weniger hart, weich, biegsam oder brüchig sein können. Der härteste und festeste Körper, so in der Welt möglich, ist nämlich immer ein solcher, welcher blos allein aus grober Materie besteht, und ganz und gar keine Höhlungen, so mit subtiler Materie angefüllt sind, in sich schliesst. Doch kann die Festigkeit eines solchen Körpers allezeit durch eine Kraft, welche die Federkraft des Aethers zu überwinden vermögend ist überwältigt werden, also, dass in der Welt keine Körper von einer unüberwindlichen Festigkeit und Härte möglich sind. Alle Körper aber, welche in der Welt wirklich vorhanden sind, müssen einen noch weit geringern Grad der Festigkeit und Härte haben, und daher lässt sich erklären, wie dieselben gebrochen, zerrissen, gebogen, oder sonst in ihrer Figur verändert werden können. Denn was auch immer für eine Veränderung damit vorgeht, so müssen immer Theilchen, so einander vorher berührt haben, von einander abgesondert werden, und aus der Kraft, von welcher sie vorher zusammengedrückt worden, kann man schliessen, eine wie grosse Kraft zu ihrer Absonderuug erfordert werde.

131) *Hieraus folget demnach, dass je fester ein Körper ist, in demselben um so viel mehr grobe Theilchen einander unmittelbar berühren. In einem flüssigen Körper aber kann keine solche Berührung Statt finden, sondern alle grobe Theilchen müssen von einander entfernt und durch die subtile Materie des Aethers abgesondert sein.*

Weil ein Körper alsdann fest ist, wenn seine Theilchen so stark zusammenhängen, dass dieselben nicht anders als durch eine hinlängliche Kraft von einander gerissen werden können; dieses Zusammenhängen aber durch den Druck des Aethers verursacht wird, wenn grobe Theilchen einander unmittelbar berühren, so können wir auch zurück schliessen, dass in einem sehr festen Körper viel grobe Theilchen einander unmittelbar berühren. Denn wenn sich zwischen denselben nur die geringste subtile Materie befände, so würde ein jedes Theilchen von allen Seiten gleich stark gedrückt und also nirgend zwei aneinander gepresst werden. Wo sich aber in einem Körper die Theilchen leicht von einander trennen lassen, da muss sich auch eine sehr geringe Berührung der groben Theilchen befinden; und in einer flüssigen Materie eine solche Berührung gar nicht vorhanden sein. Eine flüssige Materie ist demnach dergestalt von dem Aether durchdrungen, dass die groben Theilchen nirgend zu einer unmittelbaren Berührung gelangen können. Wie dieses geschehen könne, so darf man sich nur vorstellen, dass ein jegliches Theilchen von grober Materie immer rundherum mit der subtilen Materie umgeben sei, und jene Theilchen folglich niemals so nahe zusammen kommen können, dass nicht zwischen denselben etwas von der subtilen Materie bleiben sollte. Wenn alles in Ruhe wäre, so würde sich eine solche Vermischung schwerlich begreifen lassen; wenn wir uns aber die subtile Materie in einer solchen Bewegung vorstellen, dass sie beständig zwischen den groben Theilchen durchstreicht, so kann auf solche Art die unmittelbare Berührung gehindert werden. Im Folgenden wird gezeigt werden, dass die Wärme in einer Bewegung der subtilen Materie bestehe, und daraus lässt sich leicht erklären, wie feste Körper durch einen grossen Grad der Wärme in flüssige, und hinwiederum das Wasser, wenn die Wärme auf einen gewissen Grad abgenommen, in Eis verwandelt werde. Man sieht zum wenigsten schon so viel voraus, dass sich eine Menge natürlicher Begebenheiten aus den bisher festgesetzten Grundsätzen ohne Schwierigkeit erklären lasse.

**132)** *Hier finden wir auch den Grund, warum zwei Marmorsteine, wenn sie glatt polirt und aufeinander gedrückt werden, so stark zusammenhängen, dass sie nicht anders als von einer sehr grossen Kraft wiederum von einander gerissen werden können; und überhaupt ist hieraus die Ursache des Zusammenhangs der Körper, wenn sie einander berühren, offenbar.*

Dass zwei glatt polirte Marmorplatten nicht blos von der Luft zusammengedrückt werden, erhellet daraus, dass dieselben auch in einem luftleeren Raume fest aneinander hängen bleiben, welche Wirkung also dem Drucke des Aethers zugeschrieben werden muss. Hiezu wird denn noch erfordert, dass viele grobe Theile einander unmittelbar berühren, und zu diesem Ende müssen die Marmorplatten wohl polirt sein und einige Zeit auf einander geschliffen werden, damit alle subtile Materie zwischen denselben vertrieben werde. Deswegen pflegt man auch die Marmorplatten anzufeuchten oder mit Fett zu bestreichen, als wodurch dieser Endzweck um so viel leichter erreicht wird. Auf diese Art können auch andere Körper so zusammengefügt werden, dass sie ziemlich fest aneinander hängen: hiezu wird nämlich nichts anderes erfordert, als dass grobe Theile einander unmittelbar berühren. Hievon haben einige Naturlehrer Anlass genommen den Körpern in der Berührung eine Anziehungskraft zuzuschreiben und dieselbe als eine wesentliche Eigenschaft anzusehen; sie haben sich auch bemüht die Gesetze dieser Anziehungs- oder vielmehr Anhängungskraft zu bestimmen, und behaupten dass diese Kraft unter gleichen Umständen um so viel grösser sei, je dichter die Körper sind. Die Sache selbst hat also ihre völlige Richtigkeit, ungeachtet die Meinung von einer darin sich äussernden besondern Eigenschaft der Körper wegfällt; denn wo zwei Körper so zusammengefügt werden können, dass grobe Theilchen einander unmittelbar berühren, da erfolgt wegen des Druckes des Aethers nothwendig ein Zusammenhängen. Man begreift auch, dass dazu die Dichtigkeit etwas beitragen könne, weil unter gleichen Umständen bei dichten Körpern mehr grobe Theile einander berühren können. Die Hauptsache beruht aber auf der Menge und Grösse der groben Theilchen, welche einander unmittelbar berühren. Weil nun diese Kraft nur in der unmittelbaren Berührung Platz findet, so kann man dieselbe nicht als eine anziehende Gewalt ansehen, welche dergestalt von der Entfernung abhängt, dass so lange die Körper noch von einander entfernt sind, dieselbe unmerklich sei, bei der wirklichen Berührung aber erst plötzlich betrachtlich werde.

---

## XVIII. Capitel.

### Von der Zusammendrückung und Federkraft der Körper.

**133)** *Es können sich in einem Körper zweierlei Poren oder Höhlungen befinden, je nachdem dieselben mit dem äussern Raume eine freie Gemeinschaft haben oder nicht. Im letztern Fal ist die darin enthaltene subtile Materie so eingeschlossen, dass sie sich mit der äusser nicht vermischen kann, und diese auch keinen Durchgang findet um da hinein zu dringe*

Alle Körper in der Welt sind aus der groben und subtilen Materie zusammengesetzt, wov

die erstere die eigenthümliche Materie genannt wird, weil die andere, wegen ihrer fast unendlich geringen Dichtigkeit nichts zu Vermehrung ihrer Masse beiträgt. Da sich nun die Vermischung dieser beiden Materien auf die kleinsten Theilchen erstreckt, so werden die Theilchen des Raumes, in welchen sich keine grobe Materie befindet, die *Poren* des Körpers genannt, und deren giebt es verschiedene Arten in Ansehung der Grösse, weil auch die kleinsten Theilchen noch immerfort mit Poren angefüllt sind. Die grössern von diesen Poren sind zwar nicht nur mit der subtilen Materie angefüllt, sondern enthalten auch Luft und folglich etwas von der groben Materie, allein diese pflegt gleichfalls nicht mit zur eigenthümlichen Materie gezählt zu werden, und in der gegenwärtigen Absicht gilt es gleichviel, ob sich darin blos subtile Materie oder auch Luft befindet. Der vornehmste Unterschied aber, welcher unter den Poren eines jeglichen Körpers betrachtet werden muss, besteht darin, dass sich von einigen ein offener Weg bis zu dem äussern Aether befindet, andere aber dergestalt rund herum von der groben Materie umgeben sind, dass die darin enthaltene subtile Materie nirgend entweichen kann. Um diesen Unterschied zu bemerken, wollen wir die ersteren *offne* Poren, die letztern aber *verschlossne* Poren nennen. Die erstern kann man also als offne Gänge, welche durch den ganzen Körper nach mancherlei Krümmungen durchgehen, ansehen, dergestalt, dass die äussere subtile Materie dieselben frei durchdringen und durchstreichen kann. Hingegen steht die in den verschlossenen Poren befindliche subtile Materie mit der äussern in keiner Gemeinschaft, also dass wenn dieselbe mehr oder weniger zusammengedrückt wird, das Gleichgewicht derselben mit der äussern nicht wieder hergestellt werden kann. Wir sehen hier zum wenigsten die Möglichkeit von solchen verschlossenen Poren, ob es gleich noch nicht ausgemacht ist, dass sich dergleichen wirklich in den Körpern befinden.

134) *Wenn ein Körper entweder in einen kleinern Raum zusammengedrückt, oder in einen grössern ausgebreitet, oder sonst seine Figur verändert wird, so muss daher nothwendig in seinen Poren eine Aenderung entstehen, indem einige erweitert, andere aber zusammengedrückt werden.*

Wenn die Figur eines Körpers verändert wird, so müssen die Theilchen, aus welchen der Körper besteht, eine andere Lage und Ordnung unter sich erhalten; und da die groben Theilchen, wegen ihrer Festigkeit, einer solchen Veränderung nicht fähig sind, so muss dieselbe in den Poren vorgehen. Um dieses deutlicher darzuthun, so wollen wir erstlich setzen, ein Körper werde in einen kleinern Raum zusammengepresst. Weil sich nun die grobe Materie für sich nicht zusammenpressen lässt, so kann dieses nicht anders geschehen, als wenn die Poren kleiner gemacht werden. In diesem Falle muss demnach die scheinbare Dichtigkeit des Körpers wachsen, weil die ganze Materie, woraus der Körper besteht, oder zum wenigsten die grobe, da die subtile in Ansehung derselben für nichts zu achten, in einen kleinern Raum gebracht worden. Es sei $a^3$ der Theil des vom Körper eingenommenen Raumes, welcher mit grober Materie angefüllt ist, $e^3$ aber der übrige Theil, so nur subtile Materie in sich enthält, oder die Summe von allen Poren zusammen genommen, so wird $a^3 + e^3$ die Grösse des Körpers, $a^3$ seine Masse und $\frac{a^3}{a^3 + e^3}$ seine Dichtigkeit ausdrücken. Nun aber kann $a^3$ nicht verändert werden, daher, wenn der Körper in einen kleinern

Raum gebracht wird, so wird nur $e^3$ verringert, oder die Summe von allen Poren wird kleine Hingegen aber, wenn der Körper in einen grössern Raum ausgebreitet wird, so muss auch nur de Werth von $e^3$ vergrössert werden, in welchem Falle die Dichtigkeit des Körpers vermindert wird Es kann aber auch eine Veränderung im Körper vorgehn, ohne dass $e^3$ grösser oder kleiner wird welches geschieht, wenn einige Poren erweitert, andere aber um ebenso viel verkleinert werden, s dass die ganze Summe derselben einerlei bleibt. Bei einer solchen Veränderung behält der ganz Körper eben dieselbe Dichtigkeit, weil $\frac{a^3}{a^3+e^3}$ einerlei bleibt, doch aber werden diejenigen Theile wo die Poren erweitert worden, dünner, die andern aber, wo die Poren enger worden, dicke werden. Dieser Unterschied kann bisweilen merklich werden; wenn aber die groben Theilchen mi den Poren dergestalt innigst vermischt sind, dass auch in den kleinsten Theilchen die Erweiterun und Zusammenziehung der Poren einander gleich bleibt, so lässt sich in der Dichtigkeit der Theil kein Unterschied bemerken, ungeachtet die Figur verändert worden.

135) *Wenn nach geschehener Veränderung der Figur eines Körpers die verschlossenen Pore weder grösser noch kleiner werden, so behält der Körper diese veränderte Figur. Wen aber die verschlossenen Poren weiter oder enger werden, so wird sich in dem Körpe eine Kraft äussern, sich wieder in seine vorige Figur herzustellen.*

Hier finden wir also den Grund des Unterschiedes zwischen den elastischen und unelastische Körpern. Derselbe beruht nämlich auf den verschlossenen Poren, insofern dieselben, nachdem di Figur des Körpers verändert worden, entweder erweitert oder vermindert werden, oder ihre Gröss unverändert beibehalten. Denn wenn diese Poren enger werden, so wird die darin befindliche sub tile Materie mehr zusammengedrückt, und äussert also eine grössere Kraft sich auszudehnen. D nun dieselbe vor der Veränderung mit der Federkraft des äussern Aethers im Gleichgewicht gestan den, so ist jetzt das Gleichgewicht gehoben, und daher entsteht in dem Körper eine Kraft um da Gleichgewicht wieder herzustellen; welches geschieht, wenn der Körper seine vorige Figur wiede annimmt. Die Poren können zwar auch wieder erweitert werden, wenn der Körper eine von de ersten verschiedene Figur annimmt, allein da derselbe in der veränderten Figur nicht verharre sondern eine andere anzunehmen bemüht ist, so wird ihm auch in diesem Falle eine elastisch Kraft zugeeignet. So oft nämlich ein Körper eine Kraft äussert, die Figur, in welcher er sic wirklich befindet, zu verändern, so wird dieselbe seine Federkraft genannt, welche also darin besteh dass die subtile Materie in den verschlossenen Poren mit einer grössern oder kleinern Federkra begabt ist, als die äussere. Woraus erhellet, dass ein Körper auch alsdann eine Federkraft ausübe müsse, wenn nach geschehener Veränderung seiner Figur, die verschlossenen Poren erweitert werde Wenn aber diese Poren immer einerlei Grösse beibehalten und also die darin befindliche subti Materie keine Veränderung in ihrer Federkraft leidet, so kann auch der Körper keine Kraft au üben um eine andere Figur anzunehmen, was für eine Veränderung auch immer in seiner Fig vorgehen mag, und solche Körper werden unelastisch genannt. Zu dieser Art gehören also vo züglicherweise diejenigen, in welchen gar keine verschlossene Poren befindlich sind. Denn da d subtile Materie in den offenen Poren mit der äussern eine freie Gemeinschaft behält, so wird d

Gleichgewicht niemals gehoben, wie gross auch immer die in der Figur vorgegangene Veränderung sein mag. Hieher ist zweifelsohne weiches Wachs, Leim und vielleicht auch Blei zu zählen, weil diese Materien alle mögliche Figuren, so ihnen eingedrückt werden, unverrückt behalten.

136) *Eine kleine Veränderung, welche in den verschlossenen Poren vorgeht, kann hinreichend sein, eine so grosse elastische Kraft in dem Körper hervorzubringen. Ueber dieses kann aber die Menge, Grösse und Figur der verschlossenen Poren sehr viel zur Vermehrung der elastischen Kraft beitragen.*

In der Lehre vom Gleichgewicht wird gezeigt, wie eine kleine Kraft mit einer grossen im Gleichgewichte stehen könne, und daher lässt sich begreifen, wie es möglich sei, dass eine kleine Veränderung in den verschlossenen Poren eine starke elastische Kraft hervorbringe. Wir haben aber auch gezeigt, dass der offene Aether sehr stark zusammengedrückt sei, und eine Federkraft habe, welche zum wenigsten eine hundertmal grössere ist als die Federkraft der Luft, welche doch durch eine Höhe Wasser von 32 Schuh ausgedrückt wird. Wenn wir nun annehmen, dass die Federkraft des Aethers nach dem Verhältnisse seiner Dichtigkeit wachse, so müsste die Federkraft der subtilen Materie, welche in einem zweimal kleinern Raume zusammengepresst worden, noch zweimal grösser sein. Wir haben aber Ursache zu glauben, dass in diesem Falle die Federkraft noch weit stärker sein müsse, oder dass dieselbe schon zweimal so gross werde, wenn die verschlossenen Poren noch viel weniger, als auf die Hälfte des Raumes, so sie natürlicher Weise einnehmen, zusammengedrückt werden. Da nun der Ueberschuss der Federkraft der in den verschlossenen Poren befindlichen subtilen Materie leicht 100 und mehr mal grösser werden kann, als die Federkraft der Luft, wodurch doch so grosse Wirkungen hervorgebracht werden können, so ist leicht zu erachten, dass auch die grösste Federkraft, welche irgend in einem Körper angetroffen wird, gar füglich aus diesem Grunde erklärt werden könne, und dass man eben nicht nöthig habe eine sehr beträchtliche Veränderung in den verschlossenen Poren zu behaupten. Hernach können diese Poren auch sehr klein sein, und die Kraft durch die Menge derselben ersetzt werden, wie es denn auch höchst wahrscheinlich ist, dass die verschlossenen Poren unbegreiflich klein sein müssen. Endlich kann auch die Figur derselben nicht wenig zur Vermehrung der elastischen Kraft beitragen, weil dieselbe von der Grösse der Fläche abhängt, nach welcher die subtile Materie auf die grobe wirkt. Je mehr also die Figur der Poren von der kugelrunden abweicht, weil alsdann bei einerlei Grösse der Umfang viel grösser wird, so muss auch die Federkraft um so viel mehr vermehrt werden.

137) *Diese Erklärnng der elastischen Kraft, durch die in den verschlossenen Poren befindliche subtile Materie, ist der Natur der elastischen Körper vollkommen gemäss, und wird durch die Art, nach welcher verschiedenen Körpern eine elastische Kraft beigebracht wird, noch mehr bestätigt.*

Die meisten elastischen Körper verlieren durch die Hitze ihre elastische Kraft. Es wird aber durch die Hitze die in den Poren der Körper befindliche subtile Materie in eine Bewegung gesetzt,

wodurch ferner die kleinsten Theilchen der Körper von einander getrennt, und also Zugänge z den vorher verschlossenen Poren eröffnet werden. Wenn demnach in einem Körper vor der Erhi zung viel verschlossene Poren befindlich gewesen, welche die elastische Kraft desselben verursac haben, so muss diese Kraft durch die Erhitzung wiederum verschwinden. Wenn hingegen e erhitzter Körper, als Stahl, Eisen, Glas, plötzlich abgekühlt wird, und dadurch die groben Theilch zur Berührung gelangen, so kann die zwischen denselben befindliche subtile Materie leicht dergesta eingeschlossen werden, dass alle Zugänge zu derselben verschlossen werden, aus welchen folgli eine elastische Kraft entstehen muss. Wird aber der erhitzte Körper nur nach und nach abgeküh so kann die subtile Materie durch ihre Bewegung in den Poren die Gemeinschaft um so viel leicht erhalten und also die Entstehung der verschlossenen Poren meistentheils verhindern. Wenn w auch ferner in Erwägung ziehen, dass die meisten Metalle durch das Hämmern eine elastische Kra erlangen, so erhalten wir daher noch eine stärkere Bestätigung unserer Erklärung. Denn da dur das Hämmern die groben Theilchen des Metalls näher zusammengetrieben werden, so ist ke Zweifel, dass dadurch nicht viele Poren, welche vorher offen gewesen, verschlossen, und d Gemeinschaft derselben sowohl unter sich als mit dem äussern Aether aufgehoben werden sollt Durch das Hämmern werden also Poren zugeschlossen, welche vorher offen gewesen, und auf die Art muss der Körper eine elastische Kraft erhalten. Wenn aber das Hämmern zu lange fortgeset wird, so können die Theilchen nicht weiter nachgeben, woraus eine völlige Absonderung derselbe oder ein Bruch entsteht, wie die Erfahrung lehrt. Dieses kann aber verhütet werden, wenn ma das Metall öfter erhitzt und durch die daher entstehende Bewegung der subtilen Materie, d geschlossenen Poren wieder eröffnet.

138) *Die elastische Kraft der Luft, welche uns die Versuche zu erkennen geben, ist nur d Ueberschuss der wahren elastischen Kraft derselben über die elastische Kraft des Aether Und also erhalten wir die ganze elastische Kraft der Luft, wenn wir zu derjenige welche die Versuche anzeigen, noch die elastische Kraft des offnen Aethers addiren.*

Lasst uns eine Masse Luft vorstellen, welche rings herum mit Aether umgeben: dieselbe wi also von allen Seiten durch die elastische Kraft des Aethers gedrückt, und wenn die Luft kei grössere Kraft hätte sich auszudehnen, so würde sie entweder in ihrem Zustande verbleiben, od gar in einen engern Raum zusammengedrückt werden. Da nun die Luft mit grosser Macht in ein luftleeren Raum hineindringt, ein solcher Raum aber mit Aether angefüllt ist, so muss die elastisc Kraft der Luft grösser sein als die des Aethers, und die Kraft, mit welcher die Luft in den lu leeren Raum hineindringt, entspringt nur aus dem Ueberschuss jener Kräfte. Die Versuche zeig uns also nur, um wie viel die elastische Kraft der Luft stärker ist als die des Aethers, daher w die wahre oder ganze elastische Kraft der Luft, von der scheinbaren, welche uns die Versuc anzeigen, wohl unterscheiden mögen. Weil nun die elastische Kraft einer flüssigen Materie s dem Druck, der Druck aber am füglichsten durch eine Höhe bestimmt wird, so lasst uns e elastische Kraft des Aethers durch die Höhe $h$, die scheinbare elastische Kraft der Luft durch e Höhe $q$ andeuten; so wird die wahre und ganze elastische Kraft der Luft durch die Höhe $h+q$

ausgedrückt werden: eine solche Kraft würde nämlich die Luft gegen einen völlig leeren Raum, worin auch kein Aether befindlich wäre, ausüben. Es ist aber hier zu merken, dass die Höhe $h$ ungleich viel grösser sein müsse, als die Höhe $q$, weil um die Härte der Körper hervorzubringen, eine weit grössere Kraft, als die scheinbare elastische Kraft der ordentlichen Luft erfordert wird, und es ist wahrscheinlich, dass $h$ zum wenigsten einige 100mal grösser sei als $q$. Folglich ist die wahre elastische Kraft der Luft nur um einen sehr geringen Theil grösser als die elastische Kraft des Aethers.

139) *Die Luft enthält sehr wenig grobe Materie und auch sehr wenig verschlossene Poren, durch deren Zusammendrückung die elastische Kraft der Luft vermehrt wird. Die meiste subtile Materie also, aus welcher die Luft nebst der groben besteht, befindet sich in offnen Poren, und wird folglich nicht mit der Luft zusammengedrückt.*

Die Luft ist nur in sofern schwer, als sie aus grober Materie besteht, da nun dieselbe gegen 20,000mal leichter ist, als Gold, das Gold aber noch viel Poren enthält, so ist klar, dass die grobe Materie, so in der Luft befindlich ist, weniger als den 20,000sten Theil des Raumes ausfüllt, woraus zugleich erhellet, dass die zwischen den groben Theilchen verschlossenen Poren einen sehr kleinen Theil des Raumes einnehmen müssen. Dieses ist von der gewöhnlichen Luft, welche uns umgiebt, zu verstehn. Weil sich nun diese noch gar weit ausdehnen kann, ehe sie alle scheinbare elastische Kraft verliert, oder mit dem Aether im Gleichgewicht steht, so wollen wir einen cubischen Schuh von solcher Luft, deren elastische Kraft der des Aethers gleich ist, betrachten, und dieser ganze Raum wird um so viel mehr fast mit lauter subtiler Materie angefüllt sein. Wenn sich nun alle subtile Materie in verschlossenen Poren befände, und mit der Luft gleich stark zusammengedrückt würde, so müsste die elastische Kraft der gewöhnlichen Luft, als welche zum wenigsten 100mal dichter ist als die natürliche, auch zum wenigsten 100mal grösser sein als die des Aethers, da doch dieselbe diese nur um einen sehr geringen Theil übertrifft. Es muss also sehr wenig subtile Materie in verschlossenen Poren vorhanden, und bei Verdickung der Luft nicht sehr stark zusammengedrückt werden. Wir wollen setzen, dass im obigen cubischen Schuh, $\frac{1}{n}$ Theil in verschlossenen Poren befindlich sei, welche, wenn dieselbe natürliche Luft in einen $m$ mal kleinern Raum zusammengedrückt wird, nur in einen $i$ mal kleinern Raum zusammengepresst werden. Da nun die elastische Kraft des Aethers durch die Höhe $h$ bestimmt wird, so wird die elastische Kraft dieser in einen $m$ mal kleinern Raum zusammengedrückten Luft durch die Höhe $h + \frac{m(i-1)h}{in}$ ausgedrückt, wo zu merken, dass $i$ vielmal kleiner ist als $m$, denn nach einigen Versuchen möchte wohl sein $i = \sqrt[3]{m}$. Nehmen wir nun an, dass die gewöhnliche Luft 125mal dichter sei als die natürliche, oder $m = 125$, so wird $i = 5$ und die ganze elastische Kraft derselben $= h + \frac{100}{n}$ h, welche also dem $h + q$ gleich sein muss. Wir haben aber bemerkt, dass $q$ etliche hundertmal kleiner ist als $h$, daher $n$ zum wenigsten 20,000 sein müsste. Hätten wir $m = 1000$, $i = 10$ und $q = \frac{1}{1000} h$ gesetzt, welches der Wahrheit vielleicht näher käme, so würde $\frac{1}{1000} = \frac{900}{n}$ und $n = 900,000$. Woraus erhellet, dass die verschlossenen Poren in der Luft einen fast unbe-

greiflich kleinen Theil der ganzen Ausdehnung betragen, und bei Zusammendrückung der Luft nu eine mässige Zusammendrückung leiden. Diese würde aber noch weit geringer werden, wenn di elastische Kraft des Aethers in einem grössern Verhältnisse wüchse, als die Dichtigkeit.

---

## XIX. Capitel.

### Von der Schwere und den Kräften, so auf die himmlischen Körper wirken.

140) *Die Schwere entsteht aus dem ungleichen Druck des Aethers, welcher in einer grösser Entfernung von der Erde immer grösser wird; daher die Körper stärker gegen die Erde als von derselben weggetrieben werden, und dem Ueberschusse dieser drückenden Kräft ist das Gewicht des Körpers gleich.*

Diejenigen, welche die Schwere einer anziehenden Kraft der Erde zueignen, gründen ihr Meinung hauptsächlich darauf, weil sonst keine Ursache dieser Kraft angezeigt werden könnte. D wir aber gewiesen, dass alle Körper rings herum mit Aether umgeben sind und von desselbe elastischer Kraft gedrückt werden, so haben wir nicht nöthig die Ursache der Schwere anderwärt zu suchen. Allein wenn der Druck des Aethers allenthalben gleich gross wäre, welcher Umstan zu dem Gleichgewicht desselben unumgänglich erfordert wird, so würden die Körper von alle Seiten gleich stark gedrückt, und also zu keiner Bewegung angetrieben werden. Wenn wir abe annehmen, dass der Aether um die Erde herum sich nicht im Gleichgewichte befinde, sondern de Druck desselben um so viel kleiner werde, je näher man zur Erde kommt, so muss ein jede Körper auf seiner obern Fläche einen stärkern Druck abwärts, als auf der untern Fläche aufwärt erhalten; folglich wird der Druck abwärts die Oberhand behalten und davon der Körper wirklic hinabgestossen werden, welche Wirkung die *Schwere*, und die abwärts stossende Kraft selbst da *Gewicht* des Körpers genannt wird. Wir haben schon bemerkt, dass durch den Stoss der subtile Materie kein grober Körper merklich angetrieben werden könne, weil die himmlischen Körper b ihrer schnellen Bewegung durch den Aether keinen merklichen Widerstand empfinden; daher d Ursache der Schwere blos allein in dem Drucke des Aethers gesucht werden muss. Wenn ab der Druck des Aethers in kleinern Entfernungen von der Erde abnimmt, so kann sich derselbe nicl im Gleichgewichte oder Ruhe befinden; alle seine Theilchen müssen eben so stark als grobe Körp abwärts gedrückt werden, und in denselben also eine solche Bewegung entstehen, so diesen Kräft gemäss ist. Hieraus folgt hinwiederum, dass wenn der Aether um die Erde herum sich in Bew gung befindet, und diese Bewegung um so viel grösser ist, je näher derselbe der Erde ist, se Druck alsdann in der Annäherung der Erde immer kleiner werden müsse. Wenn wir also n erklären könnten, warum der Aether in der Nachbarschaft der Erde nicht in seinem Gleichg-wichte verbleibt, sondern in Bewegung gesetzt wird, so hätten wir die wahre Ursache der Schwe entdeckt.

141) *Die Schwere wirkt nicht anders auf die Körper, als in so fern dieselben aus grober Materie bestehen; und das Gewicht eines Körpers ist um so viel grösser, je grösser der Raum ist, welcher mit grober Materie angefüllt ist, das ist: das Gewicht der Körper verhält sich wie ihre wahre Grösse.*

Die subtile Materie, welche sich in den offnen Poren der Körper befindet, steht mit dem äussern Aether in freier Gemeinschaft und hat keinen Antheil an der Bewegung des Körpers, daher sie auch von der eigenthümlichen Materie desselben unterschieden wird. Diejenige aber, welche in den verschlossenen Poren befindlich ist, bewegt sich wohl mit dem Körper: ihre Menge ist aber, wie wir bei der Luft gesehn, so gering, dass sie gleichsam für nichts zu achten. Man hat also nur auf die groben Theilchen zu sehn, auf welche der Aether mit seinem Drucke wirkt, und da ein jegliches derselben abwärts gestossen wird, so besteht das Gewicht des Körpers aus der Summe aller Kräfte, welche auf die groben Theilchen wirken. Es ist aber aus der Natur des Druckes flüssiger Materien bekannt, dass die daher auf einen Körper entspringende Kraft sich wie die Grösse desselben verhalte, und die Figur nichts zur Vermehrung oder Verminderung der Kraft beitrage. Daher wird ein jeglicher Körper von dem Aether eben so stark hinabgestossen werden, als wenn nur seine grobe Materie allein in einen Klumpen zusammengepresst wäre, dessen Ausdehnung wir oben die wahre Grösse des Körpers genannt haben, um dieselbe von der scheinbaren Grösse, welche die Poren zugleich mit in sich begreift, zu unterscheiden. Wenn wir also die wahre Grösse eines Körpers, oder den Raum, welcher nur von der groben Materie desselben angefüllt wird, durch $c^3$ ausdrücken, so wird dieser Körper von dem Drucke des Aethers eben so stark hinabgestossen, als ein aus grober Materie bestehender Würfel, dessen Seite $= c$ ist, oder als eine jegliche andere Figur, deren körperlicher Inhalt auch $= c^3$ ist. Wenn wir nämlich eine Säule annehmen, deren Grundfläche $= a$, und Höhe $= b$, so dass $aab = c^3$, so wird auch diese Säule mit jenem Körper einerlei Gewicht haben. Dieses folgt, wie gemeldet, aus der Lehre des Druckes flüssiger Materien, wo gezeigt wird, dass die sämmtliche Kraft derselben auf einen Körper sich wie die Grösse verhalte. Weil nun das Gewicht von dem Drucke des Aethers herrührt, so muss sich dasselbe ebenfalls wie die wahre Grösse eines jeglichen Körpers verhalten, und ein Körper, welcher nach der Menge seiner groben Materie zweimal so gross ist, muss auch ein zweimal so grosses Gewicht haben.

142) *Weil die Erfahrung lehrt, dass das Gewicht eines Körpers, je weiter derselbe von dem Mittelpunkt der Erde entfernt wird, nach dem Quadrat seiner Entfernung vermindert werde, so muss, um dieses zu erklären, der Druck des Aethers gegen den Mittelpunkt der Erde dergestalt abnehmen, dass die Verminderung sich umgekehrt wie die Entfernung davon verhalte.*

Es sei die wahre Grösse eines Körpers $= c^3$, welche wir uns als eine Säule *aabb* (Fig. 236.) vorstellen wollen, deren Grundflächen $aa = bb = a^2$ und Länge $ab = b$, so dass $a^2b = c^3$. Dieser Körper befinde sich seiner Länge nach gegen den Mittelpunkt der Erde $C$ gerichtet, in der Entfernung $CP = x$, denn wir sehen die Grösse des Körpers gegen diese Weite als nichts an. Wenn nun das Gewicht dieses Körpers auf der Oberfläche der Erde, deren halben Durchmesser wir durch $r$ andeuten

wollen, gesetzt wird $= P$, so wird die Kraft, welche eben diesen Körper, wenn er sich in der Entfernung $CP = x$ befindet, zur Erde treibt, nach der Erfahrung sein $= \frac{rr}{xx} P$. Um nun diese Kraft herauszubringen, so lasst uns den Druck des Aethers, wenn er sich in Ruhe befindet, durch die Höhe $h$ ausdrücken, und weil in $P$ sein Gleichgewicht gehoben, und sein Druck kleiner ist als $h$, so sei derselbe in der Entfernung $CP = x$ um die Kraft $\frac{A}{x}$ kleiner, und also $= h - \frac{A}{x}$, so dass sich die Verringerung umgekehrt wie die Entfernung $CP = x$ verhalte. Durch diesen Druck wird die Grundfläche $aa$ von $C$ weggestossen und die Kraft dieses Drucks wird sein $= aa\left(h - \frac{A}{x}\right)$. Die andere Grundfläche $bb$ ist um $b$ weiter von $C$ entfernt, und daher der Druck des Aethers daselbst $= h - \frac{A}{x+b}$; folglich wird der Körper gegen $C$ gestossen durch die Kraft $= aa\left(h - \frac{A}{x+b}\right)$. Da nun diese grösser als jene ist, so entsteht aus beiden eine Kraft, welche den Körper gegen $C$ zustösst, deren Grösse sein wird:

$$aa\left(h - \frac{A}{x+b}\right) - aa\left(h - \frac{A}{x}\right) = aa\left(\frac{A}{x} - \frac{A}{x+b}\right) = \frac{aabA}{x(x+b)} = \frac{Ac^3}{x(x+b)}.$$

Weil aber $b$ gegen $x$ verschwindet, so ist die nach $C$ treibende Kraft $= \frac{Ac^3}{xx}$, folglich umgekehrt wie das Quadrat der Weite von $C$; befindet sich also der Körper auf der Oberfläche der Erde, wo $x = r$, so wird sein Gewicht $P = \frac{Ac^3}{rr}$, welches demnach mit der wahren Grösse des Körpers $c^3$ einerlei Verhältniss hat.

143) *Der Verlust, welchen die elastische Kraft des Aethers in der Nachbarschaft der Erde leidet, ist sehr gross, und deswegen muss auch die elastische Kraft des Aethers, welcher in Ruhe ist, gar ungemein viel grösser sein, als diejenige, welche durch ihren Druck auf die irdischen Körper wirkt.*

Die Höhe $h$ soll die elastische Kraft des Aethers, wo er im Gleichgewichte ist, ausdrücken; die Höhe $h - \frac{A}{x}$ diejenige, welche der Aether in der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde $CP = x$ ausübt. Nun haben wir gesehen, dass die daher entstehende Kraft, welche einen Körper dessen wahre Grösse $= c^3$, nach der Erde stösst, sei $= \frac{Ac^3}{xx}$, und wenn wir diesen Körper an der Oberfläche der Erde annehmen, so wird sein Gewicht sein $= \frac{Ac^3}{rr}$, wo $r$ den Halbmesser der Erde anzeigt. Um die Grösse dieses Gewichts füglicher in die Rechnung zu bringen, so wollen wir dasselbe durch eine gleich schwere Masse Wasser ausdrücken, damit hernach auch die Höhe wodurch die elastische Kraft bestimmt wird, in Wasser ausgedrückt werde, eben wie die elastische Kraft der Luft einer Wasserhöhe von 32 Schuh gleichgeschätzt wird. Ein Körper aber, dessen wahre Grösse $= c^3$, ist schwerer als ein Würfel von Gold, dessen Seite $= c$, und also mehr den 19mal schwerer als ein gleich grosser Würfel Wasser. Demnach wird das Gewicht unseres Körpers grösser sein als $19c^3$, und also $A$ grösser als $19rr$. Lasst uns setzen $A = 40rr$, so wird die elastische Kraft des Aethers auf der Oberfläche der Erde $= h - 40r$. Folglich muss die Wasserhöhe $h$, welche den Druck des Aethers, so sich im Gleichgewichte befindet, anzeigt, weit grösse

sein als der Halbmesser der Erde 40mal genommen, weil der Verlust derselben allein auf der Erde schon $40r$, d. i. ungefähr 700 Millionen Schuh beträgt, wogegen die Wasserhöhe von 32 Schuh wie nichts zu rechnen. Die ungeheure Grösse dieses Drucks verursacht allerdings kein geringes Erstaunen, allein wenn die Schwere von dem Drucke einer subtilen Materie entsteht, so hat der Schluss seine völlige Richtigkeit. Wenn andere Begebenheiten in der Natur eine geringere Kraft erfordern, so folgt vielmehr, dass mehr als einerlei subtile Materie in der Welt angenommen werden muss, wie wir denn schon gesehn, dass die Luft von dem Aether unterschieden sei, ungeachtet sie in demselben schwebt und mit ähnlichen Eigenschaften begabt ist.

144) *Weil die Erfahrung ergiebt, dass alle schwere Körper in einem luftleeren Raume gleich geschwind fallen, so muss das Gewicht eines jeden Körpers mit seiner Masse in einerlei Verhältniss stehn. Da sich nun das Gewicht auch wie die wahre Grösse verhält, so folgt, dass wo die wahre Grösse einerlei ist, daselbst auch gleich viel grobe Materie vorhanden sei.*

Es ist schon oben gezeigt worden, dass wenn zweien Körpern eine gleiche Bewegung eingedrückt werden soll, die Kräfte sich wie ihre Massen verhalten müssen. Weil nun alle Körper, wenn kein äusserlicher Widerstand vorhanden, gleich geschwind fallen, so muss die herabstossende Kraft oder die Schwere mit der Masse in einerlei Verhältniss stehn. Aus diesem Grunde fallen alle diejenigen Erklärungen der Schwere von selbst weg, welche von dem Stosse einer auf die Körper strömenden subtilen Materie hergeleitet werden, weil die Grösse dieses Stosses mehrentheils auf der Figur der Körper beruhte, da doch aus der Erfahrung bekannt ist, dass ein Körper, wie auch immer seine Figur verändert wird, dennoch einerlei Schwere behält. Wenn wir aber die Schwere von dem Drucke einer subtilen flüssigen Materie herleiten, so muss sich dieselbe wie die wahre Grösse, d. i. wie der Raum, den die eigenthümliche oder grobe Materie einnimmt, verhalten: woraus dann folgt, dass die Masse oder Menge der groben Materie mit dem Raume, den sie einnimmt, in einerlei Verhältniss stehn müsse. Und aus eben diesem Grunde ist schon oben festgesetzt worden, dass alle grobe Materie gleich dicht sei, und ihre Dichtigkeit auf keinerlei Weise verändert werden könne. Dies Letztere erhellet zugleich daraus, dass das Gewicht eines Körpers, wie seine Figur auch immer verändert wird, allezeit gleich gross bleibt. Dieser Satz, worin die Natur der groben Materie festgesetzt worden, wird nun erst hier in sein völliges Licht gestellt und erhält seinen nöthigen Beweis, auf welchen wir uns schon oben berufen haben. Es ist auch von selbst klar, dass dieser Beweis dadurch nicht entkräftet werde, dass wir bisher den Satz selbst als wahr angenommen haben, weil Alles, was daraus hergeleitet worden, auf den gegenwärtigen Schluss keinen Einfluss hat. Wenn man überdies in Erwägung zieht, dass die subtile Materie, welche die Schwere hervorbringt, der Bewegung der Körper im Geringsten nicht widerstehe, so können auch keine andere Erklärungen, dergleichen bisher zum Vorschein gekommen, Platz finden.

145) *Eben wie die elastische Kraft des Aethers um die Erde herum vermindert wird, so wird dieselbe auch gleichergestalt um die Sonne und einen jeglichen andern himmlischen Körper*

*herum vermindert, und verhält sich die Verminderung in Ansehung eines jeglichen himmlischen Körpers umgekehrt wie die Entfernung von dem Mittelpunkte desselben.*

Hierin besteht das von dem grossen Newton entdeckte allgemeine Gesetz, nach welchem die Bewegung aller himmlischen Körper bestimmt werden kann: es verhält sich nämlich die Bewegung eines jeden himmlischen Körpers eben so, als wenn derselbe beständig gegen alle andern von solchen Kräften getrieben würde, welche nach eben dem Verhältnisse abnehmen, als die Quadrate der Entfernungen wachsen. Weil sich nun diese Kräfte ebenfalls nach der Masse, nnd folglich der wahren Grösse der Körper, auf welche sie wirken, richten, so müssen dieselben auch von der Ungleichheit des Druckes des Aethers hergeleitet werden: die elastische Kraft des Aethers muss nämlich gegen einen jeglichen himmlischen Körper eine Verminderung leiden, welche sich umgekehrt wie die Entfernung von demselben verhält. Wenn wir also, wie vorher, die elastische Kraft des Aethers, wo er sich vollkommen im Gleichgewichte befindet, durch die Höhe $h$ ausdrücken, so wird an einem Orte, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte gleich ist $z$, der Druck des Aethers durch die Höhe $h - \frac{A}{z}$ bestimmt werden, wo der Zähler des Bruches, $A$, eben wie für die Erde, einen gewissen beständigen Werth haben wird. Wenn sich nun an diesem Orte ein Körper befindet, dessen wahre Grösse $= c^3$, so wird derselbe gegen die Sonne getrieben werden von einer Kraft welche ist $= \frac{Ac^3}{zz}$, d. i. dieselbe wird sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung von der Sonne verhalten. Sehen wir ausser der Sonne noch auf einen andern himmlischen Körper, von dessen Mittelpunkt der obige Ort um die Weite $= y$ entfernt ist, so wird die elastische Kraft des Aethers auch daher eine Verminderung erleiden, und die Höhe, wodurch dieselbe an diesem Orte bestimmt wird, sein $= h - \frac{A}{x} - \frac{B}{y}$. Nimmt man nun alle himmlischen Körper zusammen und zeigt die Entfernung eines Orts von denselben durch die Buchstaben $z, y, x, v$ etc. an, so wird an diesem Orte die elastische Kraft des Aethers durch diese Höhe ausgedrückt werden: $h - \frac{A}{z} - \frac{B}{y} - \frac{C}{x} - \frac{D}{v}$ etc.; und die Wirkung dieses Drucks auf einen an diesem Orte befindlichen Körper wird eben so beschaffen sein, als wenn derselbe gegen alle himmlischen Körper gezogen würde, von solchen Kräften, welche sich umgekehrt wie die Quadrate seiner Entfernungen von denselben verhalten. Wegen der Zahlen $A$, $B$, $C$, $D$ etc. können wir noch anmerken, dass dieselben sich wie die Massen der himmlischen Körper, auf welche sie sich beziehen, verhalten.

146) *Alles kommt demnach darauf an, dass man die Ursache ergründe, warum die elastische Kraft von einem jeglichen himmlischen Körper vermindert werde? und warum diese Verminderung sich einestheils, wie die Masse des himmlischen Körpers, und anderntheils umgekehrt wie die Entfernung von demselben verhalte?*

Es sollen die Zeichen ☉, ☿, ♀, ♁, ♂, ♃, ♄, ☾ die Massen der durch diese Zeichen angedeuteten himmlischen Körper ausdrücken. Wenn wir nun einen Ort annehmen, dessen Entfernungen von diesen Körpern sein $D$☉, $D$☿, $D$♀, $D$♁ etc., so wird an diesem Orte die elastische Kraft des Aethers durch folgende Höhe bestimmt werden: $h - \frac{m☉}{D☉} - \frac{m☿}{D☿} - \frac{m♀}{D♀} - \frac{m♁}{D♁} -$ etc., wo $m$ eine

gewisse beständige Grösse andeutet, welche aus dem obigen für die Erde ausgeführten Fall bestimmt werden kann: es wird nämlich sein $m \eth = 40rr$, und also $m = \frac{40rr}{\eth}$, wo $r$ den Halbmesser der Erde anzeigt. Wenn wir also nur den Grund dieser in der elastischen Kraft des Aethers sich ereignenden Verminderung ausfindig machen könnten, so hätten wir eine vollständige Erklärung aller Kräfte, von welchen die himmlischen Körper getrieben werden. Ungeachtet wir aber hier stehn bleiben müssen, und kaum hoffen können, jemals die wahre Ursache dieser Verminderung der elastischen Kraft des Aethers zu ergründen, so kann man sich doch damit leichter begnügen, als wenn man blosserdings vorgiebt, alle Körper seien von Natur mit einer Kraft begabt einander anzuziehen. Denn, da man sich von diesem Anziehn nicht einmal einen verständlichen Begriff machen kann, so kann man im Gegentheil zum wenigsten überhaupt einsehn, wie es möglich sei, dass die elastische Kraft einer flüssigen Materie vermindert werde, und man begreift auch, dass dieses auf eine den Gesetzen der Natur gemässe Art geschehen könne. Es beruht aber alles auf folgenden zwei Stücken: erstlich, warum der Druck des Aethers von einem darin befindlichen groben Körper vermindert werde? und zweitens, warum diese Verminderung um so viel grösser werde, je näher man dem Körper kommt? Der Grund hievon muss also augenscheinlich in der groben Materie, aus welcher der Körper besteht, gesucht werden, und die grobe Materie muss in dem Aether eine Bewegung veranlassen, wodurch das Gleichgewicht gehoben wird. Wenn man erst so weit gekommen, so ist leicht zu zeigen, dass solchergestalt der Druck des Aethers vermindert werden müsse.

---

## XX. Capitel.

### Von den Gesetzen des Gleichgewichts in flüssigen Materien.

147) *Eine flüssige Materie, deren Theilchen von keinen andern Kräften als dem Drucke der anliegenden Theilchen getrieben werden, so verschieden dieselbe in Ansehung der Dichtigkeit sein mag, kann nicht im Gleichgewichte oder in Ruhe sein, wenn nicht der Druck in allen Punkten derselben gleich gross ist.*

Wenn eine flüssige Materie in Ruhe sein soll, so müssen auch alle Theilchen derselben in Ruhe verbleiben, und also die Kräfte, welche auf ein jegliches wirken, einander aufheben oder im Gleichgewichte erhalten. Da nun die Theilchen keine andere Kräfte ausstehen als den Druck der anliegenden, so muss dieser Druck von allen Seiten her gleich stark sein, welches geschieht, wenn die Höhe, wodurch der Druck bestimmt wird, allenthalben gleich gross ist. Hierin verursacht die verschiedene Dichtigkeit der flüssigen Materie keine Aenderung, als in sofern die Dichtigkeit von der Grösse des Druckes abhängt. Wenn also die flüssige Materie so beschaffen ist, dass wo der Druck gleich stark ist, daselbst auch die Dichtigkeit einerlei sein muss, wie in gleichartigen flüssigen Materien geschieht, welche sich zusammendrücken lassen, und das um so viel mehr, je grösser

die drückenden Kräfte sind, so muss in diesem Falle auch die Dichtigkeit allenthalben gleich gross sein. Weil nun der Aether eine solche flüssige Materie ist, deren Theilchen von keinen fremden Kräften angetrieben werden, und die Dichtigkeit desselben blos allein durch den Druck oder die elastische Kraft bestimmt wird, so kann der Aether nicht anders im Gleichgewichte sein, als wenn seine elastische Kraft und folglich auch seine Dichtigkeit allenthalben gleich gross ist. Da wir also bei Erklärung der Schwere gesehn haben, dass die elastische Kraft des Aethers an verschiedenen Orten sehr verschieden sein müsse, so muss sich auch eine gleiche Verschiedenheit in seiner Dichtigkeit befinden, und in seinen Theilen eine sehr starke innerliche Bewegung vorhanden sein. Wenn aber in diesem Falle, welchen wir hier setzen, verschiedene flüssige Materien unter einander vermengt wären, deren jede eine besondere Dichtigkeit hätte, welche von dem Drucke nicht abhinge, so würde doch zum Ruhestand und Gleichgewicht erfordert, dass die Grösse des Drucks allenthalben gleich wäre, wenn gleich die Dichtigkeit sehr verschieden sein sollte. Wird aber solche Materie eine Schwere haben, so müssen wir dieselbe besonders betrachten.

148) *Eine flüssige Materie, welche schwer ist, kann sich nicht anders im Gleichgewichte befinden, als wenn in gleichen Höhen sowohl der Druck als die Dichtigkeit gleich gross ist. In verschiedenen Höhen aber wird der Druck verschieden sein, und aufwärts immer kleiner werden, bis er endlich an der Oberfläche gänzlich verschwindet.*

Mann stelle sich eine horizontale Fläche $AB$ (Fig. 237.) vor, über welcher sich die flüssige Materie befinde, davon wir ein unendlich kleines würfelförmiges Theilchen $MNmn$ betrachten wollen. Dessen Höhe über jener Horizontalfläche $AB$, sei $XM = z$, also dass dasselbe von der Schwere nach der Richtung $MX$ hinab getrieben werde. Die Dichtigkeit dieses Theilchens sei $= q$, die Höhe $Mm = dz$, die Länge $MN = dx$ (wenn man setzt $AX = x$) und die Breite, so in der Figur nicht angezeigt ist, sei $= dy$, so wird der Inhalt dieses Theilchens $= dxdydz$, welcher mit der Dichtigkeit $q$ multiplicirt seine Masse $= qdxdydz$ giebt, wodurch zugleich sein Gewicht ausgedrückt wird. Also ist die Kraft der Schwere, welche dieses Theilchen nach $MX$ abwärts treibt, $= qdxdydz$, und deren Wirkung von dem Drucke der anliegenden flüssigen Materie muss aufgehalten werden. Es sei demnach der Druck in $M$ durch die Höhe $= p$ bestimmt, welche von den Coordinaten $x$, $y$ und $z$ abhängen muss, damit sie für einen jeglichen Punkt $M$ eine bestimmte Grösse erhalte. Weil nun das Theilchen $MNmn$ in Ruhe bleiben soll, so muss der Druck von den Seiten gleich gross sein und daher die Höhe $p$ keine Veränderung leiden, wenn gleich $x$ oder $y$ verändert wird, d. i. $p$ muss allein von der Höhe $XM = z$ abhängen. Es sei demnach der Druck in $m$ und $n = p + dp$, so wird die daher auf die obere Seite $mn$ drückende Kraft $= (p + dp)\, dxdy$; auf der untern Seite $MN$ wird dieses Theilchen aufwärts getrieben von der Kraft $= pdxdy$. Aus beiden entsteht also eine Kraft, welche das Theilchen aufwärts treibt $= - dpdxdy$ und der von der Schwere herrührenden abwärts treibenden Kraft $qdxdydz$ gleich sein muss. Zum Gleichgewicht wird also erfordert, dass da sei $- dp = qdz$ oder $dp = - qdz$. Weil nun, wie wir gesehn, $p$ allein von $z$ abhängt, so ist diese Gleichung nicht möglich, wenn nicht auch $q$ allein von $z$ abhängt, daher wird $p = c - \int qdz$. Also muss in gleichen Höhen $z$, nicht nur der Druck $p$, sondern auch die Dich-

tigkeit $q$ gleich gross sein, und je grösser die Höhe $z$ genommen wird, um so viel kleiner wird der Druck $p$ werden, und wenn wir die Höhe $AE$ so gross nehmen, dass $\int q dz = c$, so wird der Druck in $E$ und der ganzen durch $E$ gehenden Horizontalfläche $EF$ gänzlich verschwinden. Woraus folgt, dass die Oberfläche eines im Gleichgewichte befindlichen schweren flüssigen Körpers immer horizontal sein müsse. Hieraus ist auch klar, dass wenn ein anderes in gleicher Höhe befindliches Theilchen $M'N'm'n'$ dichter oder dünner, d. i. schwerer oder leichter wäre als $MNmn$, weil solches von dem Drucke ebenso stark aufwärts getrieben würde, dasselbe entweder hinabsinken, oder hinaufsteigen müsste, und also das Gleichgewicht nicht erhalten werden könnte.

149) *In einem stillstehenden Wasser verhält sich der Druck immer wie die Tiefe unter desselben Oberfläche, und ein darin versenkter Körper wird aufwärts getrieben von einer Kraft, welche dem Gewichte einer gleich grossen Menge Wassers gleich ist. Ist also der Körper für sich entweder schwerer oder leichter, so wird er entweder hinabsinken, oder hinaufsteigen.*

Wasser stellt uns hier eine solche flüssige Materie dar, deren Dichtigkeit unveränderlich ist nd keineswegs von dem Drucke abhängt, also dass $q$ eine beständige Grösse andeutet. Nach der origen Rechnung wird demnach der Druck $p = c - qz$, und wenn wir bis zur obersten Wasserläche $EF$ setzen die Höhe $AE = a$, weil in $E$ der Druck verschwindet, so haben wir $o = c - qa$, der $c = qa$. Daher wird $p = qa - qz = q(a - z)$, und $a - z$ deutet die Tiefe des Punktes $M$ nter der Oberfläche $EF$ an, also dass $p = q \, . \, PM$. Weil nun die Oberfläche eines freistehenden Vassers da ist, wo sich kein Druck befindet, so ist dieselbe immer horizontal, und das Gefäss ig. 238.) $ACBD$ mag eine Figur haben wie man will, so muss die Oberfläche $EG\,..\,HF$ horizontal in. Unter dieser Fläche fängt der Druck des Wassers an, und verhält sich ganz genau wie die iefe unter dieser Fläche, also in $M$ wird der Druck bestimmt durch die Höhe $p = q \, . \, PM$, oder enn sich diese Höhe auf das Wasser selbst bezieht, wie wir dieselbe oben nach der Masse einer eichförmigen Materie bestimmt haben, so ist $p = PM$: also ist die Höhe, welche den Druck des Vassers an einem jeglichen Orte $M$ bestimmt, der Tiefe dieses Orts unter der Oberfläche selbst leich. Es wird nämlich daselbst eine unendlich kleine Fläche $MN$, deren Inhalt $= ds^2$, so stark drückt, dass die Kraft dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, deren Grundfläche $= ds^2$ und e Höhe $= PM$ ist. Je tiefer also ein Ort $M$ unter der Oberfläche des Wassers angenommen rd, je grösser wird der Druck des Wassers daselbst; woraus erhellet, wie mit wenig Wasser ein hr grosser Druck hervorgebracht werden könne, wenn nämlich das Gefäss aufwärts in eine enge öhre aufhört, als welche mit wenig Wasser bis auf eine grosse Höhe angefüllt werden kann. sst uns nun auch einen in diesem Wasser versenkten Körper $MNmn$ betrachten, dessen Inhalt $= e^3$, so muss derselbe eben den Druck ausstehn, als wenn sich Wasser an seiner Stelle fände: dieses Wasser aber würde im Gleichgewichte sein, und also eben so stark aufwärts getrieben werden, als dasselbe von seiner Schwere abwärts gestossen wird. Daher wird dieser Körper n dem Drucke des Wassers aufwärts gestossen mit einer Kraft, welche dem Gewichte einer Menge asser, so den Raum $e^3$ einnimmt, gleich ist. Ist also das eigne Gewicht dieses Körpers grösser er kleiner, so wird derselbe von dem Ueberschuss hinab, oder hinaufgetrieben werden.

150) *Wenn die Luft im Gleichgewichte sein soll, so muss in gleichen Höhen über der Erd nicht nur der Druck und die Dichtigkeit, sondern auch die Wärme allenthalben gleic gross sein. Wenn diese Umstände nicht Statt finden, so kann die Luft nicht in Ruh verbleiben, sondern es muss ein Wind entstehn.*

Die elastische Kraft der Luft hängt nicht nur von ihrer Dichtigkeit ab, sondern die Wärm trägt auch sehr viel zu Vermehrung derselben bei. Wenn also die elastische Kraft der Luft a einem Orte $= p$ und die Dichtigkeit $= q$ gesetzt wird, $z$ aber, wie oben, die Höhe dieses Ort über der Erde oder einer beliebigen Horizontalfläche $AB$ (Fig. 237.) andeutet, so kann $p$ nicht allei aus dem $q$ erkannt werden, sondern man muss zugleich den Grad der Wärme, welcher sei $= r$ in Betrachtung ziehn. Ungeachtet die Art dieser Bestimmung nicht genau bekannt ist, so werde wir nicht sehr grob fehlen, wenn wir $p$ dem $qr$ proportional, oder $q = \frac{\beta p}{r}$ setzen. Weil nun i gleichen Höhen über der Erde oder der Horizontalfläche $AB$ sowohl der Druck $p$ als die Dichtig keit $q$ allenthalben gleich gross sein muss, so ist klar, dass sich auch daselbst einerlei Grad de Wärme $r$ befinden müsse, auf was für eine Art auch immer $p$ durch $q$ und $r$ bestimmt werde mag. Nehmen wir aber die obige Formel $q = \frac{\beta p}{r}$ an, so haben wir $dp = \frac{-\beta p dz}{r}$, oder $\frac{dp}{p} = \frac{-\beta dz}{r}$ Um den Inhalt dieser Gleichung deutlicher an den Tag zu legen, so wollen wir den Druck de Luft in einer jeglichen Höhe über der Erde durch die Höhe einer Wassersäule anzeigen, und dahe die Dichtigkeit des Wassers durch 1 ausdrücken. Ferner sei auf der Fläche $AB$ der Druck $= h$ die Dichtigkeit $= g$ und die Wärme $= f$. Da nun $g = \frac{\beta h}{f}$, so wird $\beta = \frac{fg}{h}$, und also $q = \frac{fgp}{hr}$ woraus entsteht $\frac{dp}{p} = \frac{-fgdz}{hr}$. Wäre nun die Wärme $r$ auf allen Höhen einerlei, oder $r = f$, s hätten wir $lp = C - \frac{gz}{h}$ und da für $z = o$, $p = h$ sein muss, so wird $lp = lh - \frac{gz}{h}$ oder $\frac{gz}{h} = l\frac{h}{p}$ Sollte aber die Wärme aufwärts immer abnehmen, so könnte aus dem Gesetz dieser Verminderung d Druck auf allen Höhen ebenfalls bestimmt werden. Uebrigens eröffnet uns dieser Satz eine reic Quelle von Winden, denn da die Wärme in einerlei Höhe immer verändert wird, so muss aus diese Grunde allein die Luft sich in einer beständigen Bewegung befinden, und daher Winde entstehn.

151) *Wenn alle Theile einer flüssigen Materie gegen einen Punkt nach dem Verhältnisse ihr Massen getrieben werden, und die Kräfte von den Entfernungen nach einem willküh lichen Gesetz abhängen, so wird zum Gleichgewichte erfordert, dass in gleichen Entfe nungen von gedachtem Punkte sowohl der Druck als die Dichtigkeit der flüssigen Mate gleich gross sei.*

(Fig. 239.). Es sei $C$ der Punkt, nach welchem alle Körper getrieben werden, dergestalt da wenn in der Entfernung $CM = z$ sich ein Körper befindet, dessen Masse $= M$, derselbe gegen mit der Kraft $= MZ$ getrieben werde, wo $Z$ durch $z$ auf eine willkührliche Art bestimmt wer Nun betrachte man in $M$ einen würfelförmigen Körper $MNmn$, dessen Höhe $Mm = dz$, Länge $= dx$ und Breite $= dy$, die Dichtigkeit aber $= q$ sei, so wird seine Masse $M'$ durch $qdxdydz$, und a seine Schwere gegen $C$ durch $qZdxdydz$ ausgedrückt werden. Es werde ferner der Druck in $M$

durch die Höhe $p$ bestimmt, so ist klar, dass der Druck von den Seiten gleich gross sein, und also $p$ keine Veränderung leiden müsse, so lange die Entfernung $z$ einerlei bleibt, d. i. $p$ muss nur allein von $z$ abhängen. Weil nun in $m$ der Druck der Höhe $p + dp$ gleich ist, und sowohl die obere als untere Grundfläche durch $dxdy$ ausgedrückt wird, so muss das Theilchen $MNmn$ durch den Druck der anliegenden flüssigen Materie aufwärts von der Kraft $pdxdy$, abwärts aber von der Kraft $(p + dp)\,dxdy$ getrieben werden. Daher mit der Schwere die ganze abwärts treibende Kraft sein wird: $(p + dp)\,dxdy + qZdxdydz$, welche folglich der aufwärts treibenden $pdxdy$ gleich sein muss, woraus diese Gleichung entspringt: $dp = -qZdz$. Weil nun $p$ allein von der Weite $CM = z$ abhängt, so muss auch $q$ von derselben allein abhängen, und also in gleichen Weiten sowohl der Druck als die Dichtigkeit gleich gross sein. Hieraus erkennen wir die oberste Fläche der flüssigen Materie, denn weil daselbst der Druck verschwinden und $p = o$ werden muss, so ist klar, dass alle Punkte derselben auch gleich weit von dem Mittelpunkte $C$ entfernt sein müssen. Diese Oberfläche $EPF$ wird also durch den Umfang einer Kugel, deren Mittelpunkt in $C$ ist, bestimmt werden. Ist die Dichtigkeit $q$ allenthalben einerlei und die Kraft $Z$ umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung $CM = z$, oder $Z = \frac{aa}{zz}$, so hat man $dp = \frac{-aaqdz}{zz}$ und also $p = C + \frac{aaq}{z}$. Setzt man $CP = c$, wo der Druck verschwindet, so hat man $o = C + \frac{aaq}{c}$, und daher wird $p = \frac{aaq}{z} - \frac{aaq}{c}$ oder $p = aaq\left(\frac{1}{CM} - \frac{1}{CP}\right) = \frac{aaq \,.\, PM}{CM \,.\, CP}$.

152) *Wie auch immer die Kräfte beschaffen sein mögen, welche auf die Theilchen der flüssigen Materie nach dem Verhältnisse ihrer Massen wirken, so lassen sich dieselben auf drei bringen, deren Richtungen auf einander winkelrecht, und mit drei nach Belieben angenommenen Linien gleichlaufend sind.*

Wir kommen nun auf die Bestimmung des Gleichgewichts flüssiger Materien in dem weitesten Umfange, und da wir bisher nur die Schwere und solche Kräfte, welche nach einem fixen Punkte treiben, betrachtet, so sollen jetzt die Kräfte beschaffen sein, wie man sie sich auch immer vorstellen mag. Es ist aber bekannt, dass sich dieselben immer auf drei bringen lassen, deren Richtungen drei nach Belieben angenommenen Linien, so auf einander winkelrecht stehen, gleichlaufend sind. Es seien demnach (Fig. 240.) $OA$, $OB$, $OC$ diese drei gegebenen Linien, wodurch drei Flächen $AOB$, $AOC$, $BOC$, welche auf einander auch rechtwinklicht sind, bestimmt werden. Nun betrachte man in $M$ ein unendlich kleines Theilchen der flüssigen Materie, dessen Masse sei $= M$, und um den Ort desselben zu bestimmen, so bemerke man seine Entfernungen von den drei gedachten Flächen, und setze $Mx = x$, $MY = y$, $MZ = z$, so wird auch sein $OV = TZ = x$, $VZ = TO = y$, $MV = TX = z$. Nach den Richtungen der drei Axen $OA$, $OB$, $OC$ werde nun das Theilchen in $M$ nach seiner Masse $M$ von folgenden drei Kräften angetrieben, nämlich von der Kraft nach $MP = M.P$, nach $MQ = M.Q$ und nach $MR = M.R$. Man gebe nun diesem Theilchen eine würfelförmige Figur $MPQRmpqr$, deren Länge $MP = dx$, Breite $MQ = dy$ und Höhe $MR = dz$, so dass der Inhalt sein wird $= dxdydz$. Setzt man ferner die Dichtigkeit der flüssigen Materie in $M = q$,

so wird die Masse dieses Theilchens $= qdxdydz$, und folglich werden die drei Kräfte, welche a dieses Theilchen wirken, sein wie folgt:

$$\text{nach } MP = Pqdxdydz, \quad \text{nach } MQ = Qqdxdydz, \quad \text{nach } MR = Rqdxdydz.$$

In diesem würfelförmigen Theilchen haben wir sechs Flächen zu bemerken, welche wir folgende gestalt benennen wollen, um dieselben besser von einander zu unterscheiden:

$MPQr = dxdy$ die vordere, $MPRq = dxdz$ die untere, $MQRp = dydz$ die linke,
$mpqR = dxdy$ die hintere, $mprQ = dxdz$ die obere, $mqrP = dydz$ die rechte.

153) *Um das Gleichgewicht einer solchen flüssigen Materie zu bestimmen, kommt alles auf d Erkenntniss des dazu erforderten Druckes in allen Punkten an. Derselbe aber beru einzig und allein auf der Wirksamkeit der Kräfte, von welchen jegliche Theilchen d flüssigen Materie getrieben werden.*

Alles was im vorigen Satze beigebracht worden, vorausgesetzt, so sei $p$ die Höhe, durc welche der Druck in $M$ bestimmt wird, deren Veränderlichkeit von allen drei Grössen $x$, $y$, abhängen wird. Um diese füglicher in Betrachtung zu ziehen, so wollen wir den Zuwachs von wenn nur $x$ um $dx$ wächst, $y$ und $z$ aber unverändert bleiben, durch $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, den Zuwachs ab wenn nur $y$ um $dy$ wächst, durch $dy\left(\frac{dp}{dy}\right)$, und den Zuwachs wenn nur $z$ um $dz$ wächst, durc $dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$ andeuten. Also wenn alle drei Grössen $x$, $y$, $z$ um $dx$, $dy$, $dz$ wachsen, so wird d Zuwachs von $p$ sein

$$= dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right) + dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

welches, wie gewöhnlich, der wahre Werth von $dp$ sein wird. Man sieht hier sogleich, dass m den Werth von $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ findet, wenn man $p$ differentiirt und nur allein $x$ als veränderlich annimm woraus man die Bedeutung dieser noch nicht sehr üblichen Schreibart $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ erkennt. Weil nun d Druck auf die Fläche $Pqrm$ um $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ grösser ist als auf die Fläche $MQRp$, so wird das Theilch links nach $PM$ getrieben von der Kraft

$$dx\left(\frac{dp}{dx}\right) \cdot dydz = dxdydz\left(\frac{dp}{dx}\right).$$

Ferner, weil der Druck auf die obere Fläche $mprQ$ um $dy\left(\frac{dp}{dy}\right)$ grösser ist als auf die unte $MPRq$, so wird das Theilchen abwärts nach $QM$ getrieben von der Kraft

$$dy\left(\frac{dp}{dy}\right) \cdot dxdz = dxdydz\left(\frac{dp}{dy}\right).$$

Und weil endlich der Druck auf die hintere Fläche $mpqR$ um $dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$ grösser ist als auf die vorde $MPQr$, so wird das Theilchen vorwärts nach $RM$ gestossen von der Kraft

$$dz\left(\frac{dp}{dz}\right) \cdot dxdy = dxdydz\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Diese drei Kräfte müssen also den drei obigen Kräften, welche auf das Theilchen wirken, gleich und entgegengesetzt sein, weil sonst das Gleichgewicht nicht Statt finden könnte. Daher erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$Pq = \left(\frac{dp}{dx}\right), \quad Qq = \left(\frac{dp}{dy}\right), \quad Rq = \left(\frac{dp}{dz}\right)$$

aus welchen folglich, wenn das völlige Differential von $p$ eingeführt wird, diese entspringt:

$$q\,(Pdx + Qdy + Rdz) = dp.$$

Es drückt aber $\int(Pdx + Qdy + Rdz)$ dasjenige aus, was oben die Wirksamkeit der Kräfte ist genannt worden. An welchen Orten also die Wirksamkeit einerlei ist, daselbst muss sowohl der Druck als die Dichtigkeit der flüssigen Materie gleich gross sein.

154) *Eine flüssige Materie, welche entweder durch und durch gleich dicht ist, oder deren Dichtigkeit allein von dem Drucke abhängt, kann niemals in's Gleichgewicht kommen, wofern die darauf wirkenden Kräfte nicht so beschaffen sind, dass ihre Wirksamkeit angezeigt werden kann.*

Wenn die Dichtigkeit $q$ entweder unveränderlich ist, oder von dem Drucke $p$ allein abhängt, so lässt sich $\frac{dp}{q}$ integriren und das Integral $\int\frac{dp}{q}$ erhält einen gewissen bestimmten Werth. Weil wir nun gefunden haben $\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz$, so muss sich der Werth von $\int(Pdx + Qdy + Rdz)$ durch die Integration auch dergestalt bestimmen lassen, dass man denselben für einen jeglichen Ort, wie auch immer die drei Grössen $x$, $y$, $z$ angenommen werden mögen, anzeigen kann, d. i. die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ muss integrabel sein; eben nicht algebraïsch, doch so, dass dieselbe aus der Differentiation einer aus $x$, $y$, $z$ zusammengesetzten bestimmten Grösse entspringe. Es kommt also darauf an, dass die Kräfte $P$, $Q$, $R$ so beschaffen seien, dass ihre Wirksamkeit, so durch $\int(Pdx + Qdy + Rdz)$ ausgedrückt wird, angezeigt werden könne; in welchem Falle denn auch für alle möglichen Orte $M$ die Dichtigkeit und der Druck der flüssigen Materie bestimmt wird. Alle wirklichen Kräfte, welche uns bekannt sind, sind auch in der That so beschaffen, dass ihre Wirksamkeit oder die Integralgrösse $\int(Pdx + Qdy + Rdz)$ angezeigt werden kann. Wenn wir uns aber in der Einbildung solche Krafte vorstellen, wo die Integration unmöglich ist, als wenn man setzte $P = x$, $Q = y$ und $R = x$, so wäre das Integral $\int(xdx + ydy + xdz)$ unmöglich, und daher könnte sich eine flüssige Materie, so von dergleichen Kräften getrieben würde, niemals im Gleichgewichte befinden, welche Ungereimtheit aber den erdichteten Kräften zuzuschreiben ist. Im Uebrigen, wenn sich die Wirksamkeit der Kräfte bestimmen lässt, und man setzt $\int(Pdx + Qdy + Rdz) = V$, so hat man $\int\frac{dp}{q} = C + V$, und wenn $p = o$, so hat man für die Figur der Oberfläche der flüssigen Materie $C + V = o$, oder auch diese Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = o$, durch welche die Figur einer jeglichen, im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Materie allezeit bestimmt wird und deren Verwandtschaft mit der Wirksamkeit wohl verdient bemerkt zu werden.

## XXI. Capitel.

### Von den Gesetzen der Bewegung flüssiger Materien.

155) *Die Bewegung einer flüssigen Materie wird vollkommen erkannt, wenn man für einen jeglichen Zeitpunkt sowohl die Geschwindigkeit als die Richtung, womit ein jegliches Theilchen bewegt wird, anzuzeigen im Stande ist: zu welchem Ende die Bewegung am füglichsten nach drei gegebenen Richtungen, so unter sich winkelrecht sind, aufgelöst wird.*

Wir wollen sogleich die Bewegung der flüssigen Körper in dem weitesten Umfange betrachten, weil hiezu nicht viel schwerere Schlüsse erfordert werden, als wenn wir nur einen und den andern besondern Fall abhandeln wollten; und damit man überführt werde, dass die oben gegebenen Grundsätze nicht nur allgemein, sondern auch hinreichend sind alle möglichen Fälle, welche immer vorkommen können, zu erörtern. Um also diese Abhandlung ganz allgemein auszuführen, so wollen wir die flüssige Materie, wie in den letzten Sätzen des vorigen Capitels geschehn, nach drei auf einander rechtwinklichten Flächen $AOB$, $AOC$, $BOC$, und drei Axen $OA$, $OB$, $OC$ in Erwägung ziehen. Wir nehmen daher einen in dem flüssigen Körper befindlichen Punkt $M$ vor, dessen Stelle durch seine Entfernung von den obigen drei Flächen also bestimmt würde: $MX = x$, $MY = y$ und $MZ = z$. Nachdem nun von einem gewissen Zeitpunkte eine Zeit, welche wir durch $t$ andeuten wollen, verstrichen ist, so wird das in $M$ befindliche Theilchen der flüssigen Materie eine gewisse Bewegung haben, und diese mag beschaffen sein wie man will, so lässt sich dieselbe allezeit nach drei Richtungen $MP$, $MQ$ und $MR$, welche mit den drei angenommenen Axen $OC$, $OB$ und $OA$ gleichlaufend sind, auflösen. Wir wollen also setzen: die Bewegung nach $MP = u$, nach $MQ = v$ nach $MR = w$, und auf der Bestimmung dieser drei Bewegungen beruht die ganze Erkenntniss der Bewegung der flüssigen Materie. Es kann sich aber in diesen drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ eine doppelte Veränderlichkeit befinden, davon die eine von dem Orte des Punktes $M$, d. i. von den drei Grössen $x$, $y$, $z$, die andere aber von der Zeit $t$ abhängt. Daher müssen dieselben als solche Quantitäten angesehn werden, welche aus den vier veränderlichen Grössen $x$, $y$, $z$ und $t$ zusammengesetzt sind, wo wir also wiederum die obige Art, den Zuwachs einer jeden, wenn nur eine von diesen um unendlich wenig wächst, auszudrücken, beibehalten wollen.

156) *Diese drei Bewegungen müssen mit der Dichtigkeit der flüssigen Materie und derselben Veränderlichkeit, sowohl nach dem Orte als der Zeit, in einem gewissen Verhältniss stehn, woraus eine Gleichung erwächst, welche die möglichen Bewegungen von den unmöglichen unterscheidet. Diese Gleichung beruht auf dem Grundsatze des Stetigen.*

Die Dichtigkeit in $M$ sei jetzt $= q$, welche sowohl mit der Zeit als dem Orte verändert werde. Es komme aber der Punkt $M$ durch seine Bewegung nach der Zeit $dt$ in $M'$, dessen Ort durch

olgende drei Coordinaten bestimmt wird: $x + udt$, $y + vdt$, $z + wdt$, folglich wird alsdann die Dichtigkeit in $M'$ sein:

$$q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right) + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dq}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dq}{dz}\right).$$

Man gebe nun dem flüssigen Theilchen in $M$ eine würfelförmige Figur $MPQRmpqr$, deren Inhalt $= dxdydz$ und Masse $= qdxdydz$, welche durch die Bewegung in der Zeit $dt$ in $M'P'Q'R'm'p'q'r'$ versetzt werde. Wenn die Bewegung des Punktes $P$ mit $M$ einerlei wäre, so würde $M'P' = MP$; allein die drei Bewegungen des Punktes $P$ sind:

$$u + dx\left(\frac{du}{dx}\right),\quad v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right) \text{ und } w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right),$$

wovon die beiden letztern die Weite $M'P'$ nicht verändern, weil sie darauf winkelrecht sind. Da aber nach der ersten der Punkt $P$ geschwinder geht als $M$ um $dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, so wird $M'P'$ um $dxdt\left(\frac{du}{dx}\right)$ grösser sein als $MP$, also:

$$M'P' = dx + dxdt\left(\frac{du}{dx}\right) = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right).$$

Gleichergestalt wird

$$M'Q' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right) \text{ und } M'R' = dz\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Ungeachtet nun in dieser veränderten Figur die Winkel nicht mehr völlig recht sind, so ist doch der Unterschied unendlich klein und wird daher der Inhalt derselben durch $M'P'.M'Q'.M'R'$ richtig angezeigt. Dieser Inhalt ist demnach:

$$dxdydz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right),$$

welche mit der oben gegebenen Dichtigkeit multiplicirt die Masse giebt:

$$qdxdydz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right) + dxdydz\left(dt\left(\frac{dq}{dt}\right) + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dq}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dq}{dz}\right)\right),$$

welche aus dem Grundsatze des Stetigen der vorigen Masse $qdxdydz$ gleich sein muss. Wenn wir also durch $dtdxdydz$ dividiren, so erhalten wir diese Gleichung:

$$q\left(\frac{du}{dx}\right) + q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{dw}{dz}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = o,$$

welche sich in folgende zusammenziehen lässt:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = o,$$

wodurch ein gewisses Verhältniss angezeigt wird, in welchem die drei Bewegungen mit der Dichtigkeit stehen müssen.

*

157) *Was den Druck anlangt, so muss derselbe allenthalben so beschaffen sein, dass aus demselben mit den Kräften, welche auf jegliches Theilchen wirken, die Bewegung desselben entstehe. Die Gleichung, so daher erhalten wird, dient also um den Druck der flüssigen Materie aller Orten und zu allen Zeiten zu bestimmen.*

Wir wollen setzen, dass, wie im vorigen Capitel, das Theilchen, nach dem Verhältniss seiner Masse, in $M$ von drei Kräften $P$, $Q$, $R$ nach den Richtungen $MP$, $MQ$, $MR$ getrieben werde. Da nun die Masse $= qdxdydz$, so sind diese drei Kräfte: nach $MP = Pqdxdydz$, nach $MQ = Qqdxdydz$, nach $MR = Rqdxdydz$. Lasst uns ferner den Druck in $M$ zur Zeit $t$ durch die Höhe $p$ andeuten, deren Veränderlichkeit ebenfalls sowohl von der Stelle als der Zeit abhängen wird. Was dieser Druck auf das Theilchen $MPQRmpqr$ für eine Wirkung ausübe, ist schon oben (153) angezeigt worden: dasselbe wird nämlich getrieben von folgenden Kräften

$$\text{nach } PM = dxdydz\left(\frac{dp}{dx}\right), \quad \text{nach } QM = dxdydz\left(\frac{dp}{dy}\right), \quad \text{nach } RM = dxdydz\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Diese Kräfte von den obigen abgezogen, müssen die Vermehrungen der Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ in der Zeit $dt$, innerhalb welcher der Punkt $M$ in $M'$ kommt, bestimmt werden. Die Grössen $t$, $x$, $y$, $z$, von welchen die drei Bewegungen abhängen, erhalten bei dieser Veränderung folgende Zuwachse: $dt$, $udt$, $vdt$ und $wdt$, daher der Zuwachs der Geschwindigkeiten sein wird:

$$\text{von } u = dt\left(\frac{du}{dt}\right) + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right) = Xdt$$

$$\text{von } v = dt\left(\frac{dv}{dt}\right) + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right) = Ydt$$

$$\text{von } w = dt\left(\frac{dw}{dt}\right) + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right) = Zdt$$

woraus man ersieht, was wir, um abzukürzen, durch $X$, $Y$ und $Z$ verstehen. Nun aber ist der Zuwachs einer jeden Geschwindigkeit mit der Masse $qdxdydz$ multiplicirt gleich der ganzen nach ihrer Richtung treibenden Kraft mit der Zeit $dt$ multiplicirt, wie oben erwiesen worden. Demnach bekommen wir folgende drei Gleichungen, nachdem wir eine jegliche durch $dtdxdydz$ dividirt haben

$$Xq = Pq - \left(\frac{dp}{dx}\right), \quad Yq = Qq - \left(\frac{dp}{dy}\right), \quad Zq = Rq - \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Weil nun

$$dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right) + dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

das Differential von $p$ ausdrückt, wenn alle drei Coordinaten $x$, $y$, $z$ als veränderlich, die Zeit $t$ als unveränderlich angenommen wird, so wollen wir, wie gewöhnlich, für dieses Differential schlechtweg $dp$ schreiben, und dadurch werden diese drei Gleichungen in folgende eine vereinigt

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - Xdx - Ydy - Zdz$$

in welcher Differentialgleichung folglich die Zeit $t$ als unveränderlich angesehn werden muss. $P$, $Q$, $R$ sind die Kräfte, und die Werthe von $X$, $Y$, $Z$ sind oben angezeigt worden.

158) *In diesen zwei Gleichungen sind alle mögliche Bewegungen, welche auch immer in flüssigen Materien Statt finden können, enthalten; die flüssigen Materien mögen sich zusammendrücken lassen, oder nicht, und wie auch immer die Kräfte, welche auf dieselben wirken, beschaffen sein mögen.*

Wenn wir alles zusammenziehen, was bisher gesagt worden, so kommt die ganze Sache auf folgende Punkte an. Erstlich muss der Zustand der flüssigen Materie nach drei auf einander winkelrechten Flächen $AOB$, $AOC$, $BOC$ und drei Axen $OA$, $OB$, $OC$ beurtheilt werden, welche nach Willkühr angenommen werden können. Zweitens betrachte man auf eine seit einem gewissen Anfange verflossene Zeit $t$, ein Theilchen der flüssigen Materie in $M$, dessen Ort durch die Coordinaten $XM = x$, $YM = y$ und $ZM = z$ bestimmt werde. Drittens werden die Kräfte, welche darauf nach dem Verhältnisse der Massen wirken, nach den drei Richtungen $MP$, $MQ$, $MR$ aufgelöst, und durch die Buchstaben $P$, $Q$, $R$ dergestalt angedeutet, dass dieselben mit der Masse multiplicirt die Kräfte selbst ausdrücken. Viertens setze man auf die Zeit $t$ die Dichtigkeit der flüssigen Materie in $M = q$, und den Druck gleich der Höhe $p$. Fünftens, die Bewegung dieses Theilchens selbst deute man nach den drei Richtungen $MP$, $MQ$, $MR$ durch die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ an: so muss in diesen Grössen $p$, $q$, $u$, $v$, $w$ eine doppelte Veränderlichkeit betrachtet werden, wovon die eine blos von der Zeit $t$, die andere aber blos von dem Orte, oder den drei Coordinaten $x$, $y$ und $z$ abhängt. Sechstens setze man, nur um die Rechnung abzukürzen:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) = X$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) = Y$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) = Z.$$

Ist dieses geschehen, so wird die Bewegung, dieselbe mag auch beschaffen sein wie sie immer will, durch folgende zwei Gleichungen ausgedrückt:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = o$$

$$\text{II.} \quad \frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - Xdx - Ydy - Zdz$$

wo zu merken, dass in dieser zweiten Differentialgleichung die Zeit $t$ als beständig, und nur die drei Coordinaten $x$, $y$, $z$ als veränderlich angesehn werden müssen. Hiernach muss man sich also in der Integration richten, weil die beständige Grösse, so dadurch hinzukommt, die Zeit in sich fassen kann. Und auf diese Art werden alle äusserlichen Umstände, als, wenn die flüssige Materie von aussen gedrückt wird, in die Rechnung gebracht. In allen Fällen kommt es also darauf an, dass man finde, wie die drei Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ von den Grössen $x$, $y$, $z$ und der Zeit $t$ abhängen müssen, damit erstlich der erstern Gleichung ein Genüge geschehe, und hernach die zweite Gleichung sich integriren lasse. Hier fehlt es aber an der Auflösungskunst, in welcher man es noch nicht so weit gebracht hat, dass man dieses allgemein leisten könnte.

159) *Fast alle Bewegungen flüssiger Körper, welche man völlig zu bestimmen im Stande ist, werden auf diesen Fall eingeschränkt, da sich eine flüssige Materie durch eine Röhre bewegt, und wenn die daher geleiteten Bestimmungen nach aller Schärfe richtig sein sollen, so muss die Röhre gleichsam unendlich lang sein. Findet dieser Umstand nicht Platz, so sind auch die Schlüsse nicht völlig der Wahrheit gemäss.*

Man beziehe die Röhre $HMN$ (Fig. 241.) auf unsere drei Flächen $AOB$, $AOC$ und $BOC$ und betrachte den Durchschnitt derselben $H$ in der Fläche $AOB$. Es sei nun die Weite der Röhre in $H = cc$, und für den Ort des Punktes $H$ daselbst $OG = g$ und $GH = h$. Nach der Zeit $t$, sei die Geschwindigkeit der flüssigen Materie in $H = \omega$, und die Dichtigkeit derselben $= \theta$ und der Druck $= \pi$, so werden die Grössen $\omega$, $\theta$ und $\pi$ nur allein von der Zeit $t$ abhängen. Für einen jeglichen andern Punkt der Röhre $M$, dessen Ort durch die drei Coordinaten $OV = x$, $VZ = y$, $ZM = z$ bestimmt wird, sei zu eben der Zeit die wahre Geschwindigkeit in $M$ nach der Richtung der Röhre $Mm = \vartheta$, die Dichtigkeit $= q$, der Druck $= p$, die Weite der Röhre $= rr$, und die Kräfte wie vorher $MP = P$, $MQ = Q$, $MR = R$, welche nach dem Verhältnisse der Massen wirken. Weil die Figur der Röhre als bekannt angesehn wird, deren Länge $HM$ sein soll $= s$, so werden $x$, $y$, $z$ und $rr$ durch $s$ gegeben. Aus der wahren Geschwindigkeit $\vartheta$ und der Richtung $Mm = ds$ folgen die drei Geschwindigkeiten

$$u = \frac{\vartheta dx}{ds}, \quad v = \frac{\vartheta dy}{ds}, \quad w = \frac{\vartheta dz}{ds},$$

daher $udy = vdx$, $udz = wdx$, $vdz = wdy$ und $uu + vv + ww = \vartheta\vartheta$. Folglich wird

$$Xdx + Ydy + Zdz = + dx\left(\frac{du}{dt}\right) + udx\left(\frac{du}{dx}\right) + udy\left(\frac{du}{dy}\right) + udz\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$+ dy\left(\frac{dv}{dt}\right) + vdx\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdy\left(\frac{dv}{dy}\right) + vdz\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$+ dz\left(\frac{dw}{dt}\right) + wdx\left(\frac{dw}{dx}\right) + wdy\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdz\left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Weil nun $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ nicht von der Zeit abhängen, so ist $\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{dx}{ds}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ etc., und wenn in den übrigen Gliedern $t$ als beständig angenommen wird, weil $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds} = ds$, so wird

$$Xdx + Ydy + Zdz = ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) + udu + vdv + wdw = ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) + \vartheta d\vartheta.$$

Unsere Differentialgleichung wird daher diese Gestalt erhalten:

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) - \vartheta d\vartheta.$$

Man setze die Wirksamkeit der Kräfte $= V$, so wird $Pdx + Qdy + Rdz = dV$, woraus folgende Gleichung entsteht:

$$\frac{dp}{q} = dV - ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) - \vartheta d\vartheta.$$

in welcher die Zeit $t$ als beständig angenommen wird. Also ist

$$\int \frac{dp}{q} = V - \tfrac{1}{2} vv - \int ds \left(\frac{dv}{dt}\right) + \text{Const.},$$

welche Constante noch die Zeit $t$ in sich schliessen kann.

160) *Ausser dieser Gleichung aber, wodurch der Druck der flüssigen Materie in der Röhre bestimmt wird, muss auch der Grundsatz des Stetigen in Betrachtung gezogen werden, woraus man eine neue Gleichung erhält, welche mit der vorigen die ganze Bewegung enthält.*

Wir finden diese neue Gleichung am füglichsten aus der Betrachtung, dass die flüssige Materie, welche jetzt den Theil der Röhre $HM$, nach der Zeit $dt$ aber den Theil der Röhre $hm$ einnimmt, in beiden Fällen einerlei Masse haben muss. Weil nun die Weite der Röhre in $M = rr$, so ist jetzt die Masse der in der Röhre $HM$ befindlichen flüssigen Materie $= \int qrrds$, nach der Zeit $dt$ aber wird die daselbst befindliche Materie der Masse nach sein $= \int qrrds + dt \int rrds \left(\frac{dq}{dt}\right)$. In der Zeit $dt$ aber fliesst dieselbe von $H$ in $h$ und $M$ in $m$, so dass $Hh = \omega dt$ und $Mm = vdt$; daher die in $Hh$ enthaltene Masse sein wird $= \theta cc\omega dt$, und in $Mm = qrrvdt$, deren jene von der obigen abgezogen, diese aber hinzugethan werden muss. Folglich wird die nach der Zeit $dt$ in dem Theile der Röhre $hm$ befindliche Masse der flüssigen Materie sein $\int qrrds + dt \int rrds \left(\frac{dq}{dt}\right) - \theta cc\omega dt + qrrvdt$, welche der erstern, so vorher den Theil $HM$ eingenommen, gleich sein muss. Wenn wir nun durch $dt$ dividiren, so erhalten wir daher diese Gleichung: $\theta cc\omega = qrrv + \int rrds \left(\frac{dq}{dt}\right)$, wo das Integral $\int rrds \left(\frac{dq}{dt}\right)$ so genommen werden muss, dass dasselbe verschwinde, wenn man den Punkt $M$ in $H$, oder $x = o$, $y = g$ und $z = h$ annimmt, in welchem Falle $rr = cc$, $q = \theta$ und $v = \omega$ wird. Es ist aber zu merken, dass hier nur zweierlei veränderliche Grössen, nämlich $s$ und $t$ vorkommen; denn $rr$ hängt allein von der Figur der Röhre oder dem $s$ ab; $\theta$ und $\omega$ allein von der Zeit $t$, und $v$ von beiden zugleich.

Ist die Dichtigkeit allezeit und beständig einerlei, so hat man $\left(\frac{dq}{dt}\right) = o$ und $q = \theta$, folglich $cc\omega = rrv$, d. i. die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Weiten, da nun $v = \frac{cc\omega}{rr}$ und $\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{ccd\omega}{rrdt}$, so findet man aus der ersten Gleichung

$$\frac{p}{\theta} = V - \frac{c^4 \omega\omega}{2r^4} - \frac{d\omega}{dt} \int \frac{ccds}{rr} + C,$$

welche fast alles, was bisher von der Bewegung flüssiger Materien gehandelt worden, in sich begreift.

161) *Wenn sich die flüssige Materie in einem Gefässe bewegt, so leidet dasselbe davon einen Gegendruck, welcher gefunden wird, wenn man von allen Kräften, welche auf die flüssige Materie wirken, diejenigen Kräfte abzieht, welche zu der in allen Theilchen vorgehenden Veränderung erfordert werden.*

Wenn eine flüssige Materie durch eine Röhre fliesst, oder sonst aus einem Gefässe herausspringt,

so übt dieselbe auf das Gefäss eine andere Wirkung aus, als wenn sie in Ruhe wäre, und die Wirkung wird die *Reaction* oder *Gegendruck* genannt, dessen Bestimmung in der Lehre von d Bewegung flüssiger Materien von der grössten Wichtigkeit ist. Ungeachtet aber dieser Punkt geme niglich auf eine mit den grössten Schwierigkeiten verknüpfte Art abgehandelt zu werden pfleg so kann derselbe doch nach der gegebenen Regel sehr leicht ausgemacht werden. Wir wollen al Kräfte, welche auf die flüssige Materie wirken durch den Buchstaben $F$ anzeigen; diejenigen Kräf aber, welche um die in der Bewegung jeglicher Theilchen vorgehenden Veränderungen hervorz bringen, erfordert werden, durch den Buchstaben $G$, und endlich soll $H$ den gesuchten Gegendruc auf das Gefäss bedeuten. Da nun hier $F$ als die Ursache, die beiden Grössen aber $G$ und $H$ zusam men als die völlige Wirkung angesehn werden müssen, so muss die Kraft $F$ den Kräften $G$ und gleichgeltend sein, d. i. $F = G + H$, woraus sogleich gefunden wird $H = F - G$, wie die gegeben Regel anzeigt. Die Abziehung der Kräfte $G$ geschieht aber am füglichsten auf diese Art, da man bei allen Theilchen der flüssigen Materie die zu der in ihrer Bewegung vorgehenden Veränd rung erforderten Kräfte verkehre, d. i. nach der entgegengesetzten Richtung zu wirken sich vo stelle, und diese verkehrten Kräfte werden nebst den wirklichen Kräften $F$, zusammen den Gege druck ausmachen. Nach demjenigen, was oben § 157 ausgeführt worden, setze man die Masse d Theilchens $MPQRmpqr = dM$, so werden diese verkehrten Kräfte sein:

$$\text{nach } PM = XdM, \quad \text{nach } QM = YdM, \quad \text{nach } RM = ZdM.$$

Wegen eines jeglichen Theilchens der flüssigen Materie $dM$ wirken demnach auf das Gefäss folgen drei Kräfte

$$\text{I. nach } MP = (P - X)\,dM, \quad \text{II. nach } MQ = (Q - Y)\,dM, \quad \text{III. nach } MR = (R - Z)\,dM.$$

Diese aus dem Theilchen $dM$ auf das Gefäss entspringenden Kräfte können auch unmittelbar a dem daselbst befindlichen Drucke $p$ nach den § 157 gegebenen Formeln also bestimmt werden:

$$\text{I. Kraft nach } MP = \frac{dM}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right), \quad \text{II. Kraft nach } MQ = \frac{dM}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right), \quad \text{III. Kraft nach } MR = \frac{dM}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Alle diese Kräfte zusammengenommen geben den ganzen Gegendruck, welchen das Gefäss von d darin enthaltenen flüssigen Materie auszustehen hat, wenn man zu diesen nämlich noch diejenig hinzusetzt, welche von aussen unmittelbar auf die flüssige Materie drücken.

# XXI.

# Constructio Manometri densitatem aëris quovis tempore accurate monstrantis.

§ 1. Cum omnia corpora in aëre tantum de suo pondere vero amittant, quantum est pondus ris sub eodem volumine contenti, hinc tutissimus modus suppeditatur, aëris densitatem in quovis ıs statu explorandi, propterea quod aëris densitas semper proportionalis est ponderi, quod certum lumen esset habiturum, ideoque nil aliud requiritur, nisi ut idoneum instrumentum paretur, quod ovis tempore diminutionem ponderis, quam, corpus quodpiam fixum patiatur, monstret, quod quo- ɔdo commodissime institui queat hic accuratius perpendemus.

§ 2. Hunc in finem eligatur quodpiam corpus, cujus indolem deinceps exactius describemus, jus volumen sit $= A$, qua litterà simul indicetur pondus aequalis voluminis aquae, et quia ipsius uae plures dantur species, quae pro diverso caloris gradu magis minusve extenduntur aut contra- ntur, ad nostrum institutum sufficit, ut certa aquae species pro determinato caloris gradu eliga- r, cujus ergo pondus sub volumine $A$ contentum accurate definiatur. Eodem autem tempore nul pondus ipsius corporis sub volumine $A$ contenti mensuremus, quod sit $= \alpha A$, ita ut sit ad ndus aequalis voluminis aquae, ut $\alpha$ ad 1. Pro eodem autem tempore accurate definiatur pondus qualis voluminis aëris, quod sit $= \delta A$, ita ut hoc tempore densitas aëris se habeat ad densitatem uae nostrae fixae, ut $\delta$ ad 1, quae investigatio ope antliae pneumaticae commodissime fieri potest.

§ 3. Cum igitur $\alpha A$ denotet verum pondus corporis in hunc finem electi, ejus pondus obser- tum scilicet ob aëris densitatem diminutum erit $(\alpha - \delta) A$, quod cum a bilance ostendatur, sit evitatis gratia $= P$. Primo autem hic assumamus volumen corporis nostri $A$ perpetuo idem nere neque a diverso caloris gradu ullam mutationem subire; deinceps enim facile erit, etiam ijus mutationis rationem in calculo habere. Hic tantum notasse sufficiat, quamcunque mutationem lumen $A$ patiatur litteram $\alpha$ similem mutationem inverso modo pati debere, ita ut quantitas $\alpha A$ rpetuo eundem valorem conservet.

§ 4. Ponamus nunc alio quovis tempore densitatem aëris esse $= \delta + \varphi$, ubi quidem $\varphi$ quan titas vel positiva vel negativa esse potest, et nunc pondus corporis nostri bilance indicati eri $(\alpha - \delta - \varphi) A$, quod cum a bilance indicetur, sit $= P - p$; quare cum sit $P = (\alpha - \delta) A$ eri $p = \varphi A$, unde ergo fit

$$\varphi = \frac{p}{A} \quad \text{et cum sit} \quad A = \frac{P}{\alpha - \delta} \quad \text{erit} \quad \varphi = \frac{p(\alpha - \delta)}{P}$$

hincque ipsa aëris densitas pro hoc tempore erit:

$$\delta + \varphi = \delta + \frac{p(\alpha - \delta)}{P}.$$

§ 5. Quo nunc minimae aëris mutationes observari queant necesse est, ut pro quovis valore quantitas $p$ ad $P$ adhuc notabilem teneat rationem, quam scilicet bilanx optimae notae indicar valeat. Cum igitur sit $\frac{p}{P} = \frac{\varphi}{\alpha - \delta}$, hinc statim patet, hoc eo meliori successu obtineri posse, qu minor fuerit littera $\alpha$, hoc est, quo levius fuerit corpus ad has observationes electum.

§ 6. Quo haec clarius perspiciantur casum consideremus, quo volumen $A$ pedi cubico aequat ideoque $P$ circiter 64 libr. Deinde sit pro statu aëris fixo:

$$\delta = \frac{1}{800} \quad \text{et} \quad \delta + \varphi = \frac{1}{700},$$

ita ut densitas aëris satis insigne incrementum acceperit, quod quanto pondere $p$ a bilance indicet videamus. Cum igitur sit:

$$\frac{p}{P} = \frac{\varphi}{\alpha - \delta}, \quad \text{ob} \quad \varphi = \frac{1}{5600} \quad \text{erit} \quad \frac{p}{P} = \frac{1}{5600\alpha - 7}.$$

Quare si corpus cum aqua esset aeque grave, ideoque $\alpha = 1$, foret $\frac{p}{P} = \frac{1}{5593}$, qualem exigu partem optima bilanx aegre esset indicatura, neque ergo hinc minores mutationes in densitate aë agnoscere liceret. Sin autem nostrum corpus decies esset levius quam aequale volumen aquae,

$$\alpha = \frac{1}{10} \quad \text{foret} \quad \frac{p}{P} = \frac{1}{553},$$

cujusmodi particulam bona bilanx indicare satis distincte poterit. Interim tamen ut etiam mu minores mutationes indicari queant, sine dubio optima bilance opus erit. Imprimis igitur ad huj modi experimenta requiritur, ut corpus levissima materia constans eligatur.

§ 7. Ad hunc igitur usum aptissime adhibebitur globus vitreus cavus tam exiguae crassit quantum ejus firmitas permittit; praecipue enim necesse est, ut iste globus perpetuo eandem quan tatem materiae includat, unde ipsi aëri, cujus densitatem explorare volumus, penitus impervius e debet, ita ut neque aër inclusus usquam erumpere neque externus irrumpere queat, unde par consultum foret omnem aërem ex hoc globo exhaurire, uti alii docuerunt, quia cum tempore tand aër externus ingressum esset inventurus. Optima igitur ratio erit hunc globum aëre naturali rep tum relinquere.

§ 8. Videamus etiam, quantopere exigua mutatio voluminis $A$, a diversis gradibus caloris o a

as operationes turbare valeat. Hunc infinem sumamus volumen $A$ suo differentiali $dA$ augeri et um $\alpha A$ sit quantitas constans, ob $P = (\alpha - \delta) A$ erit $dP = -\delta . dA$; unde si esset

$$dA = \frac{1}{1000} A, \text{ foret } dP = \frac{-A}{800000} = \frac{-P}{(\alpha - \delta)\, 800000} = \frac{-P}{79000},$$

b $\delta = \frac{1}{800}$ et $\alpha = \frac{1}{10}$, uti supra assumsimus; hincque porro erit:

$$\varphi = \frac{p\,(\alpha - \delta)}{P + dP} = \frac{p\,(\alpha - \delta)}{P}\left(1 - \frac{dP}{P}\right); \text{ quare, ob } \frac{dP}{P} = \frac{1}{80000} \text{ proxime,}$$

ı valore ipsius $\varphi$ tantus error committeretur, qui autem tam est parvus, ut etiam optimam bilancem dhibendo sempertuto negligi queat, unde exigua mutatio in volumine $A$ ob calorem oriunda prorsus on pertimescenda videtur.

§ 9. Perpendamus nunc ad quantum praecisionis gradum Manometrum evehi debeat, ut satis xiguas mutationes in aëris densitate ostendat, et cum posito:

$$\delta = \frac{1}{800} \text{ et } \delta + \varphi = \frac{1}{700}, \text{ unde fit } \varphi = \frac{1}{5600},$$

oc discrimen sit ingens, merito postulari potest, ut Manometrum mutationes saltem decies minores dhuc satis distincte monstret, ad quod ergo requiritur, ut pro valore $\varphi = \frac{1}{56000}$ instrumentum dhuc sensibilem differentiam manifestet.

§ 10. Cum igitur invenerimus

$$\varphi = \frac{p\,(\alpha - \delta)}{P} \text{ hinc fit } \frac{p}{P} = \frac{1}{56000\,(\alpha - \delta)};$$

uare libra ita debet esse comparata, ut si $p$ fuerit minima pars totius ponderis $P$, ea circiter isti alori aequetur, vel saltem eo non fit major. Ex quo statim intelligitur, si esset $\alpha = 1$, sive ondus globi gravitati aquae esset aequale nullam certe bilancem tam accuratam construi posse, t tam exigua particula totius ponderis adhuc sensibile praepondium producere valeat, unde absolute ecesse est, ut litterae $\alpha$ multo minor valor concilietur.

§ 11. Quod si ergo optima bilanx adhuc 5000$^{\text{mam}}$ partem totius ponderis indicare valeat, necesse it ut in Manometro valor ipsius $\alpha$ minor sit quam $\frac{1}{10}$, hoc est, ut pondus totius globi decies inus sit quam pondus aequalis voluminis aquae, id quod utique obtineri posse videtur, atque si dhuc levior globus effici posset, Manometrum ad majorem perfectionis gradum perduci posset. Hinc itur inprimis erit examinandum ex quanam materia nostrum globum parari conveniat, ubi quidem trum longe praeferandum videtur. Etsi enim ligno et charta leviores hujusmodi globi confici posnt, tamen, quia humiditatem aëris contraherent penitus sunt rejiciendi. Tum vero metalla non lum ob majorem gravitatem hinc excludi debent, sed etiam quia pro diversis caloris gradibus ajorem mutationem subire solent quam vitrum.

§ 12. Consideremus igitur globum ex vitro paratum, cujus cavitatis radius sit $= r$, crassities ro crustae vitreae ambientis $= s$, ita ut totius globi radius sit $r + s$, cujus ergo cubo volumen it proportionale, volumen vero crustae vitreae erit ut $(r + s)^3 - r^3$; unde si gravitas vitri fuerit

ad gravitatem aquae ut $m$ ad $1$, neglecto pondere aëris inclusi erit pondus globi $m(r+s)^3 - mr^3$, dum pondus aequalis cubi aquae est $(r+s)^3$, unde deducitur:

$$\alpha = m\left(1 - \frac{r^3}{(r+s)^3}\right).$$

Est autem circiter $m = \frac{1}{4}$.

§ 13. Valor igitur hujus formulae inprimis pendet a ratione inter litteras $r$ et $s$, quae si esset constans, valor quoque ipsius $\alpha$ esset constans, ideoque globus quantumvis parvus idem esset praestaturus; at vero per experientiam satis constat augendo radium globi $r$ non necesse esse, ut crassities in eadem ratione augeatur. Quin etiam satis tuto assumere licebit, sufficere si modo $s$ in ratione sub duplicata increscat, sicque assumere poterimus, $s = \sqrt{ar}$. Hinc ergo, si pro globo cujus radius unius pedis crassities vitri unius lineae seu quasi partis 150ae pedis sufficientem firmitatem praestet, erit $a =$ parti 22500ae pedis sumto scilicet pede pro mensura magnitudinum. Cum igitur $s$ prae $r$ sit valde parvum, erit proxime:

$$\frac{r^3}{(r+s)^3} = \left(1 + \frac{s}{r}\right)^{-3} = 1 - \frac{3s}{r}, \text{ ex quo fiet } \alpha = \frac{3ms}{r} = 3m\sqrt{\frac{a}{r}}, \text{ existente } a = \frac{1}{22500},$$

unde pro variis globi magnitudinibus valores litterae $\alpha$ facile assignare licebit. Ita:

Si $r = 1$ ped. erit $\alpha = 0{,}0200 \,.\, m$

» $r = \frac{1}{2}$ » » $\alpha = 0{,}0283 \,.\, m$

» $r = \frac{1}{3}$ » » $\alpha = 0{,}0346 \,.\, m$

» $r = \frac{1}{4}$ » » $\alpha = 0{,}0400 \,.\, m$.

§ 14. Facile autem intelligitur, hos numeros ingentem latitudinem admittere, cum fractio assumta $s = \frac{1}{150}$ pro $r = 1$ in praxi modo aliquanto major modo minor admitti queat, unde etiam superfluum foret, valorem ipsius $m$ auxie inquirere, qui ergo si sumatur $= 2\frac{1}{2}$ pro radio $r = 1$ ped. foret $\alpha$ circiter $\frac{1}{20}$, unde colligitur $\frac{p}{P} = \frac{1}{2800}$, quod bilances facile indicare possunt. Sin autem radius sphaerae fuerit tantum 6 pollicum erit $\alpha = \frac{7}{100}$ et $\frac{p}{P} = \frac{1}{3920}$. Deinde pro radio $r = \frac{1}{4}$ ped. fiet $\alpha = \frac{1}{10}$ et $\frac{p}{P} = \frac{1}{5600}$, unde patet, si modo radius sphaerae superet 3 pollices, bilances ordinariam satis tuto mutationes illas exiguas quas requirimus in densitate aëris, indicare posse. Interim tamen plurimum expediet globos hujusmodi vitreos majores adhibere, simulque bilances ad majorem perfectionis gradum evehere, ut etiam minores mutationes in aëris densitate satis distinct monstrare valeant.

§ 15. Consideremus nunc libram, cujus ope exiguas istas variationes in densitate aëris cognoscere liceat, sitque $EF$ (Fig. 242.) jugum in statu aequilibrii, ubi situm horizontalem tenebit cujus medium sit punctum $O$, $E$ et $F$ autem puncta suspensionis, in quorum altero $E$ appensus sit globus vitreus $A$, in altero vero $F$ pondus aequilibrans $P$. Ad jugum in $O$ normaliter ducta sit recta $NH$, cujus punctum $C$ sit centrum circa quod jugum est mobile, punctum $G$ vero centrum gravitatis ipsius jugi, recta autem $OH$ examen seu lingulam repraesentat. Vocemus nunc $OE = OF =$

tervalla $OC = c$ et $OG = g$; tum vero pondus ipsius jugi sit $\Pi$, et quoniam hic imprimis caven-um est, ne jugum ab appensis ponderibus incurvetur, hoc obtinebitur, si ipsi circa medium major titudo $MN$ tribuatur.

§ 16. Ponamus nunc certo tempore, quo densitas aëris pro cognita assumitur, scilicet $= \delta$, ensitatem aquae unitate designando, appensione ponderis $P$ libram in aequilibrium esse reductam, que evidens est, si pondus $P$ aequali volumine constaret, quo globus vitreus, cujus volumen indi-imus littera $A$ tum libram perpetuo in aequilibrio esse mansuram eatenus ergo tantum mutationes ëris indicabit quatenus pondus $P$ sub minore volumine continetur unde consultum erit, pondus $P$ : gravissima materia, veluti plumbo, conficere. Sit igitur $B$ volumen ponderis, atque libra conci-atur in spatium aëre vacuum transferri, ubi pondus globi augmentum accipiet $= \delta A$, pondus ro $P$ tantum augmentum $\delta B$, sicque nunc discrimen inter ambo pondera erit $\delta (A - B)$; unde telligitur, turbationem aequilibrii a mutatione densitatis aëris oriundam referendam esse, non ad lum volumen $A$, sed ad ejus excessum super volumine ponderis $P$.

§ 17. Ponamus nunc, alio tempore, quo densitas aëris facta est $= \delta + \varphi$ libram in statum clinatum, quem (Fig. 243.) repraesentat, esse perductam quo pondus globi tantum est $P - p$, usque inclinationem esse $EOe = FOf = \omega$, sub quo angulo etiam recta $GOC$ ad situm verticalem clinabitur, quem ergo angulum, ex densitatis mutatione $\varphi$ ortum, investigemus. Quare cum in c statu inclinato aequilibrium etiam nunc subsistat, necesse est, ut momenta respectu centri $C$ rinque sint aequalia. Nunc igitur momentum globi $A$, ob $OE = a$ et angulum $EOe = \omega$, erit $- p)(a \cos \omega + c \sin \omega)$; ipsum vero pondus jugi $\Pi$ in centro gravitatis $G$ collectum momentum eandem partem generabit $\Pi (c + g) \sin \omega$. Ex altera autem parte pondus $P$ momentum habebit $(a \cos \omega - c \sin \omega)$, quibus duobus momentis inter se aequatis orietur haec aequatione:

$$(2cP - cp + (c + g)\,\Pi) \sin \omega - ap \cos \omega = o.$$

c scilicet diminutionem ipsius ponderis $P$ jam in ponduscul o $p$ complectimur, quia diminutio pon-rum $p$ refertur ad differentiam voluminum $A - B$.

§ 18. Ex hac jam aequatione ipsa inclinatio $\omega$ innotescit, cum sit:

$$\text{tang}\, \omega = \frac{ap}{2cP - cp + (c + g)\,\Pi}$$

ae ergo ipsi $p$ est proportionalis, atque ut pro minimo valore ipsius $p$ angulus $\omega$ adhuc prodeat tabilis magnitudinis, intervalla $c$ et $g$ facile ita assumi possunt, ut denominator quantumvis fiat iguus, posset quidem adeo ad nihilum redigi, tum vero aequilibrium librae non amplius esset bile sed a minimo praepondio penitus subverteretur, id quod multo magis eveniret, si denomi-tor adeo valorem obtineret negativum.

§ 19. Omnino igitur in id est incumbendum, ut denominatori valor positivus, attamen satis iguus concilietur, ut ponduscul o $p$ tanta inclinatio respondeat, quantam desideramus; quem in em maxime conveniret intervallum $OC = c$ ad nihilum redigi, ita ut centrum motus $C$ in ipsam ctam $EF$, per puncta suspensionis ducta, incideret, quo ergo casu foret $\text{tang}\, \omega = \frac{ap}{g\Pi}$. Cum autem

talis constructio in praxi aegre obtineri queat, consultum erit, in directione $HOG$ (Fig. 242.) pondus ope cochleae mobile applicare cujus ope centrum gravitatis $G$, sive elevari sive deprimi queat.

§ 20. Cum igitur supra invenerimus $\varphi = \frac{p(a-\delta)}{P}$ si instrumentum, ita paretur, ut ex observata inclinatione $\omega$ ponduscùlum $p$ accurate definiri possit, inde simul mutatio in densitate aëris facta $\varphi$ innotescet, hocque tempore aëris densitas erit $\delta + \varphi$.

§ 21. Eadem conclusio etiam alio modo obtineri potest, ita ut non opus sit inclinationem librae observare. Turbato enim aequilibrio, si id restituatur dum ex altera parte exiguum ponduscùlum additur, ex quo deinceps ponduscùlum $p$ haud difficulter concludi poterit si tantum pro unico casu effectus dati ponduscùli adjecti fuerit exploratus. Si enim initio, quo libra fuerit instructa ponderi $P$ addatur datum ponduscùlum $\pi$, atque inclinatio inde orta mensuretur, quoniam tangentes inclinationum ponduscùlis sunt proportionales, totum negotium haud difficulter expediri poterit atque adeo tabula supputare, quae pro quavis librae inclinatione mutationem in densitate aëris factam indicet.

§ 22. Ceterum cum librae consuetae sint super apice quodam mobiles, cujusmodi structura semper cum quapiam frictione est conjuncta, ejus loco fortasse cum optimo successu jugum circa cylindrulum plane horizontali incumbentem mobile reddi potest, qualis structura olim in fabricatione acus magneticae inclinatoriae est adhibita, ubi minimae variationes nulla frictione impediuntur. Ipsam autem structuram sollertiae Artificis relinqui oportet.

# XXII.

# Théorie Générale de la Dioptrique.

---

## INTRODUCTION.

Il faut distinguer la Dioptrique de la Science des réfractions en général, parce que dans la optrique on donne une figure sphérique à toutes les surfaces réfringentes, au passage desquelles s rayons souffrent une réfraction, et outre cela on suppose les centres de toutes ces surfaces hériques situés sur une même ligne droite, qu'on nomme l'axe, tandis que la Science des réfrac- ons s'étend à des figures quelconques, de quelque manière qu'elles soient disposées. Ainsi l'objet la Dioptrique consiste dans un nombre quelconque de surfaces sphériques réfringentes disposées r le même axe, où se trouvent leurs centres, devant lesquelles on considère un objet quelconque, nt les rayons passent par toutes ces surfaces, et alors il s'agit de déterminer les images repré- ntées par chaque réfraction tant par rapport à leur grandeur et degré de clarté, que par rapport la confusion, qui y est causée ou par l'étendue des surfaces réfringentes, ou par la différente fraction des rayons. Ces recherches regardent principalement la dernière image, que représentent s rayons après avoir passé par toutes les surfaces réfringentes, puisqu'elle devient l'objet immédiat la vision, soit qu'on la regarde directement, ou qu'on la reçoive sur un fond blanc dans une ambre obscure. Dans l'un et l'autre cas il est de la dernière importance, que cette dernière age soit assez claire, delivrée de toute confusion et aussi grande que les circonstances le rmettent, à quoi l'on peut ajouter, qu'une grande partie de l'objet y soit représentée à la fois, quoi consiste le champ apparent. C'est donc à la Dioptrique d'examiner tous ces différents ints, et d'enseigner les moyens de procurer aux instruments dioptriques tous les avantages 'on puisse désirer. Or les considérations suivantes nous fourniront tous les secours pour arriver ce but.

---

## I^ère Considération.

*Sur la réfraction d'une seule surface sphérique réfringente.*

1. Je commence par considérer une seule surface sphérique $aAa$ (Fig. 244.) dont le centre soit en $J$ sur l'axe $OP$, et dont la réfraction soit telle que pour les rayons moyens, qui y tombent du milieu $O$ en allant dans le milieu $P$, le sinus d'incidence soit à celui de réfraction comme $n:1$. Pour les rayons plus ou moins réfrangibles, on n'a qu'à regarder le nombre $n$ comme variable, et d'y ajuster son différentiel $dn$.

2. Soit à présent $O$ un point rayonnant situé sur l'axe, dont le rayon $OA$ dirigé vers $J$ ne souffrant aucune réfraction, tiendra la même route $AP$. Mais pour un autre rayon incident quelconque $Oa$, soit $aP$ le rayon réfracté et ayant tiré la droite $Ja$, pour avoir l'angle d'incidence $OaJ$ et celui de réfraction $PaJ$, la nature de la réfraction, en supposant $Oa$ un rayon moyen, fournit cette proportion:

$$\sin OaJ : \sin PaJ = n : 1.$$

3. Or par le triangle $OaJ$ on a: $\sin OaJ : \sin OJa = OJ : Oa$ et par le triangle $PaJ$ on a: $\sin OJa : \sin PaJ = Pa : PJ$ d'où l'on tire en composant ces deux proportions

$$\sin OaJ : \sin PaJ = OJ \,.\, Pa : PJ \,.\, Oa = n : 1$$

et partant nous aurons cette équation pour exprimer la nature de la réfraction:

$$OJ \,.\, Pa = n \,.\, PJ \,.\, Oa.$$

4. On voit bien que cette réfraction devient d'autant plus grande, plus le point $a$ est éloigné du milieu $A$; ce qui m'oblige à considérer deux cas: l'un où le point $a$ n'est qu'infiniment quasi peu éloigné du point $A$, et l'autre, où son éloignement $aA$ n'est plus si petit qu'il puisse être négligé.

### I. Cas, où l'éloignement $aA$ est quasi infiniment petit.

5. Dans cette hypothèse les distances $Oa$ et $Pa$ ne différeront de $OA$ et $PA$; et partant la réfraction sera exprimée par cette égalité $OJ \,.\, PA = n \,.\, PJ \,.\, OA$, qui en tournant notre vue à la distance de l'objet $OA$, à celle de l'image $AP$ et au rayon de la sphéricité $AJ = aJ$, prend cette forme:

$$(OA + AJ)\, PA = n\,(PA - AJ)\, OA$$

d'où l'on tire:

$$(n-1)\, OA \,.\, PA = AJ\,(PA + n \,.\, OA) \quad \text{ou} \quad \frac{n-1}{AJ} = \frac{1}{OA} + \frac{n}{PA}.$$

6. Cette dernière formule est très propre à marquer le rapport qui règne entre les distances

e l'objet $OA$, de l'image $PA$ et le rayon de sphéricité de la surface réfringente. De là on aura

$$PA = \frac{n \,.\, OA \,.\, AJ}{(n-1)\, OA - AJ},$$

our déterminer le point $P$ sur l'axe où les rayons moyens de l'objet $O$, qui passent par le milieu $A$ de la surface réfringente, se réunissent après la réfraction.

7. Puisque ces rayons réfractés se réunissent au point $P$, ils tiendront depuis la même route, ue sils partaient effectivement du point $P$; et c'est la raison, pourquoi le point $P$ est nommé image. Mais il faut bien remarquer que cette image n'est formée que par les rayons moyens de objet $O$ et même ceux, qui ne passent que par le milieu $A$ de la surface réfringente.

8. Jusqu'ici je n'ai considéré l'objet que comme un point $O$ situé sur l'axe, mais maintenant il t aisé de lui donner quelque étendue $O\omega$ (Fig. 245.), que je nommerai le demidiamètre de l'objet, en gardant l'objet comme un cercle perpendiculaire à l'axe, dont le rayon est $O\omega$; et on pourra une manière semblable déterminer l'image de son extrémité $\omega$.

9. En effet on n'a qu'à tirer de $\omega$ par le centre $J$ la droite $\omega a J\pi$, qui tiendra lieu de l'axe r rapport au point rayonnant $\omega$, et regardant l'angle $OJ\omega$ comme extrêmement petit, supposition écessaire dans la Dioptrique; la distance $\omega J$ sera égale à $OJ$ et partant l'image du point $\omega$ tombera $\pi$, en sorte que $J\pi = JP$; et $P\pi$ sera le demidiamètre de l'image représentée par la réfraction.

10. Le lieu de cette image sera donc déterminé par le point $P$ moyennant la formule trouvée -dessus:

$$\frac{n-1}{AJ} = \frac{1}{OA} + \frac{n}{PA},$$

ais sa grandeur se détermine aisément par cette proportion $O\omega : P\pi = OJ : PJ$. Mais ayant trouvé $J \,.\, PA = n \,.\, PJ \,.\, OA$ ou bien $OJ : PJ = n \,.\, OA : PA$, nous aurons pour le demidiamètre de mage $P\pi = \frac{PA}{n \,.\, OA} \cdot O\omega$.

11. La même formule se déduit plus aisément, en considérant le rayon incident $\omega A$, qui passe r le milieu même $A$, dont le réfracté $A\pi$ doit être tel, que puisque les angles $OA\omega$ et $PA\pi$ nt très petits, la raison de réfraction donne d'abord:

$$n : 1 = OA\omega : PA\pi = \frac{O\omega}{OA} : \frac{P\pi}{PA}, \quad \text{donc} \quad P\pi = \frac{PA}{n \,.\, OA} \cdot O\omega.$$

### *Image principale.*

12. Cette image $P\pi$ sera nommée dans la suite l'image principale, où il faut remarquer, que image principale est formée par les rayons moyens de l'objet, qui passent par le milieu $A$ de la rface réfringente, en donnant à ce milieu une étendue quasi infiniment petite autour de l'axe.

13. Posons maintenant la distance de l'objet à la surface réfringente $OA = a$, la distance de mage principale derrière la surface réfringente $PA = \alpha$, et le rayon de sphéricité de la surface $J = p$, en considérant la convexité comme tournée vers l'objet; et le demidiamètre de l'objet

$O\omega = z$; Cela posé nous aurons pour l'image principale les deux équations suivantes:

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{et} \quad P\pi = \frac{\alpha z}{na},$$

d'où l'on connait tant son lieu en $P$ que son demidiamètre $P\pi$.

14. Si l'on éloignait l'objet $O\omega$ tant soit peu plus de la surface réfringente, en le mettant e[n] $o$ et posant l'intervalle $Oo = da$, l'image se trouverait alors en $p$, desorte que $Ap = \alpha + d\alpha$; d'o[ù] la différentiation de l'équation

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{donne} \quad \frac{da}{aa} + \frac{nd\alpha}{\alpha\alpha} = o \quad \text{ou bien} \quad d\alpha = \frac{-\alpha\alpha}{naa}\, da.$$

Par conséquent en éloignant l'objet $O\omega$ par l'intervalle $Oo$ de la surface réfringente, l'image s'approchera de l'intervalle

$$Pp = \frac{\alpha\alpha}{naa} \cdot Oo = \frac{AP^2}{n \,.\, OA^2} \cdot Oo.$$

15. On voit aussi que les rayons d'une autre nature représenteront une autre image; pour c[et] effet on n'a qu'à rendre variable le nombre $n$, en laissant les quantités $a$ et $p$ constantes, et l[a] différentiation donnant

$$\frac{dn}{p} = \frac{dn}{\alpha} - \frac{nd\alpha}{\alpha\alpha},$$

on aura pour le changement dans le lieu de l'image

$$d\alpha = \frac{\alpha\alpha dn}{n}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right) = \frac{-\alpha\,(a+\alpha)\,dn}{n\,(n-1)\,a}$$

à cause de

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}.$$

16. Nous verrons dans la suite, qu'il est bon pour rendre les formules plus simples, d'exclu[re] du calcul plutôt les rayons de sphéricité, que les distances des images principales. Et puisque [ce] rapport est si simple, il n'y a de là aucun inconvenient à craindre.

## II. Cas où l'éloignement $Aa$ est tant soit peu considérable.

17. Ici je ne considère que le centre de l'objet $O$ situé dans l'axe, dont un rayon $Oa$ (Fig. 24) passant par le point $a$ de la surface réfringente, se réunit avec l'axe au point $p$ différent de [P], qui a été trouvé dans le cas précédent. Et il est évident que tous les rayons du point $O$ inclin[é]s à l'axe $OA$ d'un même angle $AOa$ seront réunis après la réfraction au même point $p$, que je nommerai *l'image extrême* du point $O$, le point $P$ étant son image principale.

18. Or pour trouver ce point $p$, on n'a qu'à se servir de l'équation donnée ci-dessus (): $OJ \,.\, pa = n \,.\, pJ \,.\, Oa$, pour en déterminer l'intervalle $Pp$, qui est la diffusion de l'image.

19. Pour cet effet je tire du point $a$ à l'axe la perpendiculaire $ax$, qui est le demidiamètre [de] l'ouverture de la surface, et posant $ax = x$, soit comme auparavant $OA = a$, $AP = \alpha$, $AJ = aJ = \rho$,

; l'intervalle cherché $Pp = y$, et puisque l'arc $Aa$ est supposé peu considérable, on aura assez ıactement $Ax = \frac{xx}{2p}$.

20. Ensuite, du centre $O$ avec le rayon $Oa$ je tire l'arc de cercle $ay$, et pareillement du centre avec le rayon $pa$ l'arc $az$, et puisque les intervalles $xy$ et $xz$ sont très petits, on aura assez près

$$xy = \frac{xx}{2Oa} \quad \text{et} \quad xz = \frac{xx}{2pa},$$

ı il sera même permis d'écrire $OA = a$ pour $Oa$ et $AP = \alpha$ pour $pa$, de sorte que

$$xy = \frac{xx}{2a} \quad \text{et} \quad xz = \frac{xx}{2\alpha},$$

ırceque nous rejettons les termes, qui renfermeraient la quatrième puissance de $x$.

21. De là ayant

$$Ay = \frac{xx\,(a + p)}{2ap} \quad \text{et} \quad Az = \frac{xx\,(\alpha - p)}{2ap},$$

ous tirons:

$$Oa = Oy = a + \frac{xx\,(a + p)}{2ap} \quad \text{et} \quad pa = pz = \alpha - y - \frac{xx\,(\alpha - p)}{2ap}.$$

'où notre équation $OJ\,.\,pa = n\,.\,pJ\,.\,Oa$ prendra cette forme:

$$(a + p)\left(\alpha - y - \frac{xx\,(\alpha - p)}{2ap}\right) = n\,(\alpha - p - y)\left(a + \frac{xx\,(a + p)}{2ap}\right).$$

r la relation entre $a$, $\alpha$ et $p$ étant renfermée dans cete équation: $OJ\,.\,PA = n\,.\,PJ\,.\,OA$ qui est

$$(a + p)\,\alpha = n\,(\alpha - p)\,a$$

tons celle là de celleci, en considérant les quantités $y$ et $x$ comme infiniment petites pour avoir:

$$(a + p)\left(y + \frac{xx\,(\alpha - p)}{2ap}\right) = n\left(ay - \frac{xx\,(\alpha - p)\,(a + p)}{2ap}\right).$$

22. Maintenant cette équation nous donne d'abord:

$$((n - 1)\,a - p)\,y = \frac{xx\,(\alpha - p)\,(a + p)}{2ap} + \frac{nxx\,(\alpha - p)\,(a + p)}{2ap}$$

u bien:

$$((n - 1)\,a - p)\,y = \frac{xx\,(a + p)\,(\alpha - p)\,(a + n\alpha)}{2a\alpha p}.$$

'liminons en $p$ au moyen de la formule:

$$\frac{n - 1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}, \quad \text{ou bien} \quad p = \frac{(n - 1)\,a\alpha}{n\alpha + a},$$

ui donne:

$$(n - 1)\,a - p = \frac{n\,(n - 1)\,a\alpha}{n\alpha + a}; \quad a + p = \frac{n\alpha\,(a + \alpha)}{n\alpha + a}; \quad \alpha - p = \frac{\alpha\,(a + \alpha)}{n\alpha + a}$$

t partant nous aurons:

$$\frac{n\,(n - 1)\,a\alpha y}{n\alpha + a} = \frac{nxx\,(a + \alpha)^2\,(a + n\alpha)}{2a\alpha\,(n - 1)\,(n\alpha + a)} \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{xx\,(a + \alpha)^2\,(a + n\alpha)}{2\,(n - 1)^2\,a^3\,\alpha}.$$

*

23. Voilà donc la formule la plus simple pour exprimer la diffusion $Pp = y$, qu'on peut encore représenter en sorte:

$$y = \frac{aaxx}{2(n-1)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right);$$

et qui nous donne à connaître que l'image du point $O$ est répandu par l'espace $Pp = y$; qui est comme on voit proportionnel au quarré $xx$, de sorte que plus on augmente l'ouverture de la surface réfringente $aAa$, cet espace $Pp$ croîtra dans la même raison.

24. Pour se former une juste idée de cette image diffuse $Pp$, il faut considérer, que le point $P$, qui est l'image principale, ne transmet d'autres rayons que dans la direction de l'axe même; et que l'autre extrémité $p$ n'est formée que de rayons inclinés à l'axe de l'angle $Apa$, qu'on peut estimer $= \frac{x}{\alpha}$; ces rayons étant disposés dans une surface conique, dont le sommet est en $p$.

25. Par rapport à l'extrémité de l'objet $\omega$ son image sera sans doute plus irrégulière; la principale tombera bien en $\pi$ et les rayons qui y vont par le milieu $A$ de la surface réfringente tiendront la route $A\pi$; mais ceux qui passent par la circonférence $aa$ ne se réuniront plus dans un seul point, ce qui est un défaut au quel on ne saurait remédier.

26. On pourroit bien à l'aide de la formule, qu'on vient de trouver, déterminer la route de tous les rayons, qui passeraient de l'extrémité $\omega$ par tous les points $aa$ de la surface réfringente, mais on parviendrait à des formules très embarrassées, dont on ne saurait tirer aucun fruit, lorsque la réfraction se fait par plusieurs surfaces. Et partant on est bien obligé de se borner à la considération de l'image principale, et de la confusion causée dans les images du centre de l'objet $O$ ou de son point dans l'axe.

27. C'est aussi la raison, que plus on donne de l'étendue à l'objet, plus aussi la représentation des parties éloignées de l'axe devient confuse; quand même on serait en état de rendre celle du milieu $O$ parfaitement distincte. Par cette raison on est obligé de renoncer entièrement à une représentation distincte des parties de l'objet, qui sont considérablement éloignées de l'axe, et de se contenter de faire en sorte, qu'au moins le milieu soit bien représenté.

28. Aussi tant les télescopes que les microscopes découvrent ordinairement une très petite portion de l'objet, surtout lorsqu'ils grossissent beaucoup, de sorte qu'il serait superflu de rendre distinctes les parties éloignées de l'axe, quand même cela serait possible. Ce qui est une nouvelle raison qui nous dispense de cette entreprise.

29. Je me bornerai donc à la formule, que je viens de trouver pour la diffusion de l'image $Pp$, qui repond au centre de l'objet $O$, sur laquelle il faut bien remarquer, qu'elle est fondée sur une approximation, qui suppose l'ouverture de la surface réfringente $aa$ assez petite, pour qu'on puisse négliger dans le calcul la quatrième puissance du demidiamètre $ax = x$, sans qu'il en résulte une erreur sensible.

30. Par cette raison je n'étends point mes recherches à des ouvertures plus grandes, puisque toute la Dioptrique doit se borner à remédier aux erreurs, qui n'affectent que des ouvertures ass

etites, ou l'arc entier $aAa$ ne saurait monter à 30 degrés. Cependant si l'on vouloit pousser plus in l'approximation employée ci-dessus, on trouverait la diffusion:

$$Pp = y + \frac{xx(a+\alpha)^2(\alpha+na)}{2(n-1)^2 a^3 \alpha}$$

$$+ \frac{x^4(a+\alpha)^2(\alpha+na)}{8(n-1)^4 a^5 \alpha^3}\left((nn+n-1)aa - (nn-4n+1)a\alpha - (nn-n-1)\alpha\alpha\right).$$

---

## II^de Considération.

*Sur le passage des rayons par deux surfaces sphériques réfringentes.*

31. Considérons maintenant deux surfaces sphériques $aAa$ et $bBb$ (Fig. 247.) disposées sur le ême axe, en sorte que leurs convexités soient tournées en même sens vers l'objet $O\omega$. Soit le rayon courbure de la première $aAa = p$, et de la seconde $bBb = q$. Posons ensuite la raison de fraction pour les rayons moyens en passant par la première, $n:1$ et en passant par la seconde, $= n':1$.

32. Devant la première surface $aAa$ soit exposé sur l'axe l'objet $O\omega$ à la distance $AO = a$, dont le demidiamètre soit $O\omega = z$; cela posé examinons d'abord les images principales représentées ar les rayons moyens de l'objet, qui passent par le milieu $A$ de la première surface, et soit $P\pi$ lle qui est formée par la première réfraction, et $Q\xi$ celle qui est formée par la seconde.

33. De ces images, comme elles sont représentées dans la figure, la première $P\pi$ est renversée, la seconde $Q\xi$ debout; pour leurs lieux posons les distances $AP = \alpha$, $BP = b$ et $BQ = \beta$, et urs demidiamètres $P\pi = z'$ et $Q\xi = z''$. Or pour la première nous venons de trouver:

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{et} \quad P\pi = z' = \frac{\alpha z}{na}.$$

34. Cette première image principale $P\pi$ tenant lieu de l'objet à l'égard de la seconde réfraction par la surface $bBb$, nous aurons de la même manière pour le lieu et le demidiamètre de la conde image $Q\xi$ ces deux équations:

$$\frac{n'-1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{n'}{\beta} \quad \text{et} \quad Q\xi = z'' = \frac{\beta z'}{n'b} = \frac{\alpha\beta z}{nn'ab}$$

i il faut remarquer, que si la valeur de $z''$ devient négative l'image $Q\xi$ est renversée, dont le ontraire arrive dans la première image, que les valeurs positives de $z'$ marquent renversée, et les égatives debout.

35. Pour cet effet il est bon de remarquer, que les deux quantités $a$ et $z$ sont nécessairement ositives, puisque l'objet ne saurait jamais exister derrière les surfaces réfringentes; mais que les uantités $\alpha$, $b$, $\beta$, avec les rayons de courbure $p$ et $q$, peuvent selon les circonstances devenir

négatives. Cependant il est absolument nécessaire que la distance entre les surfaces $AB = a + b$ demeure toujours positive.

36. De la résulte une différence très essentielle entre l'objet et les images, car quoique l'image $P\pi$ tienne lieu de l'objet par rapport à la surface $bQb$, rien n'empêche qu'elle ne tombe derrière cette surface, puisque les rayons qui vont la former, y passent également. La réfraction dépend uniquement de la route des rayons et l'idée de l'image lui est étrangers.

37. Après ces observations sur les images principales je passe à considérer leur diffusion, qui provient des rayons de l'objet qui passent par les bords ou la circonférence $aa$ de la première surface réfringente, où je pose comme auparavant le demidiamètre de son ouverture $Aa = x$, et je borne mes recherches aux seuls rayons, qui viennent du milieu ou du centre de l'objet $O$.

38. Soit donc $Oa$ un tel rayon, qui passe par le bord $a$ de la première surface et son rayon réfracté $ap$ donnera sur l'axe le point $p$, où tous les rayons du point $O$, qui passent par la circonférence entière de la première surface, se réunissent. L'intervalle $Pp$ sera donc la diffusion de l'image, que j'ai nommée ci-dessus $Pp = y$, dont la valeur a été trouvée:

$$Pp = y = \frac{xx\,(a + \alpha)^2\,(a + n\alpha)}{2\,(n-1)^2\,a^3\,\alpha} = \frac{\alpha axx}{2\,(n-1)^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right).$$

39. Comme ces rayons, qui concourent au point $p$, forment une surface conique, leur inclinaison à l'axe étant l'angle $Apa$, il est important d'introduire cet angle dans le calcul en le nommant $Apa = \omega$. Or puisque l'espace $Pp$ est très petit, il sera permis d'estimer cet angle

$$\omega = \frac{Aa}{AP} = \frac{x}{\alpha}.$$

40. C'est cet angle qui nous déterminera sur la seconde surface $bBb$ le cercle, par la circonférence duquel le cone lumineux du point $p$ traverse la seconde surface. Posant donc le demidiamètre de ce cercle $Bb = x'$, puisqu'il est permis de confondre les points $P$ et $p$ nous aurons $x' = \frac{bx}{\alpha}$; on comprend aisément, que l'ouverture de cette surface ne saurait être plus petite.

41. Maintenant, pour la réfraction de la seconde surface, il faut considérer $p$ comme un point lumineux, dont les rayons passent par la seconde surface à la distance $Bb = x'$, qu'on regardera par conséquent comme le demidiamètre de son ouverture; et il s'agit de déterminer le point $q$, où ces rayons seront réunis après la réfraction, pour connaître l'espace $Qq$, qui sera la diffusion de la seconde image.

42. Posons cet espace $Qq = y'$ et pour le trouver je remarque que si l'inclinaison des rayons en $\varphi$ s'évanouissait, et que le point $p$ se trouvât en $P$, l'image tomberait en $Q$, de sorte que $BQ =$ Je recule donc le point lumineux de $P$ et $p$ par l'espace $Pp = y$ et l'image sera reculée en $\varphi$, de sorte que $Q\varphi = \frac{\beta\beta}{n'bb} \cdot y$ (§ 14.).

43. Puisque donc le point $p$, s'il jettait des rayons selon la direction de l'axe, aurait son image en $\varphi$, les rayons qui en passent par les points $b$, $b$ de l'axe à la distance $Bb = x'$, seront

unis au point $q$, en sorte que comme nous avons trouvé pour la première surface, qu'il soit:

$$\varphi q = \frac{x'x'(b+\beta)^2(b+n'\beta)}{2(n'-1)^2 b^3\beta} = \frac{xx(b+\beta)^2(b+n'\beta)}{2(n'-1)^2 aab\beta}.$$

t partant la diffusion entière sera:

$$Qq = y' = \frac{\beta\beta}{n'bb}\cdot y + \frac{xx(b+\beta)^2(b+n'\beta)}{2(n'-1)^2 aab\beta}.$$

44. Remettons pour $y$ sa valeur trouvée ci-dessus pour avoir:

$$Qq = y' = \frac{xx(a+\alpha)^2(a+n\alpha)\beta\beta}{2(n-1)^2 n'a^3 abb} + \frac{xx(b+\beta)^2(b+n'\beta)}{2(n'-1)^2 aab\beta},$$

quoi il faut ajouter l'angle $Bqb$, dont les rayons, qui forment le point $q$ sont inclinés à l'axe, ui est ouvertement $= \frac{x'}{\beta} = \frac{bx}{a\beta}$.

45. Or pour se former une juste idée de la confusion de ces images dont la raison est la ême de l'une et de l'autre, il faut considérer trois choses: 1⁰ l'image principale $P\pi$ ou $Q\xi$, dont est aisé d'assigner tant le lieu que le demidiamètre; 2⁰ l'espace de diffusion $Pp$ ou $Qq$ que nous enons de déterminer et 3⁰ l'inclinaison des rayons en $p$ ou en $q$ à l'axe.

46. Une telle représentatian entière sera nommée dans la suite un *assemblage d'images*, et s'il a plusieurs surfaces réfringentes, chacune aura son propre *assemblage d'images*. Là-dessus il est on d'observer, que l'image principale n'est formée que par les rayons moyens de l'objet, qui passent ar le milieu $A$ de la première surface réfringente, qui dans les autres surfaces peuvent bien éloigner considérablement de l'axe, d'autant plus, plus l'objet $O\omega$ aura d'étendue.

47. On ne considére ici que l'extrémité $\pi$ ou $\xi$ de l'image principale, pour les autres qui ont formées par les rayons qui passent par la première surface à toute autre distance, on se contente de considérer seulement les images du milieu de l'objet $O$; qui sont disposées toutes dans axe par l'espace de diffusion, en marquant pour chacune l'inclinaison des rayons qui la forment.

48. Ici cette inclinaison n'est marquée que pour la dernière $p$ ou $q$, mais il est aisé de la onclure pour chaque point moyen comme $\varphi$. Car puisque l'espace $Qq$ a été trouvé proportionel ı quarré $xx$, pendant que l'inclinaison en $q$ en suit la raison simple, on voit que l'inclinaison en $\varphi$ era proportionelle à la racine quarrée de l'espace $Q\varphi$; puisqu'on pourroit diminuer l'ouverture de première surface ou le rayon $x$, jusqu'à ce que le point $\varphi$ devint le bout de l'image diffuse.

49. Comme l'extrémité $\xi$ de l'image principale $Q\xi$ est formée par le rayon $\beta\xi$, qui traverse ı point $\beta$ la seconde surface, celle des autres images, que nous ne considérons qu'en gros, sera rmée par des rayons, qui passent en-deça et en-delà du point $\beta$; et ceux qui forment la dernière ı seront éloignés à peu près de l'espace $Bb$. Donc pour que tous ces rayons soient transmis par seconde surface, le demidiamètre de son ouverture ne saurait être plus petit que la somme des eux quantités $B\beta + Bb$; c'est par cette règle, que l'ouverture de chaque surface doit être déterminée dans la suite.

## IIIème Considération.

*Sur le passage des rayons moyens par plusieurs surfaces réfringentes en général.*

50. Soient donc plusieurs surfaces sphériques réfringentes disposées sur le même axe $OV$ (Fig. 248.), qui tournent toutes leur convexité $aAa$, $bBb$, $cCc$, $dDd$ etc. vers l'objet $O\omega$, et posons les rayons de courbure de chacune de ce surfaces:

$$\text{de } aAa = p;\ \text{de } bBb = q;\ \text{de } cCc = r;\ \text{de } dDd = s \text{ etc.},$$

les centres de toutes ces surfaces étant situés dans l'axe $OV$.

51. Soit ensuite la raison de réfraction des rayons moyens de l'objet au passage par chacune de ces surfaces, ou bien la raison du Sinus d'incidance à celui de réfraction:

$$\text{en } aAa = n:1;\ \text{en } bBb = n^{I}:1;\ \text{en } cCc = n^{II}:1;\ \text{en } dDd = n^{III}:1$$

pour les rayons plus ou moins réfrangibles on n'a qu'à ajouter à ces nombres $n$, $n^{I}$, $n^{II}$, $n^{III}$ etc. leurs différentiels, et les déterminer conformement à l'expérience.

52. L'objet, dont les rayons passent par ces surfaces, étant constitué en $O\omega$, soient $P\pi$, $Q\xi$, $R\varrho$, $S\sigma$ etc. les images principales successivement formées par les rayons moyens, qui passent par le milieu $A$ de la première surface $aAa$; ces images sont réprésentées dans la figure alternativement renversées et debout, et c'est à cette circonstance que les déterminations suivantes se rapportent.

53. Nommons à présent les distances de l'objet et des images principales, relatives aux surfaces réfringentes:

$$OA = a,\ AP = \alpha;\ PB = b,\ BQ = \beta;\ QC = c,\ CR = \gamma;\ RD = d,\ DS = \delta \text{ etc.}$$

d'où l'on a les intervalles entre les surfaces:

$$AB = \alpha + b;\ BC = \beta + c;\ CD = \gamma + d \text{ etc.},$$

qui sont nécessairement positifs aussi bien que la distance de l'objet $OA = a$, les autres pouvant être tant négatives que positives.

54. De là on aura d'abord les équations suivantes, tirées de la nature de la réfraction:

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha};\quad \frac{n^{I}-1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{n^{I}}{\beta};\quad \frac{n^{II}-1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma};\quad \frac{n^{III}-1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{n^{III}}{\delta} \text{ etc.}$$

d'où l'on déterminera toutes les distances $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$, $d$, $\delta$ etc., celle de l'objet $OA = a$, avec les rayons de courbure $p$, $q$, $r$, $s$ etc. et les intervalles entre les surfaces réfringentes $AB$, $BC$, $CD$ etc. étant données.

55. Pour la grandeur de ces images, qui dependent de la grandeur de l'objet $O\omega$, posons le demidiamètre de l'objet $O\omega = z$, et celui des images:

$$P\pi = z^{I},\ Q\xi = z^{II},\ R\varrho = z^{III},\ S\sigma = z^{IV} \text{ etc.}$$

t la considération des §§ 33 et 34 nous fournit les déterminations suivantes:

$$z^{I} = \frac{\alpha z}{na}; \quad z^{II} = \frac{\alpha\beta z}{nn^{I}ab}; \quad z^{III} = \frac{\alpha\beta\gamma z}{nn^{I}n^{II}a\,c}; \quad z^{IV} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta z}{nn^{I}n^{II}n^{III}abcd} \quad \text{etc.}$$

'où l'on peut juger de la grandeur de chaque image.

56. Comme ces expressions ne renferment que les rapports entre les distances $\alpha : a$, $\beta : b$, $:c$ etc. on les abrégera en y introduisant les dénominations suivantes:

$$\alpha = \frac{a}{A}; \quad \beta = \frac{b}{B}; \quad \gamma = \frac{c}{C}; \quad \delta = \frac{d}{D} \quad \text{etc.}$$

'où nous tirons d'abord:

$$p = \frac{(n-1)a}{1+nA}; \quad q = \frac{(n^{I}-1)b}{1+n^{I}B}; \quad r = \frac{(n^{II}-1)c}{1+n^{II}C}; \quad s = \frac{(n^{III}-1)d}{1+n^{III}D} \quad \text{etc.}$$

t ensuite pour la grandeur des images:

$$z^{I} = \frac{z}{nA}; \quad z^{II} = \frac{z}{nn^{I}AB}; \quad z^{III} = \frac{z}{nn^{I}n^{II}ABC}; \quad z^{IV} = \frac{z}{nn^{I}n^{II}n^{III}ABCD} \quad \text{etc.}$$

57. Il est bon de remarquer ici, que comme $n:1$ exprime la réfraction des rayons moyens, ui passent du milieu où est l'objet $O\omega$ dans celui où est marquée l'image $P\pi$, que j'indiquerai implement par la lettre $P$; ainsi $nn^{I}:1$ exprimera la réfraction des rayons moyens, s'ils entraient nmédiatement dans le milieu $Q$, et $nn^{I}n^{II}:1$ celle, s'ils entraient immédiatement dans le milieu $R$, t ainsi de suite.

58. Or donnant à la première surface $aAa$ une ouverture dont le rayon $Aa = x$, la réfraction e représentera plus des images simples, mais des assemblages d'images, pour la connaissance des-uelles je nommerai les espaces de diffusion de chacune:

$$Pp = y, \quad Qq = y^{I}, \quad Rr = y^{II}, \quad Ss = y^{III} \quad \text{etc.}$$

t les inclinaisons des rayons, qui concourent aux points $p$, $q$, $r$, $s$ etc.

$$\text{en } p = \omega, \quad \text{en } q = \omega^{I}, \quad \text{en } r = \omega^{II}, \quad \text{en } s = \omega^{III} \quad \text{etc.}$$

59. La connaissance de ces assemblages d'images étant de la plus grande importance dans la ioptrique, demande aussi des recherches plus profondes, dont nous avons déjà expliqué les fonde-ients. Tout revient ici à la route des rayons, qui passent du centre de l'objet $O$ par les bords de première surface réfringente $aAa$; comme je ferai voir plus amplement dans la Considération uivante.

## IVème Considération.

*Sur la route des rayons moyens, qui venant du centre de l'objet, passent par les bords de la première surface réfringente.*

60. La figure 249, présente la route d'un tel rayon, qui venant du centre de l'objet $O$ passe par le bord $a$ de la première surface réfringente, le demi-diamètre de son ouverture étant $Aa = x$, et il est clair que les intersections avec l'axe $p$, $q$, $r$, $s$ etc. donnent les extrémités de chaque assemblage d'images, les images principales étant $P\pi$, $Q\xi$, $R\varrho$, $S\sigma$ etc.

61. Considérons d'abord les points $b$, $c$, $d$ etc. où ce rayon passe par chacune des surfaces suivantes, et posons leurs distances à l'axe:

$$Bb = x^{I}, \quad Cc = x^{II}, \quad Dd = x^{III} \text{ etc.}$$

qu'il faut envisager comme les demi-diamètres de l'ouverture de chacune de ces surfaces, par rapport à ce rayon qui les traverse; comme ces quantités ne demandent point de précision, on pourra regarder comme evanouïssant les intervalles $Pp$, $Qq$, $Rr$ etc. et de là on aura:

$$x^{I} = \frac{b}{\alpha} x; \quad x^{II} = \frac{bc}{\alpha\beta} x; \quad x^{III} = \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma} x \text{ etc.}$$

62. Ensuite les angles dont cette route du rayon $Oa$ par les réfractions est inclinée à l'axe aux points $p$, $q$, $r$, $s$ etc., donnent les inclinaisons, que nous avons indiquées ci-dessus par les lettres $\omega$, $\omega^{I}$, $\omega^{II}$ etc. et puisque nous n'avons point ici besoin de précision, ces angles seront exprimés ensorte:

$$\omega = \frac{x}{a}; \quad \omega^{I} = \frac{bx}{a\beta}; \quad \omega^{II} = \frac{bcx}{a\beta\gamma}; \quad \omega^{III} = \frac{bcdx}{a\beta\gamma\delta} \text{ etc.}$$

63. Donc si nous introduisons ici les lettres $A$, $B$, $C$, $D$ etc. expliquées ci-dessus (56), ces expressions se changeront dans les formules suivantes:

$$x^{I} = A \cdot \frac{bx}{a}; \quad x^{II} = AB \cdot \frac{cx}{a}; \quad x^{III} = ABC \cdot \frac{dx}{a}; \quad x^{IV} = ABCD \cdot \frac{ex}{a} \text{ etc.}$$

$$\omega = A \cdot \frac{x}{a}; \quad \omega^{I} = AB \cdot \frac{x}{a}; \quad \omega^{II} = ABC \cdot \frac{x}{a}; \quad \omega^{III} = ABCD \cdot \frac{x}{a}$$

où il est bon d'observer que $\frac{x}{a}$ exprime l'angle $AOa$, que fait avec l'axe le premier rayon $Oa$.

64. Passons maintenant à la détermination de chaque espace de diffusion $Pp = y$, $Qq = y^{I}$, $Rr = y^{II}$, $Ss = y^{III}$ etc. ce qui est l'article le plus essentiel. Or le premier $Pp$ a été déterminé ensorte:

$$Pp = y = \frac{xx(a+\alpha)^2(a+n\alpha)}{2(n-1)^2 a^3 \alpha},$$

et le second $Qq$ renferme deux parties, dont l'une dépend du précédent $y$, et l'autre de l'ouverture $Bb = x^I$ de la seconde surface:

$$Qq = y^I = \frac{\beta\beta}{n^I bb} y + \frac{x^I x^I (b + \beta)^2 (b + n^I \beta)}{2(n^I - 1)^2 b^3 \beta}.$$

65. De la même manière sera déterminé l'espace de diffusion suivant $Rr$, et pareillement ceux qui suivent aprés celui-ci, desorte que nous n'aurons qu'à développer les formules suivantes:

$$Rr = y^{II} = \frac{\gamma\gamma}{n^{II} cc} y^I + \frac{x^{II} x^{II} (c + \gamma)^2 (c + n^{II} \gamma)}{2(n^{II} - 1)^2 c^3 \gamma},$$

$$Ss = y^{III} = \frac{\delta\delta}{n^{III} dd} y^{II} + \frac{x^{III} x^{III} (d + \delta)^2 (d + n^{III} \delta)}{2(n^{III} - 1)^2 d^3 \delta} \quad \text{etc.}$$

66. Introduisons d'abord les lettres $A$, $B$, $C$, $D$ etc., et substituant pour $x^I$, $x^{II}$, $x^{III}$ etc. les valeurs assignées ci-dessus, nous aurons les déterminations suivantes:

$$Pp = y = \frac{xx(1 + A)^2 (n + A)}{2(n - 1)^2 AAa},$$

$$Qq = y^I = \frac{y}{n^I BB} + \frac{AAbxx(1 + B)^2 (n^I + B)}{2(n^I - 1)^2 BBaa},$$

$$Rr = y^{II} = \frac{y^I}{n^{II} CC} + \frac{AABBcxx(1 + C)^2 (n^{II} + C)}{2(n^{II} - 1)^2 CCaa}$$

$$Ss = y^{III} = \frac{y^{II}}{n^{III} DD} + \frac{AABBCCdxx(1 + D)^2 (n^{III} + D)}{2(n^{III} - 1)^2 DDaa} \quad \text{etc.}$$

67. Posons pour abréger:

$$\frac{a(1 + A)^2 (n + A)}{(n - 1)^2} = \mathfrak{A}; \qquad \frac{n^I A^4 b (1 + B)^2 (n^I + B)}{(n^I - 1)^2} = \mathfrak{B};$$

$$\frac{n^I n^{II} A^4 B^4 c (1 + C)^2 (n^{II} + C)}{(n^{II} - 1)^2} = \mathfrak{C}; \qquad \frac{n^I n^{II} n^{III} A^4 B^4 C^4 d (1 + D)^2 (n^{III} + D)}{(n^{III} - 1)^2} = \mathfrak{D} \quad \text{etc.};$$

et les formules pour les espaces de diffusion seront exprimées ensorte:

$$y = \frac{xx . \mathfrak{A}}{2AAaa},$$

$$y^I = \frac{xx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{2n^I AABBaa},$$

$$y^{II} = \frac{xx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}{2n^I n^{II} AABBCCaa},$$

$$y^{III} = \frac{xx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})}{2n^I n^{II} n^{III} AABBCCDDaa} \quad \text{etc.}$$

68. Il est principalement nécessaire de déterminer cet espace de diffusion pour la dernière image, soit qu'on la veuille représenter sur une table blanche dans un lieu obscur, soit qu'elle doive

devenir l'objet immédiat de notre vision. Dans l'un et l'autre cas on atteindrait le plus haut degré de perfection, s'il était possible de réduire à rien cet espace de diffusion; de sorte qu'il devint:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = o.$$

69. A moins qu'on ne trouve moyen de rendre cette diffusion assez petite, la représentation de l'objet tant dans la chambre obscure que dans la vision devient confuse; et cette confusion sera d'autant plus grande, plus on donne d'ouverture à la première surface $aAa$. Pour diminuer donc cette confusion, et pour la rendre même insensible, on n'aurait qu'à rétrécir l'ouverture de la première surface, s'il n'y avait point d'autres inconvéniens qui en résulteraient.

70. Je nommerai donc cette confusion *celle qui provient de l'ouverture* de la première surface, pour la distinguer de celle qui est causée par la différente réfraction des rayons, que je développerai dans la suite. Mais avant que d'entreprendre cette recherche, il est nécessaire de considérer aussi la route des rayons, qui venant de l'extrémité de l'objet $\omega$, sont transmis par toutes les surfaces réfringentes.

71. Cette considération nous fera voir l'étendue de l'objet, dont l'image sera représentée après toutes les réfractions; c'est en quoi consiste le champ apparent, dont la connaissance est de la dernière importance dans tous les instrumens dioptriques; mais cette même considération nous conduira aussi à d'autres articles également essentiels.

---

## Vème Considération.

*Sur la route des rayons moyens, qui venant de l'extrémité de l'objet, passent par le milieu de la première surface.*

72. Je considère donc ici le rayon $\omega A$ (Fig. 250.), qui venant de l'extrémité de l'objet $\omega$, passe par le milieu $A$ de la première surface réfringente, pour en déterminer la route $A\beta\gamma\delta$ etc. que les réfractions successives lui feront prendre, en supposant que ce rayon soit transmis par toutes les surfaces réfringentes. Car si quelqu'une des surfaces n'avait pas assez d'ouverture pour le transmettre, il faudrait prendre le point $\omega$ plus près de l'axe, ce qui diminuerait le champ apparent.

73. Je suppose donc que $\omega$ est le point de l'objet le plus éloigné de l'axe dont les rayons soient encore transmis par toutes les surfaces réfringentes, et posant son éloignement de l'axe $O\omega = z$, cette quantité $z$ sera le demi-diamètre du champ apparent, ou si l'on aime mieux l'estimer par l'angle $OA\omega$, comme on fait dans les télescopes, et qu'on pose cet angle $OA\omega = \varphi$, on aura $\varphi = \frac{z}{a}$ ou bien $z = a\varphi$.

74. Dans la route de ce rayon il s'agit premièrement de déterminer les points $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. où il traverse les surfaces suivantes après avoir passé par le milieu $A$ de la première; et ensuite l

aut déterminer les points $F$, $G$, $H$ etc. où ce rayon coupe l'axe; l'une et l'autre de ces déterminaions nous fournit des considérations de la plus grande importance.

75. La connaissance des intersections $F$, $G$, $H$ etc. est d'abord de la dernière importance, uisque ce n'est que dans ces points, où un oeil placé peut découvrir le champ tout entier; car 'il était placé sur d'autres points de l'axe, il ne recevrait point ce rayon $\omega A$, et ne verrait pas ar conséquent l'extrémité $\omega$ de l'objet, au moins par des rayons transmis par $A$; mais comme ces ayons tiennent un milieu entre ceux qui passeraient par les bords $a$, $a$ de la première surface, y faut régler notre jugement sur la vue du champ.

*Vue du champ.*

76. C'est par cette raison que je nommerai chacun de ces points $F$, $G$, $H$ etc. la *vue du hamp*; puisque dans la suite, où il s'agira d'assigner à l'oeil son juste lieu, il faut absolument u'il soit placé dans la dernière vue du champ. Comme le premier de ces points $F$ ne se trouve u'après la seconde surface, il est bon d'observer que le précédent tomberait précisément dans le iilieu $A$ de la première surface.

77. Pour détermtner ces points de vue du champ, il est clair que c'est là que tomberaient s images d'un point lumineux qui serait place au point $A$; et partant nous aurons les formules uivantes, que fournit la réfraction de chaque surface:

$$\frac{n^{I}-1}{q}=\frac{1}{AB}+\frac{n^{I}}{BF};\quad \frac{n^{II}-1}{r}=\frac{1}{FC}+\frac{n^{II}}{CG};\quad \frac{n^{III}-1}{s}=\frac{1}{GD}+\frac{n^{III}}{DH}\quad \text{etc.}$$

n négligeant les aberrations qui pourraient provenir de l'éloignement des points $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. à l'axe.

78. Or ces points $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. ne méritent pas moins toute notre attention, puisqu'ils dépenent de l'ouverture de chaque surface. J'ai déjà remarqué (§ 49.), que le demi-diamètre de l'ouerture de chacune doit être la somme des intervalles $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ etc. et de ceux $Bb$, $Cc$, $Dd$ etc. ig. 249.) que j'ai déterminés dans la considération précédente, afin que tous les rayons du point $\omega$ ui passent par l'ouverture entière de la première surface $aAa$ soient transmis par les suivantes.

79. Delà nous aurons pour la juste mesure du demi-diamètre de chaque ouverture, les forules suivantes:

de $aAa = x + o$; de $bBb = x^{I} + B\beta$; de $cCc = x^{II} + C\gamma$; de $dDd = x^{III} + D\delta$ etc.

r on verra dans l'application aux instruments dioptriques, que pour les surfaces suivantes après la emière, les intervalles $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ etc. sont ordinairement beaucoup plus grands que les autres diqués par les lettres $x^{I}$, $x^{II}$, $x^{III}$ etc., de sorte que les ouvertures de ces surfaces dépendent incipalement de ces intervalles $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ etc. que nous considérons ici.

80. Or nous avons observé déjà au commencement, que l'ouverture de chaque surface ne pend point de notre bon plaisir, mais qu'elle doit toujours se trouver dans un certain rapport

au rayon de sa courbure, dont elle ne saurait jamais surpasser une certaine partie, afin que l'ouverture de chaque surface n'embrasse jamais un arc plus grand que d'environ 30°.

81. Cette condition est si essentielle, que nous ne saurions permettre la détermination des intervalles $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ etc. à d'autres circonstances, qu'au rayons de courbure de chaque surface. Je poserai donc, sans avoir égard aux autres déterminations que j'ai déjà faites, pour ces intervalles $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ etc.

$$B\beta = \pi^I q; \quad C\gamma = \pi^{II} r; \quad D\delta = \pi^{III} s \text{ etc.}$$

où les lettres $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. marquent de certaines fractions plus petites que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$, qu'on peut prendre tant affirmativement que négativement, en observant pourtant, que pour en fixer l'ouverture de chaque surface, il les faut toujours prendre affirmativement.

82. Posant donc comme ci-dessus l'angle $OA\omega = \varphi$, qui exprime le demi-diamètre du champ apparent, la première réfraction donne d'abord l'angle $BA\beta = \frac{\varphi}{n}$, d'où l'on tire:

$$\frac{\pi^I q}{AB} = \frac{\varphi}{n}; \quad \text{ou} \quad \frac{1}{AB} = \frac{\varphi}{n\pi^I q};$$

et ensuite nous avons les égalités suivantes:

$$\frac{\pi^I q}{BF} = \frac{\pi^{II} r}{FC}; \quad \frac{\pi^{II} r}{CG} = \frac{\pi^{III} s}{GD}; \quad \frac{\pi^{III} s}{DH} = \frac{\pi^{IV} t}{HE} \text{ etc.}$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{FC} = \frac{\pi^I q}{\pi^{II} r . BF}; \quad \frac{1}{GD} = \frac{\pi^{II} r}{\pi^{III} s . CG}; \quad \frac{1}{HE} = \frac{\pi^{III} s}{\pi^{IV} t . DH} \text{ etc.}$$

83. Or en substituant ces valeurs dans les formules du § 77 nous trouverons:

$$\frac{n^I - 1}{q} = \frac{\varphi}{n\pi^I q} + \frac{n^I}{BF}; \text{ donc}$$

$$\frac{1}{BF} = \frac{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I \pi^I q} \quad \text{et} \quad \frac{1}{FC} = \frac{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I \pi^{II} r}.$$

Ensuite
$$\frac{n^{II} - 1}{r} = \frac{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I \pi^{II} r} + \frac{n^{II}}{CG} \text{ donc}$$

$$\frac{1}{CG} = \frac{nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - n(n^I - 1)\pi^I + \varphi}{nn^I n^{II} \pi^{II} r} \text{ et}$$

$$\frac{1}{GD} = \frac{nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - n(n^I - 1)\pi^I + \varphi}{nn^I n^{II} \pi^{III} s}.$$

Puis
$$\frac{n^{III} - 1}{s} = \frac{nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - n(n^I - 1)\pi^I + \varphi}{nn^I n^{II} \pi^{III} s} + \frac{n^{III}}{DH}, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{DH} = \frac{nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} - nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} + n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I n^{II} n^{III} \pi^{III} s} \text{ et}$$

$$\frac{1}{HE} = \frac{nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} - nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} + n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I n^{II} n^{III} \pi^{IV} t}.$$

84. On peut rendre ces formules plus simples en introduisant aussi dans le calcul les angles, [qu]e fait le rayon réfracté avec l'axe aux points de vue du champ $A$, $F$, $G$, $H$ etc. Il est d'autant [pl]us intéressant de connaître d'abord ces angles, puisqu'ils marquent la grandeur apparente, sous [la]quelle l'objet $O\omega$ serait vu dans les points $A$, $F$, $G$, $H$ etc. Posons donc ces angles:

$$BA\beta = \psi;\quad BF\beta = CF\gamma = \psi^I;\quad CG\gamma = DG\delta = \psi^{II};\quad DH\delta = EH\varepsilon = \psi^{III}\ \text{etc.}$$

85. Or de ces angles nous tirons d'abord les déterminations suivantes:

$$\frac{1}{AB} = \frac{\psi}{\pi^I q};\quad \frac{1}{BF} = \frac{\psi^I}{\pi^I q};\quad \frac{1}{FC} = \frac{\psi^I}{\pi^{II} r};\quad \frac{1}{CG} = \frac{\psi^{II}}{\pi^{II} r};\quad \frac{1}{GD} = \frac{\psi^{II}}{\pi^{III} s}\ \text{etc.}$$

[qu]i étant substituées dans les formules du § 77 donnent:

$$\frac{n^I - 1}{q} = \frac{\psi}{\pi^I q} + \frac{n^I \psi^I}{\pi^I q};\quad \frac{n^{II} - 1}{r} = \frac{\psi^I}{\pi^{II} r} + \frac{n^{II}\psi^{II}}{\pi^{II} r};\quad \frac{n^{III} - 1}{s} = \frac{\psi^{II}}{\pi^{III} s} + \frac{n^{III}\psi^{III}}{\pi^{III} s}\ \text{etc.}$$

[o]ù la première $\frac{\pi^I q}{AB} = \frac{\varphi}{n}$, fournit $\psi = \frac{\varphi}{n}$. Or les autres se réduisent à celles-ci:

$$(n^I - 1)\pi^I = \psi + n^I\psi^I;\quad (n^{II} - 1)\pi^{II} = \psi^I + n^{II}\psi^{II};\quad (n^{III} - 1)\pi^{III} = \psi^{II} + n^{III}\psi^{III}\ \text{etc.}$$

86. Les angles $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc. se trouveront donc déterminés ensorte par les seules fractions [$\pi^I$], $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. avec le demi-diamètre du champ $\varphi$:

$$\psi = \frac{\varphi}{n},$$

$$\psi^I = \frac{(n^I - 1)\pi^I}{n^I} - \frac{\varphi}{nn^I},$$

$$\psi^{II} = \frac{(n^{II} - 1)\pi^{II}}{n^{II}} - \frac{(n^I - 1)\pi^I}{n^I n^{II}} + \frac{\varphi}{nn^I n^{II}},$$

$$\psi^{III} = \frac{(n^{III} - 1)\pi^{III}}{n^{III}} - \frac{(n^{II} - 1)\pi^{II}}{n^{II} n^{III}} + \frac{(n^I - 1)\pi^I}{n^I n^{II} n^{III}} - \frac{\varphi}{nn^I n^{II} n^{III}}.$$

87. Or ayant déterminé ces angles, on aura pour les points de vue du champ, (en conçevant p[a]r l'analogie le point $E$ marqué en $A$, où l'on peut aussi imaginer la lettre $\alpha$, d'où résulte la fi[c]tion $\pi = o$) les formules suivantes très simples:

$$AE = o;\quad BF = \frac{\pi^I q}{\psi^I};\quad CG = \frac{\pi^{II} r}{\psi^{II}};\quad DH = \frac{\pi^{III} s}{\psi^{III}};$$

$$EB = \frac{\pi^I q}{\psi};\quad FC = \frac{\pi^{II} r}{\psi^I};\quad GD = \frac{\pi^{III} s}{\psi^{II}}\ \text{etc.}$$

88. Maintenant il ne reste qu'à comparer ces nouvelles dénominations avec celles que nous [av]ons établies auparavant, où nous ferons d'abord usage des lettres $A$, $B$, $C$, $D$ etc., introduites [au] § 6, d'où l'on a:

$$\alpha = \frac{a}{A}; \quad \beta = \frac{b}{B}; \quad \gamma = \frac{c}{C}; \quad \delta = \frac{d}{D};$$

$$p = \frac{(n-1)a}{1+nA}; \quad q = \frac{(n^I-1)b}{1+n^IB}; \quad r = \frac{(n^{II}-1)c}{1+n^{II}C}; \quad s = \frac{(n^{III}-1)d}{1+n^{III}D}.$$

89. Pour cet effet nous n'avons qu'à considérer les intervalles entre les surfaces, et égale leurs valeurs exprimées par les dénominations précédentes § 85 avec celles que fournissent les pré sentes, d'où résultent les équations suivantes:

$$AB = \frac{a}{A} + b = \frac{(n^I-1)\pi^I b}{(1+n^IB)\psi} = \frac{b(\psi + n^I\psi^I)}{(1+n^IB)\psi},$$

$$BC = \frac{b}{B} + c = \frac{b(\psi + n^I\psi^I)}{(1+n^IB)\psi^I} + \frac{c(\psi^I + n^{II}\psi^{II})}{(1+n^{II}C)\psi^I},$$

$$CD = \frac{c}{C} + d = \frac{c(\psi^I + n^{II}\psi^{II})}{(1+n^{II}C)\psi^{II}} + \frac{d(\psi^{II} + n^{III}\psi^{III})}{(1+n^{III}D)\psi^{II}},$$

ayant mis d'abord pour les formules $(n^I-1)\pi^I$, $(n^{II}-1)\pi^{II}$, $(n^{III}-1)\pi^{III}$ etc. les valeu données ci-dessus § 85.

90. Or ces équations se réduisent aisément aux suivantes:

$$\frac{a}{A} = \frac{n^I b(\psi^I - B\psi)}{(1+n^IB)\psi},$$

$$\frac{b(\psi^I - B\psi)}{B(1+n^IB)\psi^I} = \frac{n^{II}c(\psi^{II} - C\psi^I)}{(1+n^{II}C)\psi^I} = \frac{a\psi}{n^IAB\psi^I},$$

$$\frac{c(\psi^{II} - C\psi^I)}{C(1+n^{II}C)\psi^{II}} = \frac{n^{III}d(\psi^{III} - D\psi^{II})}{(1+n^{III}D)\psi^{II}} = \frac{a\psi}{n^In^{II}ABC\psi^{II}},$$

d'où l'on tire les déterminations suivantes:

$$b = \frac{a(1+n^IB)\psi}{n^IA(\psi^I - B\psi)}; \qquad q = \frac{(n^I-1)a\psi}{n^IA(\psi^I - B\psi)};$$

$$c = \frac{a(1+n^{II}C)\psi}{n^In^{II}AB(\psi^{II} - C\psi^I)}; \qquad r = \frac{(n^{II}-1)a\psi}{n^In^{II}AB(\psi^{II} - C\psi^I)};$$

$$d = \frac{a(1+n^{III}D)\psi}{n^In^{II}n^{III}ABC(\psi^{III} - D\psi^{II})}; \qquad s = \frac{(n^{III}-1)a\psi}{n^In^{II}n^{III}ABC(\psi^{III} - D\psi^{II})}.$$

91. Il convient aussi de remarquer que la route du rayon $\omega A$ passe par les extrémités le toutes les images principales; et partant les intervalles entre chaque vue du champ et l'image c respondente, seront exprimés ensorte; premièrement $AP = \frac{a}{A}$ et ensuite:

$$FQ = \frac{b(\psi^I - B\psi)}{B(1+n^IB)\psi^I} = \frac{a\psi}{n^IAB\psi^I};$$

$$GR = \frac{c(\psi^{II} - C\psi^{I})}{C(1 + n^{II}C)\psi^{II}} = \frac{a\psi}{n^{I}n^{II}ABC\psi^{II}};$$

$$HS = \frac{d(\psi^{III} - D\psi^{II})}{D(1 + n^{III}D)\psi^{III}} = \frac{a\psi}{n^{I}n^{II}n^{III}ABCD\psi^{III}}$$

etc.

---

## VI$^{ème}$ Considération.

*Sur les changements causés dans les images principales par la différente réfraction des rayons.*

92. Il ne s'agit ici que de regarder les nombres $n$, $n^{I}$, $n^{II}$ etc. comme variables, et de [ch]ercher les changements qui en résultent tant dans le lieu que dans la grandeur de chaque image [pr]incipale. Il serait bien superflu, si l'on voulait étendre cette recherche aux assemblages d'images [to]ut entiers, qui sont formés par chaque réfraction, vu qu'on tomberait d'un côté, dans des calculs [ex]trêmement embrouillés, et que de l'autre côté, on n'en saurait tirer aucun usage.

93. D'abord il faut bien distinguer les quantités qui dépendent de la réfraction, de celles, [q]ui demeurent inaltérables; à cette dernière espèce appartient la distance de l'objet $OA = a$ (Fig. 251.), [av]ec son demi-diamètre $O\omega = z$, et ensuite les rayons de courbure des surfaces $p$, $q$, $r$, $s$ etc. [Le]s autres quantités $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$, $d$, $\delta$ etc. sont toutes variables, mais pourtant en sorte, que les [in]tervalles entre les surfaces, savoir $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$ etc. demeurent invariables, d'où [no]us aurons: $db = -d\alpha$, $dc = -d\beta$, $dd = -d\gamma$, $de = -d\delta$ etc.

94. Maintenant les lettres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. marquant les distances des images principales $AP$, [B]$Q$, $CR$, $DS$ etc., leurs différentiels donneront les variations dans le lieu des images, et exprimeront [p]ar conséquent la diffusion de chaque image, causée par la différente réfrangibilité des rayons; et [d]e ces mêmes différentiels on pourra conclure ensuite les changements, qui seront causés dans la [g]randeur de chaque image ou bien dans les quantités $z^{I}$, $z^{II}$, $z^{III}$, $z^{IV}$ etc.

95. Conformément à ces remarques, différentions premièrement les équations, trouvées ci-dessus [p]our les lieux des images principales:

| Équations. | Differentiels. |
|---|---|
| $\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}$, | $\frac{dn}{p} = \frac{dn}{\alpha} - \frac{nd\alpha}{\alpha\alpha}$, |
| $\frac{n^{I}-1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{n^{I}}{\beta}$, | $\frac{dn^{I}}{q} = \frac{d\alpha}{bb} + \frac{dn^{I}}{\beta} - \frac{n^{I}d\beta}{\beta\beta}$, |
| $\frac{n^{II}-1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma}$, | $\frac{dn^{II}}{r} = \frac{d\beta}{cc} + \frac{dn^{II}}{\gamma} - \frac{n^{II}d\gamma}{\gamma\gamma}$, |
| $\frac{n^{III}-1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{n^{III}}{\delta}$. | $\frac{dn^{III}}{s} = \frac{d\gamma}{dd} + \frac{dn^{III}}{\delta} - \frac{n^{III}d\delta}{\delta\delta}$. |

96. Delà nous tirons les déterminations suivantes, en y introduisant les lettres $A$, $B$, $C$, $D$ etc. pour abréger le calcul:

$$d\alpha = -\frac{aadn}{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right) = -\frac{adn(1+A)}{n(n-1)AA},$$

$$d\beta = +\frac{\beta\beta d\alpha}{n^I bb} - \frac{\beta\beta dn^I}{n^I}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\beta}\right) = +\frac{d\alpha}{n^I BB} - \frac{bdn^I(1+B)}{n^I(n^I-1)BB},$$

$$d\gamma = +\frac{\gamma\gamma d\beta}{n^{II}cc} - \frac{\gamma\gamma dn^{II}}{n^{II}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\gamma}\right) = +\frac{d\beta}{n^{II}CC} - \frac{cdn^{II}(1+C)}{n^{II}(n^{II}-1)CC},$$

$$d\delta = +\frac{\delta\delta d\gamma}{n^{III}dd} - \frac{\delta\delta dn^{III}}{n^{III}}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{\delta}\right) = +\frac{d\gamma}{n^{III}DD} - \frac{ddn^{III}(1+D)}{n^{III}(n^{III}-1)DD}$$

etc.

d'où l'on détermine aisément les valeurs de ces différentiels par les seuls différentiels des nombres $n$, $n^I$, $n^{II}$, $n^{III}$ etc.

97. En substituant les valeurs précédentes dans les suivantes, on aura ces déterminations pour le changement causé dans le lieu de chaque image:

$$nAAd\alpha = \frac{-adn(1+A)}{n-1},$$

$$nn^I AABBd\beta = \frac{-adn(1+A)}{n-1} - \frac{nAAbdn^I(1+B)}{n^I-1},$$

$$nn^I n^{II} AABBCCd\gamma = \frac{-adn(1+A)}{n-1} - \frac{nAAbdn^I(1+B)}{n^I-1} - \frac{nn^I AABBcdn^{II}(1+C)}{n^{II}-1}$$

etc.

Donc pour que le dernier espace de diffusion s'évanouisse, il faut satisfaire à cette équation:

$$0 = \frac{adn(1+A)}{n-1} + \frac{nAAbdn^I(1+B)}{n^I-1} + \frac{nn^I AABBcdn^{II}(1+C)}{n^{II}-1} + \frac{nn^I n^{II} AABBCCddn^{III}(1+D)}{n^{III}-1} \quad \text{etc.}$$

98. Passons maintenant à examiner les changements, qui doivent arriver dans la grandeur de chaque image; et puisque leurs demi-diamètres $z^I$, $z^{II}$, $z^{III}$, $z^{IV}$ etc. ont été exprimés en sorte (55)

$$z^I = \frac{\alpha z}{na}; \quad z^{II} = \frac{\beta z^I}{n^I b}; \quad z^{III} = \frac{\gamma z^{II}}{n^{II} c}; \quad z^{IV} = \frac{\delta z^{III}}{n^{III} d} \quad \text{etc.}$$

nous en trouverons le plus aisément leurs différentiels logarithmiques:

$$\frac{dz^I}{z^I} = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{dn}{n} = \frac{Ad\alpha}{a} - \frac{dn}{n},$$

$$\frac{dz^{II}}{z^{II}} = \frac{dz^I}{z^I} + \frac{d\beta}{\beta} + \frac{d\alpha}{b} - \frac{dn^I}{n^I} = \frac{dz^I}{z^I} + \frac{d\alpha + Bd\beta}{b} - \frac{dn^I}{n^I},$$

$$\frac{dz^{III}}{z^{III}} = \frac{dz^{II}}{z^{II}} + \frac{d\gamma}{\gamma} + \frac{d\beta}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}} = \frac{dz^{II}}{z^{II}} + \frac{d\beta + Cd\gamma}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}}$$

etc.

99. Pour rendre ces formules plus simples, j'y substitue au lieu des différentiels $dn$, $dn^I$, $dn^{II}$ etc. leurs valeurs tirées des formules du § 96, qui donnent:

$$-\frac{dn}{n}=\frac{(n-1)\,AAd\alpha}{a\,(1+A)};\qquad -\frac{dn^I}{n^I}=\frac{(n^I-1)\,(n^IBBd\beta-d\alpha)}{n^Ib\,(1+B)};$$

$$-\frac{dn^{II}}{n^{II}}=\frac{(n^{II}-1)\,(n^{II}CCd\gamma-d\beta)}{n^{II}c\,(1+C)};\qquad -\frac{dn^{III}}{n^{III}}=\frac{(n^{III}-1)\,(n^{III}DDd\delta-d\gamma)}{n^{III}d\,(1+D)};$$

et je trouve les expressions suivantes:

$$\frac{dz^I}{z^I}=\frac{A\,(1+nA)\,d\alpha}{a\,(1+A)};$$

$$\frac{dz^{II}}{z^{II}}=\frac{dz^I}{z^I}+\frac{(1+n^IB)\,(d\alpha+n^IBd\beta)}{n^Ib\,(1+B)};$$

$$\frac{dz^{III}}{z^{III}}=\frac{dz^{II}}{z^{II}}+\frac{(1+n^{II}C)\,(d\beta+n^{II}Cd\gamma)}{n^{II}c\,(1+C)};$$

$$\frac{dz^{IV}}{z^{IV}}=\frac{dz^{III}}{z^{III}}+\frac{(1+n^{III}D)\,(d\gamma+n^{III}Dd\delta)}{n^{III}d\,(1+D)}$$

etc.

100. Ces formules sont très propes pour en déterminer la position de la ligne droite, tirée par les extrémités des images représentées par les rayons différement réfrangibles. Je nommerai ces lignes les terminatrices de chaque image, que je représente dans la figure par les droites $\pi e$, $\xi f$, $\varrho g$, $\sigma h$ etc. dont les intersections avec l'axe $e$, $f$, $g$, $h$ etc. sont déterminées en sorte:

$$Pe=\frac{z^Id\alpha}{dz^I};\quad Qf=\frac{z^{II}d\beta}{dz^{II}};\quad Rg=\frac{z^{III}d\gamma}{dz^{III}};\quad Sh=\frac{z^{IV}d\delta}{dz^{IV}}\ \text{etc.}$$

101. La connaissance de ces points $e$, $f$, $g$, $h$ etc. est de la dernière importance dans la dioptrique, puisqu'un oeil placé dans un tel point verrait les extrémités de toutes les images différemment colorées selon la même direction, et partant toutes les différentes couleurs en se réunissant produiraient la couleur naturelle. L'objet paraitra donc sans aucune bordure colorée, et par cette raison je nommerai ces points $e$, $f$, $g$, $h$ etc. les *points de vue de l'objet*.

102. J'ai déjà remarqué que pour appercevoir tout le champ il faudrait placer l'oeil dans quelqu'un des points, que j'ai nommés les points de vue du champ. Il sera donc bien important de faire en sorte que le dernier point de vue du champ convienne avec le dernier point de vue de l'objet, afin que l'oeil y étant placé découvre l'objet tout entier, et qu'il le voye en même temps bien terminé sans aucune bordure colorée.

103. S'il est possible de remplir cette condition, les inconvenients de la différente réfrangibilité des rayons, dont on se plaint ordinairement tant, seront pour la plupart anéantis, quand même l'espace de diffusion ou l'intervalle entre les images différemment colorées serait encore assez considérable.

*

104. Par cette raison il sera important de comparer chacun de ces points de vue de l'objet avec son correspondant point de vue du champ, que j'ai fixés dans la précédente considération aux points $E$, $F$, $G$, $H$ etc. Je chercherai donc les intervalles entre ces deux sortes de points de vue, qui sont dans la figure les espaces $Ee$, $Ff$, $Gg$, $Hh$ etc.

105. Or dans le § 91 ayant déterminé les distances $EP$, $FQ$, $GR$, $HS$ etc. dont je prendrai les premières expressions, on n'a qu'à en soustraire les distances $Pe$, $Qf$, $Rg$, $Sh$ etc. données dans le § 100, pour avoir les intervalles cherchés:

$$Ee = \frac{a}{A} - \frac{z^I d\alpha}{dz^I} \quad \text{ou} \quad \frac{Adz^I}{z^I} Ee = \frac{adz^I}{z^I} - Ad\alpha;$$

$$Ff = \frac{b(\psi^I - B\psi)}{B(1+n^I B)\psi^I} - \frac{z^{II} d\beta}{dz^{II}} \quad \text{ou} \quad \frac{B(1+n^I B)\psi^I dz^{II}}{z^{II}} Ff = \frac{b(\psi^I - B\psi)dz^{II}}{z^{II}} - B(1+n^I B)\psi^I d\beta;$$

$$Gg = \frac{c(\psi^{II} - C\psi^I)}{C(1+n^{II}C)\psi^{II}} - \frac{z^{III} d\gamma}{dz^{III}} \quad \text{ou} \quad \frac{C(1+n^{II}C)\psi^{II} dz^{III}}{z^{III}} Gg = \frac{c(\psi^{II} - C\psi^I)dz^{III}}{z^{III}} - C(1+n^{II}C)\psi^{II} d\gamma;$$

$$Hh = \frac{d(\psi^{III} - D\psi^{II})}{D(1+n^{III}D)\psi^{III}} - \frac{z^{IV} d\delta}{dz^{IV}} \quad \text{ou} \quad \frac{D(1+n^{III}D)\psi^{III} dz^{IV}}{z^{IV}} Hh = \frac{d(\psi^{III} - D\psi^{II})dz^{IV}}{z^{IV}} - D(1+n^{III}D)\psi^{III} d\delta.$$

106. Tenons ici compte des formules trouvées § 90, qui donnent:

$$b(\psi^I - B\psi) = \frac{a(1+n^I B)\psi}{n^I A}; \quad c(\psi^{II} - C\psi^I) = \frac{a(1+n^{II}C)\psi}{n^I n^{II} AB} \quad \text{etc.}$$

et nos équations à développer prendront les formes suivantes:

$$\frac{Adz^I}{az^I} \cdot Ee = \frac{dz^I}{z^I} - \frac{Ad\alpha}{a} = P;$$

$$\frac{n^I AB\psi^I dz^{II}}{a\psi z^{II}} \cdot Ff = \frac{dz^{II}}{z^{II}} - \frac{n^I AB\psi^I d\beta}{a\psi} = Q;$$

$$\frac{n^I n^{II} ABC\psi^{II} dz^{III}}{a\psi z^{III}} \cdot Gg = \frac{dz^{III}}{z^{III}} - \frac{n^I n^{II} ABC\psi^{II} d\gamma}{a\psi} = R;$$

$$\frac{n^I n^{II} n^{III} ABCD\psi^{III} dz^{IV}}{a\psi z^{IV}} \cdot Hh = \frac{dz^{IV}}{z^{IV}} - \frac{n^I n^{II} n^{III} ABCD\psi^{III} d\delta}{a\psi} = S.$$

107. Considerons les différences entre ces formules, qui par celles du § 99 seront:

$$Q - P = \frac{(1+n^I B)(d\alpha + n^I Bd\beta)}{n^I b(1+B)} + \frac{A(\psi d\alpha - n^I B\psi^I d\beta)}{a\psi};$$

$$R - Q = \frac{(1+n^{II}C)(d\beta + n^{II}Cd\gamma)}{n^{II}c(1+C)} + \frac{n^I AB(\psi^I d\beta - n^{II}C\psi^{II} d\gamma)}{a\psi};$$

$$S - R = \frac{(1+n^{III}D)(d\gamma + n^{III}Dd\delta)}{n^{III}d(1+D)} + \frac{n^I n^{II} ABC(\psi^{II} d\gamma - n^{III}D\psi^{III} d\delta)}{a\psi}$$

etc.

substituant pour $b$, $c$, $d$ etc. leurs valeurs du § 90:

$$Q - P = \frac{A(\psi^I - B\psi)(d\alpha + n^I Bd\beta)}{(1+B)a\psi} + \frac{A(\psi d\alpha - n^I B\psi^I d\beta)}{a\psi};$$

$$R - Q = \frac{n^I AB(\psi^{II} - C\psi)(d\beta + n^{II}Cd\gamma)}{(1+C)a\psi} + \frac{n^I AB(\psi^I d\beta - n^{II}C\psi^{II}d\gamma)}{a\psi};$$

$$S - R = \frac{n^I n^{II} ABC(\psi^{III} - D\psi^{II})(d\gamma + n^{III}Dd\delta)}{(1+D)a\psi} + \frac{n^I n^{II} ABC(\psi^{II}d\gamma - n^{III}D\psi^{III}d\delta)}{a\psi}$$

etc.

108. Par la réduction de ces formules nous obtiendrons:

$$\frac{(1+B)a\psi}{A}(Q-P) = d\alpha(\psi+\psi^I) - n^I BBd\beta(\psi+\psi^I);$$

$$\frac{(1+C)a\psi}{n^I AB}(R-Q) = d\beta(\psi^I+\psi^{II}) - n^{II}CCd\gamma(\psi^I+\psi^{II});$$

$$\frac{(1+D)a\psi}{n^I n^{II} ABC}(S-R) = d\gamma(\psi^{II}+\psi^{III}) - n^{III}DDd\delta(\psi^{II}+\psi^{III})$$

etc.

où moyennant les formules du § 96 nous tirons:

$$\frac{(1+B)a\psi(Q-P)}{A(\psi+\psi^I)} = d\alpha - n^I BBd\beta = \frac{bdn^I(1+B)}{n^I-1};$$

$$\frac{(1+C)a\psi(R-Q)}{n^I AB(\psi^I+\psi^{II})} = d\beta - n^{II}CCd\gamma = \frac{cdn^{II}(1+C)}{n^{II}-1};$$

$$\frac{(1+D)a\psi(S-R)}{n^I n^{II} ABC(\psi^{II}+\psi^{III})} = d\gamma - n^{III}DDd\delta = \frac{ddn^{III}(1+D)}{n^{III}-1}$$

etc.

109. De là nous concluons enfin:

$$Q - P = \frac{Ab(\psi+\psi^I)dn^I}{(n^I-1)a\psi};$$

$$R - Q = \frac{n^I ABc(\psi^I+\psi^{II})dn^{II}}{(n^{II}-1)a\psi};$$

$$S - R = \frac{n^I n^{II} ABCd(\psi^{II}+\psi^{III})dn^{III}}{(n^{III}-1)a\psi}$$

etc.

où l'on n'a qu'à définir la valeur de

$$P = \frac{dz^I}{z^I} - \frac{Ad\alpha}{a} = -\frac{dn}{n}$$

pour en tirer celles des lettres $Q$, $R$, $S$ etc.

110. Remarquons seulement qu'en vertu des formules du § 85 nous avons:

$$\frac{\psi+\psi^I}{n^I-1} = \frac{\pi^I+\psi}{n^I}; \quad \frac{\psi^I+\psi^{II}}{n^{II}-1} = \frac{\pi^{II}+\psi^I}{n^{II}}; \quad \frac{\psi^{II}+\psi^{III}}{n^{III}-1} = \frac{\pi^{III}+\psi^{II}}{n^{III}} \quad \text{etc.}$$

d'où nous tirons enfin:

$$P = -\frac{dn}{n};$$

$$Q = -\frac{dn}{n} + \frac{Ab(\psi + \pi^I)\, dn^I}{n^I a\psi};$$

$$R = -\frac{dn}{n} + \frac{Ab(\psi + \pi^I)\, dn^I}{n^I a\psi} + \frac{n^I ABc(\psi^I + \pi^{II})\, dn^{II}}{n^{II} a\psi};$$

$$S = -\frac{dn}{n} + \frac{Ab(\psi + \pi^I)\, dn^I}{n^I a\psi} + \frac{n^I ABc(\psi^I + \pi^{II})\, dn^{II}}{n^{II} a\psi} + \frac{n^I n^{II} ABCd(\psi^{II} + \pi^{III})\, dn^{III}}{n^{III} a\psi}$$

etc.

il faudra donc égaler à zéro la dernière de ces valeurs, pour satisfaire à la grande condition, qu les deux points de vue du champ et de l'objet soient réunis ensemble.

111. Mais les mêmes formules du § 85 nous fournissent aussi ces rapports:

$$\frac{\psi + \pi^I}{n^I} = -\psi^I + \pi^I; \quad \frac{\psi^I + \pi^{II}}{n^{II}} = -\psi^{II} + \pi^{II} \quad \text{etc.}$$

d'où nos expressions deviennent plus nettes:

$$-na\psi \,.\, P = a\psi dn$$

$$-na\psi \,.\, Q = a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)\, dn^I$$

$$-na\psi \,.\, R = a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)\, dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II})\, dn^{II}$$

etc.

et partant pour la réunion de ces derniers points on aura cette condition à remplir:

$$o = a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)\, dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II})\, dn^{II} + nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})\, dn^{III} \quad \text{et}$$

112. Substituons encore ici pour les lettres $b$, $c$, $d$ etc. leurs valeurs du § 90, et divisa cette équation par $a\psi n$ nous aurons:

$$o = \frac{dn}{n} + \frac{dn^I}{n^I} \cdot \frac{(1 + n^I B)(\psi^I - \pi^I)}{\psi^I - B\psi} + \frac{dn^{II}}{n^{II}} \cdot \frac{(1 + n^{II} C)(\psi^{II} - \pi^{II})}{\psi^{II} - C\psi^I} \quad \text{etc.}$$

et puisque $\psi = (n^I - 1)\pi^I - n^I\psi^I$; $\psi^I = (n^{II} - 1)\pi^{II} - n^{II}\psi^{II}$ etc.

on aura cette forme où chaque terme ne renferme que des éléments qui se rapportent uniquement la surface, à laquelle ce terme appartient:

$$o = \frac{dn}{n} + \frac{dn^I}{n^I} \cdot \frac{(1 + n^I B)(\psi^I - \pi^I)}{(1 + n^I B)\psi^I - (n^I - 1)B\pi^I} + \frac{dn^{II}}{n^{II}} \cdot \frac{(1 + n^{II} C)(\psi^{II} - \pi^{II})}{(1 + n^{II} C)\psi^{II} - (n^{II} - 1)C\pi^{II}} + \text{etc.}$$

où selon la conformité le premier terme doit être représenté en sorte:

$$\frac{dn}{n} \cdot \frac{(1 + nA)(\psi - \pi)}{(1 + nA)\psi - (n - 1)A\pi},$$

qui à cause de $\pi = o$ se reduit ouvertement à $\frac{dn}{n}$.

113. Voilà donc une exposition succinte de tout ce qui regarde les images d'un objet repré-ntées par un nombre quelconque de surfaces sphériques réfringentes, qu'on suppose disposées sur : même axe; dont chacune peut être douée d'une réfraction quelconque tant par rapport aux rayons ıoyens, qu'à la différente réfrangibilité des rayons; de sorte que cette théorie est suffisante pour ɔus les cas qu'on puisse imaginer, soit qu'il s'agisse de Télescopes ou de Microscopes.

---

## VII<sup></sup>ème Considération.

### *Sur les Télescopes et Microscopes en général.*

114. Quelque grand que soit le nombre des surfaces réfringentes, c'est toujours la dernière ıage qui devient l'objet immédiat de la vision. Or tout oeil ayant une certaine distance à ɿuelle il voit le plus distinctement les objets, il faut bien qu'il soit placé sur l'axe à cette même ıstance derrière la dernière image. Quoique cette distance souffre une très grande latitude, je la ;garderai comme fixe pour chaque oeil, et je l'indiquerai par la lettre $h$.

115. Donc s'il n'y avait qu'une surface réfringente $aAa$, la distance de l'oeil derrière cette ırface devrait être $= \alpha + h$, s'il y avait deux surfaces, elle devrait être $= \beta + h$; et en général : nous supposons que la dernière image tombe derrière la dernière surface à la distance $= \zeta$, la ıtance de l'oeil derrière cette surface doit être $= \zeta + h$.

116. On voit bien que cette distance de l'oeil après la dernière surface doit toujours être ɿsitive. Donc si la distance $\zeta$ était tellement négative, que la valeur de $\zeta + h$ devint négative, ıstrument ne serait pas propre pour la vision au moins à l'égard des yeux, dont la juste distance $= h$ ou plus petite.

117. Mais cette seule condition ne suffit pas pour le lieu de l'oeil, et il est très essentiel ɋ l'oeil se trouve dans un tel endroit, où il puisse recevoir tous les rayons transmis par les s faces réfringentes; puisque sans cela il ne verrait que le centre de l'objet $O$, et les points tant st peu éloignés de l'axe lui échapperaient entièrement.

118. Il est donc nécessaire que l'oeil se trouve dans le dernier point de vue du champ; et pır que ce lieu convienne avec celui de la première condition, les § 87 et 91 nous fournissent pır chaque nombre de surfaces Fig. 251 les déterminations suivantes:

| Nombre des surfaces. | Lieu de l'oeil. | Condition à remplir. |
|---|---|---|
| I. | en $E$ ou $A$ | $AE = o = \alpha + h$ où $h = \frac{-a}{\mathfrak{A}}$; |
| II. | en $F$ | $BF = \frac{\pi^I q}{\psi^I} = \beta + h$ où $h = \frac{-a\psi}{n^I \mathfrak{A}\mathfrak{B}\psi^I}$; |
| III. | en $G$ | $CG = \frac{\pi^{II} r}{\psi^{II}} = \gamma + h$ où $h = \frac{-a\psi}{n^I n^{II} \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\psi^{II}}$; |
| IV. | en $H$ | $DH = \frac{\pi^{III} s}{\psi^{III}} = \delta + h$ où $h = \frac{-a\psi}{n^I n^{II} n^{III} \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\psi^{III}}$ |

etc.

119. Il faut donc avant toutes choses, que l'instrument dioptrique soit arrangé en sorte, q pour chaque nombre de surfaces la distance juste de l'oeil $h$ devienne égale à la formule rapporté ou du moins qu'elle n'en diffère pas énormement. Mais ensuite il est aussi absolument nécessai que la dernière des formules:

$$\frac{\pi^I q}{\psi^I}, \quad \frac{\pi^{II} r}{\psi^{II}}, \quad \frac{\pi^{III} s}{\psi^{III}} \text{ etc.}$$

obtienne une valeur positive.

120. Cependant quoique la dernière de ces formules devienne négative comme $= -\omega$, l'in strument n'est pas absolument à rejetter. Il faut alors appliquer l'oeil immédiatement à la derniè surface, et l'ouverture de la prunelle recevra toujours une partie du champ, qui sera d'autant pl grande plus la distance $\omega$ et petite, et la prunelle plus ouverte; ce qui est le cas des peti perspectifs de poche, dont l'oculaire est concave.

121. Après ces remarques sur le lieu de l'oeil, qui renferment la principale condition po tous les instruments dioptriques sans laquelle ils seraient destitués de tout usage, j'observe que po bien traiter cette matière il faut la partager en deux parties: dans la première je regarderai l'instru ment dioptrique comme donné, et je chercherai toutes les qualités, dont il sera doué; dans l'aut partie je regarderai les qualités comme données, et je chercherai la construction des instrumen dioptriques, qui soient doués de ces qualités. On voit bien qu'il s'agira ici des moyens, de port ces instruments au plus haut dégré de perfection, dont ils sont susceptibles.

## Ière PARTIE.

### Examen d'un instrument Dioptrique proposé.

122. Connaissant 1° la réfraction de chaque surface ou les lettres $n$, $n^I$, $n^{II}$, $n^{III}$ etc.; 2° rayon de courbure de chacune ou les lettres $p$, $q$, $r$, $s$ etc.; 3° les intervalles entre les surfac $AB$, $BC$, $CD$ etc. et 4° la distance de l'objet $OA = a$; on en tirera les lieux des images prin pales $P$, $Q$, $R$, $S$ etc.:

$$AP = \alpha = \frac{nap}{(n-1)a - p}; \qquad A = \frac{a}{\alpha} \quad \text{et} \quad BP = b = AB - \alpha;$$

$$BQ = \beta = \frac{n^I bq}{(n^I - 1)b - q}; \qquad B = \frac{b}{\beta} \quad \text{et} \quad CQ = c = BC - \beta;$$

$$CR = \gamma = \frac{n^{II} cr}{(n^{II} - 1)c - r}; \qquad C = \frac{c}{\gamma} \quad \text{et} \quad DR = d = CD - \gamma$$

etc.

123. De là on déduit aussi aisément la grandeur de chaque image principale; en regardant l'objet comme un cercle posé perpendiculairement sur l'axe dont le rayon $O\omega = z$; les demi-diamètres des images principales seront déterminés en sorte:

$$P\pi = z^I = \frac{z}{nA}; \qquad Q\xi = z^{II} = \frac{z}{nn^I AB}; \qquad R\varrho = z^{III} = \frac{z}{nn^I n^{II} ABC} \text{ etc.}$$

où il faut remarquer, que la première est représentée renversée, la seconde debout, la troisième renversée, la quatrième debout et ainsi de suite.

124. Considérant la route du rayon $Oa$ (Fig. 249.), qui venant du centre de l'objet $O$ passe ar les bords de la première surface $a$, en supposant le demi-diamètre de l'ouverture de cette urface $Aa = x$, on trouvera les éléments suivants:

$$Bb = x^I = \frac{Abx}{a}; \quad Cc = x^{II} = \frac{ABcx}{a}; \quad Dd = x^{III} = \frac{ABCdx}{a} \quad \text{etc.}$$

$$Apa = \omega = \frac{Ax}{a}; \quad Bqb = \omega^I = \frac{ABx}{a}; \quad Crc = \omega^{II} = \frac{ABCx}{a} \quad \text{etc.}$$

t il faut bien que les demi-diamètres d'ouverture des surfaces suivantes surpassent les espaces iarqués ici, $Bb$, $Cc$, $Dd$ etc.

125. Or la route du rayon $\omega A$ (Fig. 250.), qui venant de l'extrémité de l'objet $\omega$ passe par : milieu $A$ de la première surface, donne d'abord les points de vue du champ $F$, $G$, $H$ etc. le remier $E$ tombant en $A$:

$$BF = \frac{n^I q \,.\, AB}{(n^I - 1) \,.\, AB - q}; \quad CF = BC - BF;$$

$$CG = \frac{n^{II} r \,.\, BC}{(n^{II} - 1) \,.\, BC - r}; \quad DG = CD - CG;$$

$$DH = \frac{n^{III} s \,.\, CD}{(n^{III} - 1) \,.\, CD - s}; \quad EH = DE - DH$$

etc.

es intervalles doivent être bien remarqués, quoique je ne les aie point désignés par des lettres articulières.

126. Cette même route découvre les angles marqués $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc. Car posant l'angle $A\omega = \varphi$, qui exprime le demi-diamètre du champ apparent, on a d'abord $BA\beta = \psi = \frac{\varphi}{n}$, et ısuite:

$$BF\beta = \psi^I = \frac{AB \,.\, \psi}{BF}; \quad CG\gamma = \psi^{II} = \frac{FC \,.\, \psi^I}{CG}; \quad DH\delta = \psi^{III} = \frac{GD \,.\, \psi^{II}}{DH} \quad \text{etc.}$$

où l'on voit que tous ces angles sont proportionels au demi-diamètre de l'ouverture $OA\omega = \varphi$, partant je les désignerai en sorte:

$$BA\beta = \psi = \lambda\varphi; \quad BF\beta = \psi^I = \lambda^I\varphi; \quad CG\gamma = \psi^{II} = \lambda^{II}\varphi; \quad DH\delta = \psi^{III} = \lambda^{III}\varphi \quad \text{etc.}$$

127. Ensuite ayant posé les espaces $B\beta = \pi^I q$, $C\gamma = \pi^{II} r$, $D\delta = \pi^{III} s$ etc. ces coéfficients , $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. qui sont toujours des fractions plus petites que $\frac{1}{4}$ ou même $\frac{1}{5}$, dépendent en sorte s angles $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc. et partant aussi du champ apparent, comme les formules suivantes nt voir:

$$(n^I - 1)\,\pi^I = (\lambda + \lambda^I n^I)\varphi; \quad (n^{II} - 1)\,\pi^{II} = (\lambda^I + \lambda^{II} n^{II})\varphi; \quad (n^{III} - 1)\,\pi^{III} = (\lambda^{II} + \lambda^{III} n^{III})\varphi \quad \text{etc.}$$

128. Réciproquement donc ces mêmes formules serviront à déterminer le champ apparent, qeu

l'instrument proposé est capable de découvrir; on n'a pour cet effet qu'à mesurer les ouvertures de chaque surface réfringente à l'exception de la première; je désignerai donc les demi-diamètres de ces ouvertures par les lettres $u'$, $u''$, $u'''$, $u^{IV}$ etc. et l'on aura:

$$\pi' q = u' - x'; \quad \pi'' r = u'' - x''; \quad \pi''' s = u''' - x''' \quad \text{etc.}$$

d'où l'on connaîtra les fractions $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$ etc.

*Champ apparent.*

129. Ayant tiré de là les valeurs des ces fractions, on aura pour le demi-diamètre du champ apparent $\varphi$ les déterminations suivantes:

$$\varphi = \frac{(n' - 1)\pi'}{\lambda + \lambda' n'}; \quad \varphi = \frac{(n'' - 1)\pi''}{\lambda' + \lambda'' n''}; \quad \varphi = \frac{(n''' - 1)\pi'''}{\lambda'' + \lambda''' n'''} \quad \text{etc.}$$

dont la plus petite donne le vrai champ apparent; et l'on comprend de là, que les surfaces qui montrent un plus grand champ sont trop ouvertes, et qu'on en peut rétrécir l'ouverture sans aucune diminution du champ.

130. Ce n'est que de cette plus petite étendue du champ, qu'il faut prendre le demi-diamètre $\varphi$, pour en déterminer les fractions $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$ etc. par les formules du § 127; puisque dans les équations trouvées ci-dessus, j'ai supposé partout, que ces fractions sont réglées sur le véritable champ apparent.

*Grossissement.*

131. Voilà donc déjà expédié un article très important sur l'instrument proposé, qui nous conduit d'abord à un autre également intéressant, qui est celui du grossissement, que le dernier des angles $\psi$, $\psi'$, $\psi''$ etc. qui soit $\Psi$ nous donne à connaître. Car puisque l'oeil doit être placé dans le point de vue du champ où tombe cet angle, on verra le demi-diamètre de l'objet $O\omega$ sous cet angle $\Psi$, pendant qu'à la vue simple il paraîtrait à un oeil placé en $A$ sous l'angle $OA\omega = \varphi$, de sorte que le rapport entre ces deux angles $\Psi$ et $\varphi$ nous fournit l'estime du grossissement.

132. Mais dans les microscopes la distance $AO$ est trop petite, pour qu'un oeil placé en $A$ le puisse voir, et partant on choisit une certaine distance, qu'on suppose ordinairement de 8 pouces, à laquelle le même objet étant vu, est comparé avec l'angle $\Psi$. Pour cet effet je prends en général une distance $= k$, pour y rapporter le grossissement, en disant que l'instrument grossit autant de fois, que l'angle $\Psi$ surpasse celui, sous lequel le même objet serait vu à la distance $= k$.

*Grossissement rapporté à la distance k.*

133. Or l'objet paraissant à la distance $OA = a$, sous l'angle $\varphi$ il paraîtrait à la distance $k$ sous l'angle $= \frac{a\varphi}{k}$; et partant par l'instrument il sera vu grossi autant de fois, que cette fraction $\frac{k\Psi}{a\varphi}$ contient d'unités; ou bien le grossissement sera estimé égal à cette fraction. Alors pour les microscopes on mettra selon la coutume $k = 8$ pouces, or pour les téléscopes $k = a$.

134. On jugera aussi aisément, si l'objet sera vu renversé ou debout, en examinant si l'angle $\Psi$ tombe au dessous de l'axe ou au dessus. On n'a qu'à considérer les formules données au § 86 pour chaque nombre de surfaces, et qu'à les substituer à la place de l'angle $\Psi$.

| Nombre des surfaces. | Grossissement. |
|---|---|
| I. | $\frac{k}{a\varphi} \cdot \frac{\varphi}{n}$ debout |
| II. | $\frac{k}{a\varphi} \left( \frac{(n^I - 1)\pi^I}{n^I} - \frac{\varphi}{nn^I} \right)$ renversé |
| III. | $\frac{k}{a\varphi} \left( \frac{(n^{II} - 1)\pi^{II}}{n^{II}} - \frac{(n^I - 1)\pi^I}{n^I n^{II}} + \frac{\varphi}{nn^I n^{II}} \right)$ debout |
| IV. | $\frac{k}{a\varphi} \left( \frac{(n^{III} - 1)\pi^{III}}{n^{III}} - \frac{(n^{II} - 1)\pi^{II}}{n^{II} n^{III}} + \frac{(n^I - 1)\pi^I}{n^I n^{II} n^{III}} - \frac{\varphi}{nn^I n^{II} n^{III}} \right)$ renversé |
| | etc. |

### *Explication du nombre m pour marquer le grossissement.*

135. Prenant donc le nombre $m$ pour marquer le grossissement lorsque l'objet est vu debout, de sorte que lorsqu'il paraît renversé, il faut prendre le nombre $m$ négativement; cela posé on aura pour un nombre quelconque de surfaces, cette formule:

$$\frac{ma\varphi}{k} \cdot nn^I n^{II} n^{III} \text{ etc.} = \varphi - n(n^I - 1)\pi^I + nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} + \text{etc.}$$

où il faut remarquer que la raison $nn^I n^{II} n^{III}$ etc. : 1 exprime la réfraction, si les rayons de l'objet passaient immédiatement dans le milieu où se trouve l'oeil.

136. On peut encore d'une autre manière déterminer le grossissement, en considérant le demi-diamètre de la dernière image, qui devient l'objet immédiat de la vision; or ce dernier demi-diamètre, en posant $nn^I n^{II} n^{III}$ etc. $= N$, de sorte que $N : 1$ exprime la raison de réfraction des rayons moyens de l'objet, s'ils passaient immédiatement dans le milieu, où se trouve l'oeil, est trouvé:

$$= \frac{z}{N \cdot ABCD \text{ etc.}} \quad (123.)$$

### *Autre formule pour le grossissement.*

137. Supposant maintenant que l'oeil soit placé derrière cette dernière image à sa juste distance $= h$, et il le verra sous l'angle $= \frac{z}{Nh \cdot ABCD \text{ etc.}}$, pendant que le demi-diamètre de l'objet $O\omega = z$ serait vu à la distance $= k$ sous l'angle $= \frac{z}{k}$; d'où le grossissement sera $m = \pm \frac{k}{Nh \cdot ABCD \text{ etc.}}$; où il faut remarquer que le signe $+$ a lieu, si le nombre des surfaces est impair et le signe $-$ s'il est pair.

138. La comparaison de ces deux expressions trouvées pour le grossissement, en posant $\Psi$ pour le dernier des angles, nous fournit d'abord à cause de $\psi = \frac{\varphi}{n}$ cette équation:

*

$$h = \frac{-a\varphi}{N\Upsilon . ABCD \text{ etc.}} \quad \text{ou} \quad ABCD \text{ etc.} = \frac{-a\varphi}{N\Upsilon h},$$

qui est la même que la situation de l'oeil nous a déjà donnée ci-dessus (118.).

139. Ou bien puisqu'il faut placer l'oeil dans le dernier des points de vue du champ $E$, $F$, $G$, $H$ etc. déterminés dans le § 125, la formule $h = \frac{-a\varphi}{N\Upsilon . ABCD \text{ etc.}}$ nous donne à connaître à quelle espèce d'yeux l'instrument proposé est ajusté. Cependant on sait que changeant un peu la position de la dernière surface réfringente, il est aisé d'ajuster le même instrument à toutes sortes d'yeux.

140. Après le champ apparent, le grossissement et le lieu de l'oeil, il est très essentiel de définir le degré de clarté, dont l'instrument proposé présentera les objets. Cette clarté dépend de la force du cône lumineux, qui est transmis dans l'oeil de chaque point de l'objet, c'est donc du dernier des angles $\omega$, $\omega'$, $\omega''$ etc. déterminés dans le § 124, qu'il faut estimer le degré de clarté.

*Degré de clarté.*

141. Or le dernier de ces angles étant $= \frac{x}{a} \cdot ABCD$ etc. qui détermine le cône lumineux, qui est renvoyé de chaque point de la dernière image dans l'oeil, qu'on suppose en être éloigné à sa juste distance $= h$, le demi-diamètre de la base de ce cône à l'entrée dans l'oeil sera $= \frac{hx}{a} \cdot ABCD$ etc. qui nous peut servir de mesure de la clarté, dont l'objet sera vu.

142. Sur ce demi-diamètre j'observe d'abord, que s'il était égal ou plus grand que le demi-diamètre de la prunelle, l'oeil jouirait de la plus grande clarté, relativement à la propre clarté de l'objet et à l'affaiblissement des rayons, qu'ils souffrent nécessairement en passant par plusieurs surfaces réfringentes. Mais ordinairement ce demi-diamètre est beaucoup plus petit que celui de la prunelle, ce qui est la raison qu'on peut prendre l'expression $\frac{hx}{a} \cdot ABCD$ etc. pour la juste mesure du degré de clarté.

143. Il est remarquable que ce degré de clarté est très étroitement lié avec le grossissement $m$. Car ayant trouvé ci-dessus (138.), $ABCD$ etc. $= \frac{-a\varphi}{N\Upsilon h}$, le degré de clarté devient d'abord $= \frac{x\varphi}{N\Upsilon}$, le signe — ne changeant rien dans l'intensité. Or nous avons vu que $\frac{k\Upsilon}{a\varphi}$ donne le grossissement $m$, d'où ayant $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{k}{ma}$, le degré de clarté sera $= \frac{kx}{Nma}$, qui est par conséquent proportionel a l'ouverture de la première surface $aAa$, divisée par le grossissement.

144. On estime communement le demi-diamètre de la prunelle à $\frac{1}{12}$ pouce, donc si la quantité $\frac{kx}{Nma}$ se trouvait égale à $\frac{1}{12}$ pouce ou encore plus grande, la clarté serait quasi complète et ne saurait être augmentée au de là. Mais on a remarqué que pourvu que cette quantité $\frac{kx}{Nma}$ ne soit plus petite que $\frac{1}{50}$ pouce, la clarté est encore suffisante pour les objets terrestres dans les beaux jours; d'où l'on jugera aisément des objets plus ou moins brillants d'eux mêmes.

145. Ensuite il est encore très essentiel de connaître le degré de distinction, dont les objets ɜront vus par l'instrument proposé. Or nous avons vu, qu'il y a deux causes, qui troublent la ernière image et en doivent rendre la vision confuse; l'une venant de l'ouverture des surfaces ɜfringentes, et l'autre de la diverse réfrangibilité des rayons; il convient donc d'examiner l'une et autre séparément.

*Confusion causée par l'ouverture des surfaces.*

146. Pour la première espèce de confusion il faut considérer la diffusion de la dernière image, ı bien le dernier assemblage d'images, et voir quel effet en doit résulter dans la vision. Soit onc $Vvv$ (Fig. 252.) le dernier assemblage d'images, que l'oeil placé en $\Omega$ à sa juste distance $\Omega = h$ regarde; dans cet assemblage il faut avoir égard: 1° à l'image principale $Vv$, 2° à l'espace diffusion $Vv$ exprimé par la dernière des lettres $y$, $y^{I}$, $y^{II}$ etc. que je nommerai $= Y$, et 3° à nclinaison des rayons jettés au point $v$, laquelle sera exprimée par la dernière des lettres $\omega$, $\omega^{I}$, $^{II}$ etc. que je poserai $\Omega$.

147. Prenant donc l'angle $\Omega v\omega = \Omega$, la ligne $v\omega$ représentera un des rayons du point $v$, ıi traversant l'image principale en $m$ de sorte que $Vm = Y\Omega$, produira dans l'oeil le même effet ıe s'il venait du point $m$; donc puisque toute la ligne $Vv$ répond au centre de l'objet, ce centre ra vu comme une tache ronde dont le demi-diamètre serait $= Vm$, qui paraîtra à l'oeil sous ngle $V\Omega m = \frac{Y\Omega}{h}$; qui nous fournit donc la juste mesure de la confusion causée par l'ouverture s surfaces réfringentes.

148. J'ai supposé ici que le rayon $v\omega$ entre encore dans l'oeil, car s'il en était exclu, la nfusion deviendrait plus petite. Mais il y a encore un autre moyen de rendre cette confusion ıs petite en plaçant l'oeil en sorte, que non pas l'image principale $Vv$, mais une autre $Uu$, en enant $vU = \frac{1}{4} vV$, en soit éloignée de sa juste distance $= h$; alors le demi-diamètre apparent des ches rondes, que l'oeil verra pour chaque point de l'objet, se réduira au quart $\frac{Y\Omega}{4h}$.

149. Or nous avons déjà vu que le dernier des angles $\omega$, $\omega^{I}$ etc. et partant $\Omega = \frac{x}{a} ABCD$ etc. par le § 67, il paraît que le dernier des espaces de diffusion $y$, $y^{I}$, $y^{II}$ etc. est exprimé en sorte:

$$Y = \frac{nxx(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.})}{2Naa \,.\, AABBCCDD \text{ etc.}};$$

ù la confusion cherchée sera:

$$= \frac{nx^3(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.})}{8Na^3h \,.\, ABCD \text{ etc.}},$$

i, en introduisant le grossissement $m$, à cause de

$$ABCD \text{ etc.} = \frac{-a\varphi}{NYh} = \frac{k}{Nmh}, \text{ devient } = \frac{mnx^3(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} \text{ etc.})}{8a^3k}.$$

150. Nous n'avons donc qu'à substituer pour les lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. leurs valeurs sup- ɜées, pour avoir la juste mesure de la confusion que nous cherchons:

$$\frac{mx^3}{8a^3k}\left\{\begin{array}{l}\frac{na(1+A)^2(n+A)}{(n-1)^2}+\frac{nn^IA^4b(1+B)^2(n^I+B)}{(n^I-1)^2}+\\ \frac{nn^In^{II}A^4B^4c(1+C)^2(n^{II}+C)}{(n^{II}-1)^2}+\frac{nn^In^{II}n^{III}A^4B^4C^4d(1+D)^2(n^{III}+D)}{(n^{III}-1)^2}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

où il est bon de remarquer, que pourvu que cet angle ne surpasse point 2 secondes, la confusio n'est presque point sensible.

*Confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons.*

151. Pour l'autre confusion causée par la diverse réfrangibilité des rayons, on examine d'abord, si l'objet paraîtra environné d'une bordure colorée, ou non. Pour cet effet on n'a qu considérer cette formule tirée du § 111:

$$a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)\,dn^I + nn^IABc(\psi^{II} - \pi^{II})\,dn^{II} + nn^In^{II}ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})\,dn^{III} \text{ etc.}$$

laquelle si elle s'évanouit, l'objet sera vu sans une telle bordure, mais plus cette formule sera grand plus aussi la bordure sera considérable.

152. Mais quand même cette condition aurait lieu, la vision de l'objet ne serait pas po cela tout à fait distincte, la diffusion de la dernière image produira dans l'oeil une confusion sen blable à celle de l'espèce précédente. On n'a donc qu'à considérer le dernier espace de diffusio exprimé par le différentiel de la dernière des lettres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. Soit $\zeta$ cette dernière lettre on aura par le § 97, en posant toujours $nn^In^{II}n^{III}$ etc. $= N$:

$$Nd\zeta\,.\,A^2B^2C^2D^2 \text{ etc.} = -\frac{adn(1+A)}{n-1} - \frac{nA^2bdn^I(1+B)}{n^I-1} - \frac{nn^IA^2B^2cdn^{II}(1+C)}{n^{II}-1} - \text{etc.}$$

153. Ce différentiel $d\zeta$ nous représentera donc l'espace $Vv$ (Fig. 252.) qui a été nommé aup ravant $Y$, mais ici chaque point envoie vers l'oeil un cône entier de rayons, dont le demi-angle sommet est $= \Omega$. A cause de cette circonstance la confusion dans la vision deviendra la pl petite en plaçant l'image $Uu$ sur le milieu de l'espace $Vv$ et elle sera $= \frac{\Omega d\zeta}{2h}$; cet angle éta encore le demi-diamètre apparent des taches rondes, sous la forme desquelles tous les points l'objet seront vus.

154. Or nous avons vu que $\Omega = \frac{x}{a}\cdot ABCD$ etc. et que $ABCD$ etc. $= \frac{k}{Nmh}$;

$$\text{donc } N\Omega d\zeta\,.\,ABCD \text{ etc.} = \frac{x}{a}\left(-\frac{adn(1+A)}{n-1} - \text{etc.}\right) = \frac{k\Omega d\zeta}{mh}.$$

Par conséquent nous aurons pour la juste mesure de cette confusion:

$$\frac{\Omega d\zeta}{2h} = \frac{mx}{2ak}\left(\frac{adn(1+A)}{n-1} + \frac{nA^2bdn^I(1+B)}{n^I-1} + \frac{nn^IA^2B^2cdn^{II}(1+C)}{n^{II}-1} + \text{etc.}\right)$$

où j'ai changé les signes $-$ en $+$, puisque cela revient au même. Cette expression n'indique confusion sensible, qu'en tant qu'elle surpasse un angle de $2''$ ou bien la fraction $\frac{1}{100000}$.

## IIde PARTIE.

### Construction des instruments dioptriques, les qualités qu'ils doivent avoir, étant présentes.

#### Ière Qualité: *La nature de l'oeil.*

155. La première qualité, qu'on exige d'un instrument dioptrique, est sans doute qu'il conienne à une certaine espèce d'yeux à l'usage desquels il est destiné. Il faut donc faire en sorte ue l'oeil puisse voir la dernière image représentée par les surfaces réfringentes, à une certaine istance $= h$, qui convient le mieux à sa nature. On suppose ordinairement cette distance $h$ ifinie, puisqu'il est aisé ensuite d'ajuster le même instrument à d'autres yeux; mais je laisserai ici ette distance $h$ indéterminée.

#### IIde Qualité: *Le Grossissement.*

156. La seconde qualité regarde le grossissement, que je rapporte comme ci-dessus à une ertaine distance $k$, et posant le grossissement $= m$, il faut entendre, que l'angle optique sous quel on voit l'objet par l'instrument est $m$ fois plus grand que celui sous lequel on le verrait à vue simple à la distance $= k$. Le nombre $m$ étant positif marque, que l'objet est représenté bout, et s'il est négatif, il marque le renversement de la représentation.

157. Or le grossissement $m$ étant prescrit, on a d'abord le rapport entre l'angle $\varphi$ et le ernier des angles $\psi$, $\psi^{I}$, $\psi^{II}$ etc. que je pose $= \Psi$, ce rapport étant $\frac{k\Psi}{a\varphi} = \pm m$, où le signe $+$ lieu si le nombre des surfaces est pair, et — s'il est impair, d'où nous tirons cette condition our la construction de l'instrument $ABCD$ etc. $= \mp \frac{k}{Nmh}$; où le signe supérieur vaut pour les ombres pairs et l'inférieur pour les nombres impairs des surfaces réfringentes.

158. On se souviendra ici, que $N : 1$ marque la raison de réfraction, que les rayons moyens l'objet souffriraient, s'ils passaient immédiatement dans le milieu, où se trouve l'oeil, de sorte e si l'un et l'autre était dans le même milieu, on aurait $N = 1$. Cela remarqué, la condition du ossissement $m$ découvre d'abord la valeur du produit de toutes les lettres $A$, $B$, $C$, $D$ etc. d'où est convenable de déterminer la dernière, qui devrait être $= o$ s'il'on supposait $h = \infty$.

#### IIIème Qualité: *Le degré de clarté.*

159. La troisième qualité regarde le degré de clarté que je mesure par le demi-diamètre du ne lumineux, qui est transmis de chaque point de l'objet par les surfaces réfringentes dans l'oeil, son entrée dans l'oeil. Or nous avons vu, que ce diamètre est $= \frac{kx}{Nma}$, et que pour un degré ffisant de clarté, cette valeur ne devrait pas être au dessous de $\frac{1}{50}$ pouce; comme elle ne saurait mais surpasser $\frac{1}{12}$ pouce.

#### *Remarque sur la distance de l'objet.*

160. La lettre $a$ marque ici la distance de l'objet devant la première surface réfringente qu'on garde toujours comme connue. Car s'il s'agit de télescopes, cette distance $a$ est quasi infinie et

on lui suppose égale la distance $k$. Pour les microscopes la distance $a$ dépend bien de notr volonté, mais on voit que plus elle est grande plus la clarté en est diminuée; on la prendra don aussi petite, que les circonstances le permettent.

161. La condition de la clarté nous fournit donc la détermination de l'ouverture de la pre mière surface, dont le demi-diamètre est supposé $= x$; donc pour augmenter la clarté on n'aurai qu'à amplifier l'ouverture de la première surface, mais d'autres raisons en exigent le rétrécissement de sorte qu'il est souvent difficile de procurer à l'instrument un assez grand degré de clarté, san porter atteinte aux autres qualités, qu'on exige avec autant de droit d'un bon instrument.

162. Surtout dans les microscopes qui doivent grossir beaucoup, on est obligé de renonce à un juste degré de clarté, mais on est aussi en état de remédier à ce défaut, en éclairant l'obje même avec une forte lumière. Dans ces cas donc on se contente du degré de clarté, que la for mule $\frac{kx}{Nma}$ donne, en regardant la quantité $x$ comme déjà donnée par les autres circonstances.

IV$^{\text{ème}}$ Qualité: *Le Champ apparent.*

163. La quatrième qualité des instruments dioptriques consiste dans le champ apparent, doi je pose le demi-diamètre $= \varphi$; qui par le § 135 se détermine par cette formule:

$$\left(\frac{Nma}{k} - 1\right)\varphi = -n(n^{I} - 1)\pi^{I} + nn^{I}(n^{II} - 1)\pi^{II} - nn^{I}n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} + \text{etc.}$$

où les lettres $\pi^{I}$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. marquent, comme nous avons vu, des fractions plus petites que ou même $\frac{1}{5}$, tant positives que négatives, et les nombres $n$, $n^{I}$, $n^{II}$ etc. sont tantôt plus granc tantôt plus petits que l'unité.

164. Les nombres $n$, $n^{I}$. $n^{II}$ etc. étant donnés par la nature des différentes matières transp rentes qu'on veut employer, la détermination du champ dépend principalement des fractio $\pi^{I}$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. et pour rendre le champ aussi grand qu'il est possible, on n'a qu'à donner à c lettres $\pi^{I}$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. des valeurs ou positives ou négatives, de sorte que tous les termes de no expression deviennent ou positifs pour la représentation erecte, ou négatifs pour la renversée.

165. De là il est clair que plus le nombre des surfaces réfringentes est grand, plus on e le maître d'augmenter le champ apparent, qu'on ne saurait pas pourtant porter au delà de certai bornes; car dès que l'angle $m\varphi$ surpasserait 45°, l'oeil ne serait plus capable de l'embrasser, ou qu'alors il ne serait plus permis de prendre les angles mêmes $\psi$, $\psi^{I}$, $\psi^{II}$ etc. pour leur tangent Mais les autres circonstances, aux quelles il faut avoir égard, mettent ordinairement des bor beaucoup plus étroites au champ apparent.

166. On voit donc en général, que le champ apparent doit être d'autant plus petit, plus grossissement $m$ est grand; cependant on lui peut donner une étendue très considérable en mu pliant le nombre des surfaces réfringentes. C'est aussi principalement dans cette vue, qu'on m en usage plusieurs réfractions, qui d'ailleurs seraient plus nuisibles qu'avantageuses, puisque quant de rayons y périssent.

*Autre méthode pour déterminer le champ apparent.*

167. Pour fixer le champ apparent, on peut aussi se servir de la formule $\frac{k\Psi}{a\varphi} = \pm m$, où $\Psi$ arque le dernier des angles $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc.; on n'aura donc qu'à prendre l'angle $\Psi$ aussi grand, ue les circonstances le permettent. Du moins on en verra si la valeur de cet angle $\Psi$ doit être rise positive ou négative, tant pour les valeurs positives que négatives, qu'on donnera au nombre $m$.

168. Ensuite on regardera la dernière surface réfringente, dont le rayon de courbure soit osé $= v$, et la dernière des fractions $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. qui lui répond $= \Pi$, de sorte que le demi-iamètre de l'ouverture de cette surface soit $= \Pi v$, pris au dessous de l'axe, si le nombre des urfaces est pair, et au dessus s'il est impair. Alors la formule $\frac{\Pi v}{\Psi}$ donnera la distance du dernier oint de vue du champ, derrière la dernière surface.

*Condition pour le lieu de l'oeil.*

169. Or nous avons remarqué, que cette distance doit toujours être positive, à moins qu'on e veuille rien perdre sur le champ, et partant puisque $\Psi = \pm \frac{ma\varphi}{k}$, la quantité $\pm \frac{\Pi k v}{ma\varphi}$ doit être ositive, d'où l'on jugera aisément si le rayon de courbure $v$ doit être positif ou négatif; en suppont qu'on donne à $\Pi$ une telle valeur, dont le champ apparent soit augmenté. Pour l'ambiguité i signe $\pm$ il faut se souvenir que le supérieur a lieu, quand le nombre des surfaces est pair, et nférieur, quand il est impair.

170. On pourra donc commencer par établir les angles $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc. en observant en même mps, que les fractions $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. qui en dépendent par les formules:

$$(n^I - 1)\,\pi^I = \psi + n^I\psi^I;\quad (n^{II} - 1)\,\pi^{II} = \psi^I + n^{II}\psi^{II} \text{ etc.}$$

e surpassent point la limite $\pm \frac{1}{5}$, et qu'elles concourent en même temps à augmenter le champ pparent autant qu'il est possible.

*Conditions à remplir pour rendre positifs les intervalles entre les surfaces réfringentes.*

171. Mais dans cette operation il faut principalement avoir égard, que les intervalles entre s surfaces réfringentes deviennent tous positifs. Pour cette effet on considérera les formules du 87 d'où ces intervalles résultent:

$$AB = \frac{\pi^I q}{\psi};\quad BC = \frac{\pi^I q + \pi^{II} r}{\psi^I};\quad CD = \frac{\pi^{II} r + \pi^{III} s}{\psi^{II}} \text{ etc.}$$

où l'on jugera si les rayons de courbure des surfaces doivent être pris positifs ou négatifs; ou si s surfaces doivent tourner leur convexité ou leur concavité vers l'objet.

172. Ayant fixé les valeurs des rayons de courbure $q$, $r$, $s$ etc. avec les angles $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc. i en tirera aisément les valeurs des lettres $B$, $C$, $D$, $E$ etc. par les formules du § 90, le rapport itre $p$ et $A$ étant renfermé dans la formule $p = \frac{(n-1)a}{1+nA}$; et de là on aura aussi les distances

$b$, $c$, $d$ etc., de même que les autres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. Où l'on ne perdra point de vue que le produit $ABCD$ etc. est déjà déterminé ci-dessus.

*Ouverture de chaque surface.*

173. Après ces déterminations on sera en état de fixer à chaque surface sa juste ouverture. Celle de la première, dont le demi-diamètre est $= x$, étant déjà déterminée par le degré de clarté, le demi-diamètre de l'ouverture de chacune des surfaces suivantes doit être la somme de deux quantités, savoir $B\beta + Bb$ pour la seconde, $C\gamma + Cc$ pour la troisième etc. (voyez les figures 249 et 250.).

174. L'une et l'autre de ces deux parties doit ici être prise positivement, quand même sa véritable valeur serait négative; de la nous aurons pour chaque surface:

| Surface. | Demi-diamètre de son ouverture. |
|---|---|
| $aAa$ | $x$, |
| $bBb$ | $x^I + \pi^I q = \frac{Abx}{a} + \frac{(n^I - 1)\pi^I b}{1 + n^I B}$, |
| $cCc$ | $x^{II} + \pi^{II} r = \frac{ABcx}{a} + \frac{(n^{II} - 1)\pi^{II} b}{1 + n^{II} C}$, |
| $dDd$ | $x^{III} + \pi^{III} s = \frac{ABCdx}{a} + \frac{(n^{III} - 1)\pi^{III} c}{1 + n^{III} D}$ |

etc.

175. On voit bien que quand on emploie plusieurs surfaces réfringentes, on peut remplir ces conditions en sorte que plusieurs des éléments, dont nos formules sont composées, restent encore indéterminés, ce qui est absolument nécessaire pour satisfaire encore à d'autres conditions, qui sont requises pour rendre plus parfaits les instruments dioptriques, en rendant la représentation aussi distincte qu'il est possible.

V^{ème} Qualité: *Rendre insensible la confusion causée par l'ouverture des surfaces.*

176. La cinquième qualité regarde la confusion causée par l'ouverture, qu'on est obligé de donner aux surfaces réfringentes. A cause de cette confusion chaque point de l'objet est représenté sous la forme d'une tache, dont le demi-diamètre apparent nous donne la plus juste mesure de cette confusion, qu'il s'agit donc de rendre si petit, que la vision n'en soit plus incommodée, ce qui arrive, quand on le reduit au dessous de 2 secondes. Mais le meilleur moyen serait sans doute de le faire évanouir tout à fait, quand les circonstances le permettent.

177. Or nous avons vu que ce demi-diamètre de la confusion est exprimé par la formule suivante:

$$\frac{mx^3}{8a^3k}\left\{\begin{array}{l}\frac{na(1+A)^2(n+A)}{(n-1)^2} + \frac{nn^I A^4 b(1+B)^2(n^I+B)}{(n^I-1)^2} + \\ \frac{nn^I A^4 B^4 c(1+C)^2(n^{II}+C)}{(n^{II}-1)^2} + \frac{nn^I n^{II} A^4 B^4 C^4 d(1+D)^2(n^{III}+D)}{(n^{III}-1)^2} + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

dont il faut donc réduire la valeur au-dessous de $\frac{1}{100000}$, à moins qu'il ne soit pas possible de le faire évanouir entièrement.

178. De là on voit que cette confusion est proportionelle d'abord au grossissement, et ensuite au cube du demi-diamètre de l'ouverture de la première surface; or à ces deux choses on ne saurait toucher pour les diminuer, puisque l'une et l'autre est déjà déterminée. Tout revient donc à l'autre membre de notre expression qu'il faut ou faire évanouir, ou rendre assez petit.

179. Or pour réduire cette expression à zero, il est d'abord clair que la chose est impossible tant que tous les termes sont affectés des mêmes signes. Il faudrait faire en sorte que quelques-uns de ces termes deviennent négatifs, pendant que les autres seraient positifs, mais comme chaque terme a des facteurs qui sont nécessairement positifs, il sera bon d'en séparer ceux qui peuvent devenir négatifs, en sorte:

$$\frac{n(1+A)^2}{(n-1)^2}\cdot a(n+A)+\frac{nn^IA^4(1+B)^2}{(n^I-1)^2}\cdot b(n^I+B)$$
$$+\frac{nn^In^{II}A^4B^4(1+C)^2}{(n^{II}-1)^2}\cdot c(n^{II}+C)$$
$$+\frac{nn^In^{II}n^{III}A^4B^4C^4(1+D)^2}{(n^{III}-1)^2}\cdot d(n^{III}+D)$$
etc.

180. Toute l'adresse consistera donc en ce qu'on rende un ou quelques uns des facteurs $a(n+A)$, $b(n^I+B)$, $c(n^{II}+C)$ etc. négatifs, pendant que les autres seraient positifs, et ensuite qu'on fasse les termes négatifs précisément égaux aux affirmatifs; ce qui est toujours possible d'exécuter, quand on emploie un nombre suffisant de surfaces réfringentes, où il est bon de remarquer, que dés qu'on en admet plus que deux, la chose devient possible.

181. Mais quand le nombre des surfaces est trop petit, ou que d'autres circonstances s'opposent à l'anéantissement entier de notre expression, il y a toujours encore moyen de la rendre aussi petite qu'on voudra. Car en mettant pour $A$ sa valeur $\frac{a}{\alpha}$, on voit aisément, qu'en augmentant la distance $\alpha$, les termes après le premier peuvent être diminués a volonté, et c'est la raison, pourquoi les instruments dioptriques deviennent souvent trop longs et partant incommodes.

182. Pour les télescopes la chose est évidente; car puisqu'on a alors $a=\infty$, et qu'on prend $k=a$, en posant $A=\frac{a}{\alpha}$, notre expression se change en celle-ci:

$$\frac{mx^3}{8a^3}\left\{\frac{n}{(n-1)^2}+\frac{nn^Ib(1+B)^2(n^I+B)}{\alpha(n^I-1)^2}+\frac{nn^In^{II}B^4c(1+C)^2(n^{II}+C)}{\alpha(n^{II}-1)^2}+\frac{nn^In^{II}n^{III}B^4C^4d(1+D)^2(n^{III}+D)}{\alpha(n^{III}-1)^2}+\text{etc.}\right\}$$

où l'augmentation de la distance $\alpha$ sert ouvertement à diminuer la confusion, qu'on peut même par ce moyen rendre aussi petite qu'on voudra.

183. Pour les microscopes, où $a$ est ordinairement une quantité très petite, et $k=8$ pouces, j'ai déjà remarqué, qu'on est ordinairement obligé de se contenter d'un très petit degré de clarté,

*

ce qui contribue beaucoup à diminuer cette confusion puisque la quantité $x$ est d'autant plus petite. Cependant en prenant $A$ en sorte que le premier terme $\frac{na(1+A)^2(n+A)}{(n-1)^2}$ s'évanouisse presque, il y aura moyen de diminuer la confusion, sans porter atteinte au degré de clarté.

VI$^{\text{ème}}$ Qualité: *Délivrer les objets de la bordure colorée.*

**184.** La sixième qualité exige, que les objets paraissent bien terminés sans aucune bordure colorée, qui est communément causée par la différente réfrangibilité des rayons. Or nous avons vu que pour arriver à ce but on n'a qu'à satisfaire à cette équation:

$$o = a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II})dn^{II} + nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} \text{ etc.}$$

ou bien à celle-ci du § 112 divisée par $\frac{dn}{n}$:

$$o = 1 + \frac{ndn^I}{n^I dn} \cdot \frac{(1+n^I B)(\psi^I - \pi^I)}{(1+n^I B)\psi^I - (n^I - 1)B\pi^I} + \frac{ndn^{II}}{n^{II}dn} \cdot \frac{(1+n^{II}C)(\psi^{II} - \pi^{II})}{(1+n^{II}C)\psi^{II} - (n^{II}-1)C\pi^{II}} \text{ etc.}$$

où les différentiels $dn$, $dn^I$, $dn^{II}$ etc. dépendent de la nature des milieux réfringents.

**185.** Sur cette formule j'observe qu'il est aussi possible de la faire évanouir, dés qu'on admet plus que deux surfaces réfringentes; et par ce moyen on détruit déjà pour la plupart les facheux effets de la diverse réfrangibilité des rayons; car puisque l'oeil est situé en sorte, que toutes les images différemment colorées lui paraissent se couvrir parfaitement les unes les autres, on n'aura donc à craindre d'autres inconvients, que ceux qui viennent de la distance entre ces différentes images.

VII$^{\text{ème}}$ Qualité: *Délivrer de toute confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons.*

**186.** La septième qualité enfin aboutit à faire entièrement évanouir toute confusion, qui peut naître de la différente réfrangibilité des rayons, en tant que les images qui en sont formées se trouvent dispersées par un certain espace. De là vient aussi que chaque point de l'objet paraît à l'oeil comme une tache ronde, dont le demi-diamètre transparent a été trouvée au § 154:

$$\frac{mx}{2ak}\left(\frac{adn(1+A)}{n-1} + \frac{nA^2bdn^I(1+B)}{n^I-1} + \frac{nn^I A^2B^2cdn^{II}(1+C)}{n^{II}-1} + \text{etc.}\right).$$

**187.** Sur cette formule j'observe qu'il est fort difficile de la rendre égale à zéro, et même impossible, quand on n'emploie que deux milieux transparents comme de l'air et du verre. Mais en se servant de plusieurs milieux differents, on peut les arranger en sorte, que cette expression devienne $= o$, ce qui depend du rapport, que les différentiels $dn$, $dn^I$, $dn^{II}$ etc. tiennent aux nombres $n$, $n^I$, $n^{II}$ etc. en vertu de la nature de la réfraction; sur quoi il faut ou recourir à des expériences, ou consulter une Théorie bien fondée.

# XXIII.

## Sept chapitres d'un ouvrage de dioptrique *).

### Chapitre I.

### Recherches Générales sur la réfraction des rayons par des surfaces sphériques.

1. **Problème 1.** Si du point lumineux $e$ un rayon quelconque $eM$ (Fig. 253.) passe dans un autre milieu transparent par la surface sphérique $PAP$, la raison de réfraction étant donnée comme $n:1$, trouver la position du rayon rompu $Mf$.

**Solution.** Soit $a$ le centre de la surface sphérique, par lequel et le point lumineux $e$ qu'on tire l'axe $eAaf$, et le rayon $aM$; pour avoir la proportion suivante tirée de la raison de réfraction:

$$n : 1 = \sin eMa : \sin fMa = \frac{ea}{eM} : \frac{fa}{fM},$$

d'où l'on tire cette équation $n \cdot \frac{fa}{fM} = \frac{ea}{eM}$ pour en déterminer la position du rayon rompu $Mf$. Tirons du point $M$ à l'axe $ea$ la perpendiculaire $Mx$, et des points $e$ et $f$, pris comme centres, décrivons par $M$ les arcs de cercles $My$ et $Mz$ pour avoir $ey = eM$ et $fz = fM$; et notre équation prendra cette forme:

$$n \cdot \frac{fa}{fz} = \frac{ea}{ey} \quad \text{ou bien} \quad n \cdot \frac{ey}{ea} = \frac{fz}{fa}.$$

Or $ey = eA + Ay$ et $fz = fA - Az$ et partant:

$$n\left(\frac{eA}{ea} + \frac{Ay}{ea}\right) = \frac{fA}{fa} - \frac{Az}{fa} = 1 + \frac{Aa}{fa} - \frac{Az}{fa}.$$

Maintenant il faut considérer deux cas, l'un où l'arc $AM$ s'évanouit, et l'autre où il n'est que fort petit; car pour l'usage de la Dioptrique on n'a jamais besoin de plus grands arcs.

*) Manuscrit sans titre.

I. *Soit donc l'arc AM évanouissant:* et puisque les intervalles $Ay$ et $Az$ se réduisent à zéro, on a d'abord cette égalité $n \cdot \frac{eA}{ea} = \frac{fA}{fa}$,

qui étant renversée donne:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA} = \frac{fa}{fA} = 1 - \frac{Aa}{fA} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right),$$

d'où l'on tire:
$$\frac{1}{fA} = \frac{n-1}{n.Aa} - \frac{1}{n.eA}.$$

Ainsi en connaissant la distance $eA$ du point lumineux à la surface sphérique, et le demi-diamètre de celle-ci $Aa$, avec la raison de réfraction $n:1$, cette formule très simple détermine d'abord le point $f$, où les rayons rompus se réunissent avec l'axe.

II. *Soit l'arc AM très petit:* et les intervalles $Ax$, $xy$, $xz$ s'exprimeront assez exactement en sorte

$$Ax = \frac{Mx^2}{2Aa}, \quad xy = \frac{Mx^2}{2ey} \quad \text{et} \quad xz = \frac{Mx^2}{2fz},$$

où dans les dénominateurs au lieu de $ey$ et $fz$ il sera permis d'écrire $eA$ et $fA$. De là nous aurons

$$Ay = \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{eA}\right) \quad \text{et} \quad Az = \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{Aa} - \frac{1}{fA}\right).$$

Donnons maintenant à l'équation générale trouvée ci-dessus cette forme:

$$n \cdot \frac{eA}{ea}\left(1 + \frac{Ay}{eA}\right) = \frac{fA}{fa}\left(1 - \frac{Az}{fA}\right),$$

qui étant renversée, puisque les fractions $\frac{Ay}{eA}$ et $\frac{Az}{fA}$ sont extrêmement petites, devient:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA}\left(1 - \frac{Ay}{eA}\right) = \frac{fa}{fA}\left(1 + \frac{Az}{fA}\right),$$

ou bien:
$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right)\left(1 - \frac{Ay}{eA}\right) = \left(1 - \frac{Aa}{fA}\right)\left(1 + \frac{Az}{fA}\right)$$

et divisant par $1 + \frac{Az}{fA}$ ou multipliant par $1 - \frac{Az}{fA}$:

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right)\left(1 - \frac{Ay}{eA} - \frac{Az}{fA}\right) = 1 - \frac{Aa}{fA}$$

ou
$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA} \cdot \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{Aa.eA} + \frac{1}{eA^2} + \frac{1}{Aa.fA} - \frac{1}{fA^2}\right) = 1 - \frac{Aa}{fA},$$

et par conséquent:

$$\frac{1}{fA} = \frac{n-1}{n.Aa} - \frac{1}{n.eA} + \frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA.Aa} \cdot \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{eA} + \frac{1}{fA}\right)\left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{eA} - \frac{1}{fA}\right).$$

Puisque le membre affecté par $\frac{1}{2} Mx^2$ est extrêmement petit, au lieu de $\frac{1}{fA}$ il y est permis d'écrire sa valeur approchante $\frac{n-1}{n.Aa} - \frac{1}{n.eA}$, et alors la formule trouvée donne la vraie valeur de $\frac{1}{fA}$, en tant qu'elle dépend de l'obliquité du rayon incident $eM$ ou de l'espace $Mx$.

2. **Coroll. 1.** Pour le premier cas, où le rayon incident $eM$ se confond avec l'axe, nous aurons donc $fA = \frac{n.Aa.eA}{(n-1)eA - Aa}$ pour la distance du point $f$ derrière la surface sphérique, et cette expression donne aussi pour le second cas une valeur approchante de $fA$.

3. **Coroll. 2.** Pour la vraie valeur du second cas, en supposant $\frac{1}{fA} = P + Q$, où $P$ marque la première partie $\frac{n-1}{n.Aa} - \frac{1}{eA}$, et $Q$ la particule extrêmement petite, qu'il y faut ajouter, on aura $fA = \frac{1}{P} - \frac{Q}{PP} = \frac{1}{P} - Q.fA^2$, puisque dans le petit terme il est permis d'écrire $fA$ au lieu de $\frac{1}{P}$. De là nous aurons:

$$fA = \frac{n.Aa.eA}{(n-1)eA - Aa} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{ea.fA^2}{eA.Aa} \cdot Mx^2 \left(\frac{1}{eA} + \frac{1}{fA}\right)\left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{eA} - \frac{1}{fA}\right),$$

où dans le second membre on n'a qu'à écrire pour $fA$ sa valeur approchante $\frac{n.Aa.eA}{(n-1)eA - Aa}$.

4. **Coroll. 3.** Si les quantités sont telles, comme la figure les représente, le point $f$, où les rayons rompus se réunissent avec l'axe, approchera d'autant plus du point $A$, plus le rayon incident $eM$ s'écarte de l'axe; et cela dans la raison quarrée de l'espace $xM$. Où il faut toujours observer que cet espace $xM$ est extrêmement petit par raport aux lignes $Aa$, $eA$ et $fA$.

5. **Remarque.** Si l'on voulait pousser plus loin l'approximation, on parviendrait à des termes affectés par $Mx^4$; d'où l'erreur, à la quelle notre solution est assujettie, peut être estimée proportionelle au quarré-quarré de $Mx$, ou plutôt de $\frac{Mx}{Aa}$. Ainsi prenant $Mx = \frac{1}{4} Aa$, l'erreur est comme $\frac{1}{256}$, et $Mx = \frac{1}{5} Aa$ donne $\frac{1}{625}$, de sorte que dans ce dernier cas l'erreur se trouve plus que deux fois plus petite que dans l'autre $Mx = \frac{1}{4} Ma$. Quand on prend $Mx = \frac{1}{4} Aa$, l'arc $AM$ contient $14^0, 29'$, et la valeur $Mx = \frac{1}{5} Aa$ donne à l'arc $AM$, $11^0, 32'$; c'est de là qu'on juge l'ouverture, qu'une surface sphérique peut souffrir, et on fixe de certaines limites, au delà desquelles il n'est pas permis d'augmenter cette ouverture. En consultant l'expérience il semble qu'on ne dervait jamais donner à $Mx$ plus que la cinquième partie du rayon $Aa$. Mais la solution de notre problème nous conduit encore à d'autres réflexions, qu'il est important de bien développer, pour mieux réussir dans les recherches suivantes.

6. **I^ère Réflexion.** Quoique le point lumineux $e$ jette en tout sens des rayons on n'en considère ici que ceux, qui ne s'écartent pas beaucoup de l'axe $eA$, et on distingue ceux-ci en deux classes dont la première comprend ceux qui passent par le milieu $A$ de la surface sphérique $PAP$, qui se trouvent dans la direction de l'axe, ou ne s'en écartent qu'infiniment peu. L'autre classe

contient les rayons, qui s'en écartent davantage, et qui passent par les extrémités de la surface sphérique, en lui donnant une certaine ouverture dont le demi-diamètre est la ligne $Mx$. Ainsi ces rayons extrêmes sont disposés dans la surface conique formée par la révolution d'un rayon extrême $eM$ autour de l'axe $eA$.

7. **II^de Réflexion.** Comme les rayons, qui sortent du point $e$ diffèrent par rapport à la réfraction, la raison $n:1$ est employée ici constamment pour marquer la réfraction des rayons moyens, ou qui tiennent un milieu entre les rayons les plus et les moins réfrangibles. Cette réfraction moyenne $n:1$ se rapporte donc aux rayons verds, et puisque la réfraction des rayons rouges et violets n'en diffère que très peu il sera permis de représenter la réfraction des rayons rouges par la raison $n - dn:1$, et celle des violets par la raison $n + dn:1$. De là nous retirerons ce grand avantage que tout ce que nous aurons trouvé pour les rayons moyens, sera facilement appliqué aux rayons rouges et violets, par les règles de différentiation, en regardant $n$ comme une quantité variable. Ainsi toutes les recherches suivantes ne roulent que sur les rayons moyens, à moins qne nous n'en fassions exprès l'application aux rayons les plus et les moins réfrangibles.

8. **III^ème Réflexion.** Puisque les rayons les plus proches de l'axe en passant par la surface sphérique se réunissent avec l'axe dans un point $f$ dont la distance derrière la surface a été trouvée $fA = \frac{n \cdot Aa \cdot eA}{(n-1)eA - Aa}$; la réunion de ces rayons représentera en $f$ une image du point lumineux $e$, que je nommerai l'image principale. Ainsi *l'image principale* sera toujours formée par la concurrence des rayons moyens ou verds, qui se trouvent dans la direction de l'axe $eA$, ou qui ne s'en éloignent qu'infiniment peu.

9. **IV^ème Réflexion.** Pour les rayons extrêmes, qui passent par les extrémités de la surface sphérique ou les points $M$, qui tout autour de l'axe en sont éloignés de l'intervalle $Mx$ puisque leurs réunion tombe sur un autre point de l'axe $f$ déterminé dans la seconde partie de notre solution, je nommerai l'image qui y est formée, *l'image extrême*, pour la mieux distinguer de l'image principale. Et parceque l'intervalle entre ces deux images cause une confusion dans la représentation, je nommerai cet intervalle *l'espace de confusion.*

10. **V^ème Réflexion.** Quoique je n'aye considéré dans le problème qu'un seut point lumineux $e$, il ne sera pas difficile d'appliquer la solution à des objets quelconques en faisant le même raisonnement sur tous les points de l'objet. Pour cet effet on n'a qu'à envisager l'objet comme un cercle, et à déterminer les images, qui répondent tant à son centre, qu'à un point quelconque de sa circonférense, par ce moyen l'image entière aura aussi la figure d'un cercle, dont il s'agit d'assigner le demi-diamètre en sachant celui de l'objet. Je m'en vai donc déterminer tant l'image principale que l'image extrême d'un objet quelconque exposé à une surface sphérique réfringente.

11. **Problème 2.** Un objet $E\varepsilon$ (Fig. 254.) étant exposé à une surface sphérique réfringente $PAP$, dont le centre est en $a$, et la raison de réfraction $n:1$, déterminer l'image principale $F\zeta$.

**Solution.** Qu'on considère l'objet comme un cercle, par le centre duquel $E$ passe l'axe $Ef$

perpendiculairement au plan du cercle; et nommons: le demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = z$; et la distance de son centre $E$ à la surface $EA = a$. Soit ensuite le rayon ou demi-diamètre de la surface réfringente $Aa = f$; et puisque l'image principale est aussi un cercle, dont le rayon est $F\zeta$, posons: le demi-diamètre de l'image $F\zeta = z^I$ et sa distance à la surface $AF = \alpha$. Cela posé, puisque nous ne considérons que les rayons moyens dont la réfraction est $n:1$, et encore ceux qui tombent dans la direction de l'axe $EA$, la première partie de la solution du problème précédent fournit pour le lieu du centre $F$ de l'image cette équation:

$$\frac{1}{AF} = \frac{n-1}{n \cdot Aa} - \frac{1}{n \cdot EA} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{n-1}{nf} - \frac{1}{na},$$

d'où l'on tire la distance $AF = \alpha = \frac{naf}{(n-1)a - f}$.

Maintenant pour la grandeur de l'image $F\zeta$, on n'a qu'à appliquer le même raisonnement au point $\varepsilon$ de l'objet, et le regarder comme le point lumineux. On tirera donc par le centre de la surface sphérique $a$ la droite $\varepsilon a \alpha \zeta$ qui tiendra lieu de l'axe pour le point $\varepsilon$ et on aura cette équation:

$$\frac{1}{a\zeta} = \frac{n-1}{n \cdot aa} - \frac{1}{n \cdot \varepsilon a}.$$

Mais comme le demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = z$ est toujours très petit, en sorte que l'angle $Ea\varepsilon$ puisse être regardé comme presque évanouissant, cette circonstance nous fournit un moyen de déterminer plus commodement le demi-diamètre de l'image $F\zeta = z^I$. En effet la ressemblance des triangles $aE\varepsilon$ et $aF\zeta$ donne d'abord:

$$F\zeta = \frac{aF}{aE} z \quad \text{ou} \quad z^I = \frac{\alpha - f}{a + f} z.$$

**12. Coroll. 1.** L'équation trouvée pour le lieu de l'image principale étant réduite à cette orme:

$$\frac{n-1}{nf} = \frac{1}{na} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}\right),$$

détermine le rayon $f$ de la surface sphérique, afin que l'image principale tombe dans un lieu donné. On verra dans la suite, qu'il convient d'introduire dans le calcul plutôt la distance de l'image principale $AF = \alpha$, que le rayon de la surface sphérique $f$.

**13. Coroll. 2.** La même équation représentée en sorte:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a}\right),$$

donne dabord $\frac{\alpha - f}{\alpha f} = \frac{a + f}{naf}$, desorte que $\frac{\alpha - f}{a + f} = \frac{\alpha}{na}$, d'où nous tirons cette expression fort simple pour le demi-diamètre de l'image principale $z^I = \frac{\alpha}{na} z$. D'où l'on comprend que l'élimination du rayon $f$ est très propre à abréger le calcul.

14. **Remarque.** La supposition, dont je me suis servi ici, que le diamètre de l'objet est extrêmement petit, ne se trouve que trop autorisée dans tous les instruments dioptriques. On sait que par les lunettes qui grossissent beaucoup on ne découvre dans le ciel qu'un assez petit espace dont le demi-diamètre surpasse rarement un quart de degré. Ce n'est donc qu'à un si petit objet auquel répond un angle $Ea\varepsilon$ beaucoup plus petit qu'un degré, qu'il faut rapporter nos recherches, ce qui nous fournit les grands avantages dans le calcul, que d'abord l'espace $A\alpha$ sur la surface réfringente puisse être regardé comme très petit, même par rapport à l'ouverture $AP$, qu'on a coutume de donner à la surface réfringente. Ensuite on pourra aussi hardiment envisager l'image $F\zeta$ comme plane et perpendiculaire à l'axe $EF$, ce qui ne saurait avoir lieu, si l'angle $Ea\varepsilon$ était considérable, et que la distance $\varepsilon a$ différât beaucoup de $Ea$. Sur tout on ne se trompera guères, en ne distinguant point l'axe $\varepsilon\alpha$, qui répond à l'extrémité de l'objet, du véritable axe $EA$, ce qui nous dispensera de plusieurs recherches, qui seraient fort embarrassantes.

15. **Problème 3.** L'objet $E\varepsilon$ étant éloigné ou approché tant soit peu plus de la surface réfringente, déterminer le changement, qui en arrivera dans le lieu de l'image principale $F\zeta$.

**Solution.** Ayant nommé la distance de l'objet devant la surface réfringente $EA = a$, et la distance de l'image principale derrière la surface réfringente $AF = \alpha$, le rayon de cette surface étant $Aa = f$; il s'agit de déterminer la variation de $\alpha$, quand on augmente infiniment peu la distance $a$. Pour cet effet considérons l'équation $\frac{n-1}{nf} = \frac{1}{na} + \frac{1}{\alpha}$, et puisque le rayon $Aa = f$ demeure le même, la différentiation donne $\frac{-da}{naa} - \frac{d\alpha}{\alpha\alpha} = o$, et partant $d\alpha = \frac{-\alpha\alpha}{aa} \cdot \frac{da}{n}$. Donc si l'on éloigne l'objet $E\varepsilon$ infiniment peu au delà de $E$ par l'espace $= da$, l'image principale s'approchera de $F$ vers $A$ par l'espace $\frac{\alpha\alpha da}{naa}$.

16. **Coroll.** Donc si l'on mettait un autre objet devant la surface réfringente à la distance $= a + u$, l'intervalle $u$ étant extrêmement petit, son image principale tomberait derrière la surface réfringente à la distance $= \alpha - \frac{\alpha\alpha u}{naa}$.

17. **I**ère **Remarque.** J'ai supposé ci-dessus, que la surface réfringente $PAP$ tourne sa convexité vers l'objet, et la concavité vers l'image; et cette condition doit toujours être sous-entendue, quand le rayon $Aa = f$ a une valeur positive, et la valeur négative indiquera le contraire. Cette position aura donc lieu quand le nombre $n$ est plus grand que l'unité, ce qui arrive lorsque les rayons passent d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense, comme de l'air dans le verre ou l'eau. De la même manière, la quantité $\alpha$ étant positive, indiquera toujours que l'image tombe derrière la surface réfringente, tout comme la valeur positive de $a$ doit être rapportée devant la surface réfringente. Cette remarque est de la dernière importance pour se former une juste idée de la situation des objets et des images.

18. **II**de **Remarque.** Voilà encore une autre circonstance, qu'il ne faut pas passer sous silence; c'est que l'image $F\zeta$ se trouve dans une situation renversée, de sorte que le point $\varepsilon$ étant

pris au-dessus de l'axe, son image $\zeta$ tombe au-dessous, comme on voit par la figure; et partant, tant que $z'$ a une valeur positive, celle de $z$ étant toujours prise telle, il en faut conclure que l'image est renversée, ce qui arrive donc toutes les fois que $\frac{\alpha}{a}$ est positif; mais s'il est négatif c'est une marque certaine, que l'image est représentée debout.

19. **Problème 4.** Un objet $E\varepsilon$ (Fig. 255.) étant exposé devant une surface sphérique réfringente $PAP$ dont l'image principale est représentée en $F\zeta$, trouver le lieu de l'image extrême $f$ et sa grandeur.

**Solution.** Posons comme auparavant la raison de réfraction $= n:1$, le demi-diamètre de l'objet regardé comme un cercle $E\varepsilon = z$, sa distance devant la surface réfringente $EA = a$, le rayon de la surface réfringente $Aa = f$, la distance de l'image principale $AF = \alpha$, et le demi-diamètre de cette image $F\zeta = z'$. Pour ces éléments nous venons de trouver les deux équations suivantes:

$$\frac{n-1}{nf} = \frac{1}{na} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad z' = \frac{\alpha}{na}\, z.$$

Maintenant pour l'image extrême soit $MM$ l'ouverture de la surface réfringente, par laquelle les rayons sont transmis, et posons le demi-diamètre de cette ouverture $Mx = x$. Il s'agit donc de trouver le concours $f$ des rayons, qui venant du centre de l'objet $E$ passent par l'extrémité de l'ouverture $MM$; pour cet effet nous n'avons qu'à appliquer à ce cas la formule trouvée (3):

$$fA = \frac{n \,.\, Aa \,.\, EA}{(n-1)\, EA - Aa} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{Ea \,.\, fA^2}{EA \,.\, Aa}\, Mx^2 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{fA}\right)\left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{EA} - \frac{1}{fA}\right),$$

où je remarque que dans le dernier membre qui, étant très petit de soi même, il est permis d'écrire $FA = \alpha$ au lieu de $fA$, et partant nous aurons la distance:

$$Af = \frac{naf}{(n-1)\, a - f} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{\alpha\alpha\,(a+f)}{af}\, xx \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha}\right),$$

d'où l'on connait le lieu de l'image extrême $f\omega$. Pour sa grandeur il suffit de remarquer, que si l'on tire de l'extrémité de l'objet $\varepsilon$ par le centre de la surface réfringente $a$ une ligne droite, qui passe en même temps par l'extrémité de l'image principale $\zeta$; cette droite passera aussi par l'extrémité de l'image extrême $f\omega$. Donc je dis que la droite $a\zeta$ déterminera la grandeur de l'image extrême représentée en $f$.

20. **Coroll. 1.** L'intervalle $Ff$ étant ce que nous nommons l'espace de confusion, si nous posons cet espace $Ff = y$, à cause de $AF = \alpha = \frac{naf}{(n-1)\, a - f}$, nous aurons cette détermination:

$$y = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\alpha\alpha\,(a+f)}{af}\, xx \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha}\right),$$

d'où si nous éliminons le rayon $f$ à cause de

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{(n-1)\, a} + \frac{n}{(n-1)\, \alpha} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}\right),$$

*

d'où nous tirons:

$$\frac{\alpha+f}{\alpha f}=\frac{1}{f}+\frac{1}{\alpha}=\frac{n}{(n-1)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{f}+\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

nous obtiendrons cette équation

$$y=\frac{aa\alpha x}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

qui exprime l'espace de confusion $Ff=y$ par les deux distances $AE=a$ et $AF=\alpha$, avec l demi-diamètre de l'ouverture $Mx=x$.

21. **Coroll. 2.** Cet espace de confusion ne saurait donc s'évanouir qu'en trois cas: 1° S $\alpha=o$, auquel cas il devient aussi $a=o$ et l'objet avec l'image se réunissent dans la surface réfrin gente même $MAM$. 2° Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=o$ ou $\alpha=-a$, de sorte que l'image $F\zeta$ tombe encor sur l'objet même, et à cause de $f=\frac{(n-1)a\alpha}{na+\alpha}$, on aura $f=-a$, ou bien le centre de la surfac sphérique $a$ se trouvera en $E$. 3° Si $\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}=o$ ou $\alpha=\frac{-a}{n}$, et partant $f=\frac{-a}{n+1}$, dan ce cas donc l'image tombera devant la surface sphérique et celle-ci tournera sa concavité vers l'objet

22. **Remarque.** Le premier de ces trois cas paraît non seulement paradoxe mais auss contraire aux principes, sur lesquels notre solution est fondée, puisque nous avons supposé que l distance $AE$ soit toujours beaucoup plus grande que l'ouverture $MAM$. Mais dans ce cas on verr aisément, que l'ouverture n'entre aucunement en considération; car puisque chaque point de l'obje se trouve dans la surface même, tous les rayons y passent aussi par le même point, et partant l réfraction n'y saurait plus causer aucune confusion. Ainsi quoique le cas, où l'objet se trouv fort proche de la surface réfringente, paraîsse exclû de notre solution, nous entendons par là qu'elle y est aussi applicable, et partant plus générale qu'on n'avait pensé.

23. **Coroll. 3.** Pour la grandeur de l'image extrême $f\omega$, puisqu'elle est terminée par l droite $a\zeta$, à cause de

$$aF=\alpha-f=\frac{\alpha(a+\alpha)}{na+\alpha} \quad \text{et} \quad af=\frac{\alpha(a+\alpha)}{na+\alpha}-y,$$

nous aurons:

$$f\omega=F\zeta\left(1-\frac{y}{aF}\right)=\left(1-\frac{y(na+\alpha)}{\alpha(a+\alpha)}\right)\cdot z'.$$

Mais la seule ligne terminatrice $a\zeta$ nous fournit une idée plus claire de la grandeur $f\omega$.

24. **I<sup></sup>ère Réflexion.** Examinons plus soigneusement la nature de cette représentation, fait par les rayons de l'objet $E\varepsilon$, qui sont transmis par l'ouverture $MM$ de la surface réfringent Considérons donc premièrement le seul point $E$ ou le centre de l'objet, dont l'image principale es représentée en $F$ et l'extrême en $f$, éloignée de celle-là de l'espace de confusion $Ff=y$. Mainte nant le point $F$ n'étant formé que par les rayons infiniment proches de l'axe, il n'en sortira aus d'autres rayons que suivant la direction de l'axe $FB$; et partant cette image ne sera visible qu'au

yeux placés sur ce même axe. Or l'image extrême $f$ étant formée par les rayons $Mf$, $Mf$, qui y viennent de la circonference de l'ouverture $MM$, dont le demi-diamètre a été nommé $Mx = x$; il n'y aura aussi que ces rayons, qui sont répandus du point $f$, et partant dirigés selon les lignes $fm$, $fm$; de sorte qu'un oeil placé sur l'axe en $B$ n'en saurait être affecté, à moins que la pupille ne soit assez élargie pour recevoir ces rayons. Il sera de la dernière importance de bien remarquer cette divergence des rayons $fm$, $fm$, qu'on définira le plus commodement par leur inclinaison à l'axe ou l'angle $mfB = MfA$, dont la mesure peut être estimée $= \frac{x}{a}$.

25. **II^de Réflexion.** Développons de la même manière l'image tant principale $\zeta$ qu'extrême $\omega$, qui sont formées par les rayons du bord de l'objet $\varepsilon$. Et d'abord puisque la ligne $\varepsilon \alpha a \zeta$ tient lieu de l'axe par rapport au point $\varepsilon$, il est clair qu'il ne passe point d'autres rayons par le point $\zeta$, que suivant la direction $a\zeta$ prolongée; or pour les rayons qui passent par le point $\omega$, ils seront inclinés à cette même ligne $a\zeta$ d'un angle égal au précédent $MfA = \frac{x}{a}$, qui sera donc l'inclinaison commune pour toute l'image extrême, dont $f\omega$ n'est que le demi-diamètre. Ensuite on comprend aisément, que tout l'espace $Ff$ doit être rempli de telles images, qui répondent à toutes les valeurs $Mx$ moindres que $x$. Chaque valeur de $x$ donne une image particulière entre $F$ et $f$, à laquelle convient sa propre inclinaison. Pour mieux imprimer à l'esprit toutes ces idées je m'envais établir les définitions suivantes.

26. **Définitions.** *L'assemblage d'images* comprend toutes les images de quelque objet, formées par les rayons réfractés dans une surface sphérique, où il faut remarquer, que lorsque l'objet est un cercle, l'assemblage d'images aura la figure d'un cône tronqué, qui résulte par la révolution du trapèze $F\zeta\omega f$ autour de l'axe $Ff$. Cet assemblage est déterminé par les éléments suivants:

1° La base $F\zeta$ est l'image formée par les rayons, qui passent par le milieu $A$ de la surface réfringente $MM$; ou bien cette base est l'image principale, dont le demi-diamètre $F\zeta$ est désigné par la lettre $z$.

2° La longueur de ce cône tronqué $Ff$ est l'espace de confusion indiqué par la lettre $y$, et nous avons vû qu'il est proportionnel au quarré du demi-diamètre de l'ouverture $Mx = x$.

3° L'autre base $f\omega$ est l'image extrême formée par les rayons qui passent par les bords de l'ouverture $MM$.

4° Cette base est déterminée par la droite terminatrice $a\zeta$, dont le concours avec l'axe en $a$ présente le sommet du cône tronqué. L'intervalle $Fa$ ou la distance du sommet à l'image principale $F\zeta$ sera marquée par la lettre $v = \alpha - f = \frac{\alpha(\alpha + a)}{na + a}$.

5° Enfin pour l'image extrême $f\omega$ il faut remarquer l'inclinaison des rayons, que j'indiquerai par la lettre $\omega$, qui marque que les rayons du point $f$ sont inclinés de cet l'angle $\omega$ à l'axe $Ff$, et ceux du point $\omega$ du même angle $\omega$ à la directrice $a\omega$. Or nous avons trouvé $\omega = \frac{x}{a}$.

27. **Remarque.** Quand les rayons d'un tel assemblage d'images vont de nouveau passer par une autre surface sphérique réfringente, disposée toujours sur le même axe $EAF$, par rapport à cette nouvelle réfraction le dit assemblage d'images tient lieu d'objet, et alors il en naîtra un nouvel assemblage d'images, dont nous devons déterminer les éléments par les principes établis ci-dessus. Mais en tant que cet assemblage $Ff\omega\zeta$ n'est pas un véritable objet, il n'est pas nécessaire que la nouvelle surface réfringente se trouve derrière la base $F\zeta$; mais elle peut très bien être posée entre cet assemblage et la première surface réfringente $PAP$, puisque les rayons qui vont former cet assemblage y appartiennent aussi bien que ceux qui en passent au de là vers $B$. Cette différence entre un vrai objet et une image qui en tient lieu doit être bien observée, attendu qu'un vrai objet doit toujours se trouver devant la surface réfringente, pendant qu'une image, qui tient lieu de l'objet, se peut aussi bien trouver derrière que devant la surface réfringente.

28. **Problème 5.** Si au lieu d'un véritable objet il se trouve devant la surface sphérique réfringente $QBQ$ (Fig. 256.), un assemblage d'images $F\zeta f\omega$, déterminer l'assemblage d'images $G\eta g\omega'$ qui sera formé par les rayons réfractés.

**Solution.** Pour l'assemblage d'images proposé $F\zeta f\omega$, nommons l'espace de confusion $Ff = y$, le demi-diamètre de l'image principale $F\zeta = z'$ (pour suivre le problème précédent), et l'inclinaison des rayons au point $f = \omega$, soit de plus le sommet de cet assemblage en $v$ et posons $Fv = v$. Ensuite, pour la surface réfringente, soit la distance $BF = b$, le rayon de cette surface $Bb = g$, le demi-diamètre de son ouverture $Mx' = x'$ et la raison de réfraction $= n' : 1$. Enfin pour l'assemblage d'images cherché, soit la distance $BG = \beta$, le demi-diamètre de l'image principale $G\eta = z''$, l'espace de confusion $Gg = y'$, l'inclinaison des rayons au point $g = \omega'$, et supposant le sommet de cet assemblage en $v'$ soit la distance $Gv' = v'$.

Cela posé considérons premièrement l'image principale $G\eta$, formée par les rayons qui viennent de $F\zeta$ selon la direction de l'axe $FBG$, et en vertu du second problème nous aurons:

$$\frac{n'-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n'}{\beta} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{\beta}{n'b} z'.$$

En second lieu considérons dans l'objet l'image extrême $f\omega$, et puisqu'elle est plus éloignée de la surface réfringente, du petit espace $Ff = y$, si elle jettait des rayons dans la direction de l'axe, son image serait formée en deçà de $G$, savoir en $\varphi$, en sorte $G\varphi = \frac{\beta\beta y}{n'bb}$; mais les rayons divergents qui partent de $f\omega$ représenteront la véritable image en $g\omega'$, desorte que $\varphi g$ serait l'espace de confusion répondant à un objet $f\omega$. Par conséquent le problème précédent nous fournit pour ce cas en regardant la distance $Bf$ comme égale à $BF = b$:

$$\varphi g = \frac{\beta\beta x'x'}{2(n'-1)^2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{n'}{b} + \frac{1}{\beta}\right),$$

pourvu qu'on définisse justement l'ouverture $M'M'$, qui ne dépend plus de notre volonté, mais doit être prise telle, que les rayons divergents du point $f$, dont l'inclinaison à l'axe est $= \omega$, soit

transmis, d'où nous aurons $x^I = b\omega$, et partant pour l'espace entier de confusion $Gg$, nous aurons:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta y}{n^I bb} + \frac{\beta\beta x^I x^I}{2(n^I-1)^2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right),$$

et delà nous connaissons aussi l'inclinaison des rayons réfractés qui forment le point $g$, laquelle étant égale à l'angle $BGM^I$ et nommée $=\omega^I$, nous aurons, en négligeant le petit intervalle $Gg$:

$$\omega^I = \frac{x^I}{\beta} = \frac{b}{\beta}\omega.$$

Enfin le point $\omega^I$ étant formé par les rayons qui viennent du point $\omega$, et qui tout autour sont inclinés à $\omega\zeta$ de l'angle $\omega$, si la droite $\omega\zeta\beta$ était un rayon, il serait aussi réfracté dans le point $\omega^I$, et y présenterait l'axe ou la ligne terminatrice $v^I\omega^I\eta$. Donc puisque cette ligne $\omega\beta$ vient du point de l'axe $v$, la distance $Bv$ étant $= b + v$, après la réfraction elle couperait l'axe précisément au sommet cherché $v^I$, et partant à cause de $Bv^I = \beta - v^I$, nous aurons cette dernière détermination:

$$\frac{n^I-1}{g} = \frac{1}{b+v} + \frac{n^I}{\beta - v^I} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta} \quad \text{ou} \quad \frac{v}{b(b+v)} = \frac{n^I v^I}{\beta(\beta - v^I)}.$$

29. **Coroll. 1.** La solution de ce problème renferme quatre conditions, par lesquelles le rapport entre les deux assemblages d'images $F\zeta f\omega$ et $G\eta g\omega$ est déterminé, dont la première regarde les images principales $F\zeta = z^I$ et $G\eta = z^{II}$, et contient ces deux équations:

$$\frac{n^I-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta} \quad \text{et} \quad z^{II} = \frac{\beta}{n^I b} z^I.$$

30. **Coroll. 2.** La seconde condition regarde l'espace de confusion $Gg$, qui contient deux parties; l'une dépend de l'espace de confusion de l'objet $Ff = y$, et l'autre est causée par l'ouverture de la surface réfringente $M^I M^I$, dont le demi-diamètre est $M^I x^I = x^I$. Cette condition est exprimée en sorte:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta y}{n^I bb} + \frac{\beta\beta x^I x^I}{2(n^I-1)^2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right).$$

31. **Coroll. 3.** La troisième détermine le rapport entre l'inclinaison des rayons aux images extrêmes $f\omega$ et $g\omega^I$, par cette équation $b\omega = \beta\omega^I$, d'où l'on tire en même temps l'ouverture de la surface réfringente, ou son demi-diamètre $x^I = b\omega = \beta\omega^I$. Mettant donc $b\omega$ à la place de $x^I$, l'espace de confusion $Gg = y^I$ sera exprimée en sorte:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta y}{n^I bb} + \frac{(b+\beta)^2\omega\omega}{2(n^I-1)^2}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right).$$

32. **Coroll. 4.** La quatrième condition renferme le rapport entre les sommets $v$ et $v^I$ des deux assemblages d'images, en sorte qu'ayant posé les distances $Fv = v$ et $Gv^I = v^I$, on a trouvé:

$$\frac{v}{b(b+v)} = \frac{n^I v^I}{\beta(\beta - v^I)}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad v^I = \frac{\beta\beta v}{n^I bb + (n^I b + \beta)v}.$$

33. **I^ère Réflexion.** Pour se former une juste idée de chaque assemblage d'images produit

par la réfraction, il est bien nécessaire d'avoir égard à toutes les déterminations, que je viens de développer. Cependant je remarque que la détermination du sommet $v^I$ devient très incertaine à cause de l'obliquité de la ligne terminatrice $v\beta$ sur la surface réfringente $QBQ$; et cette irrégularité devient d'autant plus grande, plus le nombre des surfaces réfringentes est augmenté, de sorte qu'on ne saurait plus compter sur la justesse de la valeur $v^I$. Mais aussi notre dessein n'exige pas absolument cette détermination, et pour connaître la confusion causée par la réfraction, il suffira d'assigner pour chaque assemblage d'images, premièrement l'image principale $G\eta$, en déterminant son lieu et son demi-diamètre, ensuite l'espace de confusion $Gg$, ou seulement le centre de l'image extrême $g$, sans s'embarrasser de sa grandeur $g\omega^I$, dont la détermination pourrait devenir trop équivoque. Mais troisièmement il est très essentiel de déterminer toujours la divergence des rayons qui concourent dans le centre $g$ de l'image extrême, ou bien leur inclinaison à l'axe indiquée par l'angle $\omega^I$, puisque c'est de là, que nous jugerons dans la suite de la quantité de clarté, dont l'image est exprimée.

34. **II^de Réflexion.** En effet, puisque toutes nos recherches doivent être dirigées à délivrer de toute confusion les images représentées par plusieurs réfractions, pour en rendre distincte la vision, nos premiers soins doivent aboutir à faire évanouir l'espace de confusion de la dernière image, qui devient l'objet immediat de notre vue. Ainsi si l'assemblage $G\eta g$ était cette dernière et que nous eussions réussi à réduire à zéro l'espace $Gg$, nous aurions déjà bien rempli notre tâche et il serait inutile de s'embarrasser encore de la véritable grandeur de l'image extrême $g\omega^I$, qui ne saurait plus différer de la principale $G\eta$, quand l'espace $Gg = o$. A moins est on alors bien sûr que le milieu de l'objet sera représenté distinctement, et si les parties éloignées de l'axe sont encore confuses, c'est un défaut, auquel on ne saurait remédier; cette circonstance nous met dans la nécessité de ne contempler jamais qu'une petite partie de l'objet.

35. **Problème 6.** Plusieurs surfaces réfringentes sphériques $PAP$, $QBQ$, $RCR$ etc. (Fig. 257) étant disposées sur le même axe $ABCD$, devant lesquelles se trouve un objet quelconque $E\varepsilon$, déterminer tant les images principales $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$ etc. formées par chaque réfraction que les espaces de confusion $Ff$, $Gg$, $Hh$ etc., de même que les inclinaisons des rayons aux points $f$, $g$, $h$ etc.

**Solution.** Que toutes les surfaces réfringentes tournent leurs convexité vers l'objet $E\varepsilon$, posons premièrement les rayons de leur courbure:

$$\text{de } PAP = f, \text{ de } QBQ = g, \text{ de } RCR = h, \text{ de } SDS = i \text{ etc.}$$

ensuite les demi-diamètres de leurs ouvertures:

$$AP = x, \quad BQ = x^I, \quad CR = x^{II}, \quad DS = x^{III} \text{ etc.}$$

dont la première est regardée comme donnée, et les autres sont si grandes pour transmettre tous les rayons, qui sont transmis par la première $PAP$.

En troisième lieu soit la raison de réfraction à chacune de ces surfaces:

$$\text{à } PAP = n:1, \text{ à } QBQ = n^I:1, \text{ à } RCR = n^{II}:1, \text{ à } SDS = n^{III}:1.$$

Maintenant pour l'objet et les images principales posons les distances:

$$EA = a, \quad FB = b, \quad GC = c, \quad HD = d \quad \text{etc.}$$

$$AF = \alpha, \quad BG = \beta, \quad CH = \gamma, \quad DJ = \delta \quad \text{etc.}$$

et les demi-diamètres de leur grandeur:

$$E\varepsilon = z, \quad F\zeta = z^{I}, \quad G\eta = z^{II}, \quad H\theta = z^{III}, \quad J\iota = z^{IV} \quad \text{etc.}$$

où il faut remarquer que $z^{I}$, $z^{III}$, $z^{V}$ etc. marquent une situation renversée.

Pour les espaces de confusion posons:

$$Ff = y, \quad Gg = y^{I}, \quad Hh = y^{II}, \quad Ji = y^{III} \quad \text{etc.}$$

et enfin pour les inclinaisons des rayons à l'axe:

$$\text{en } f = \omega, \quad \text{en } g = \omega^{I}, \quad \text{en } h = \omega^{II}, \quad \text{en } i = \omega^{III} \quad \text{etc.}$$

Cela posé pour les rayons de courbure de chaque surface nous aurons les équations suivantes:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{n^{I}-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^{I}}{\beta}, \quad \frac{n^{II}-1}{h} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma}, \quad \frac{n^{III}-1}{i} = \frac{1}{d} + \frac{n^{III}}{\delta} \quad \text{etc.}$$

et pour les demi-diamètres des images principales:

$$z^{I} = \frac{\alpha}{na} z, \quad z^{II} = \frac{\beta}{n^{I}b} z^{I}, \quad z^{III} = \frac{\gamma}{n^{II}c} z^{II}, \quad z^{IV} = \frac{\delta}{n^{III}d} z^{III} \quad \text{etc.}$$

Donc si nous voulons considérer toutes ces images comme debout en changeant les signes de $z^{I}$, $z^{III}$, $z^{V}$ etc. les demi-diamètres de chacune seront déterminés par celui de l'objet, en sorte:

$$z^{I} = -\frac{\alpha}{na} z, \quad z^{II} = +\frac{\alpha\beta}{nn^{I}ab} z, \quad z^{III} = -\frac{\alpha\beta\gamma}{nn^{I}n^{II}abc} z, \quad z^{IV} = +\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{nn^{I}n^{II}n^{III}abcd} z \quad \text{etc.}$$

L'inclinaison des rayons extrêmes à chaque image, celle de l'objet en $E$ étant $= \frac{x}{a}$, est aussi très simplement exprimée en sorte:

$$\omega = \frac{x}{a}, \quad \omega^{I} = \frac{b}{\beta}\omega, \quad \omega^{II} = \frac{c}{\gamma}\omega^{I}, \quad \omega^{III} = \frac{d}{\delta}\omega^{II} \quad \text{etc.}$$

ou bien par l'ouverture de la première surface:

$$\omega = \frac{x}{a}, \quad \omega^{I} = \frac{bx}{\alpha\beta}, \quad \omega^{II} = \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}, \quad \omega^{III} = \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{etc.}$$

De delà nous aurons pour les ouvertures des surfaces suivantes:

$$x^{I} = \frac{bx}{\alpha}, \quad x^{II} = \frac{bc}{\alpha\beta} x, \quad x^{III} = \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma} x \quad \text{etc.}$$

Enfin pour les espaces de confusion les problèmes précédents nous fournissent les équations suivantes:

$$y = \frac{\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(a+\alpha)^2 xx}{2(n-1)^2 aa}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$y^I = \frac{\beta\beta}{n^I bb} y + \frac{(b+\beta)^2 xx}{2(n^I-1)^2 aa}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right) \text{ (par 31 à cause de } \omega = \frac{x}{\alpha}\text{)},$$

$$y^{II} = \frac{\gamma\gamma}{n^{II} cc} y^I + \frac{(c+\gamma)^2 bbxx}{2(n^{II}-1)^2 aa\beta\beta}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

$$y^{III} = \frac{\delta\delta}{n^{III} dd} y^{II} + \frac{(d+\delta)^2 bbccxx}{2(n^{III}-1)^2 aa\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{n^{III}}{d}+\frac{1}{\delta}\right)$$

etc.

36. **Coroll. 1.** Ayant donc l'espace de confusion de la première image:

$$Ff = y = \tfrac{1}{2} xx \cdot \frac{(a+\alpha)^2}{(n-1)^2 aa}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

l'espace de confusion de la seconde image sera:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta}{2n^I bb} xx\left(\frac{(a+\alpha)^2}{(n-1)^2 aa}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{n^I bb(b+\beta)^2}{(n^I-1)^2 aa\beta\beta}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\right)$$

ou:

$$y^I = \frac{(a+\alpha)^2 \beta\beta xx}{2(n-1)^2 n^I aabb}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{(b+\beta)^2 xx}{2(n^I-1)^2 aa}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right).$$

37. **Coroll. 2.** De là même manière on aura l'espace de confusion de la troisième image

$$Hh = y^{II} = + \frac{(a+\alpha)^2 \beta\beta\gamma\gamma xx}{2(n-1)^2 n^I n^{II} aabbcc}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$+ \frac{(b+\beta)^2 \gamma\gamma xx}{2(n^I-1)^2 n^{II} aacc}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$+ \frac{(c+\gamma)^2 bbxx}{2(n^{II}-1)^2 aa\beta\beta}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

38. **Coroll. 3.** Pour l'espace de confusion de la quatrième image $Ji$ on aura par la substitution du précédent:

$$Ji = y^{III} = + \frac{(a+\alpha)^2 \beta\beta\gamma\gamma\delta\delta xx}{2(n-1)^2 n^I n^{II} n^{III} aabbccdd}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$+ \frac{(b+\beta)^2 \gamma\gamma\delta\delta xx}{2(n^I-1)^2 n^{II} n^{III} aaccdd}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$+ \frac{(c+\gamma)^2 bb\delta\delta xx}{2(n^{II}-1)^2 n^{III} aa\beta\beta dd}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)$$
$$+ \frac{(d+\delta)^2 bbccxx}{2(n^{III}-1)^2 aa\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{n^{III}}{d}+\frac{1}{\delta}\right).$$

39. **Coroll. 4.** S'il y avait encore une surface réfringente avec des déterminations analogues à celles que j'ai employées ici, on aurait pour l'espace de confusion:

$$Kk = y^{IV} = + \frac{(a+\alpha)^2\,\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon xx}{2(n-1)^2\,n^I n^{II} n^{III} n^{IV}\,aabbccddee}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$+ \frac{(b+\beta)^2\,\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon xx}{2(n^I-1)^2\,n^{II} n^{III} n^{IV}\,\alpha\alpha ccddee}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$+ \frac{(c+\gamma)^2\,bb\delta\delta\varepsilon\varepsilon xx}{2(n^{II}-1)^2\,n^{III} n^{IV}\,\alpha\alpha\beta\beta ddee}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$+ \frac{(d+\delta)^2\,bbcc\varepsilon\varepsilon xx}{2(n^{III}-1)^2\,n^{IV}\,\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ee}\left(\frac{n^{III}}{d}+\frac{1}{\delta}\right)$$

$$+ \frac{(e+\varepsilon)^2\,bbccddxx}{2(n^{IV}-1)^2\,\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}\left(\frac{n^{IV}}{e}+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

40. **Remarque.** Pour rendre la solution de ce problème plus commode, j'ai introduit dans le calcul les lieux des images principales déterminés par les distances $a$, $\alpha$; $b$, $\beta$; $c$, $\gamma$ etc., d'où l'on détermine aisément le rayon de courbure de chaque surface. Or à cette occasion il est bon de remarquer, qu'à l'exception de la première $a = EA$, qui est toujours nécessairement positive, les autres $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$ etc. peuvent être aussi bien négatives que positives; mais pourtant avec cette limitation, que les sommes $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$ etc., qui expriment les distances entre les surfaces réfringentes $AB$, $BC$, $CD$ etc., doivent toujours être positives. Ainsi en regardant les lieux des images principales comme variables, les surfaces réfringentes demeurant les mêmes, on aura:

$$db = -d\alpha, \quad dc = -d\beta, \quad dd = -d\gamma \quad \text{etc.}$$

J'aurai besoin de ces différentiations quand il s'agira de déterminer la confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons.

41. **I^ère Réflexion.** Lorsqu'il est question de télescopes ou microscopes, la dernière image représentée par les surfaces réfringentes devient l'objet immédiat de la vue. Soit $M\mu$ (Fig. 258.) la dernière image principale, et puisque la nature de l'oeil exige, que les objets en soient éloignés à une certaine distance, pour que la vision devienne distincte, soit $MO = l$ cette distance appropriée à l'oeil posé en $O$, laquelle est estimée infinie pour les bons yeux, finie et assez petite pour les myopes, et même négative pour les presbytes. Soit de plus le demi-diamètre de cette dernière image $M\mu = z^{(m)}$, dont la valeur positive ou négative marquera si l'objet sera vu debout ou renversé; et la grandeur même montrera combien de fois l'objet paraîtra plus grand ou plus petit qu'à la vue simple. Car supposons qu'on regarde le même objet $E\varepsilon$ à la distance $= h$, à la vue simple, et son demi-diamètre $E\varepsilon = z$ sera vu sous l'angle $= \frac{z}{h}$; or maintenant par les surfaces réfringentes le même objet paraîtra sous l'angle $= \frac{z^{(m)}}{l}$, et partant grossi autant de fois, que cette expression $\frac{hz^{(m)}}{lz}$ contiendra d'unités. C'est donc par cette formule qu'on déterminera le grossissement des objets, quand on les regarde par un nombre quelconque de surfaces réfringentes.

*

42. **II<sup>de</sup> Réflexion.** Cette réflexion roulera sur le degré de clarté dont l'objet sera vu par les surfaces réfringentes. Cela dépend principalement de l'inclinaison des rayons au point $m$, car cette inclinaison étant déterminée par l'angle $\omega^{(m)}$, il sera transmis vers l'oeil en $O$ un cône lumineux, dont le demi-diamètre de la base à l'entrée dans l'oeil sera $= l\omega^{(m)}$; où il faut remarquer que lorsque ce demi-diamètre est égal ou plus grand que celui de la prunelle, la vision sera aussi claire qu'il est possible, ou bien l'objet paraîtra aussi clairement qu'à la vue simple. D'où il est évident que plus ce demi-diamètre $l\omega^{(m)}$ se trouve au-dessous de celui de la prunelle, plus aussi la clarté de la vision en sera diminuée. Nous verrons dans la suite que ce degré de clarté est en raison directe de l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre est posé $= x$, et en raison inverse du grossissement.

43. **III<sup>ème</sup> Réflexion.** L'espace de confusion de la dernière image, qui est $Mm = y^{(m)}$ causera nécessairement une confusion dans la représentation, qui se fait sur le fond de l'oeil. Car si les rayons, qui partent de chaque point de l'image principale $M\mu$, se réunissent sur la rétine même, ceux qui viennent de chaque point de l'image extrême en $m$ se réuniront ou en deçà ou au delà, d'où il arrive, que chaque point de l'objet sera représenté sur la rétine par un petit cercle, dont le diamètre sera la juste mesure de la confusion vue. Or je ferai voir dans la suite, que cette confusion est proportionnelle à l'espace de confusion $Mm$, multiplié par l'inclinaison des rayons en $m$, ou bien à l'expression $y^{(m)} \cdot \omega^{(m)}$.

44. **IV<sup>ème</sup> Réflexion.** Par rapport aux ouvertures des surfaces réfringentes, dont j'ai désigné les demi-diamètres par les lettres $x$, $x^{I}$, $x^{II}$, $x^{III}$ etc., les valeurs que j'en ai données et déterminées par celui de la première surface $= x$, ne se rapportent qu'aux rayons, qui viennent du centre de l'objet $E$, ou de son point situé dans l'axe. Je n'avais ici en vue, que de donner aux surfaces suivantes autant d'ouverture, qu'il faut pour transmettre tous les rayons du centre de l'objet $E$, qui tombent sur l'ouverture de la première surface $PAP$; de sorte que si cette ouverture s'évanouissait, celles de toutes les suivantes s'évanouissaient aussi. Mais dès que nous avons égard à l'objet tout entier $E\varepsilon$, afin que les rayons de son extrémité $\varepsilon$ soient transmis par les surfaces suivantes, il est bien clair que quoique l'ouverture de la première fût infiniment petite, celle des suivantes pourrait devenir très considérable. C'est donc réciproquement de l'ouverture des surfaces suivantes que dépend la grandeur de l'objet vu, ou le champ apparent, dont la détermination étant de la dernière importance, le chapitre suivant y est destiné, où nous découvrirons encore d'autres articles également intéressants pour la construction des instruments dioptriques.

---

## Chapitre II.

### Recherches sur le champ apparent par un nombre quelconque de surfaces réfringentes.

45. **Problème 7.** Autant de surfaces réfringentes étant disposées sur le même axe (Fig. 259.), déterminer la route d'un rayon venant de l'extrémité de l'objet qui passe par le milieu $A$ de la première surface réfringente.

**Solution.** Posons comme auparavant les rayons de courbure des faces réfringentes $f$, $g$, $h$, $i$ etc., la raison de réfraction pour chacune $n:1$, $n^{I}:1$, $n^{II}:1$, $n^{III}:1$ etc.; en supposant que la convexité de chacune est tournée vers l'objet $E\varepsilon$, dont les images principales soient successivement représentées en $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$, $J\iota$ etc. et nommons comme ci-dessus les distances:

$$EA=a,\quad AF=\alpha,\quad FB=b,\quad BG=\beta,\quad GC=c,\quad CH=\gamma,\quad HD=d \text{ etc.}$$

et posant le demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = z$, celui de chacune de ces images a été trouvé:

$$F\zeta=\frac{\alpha}{na}z,\quad G\eta=\frac{\alpha\beta}{nn^{I}ab}z,\quad H\theta=\frac{\alpha\beta\gamma}{nn^{I}n^{II}abc}z,\quad J\iota=\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{nn^{I}n^{II}n^{III}abcd}z \text{ etc.}$$

Soit à présent $\varepsilon A$ un rayon qui passe de l'extrémité de l'objet $\varepsilon$ par le milieu $A$ de la première surface réfringente, et il est clair que ce rayon étant réfracté, passera successivement par les extrémités des images $\zeta$, $\eta$, $\theta$, $\iota$ etc.; il coupera donc la seconde surface en $b$, la troisième en $c$, la quatrième en $d$ etc. et partant l'axe même aux points $q$, $r$, $s$ etc. Pour trouver ces derniers points, je remarque que si $A$ était un point lumineux pour la seconde surface $QBQ$, son image tomberait en $q$, et celle-ci considérée comme un objet, jetterait son image en $r$ par la troisième surface, et ainsi de suite, d'où nous aurons les équations suivantes:

$$\frac{n^{I}-1}{g}=\frac{1}{AB}+\frac{n^{I}}{Bq}=\frac{1}{b}+\frac{n^{I}}{\beta},$$

$$\frac{n^{II}-1}{h}=\frac{1}{Cq}+\frac{n^{II}}{Cr}=\frac{1}{c}+\frac{n^{II}}{\gamma},$$

$$\frac{n^{III}-1}{i}=\frac{1}{Dr}+\frac{n^{III}}{Ds}=\frac{1}{d}+\frac{n^{III}}{\delta}$$

etc.

Ensuite pour les points $b$, $c$, $d$ etc. qui déterminent les ouvertures des faces réfringentes après la première, nous aurons:

$$Bb=\frac{AB}{BF}F\zeta=\frac{\alpha+b}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{na}z=\frac{\alpha+b}{na}z,$$

et pour les autres:

$$Cc=\frac{Cq}{Bq}Bb,\quad Dd=\frac{Dr}{Cr}Cc \text{ etc.}$$

d'où l'on connaît la route entière du rayon en question, quelque grand que soit le nombre des surfaces.

46. **Coroll. 1.** De l'équation: $\frac{1}{\alpha+b}+\frac{n^{I}}{Bq}=\frac{1}{b}+\frac{n^{I}}{\beta}$,

nous tirons: $$\frac{n^{I}}{Bq}=\frac{\alpha}{b(\alpha+b)}+\frac{n^{I}}{\beta}=\frac{\alpha\beta+n^{I}b(\alpha+b)}{b\beta(\alpha+b)},$$

et partant: $$Bq=\frac{n^{I}b\beta(\alpha+b)}{\alpha\beta+n^{I}b(\alpha+b)};$$

d'où il s'ensuit: $$Cq=\beta+c-Bq=\frac{\alpha\beta(\beta+c)+n^{I}bc(\alpha+b)}{\alpha\beta+n^{I}b(\alpha+b)}.$$

47. **Coroll. 2.** De là puisque: $\frac{n^{II}}{Cr} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma} - \frac{1}{Cq}$,

nous aurons: $$\frac{n^{II}}{Cr} = \frac{\alpha\beta\beta\gamma + n^{II}\alpha\beta c(\beta + c) + n^{I}n^{II}bcc(\alpha + b)}{\alpha\beta\gamma c(\beta + c) + n^{I}bcc\gamma(\alpha + b)},$$

d'où l'on voit que les valeurs suivantes pour les intervalles *Dr*, *Ds*, *Es* etc. deviennent trop compliquées, pour que nous en puissions tirer quelques éclaircissements dans les recherches suivantes.

48. **Coroll. 3.** Il en est de même des autres formules, que la solution nous fournit pour les ouvertures des surfaces, ou les espaces *Bb*, *Cc*, *Dd* etc., et partant il serait inutile de les développer, surtout puisque dans chaque cas proposé il est aisé de déterminer tous ces éléments par les équations trouvées dans la solution.

49. **I<sup>ère</sup> Réflexion.** La considération de ce problème me fournit cette réflexion bien importante sur le lieu, où il faut placer l'oeil derrière les surfaces réfringentes, pour qu'il puisse voir l'objet. Car il faut bien que le rayon $\varepsilon A$ dont nous venons de déterminer la route, entre enfin dans l'oeil; puisque sans cela l'extrémité de l'objet $\varepsilon$ lui resterait invisible. Comme donc la même raison a lieu pour toute la circonférence de l'objet, il faut absolument, que l'oeil soit placé dans une intersection de la dite route avec l'axe. Ainsi s'il n'y avait que deux surfaces, l'oeil devrait être placé en $q$; s'il y avait trois en $r$, et pour quatre en $s$ etc. Il est aussi évident que l'oeil étant placé dans un tel lieu, découvre le plus grand champ, qu'il est possible de voir par les surfaces proposées. Il est donc de la dernière importance de bien déterminer ce lieu de l'oeil pour chaque cas; et puisque nous avons observé ci-dessus, que l'oeil doit aussi se trouver à une certaine distance derrière la dernière image, il faut toujours arranger les surfaces en sorte, que ces deux lieux se réunissent dans un seul.

50. **II<sup>de</sup> Réflexion.** Les rayons des extrémités $\varepsilon$ de l'objet ne sauraient donc être transmis par les surfaces, à moins que les demi-diamètres de leur ouverture ne surpassent les limites *Bb*, *Cc* *Dd* etc., déterminées dans la solution du problème; ces limites sont ouvertement proportionelles au demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = z$; donc plus on pourrait augmenter les ouvertures des surfaces après la première *PAP*, plus le champ apparent en serait aggrandi. Mais les premiers fondements de la Dioptrique nous prescrivent des bornes, que les ouvertures des surfaces ne doivent jamais passer ayant fixé le demi-diamètre de l'ouverture de chaque surface au-dessous de la quatrième partie de son rayon de courbure. Cette circonstance établit donc un certain rapport entre l'ouverture et rayon de chaque surface, auquel il faut absolument avoir égard dans ces recherches; et partant développement de notre solution, si difficile déjà en elle même, serait absolument inutile, si nous ne restions pas les maitres de mettre d'accord chaque ouverture avec son rayon de courbure. Il sera donc bon d'introduire d'abord cet accord nécessaire dans le calcul, ce qui fera le sujet du problème suivant.

51. **Problème 8.** Les mêmes choses étant proposées comme dans le problème précédent, si outre cela le rapport entre l'ouverture de chaque surface et son rayon de courbure est prescrit, trouver la solution du problème.

**Solution.** Outre les dénominations employées dans la solution précédente, introduisons dans le calcul le rapport du demi-diamètre de chaque ouverture au rayon de courbure de chaque surface et pour cet effet posons:

$$Bb = \pi^I g, \quad Cc = \pi^{II} h, \quad Dd = \pi^{III} i \text{ etc.}$$

où il faut remarquer que les lettres $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. expriment des fractions moindres que $\frac{1}{4}$, tant positives que négatives. Cela posé les images principales étant $F\zeta = z^I$, $G\eta = z^{II}$, $H\theta = z^{III}$ etc. et les distances $AF = a$, $BF = \alpha$, $BG = b$, $GC = \beta$, $CH = c$, $HD = \gamma$ etc., le triangle $ABb$ fournit:

$$\alpha : z^I = \alpha + b : \pi^I g, \text{ donc } (\alpha + b)\, z^I = \pi^I g \alpha \text{ ou } \alpha + b = \frac{\pi^I g a}{z^I}.$$

La route $bqc$ donne ces deux proportions:

$$\pi^I g + z^{II} : \beta = \pi^I g : Bq \text{ donc } Bq = \frac{\pi^I g \beta}{\pi^I g + z^{II}},$$

$$\pi^{II} h - z^{II} : c = \pi^{II} h : Cq \text{ donc } Cq = \frac{\pi^{II} h c}{\pi^{II} h - z^{II}},$$

or $Bq + Cq = BC = \beta + c$.

De la même manière on tire de la route $cd$:

$$\pi^{II} h + z^{III} : \gamma = \pi^{II} h : Cr \text{ donc } Cr = \frac{\pi^{II} h \gamma}{\pi^{II} h + z^{III}},$$

$$\pi^{III} i - z^{III} : d = \pi^{III} i : Dr \text{ donc } Dr = \frac{\pi^{III} i d}{\pi^{III} i - z^{III}},$$

or $Cr + Dr = CD = \gamma + d$ et ainsi de suite.

Maintenant considérons aussi ces relations:

$$\frac{n^I - 1}{g} = \frac{1}{AB} + \frac{n^I}{Bq} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta},$$

$$\frac{n^{II} - 1}{h} = \frac{1}{Cq} + \frac{n^{II}}{Cr} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma},$$

$$\frac{n^{III} - 1}{i} = \frac{1}{Dr} + \frac{n^{III}}{Ds} = \frac{1}{d} + \frac{n^{III}}{\delta}$$

etc.

dont la première à cause de $\quad \frac{1}{AB} = \frac{z^I}{\pi^I g a} = \frac{z}{n \pi^I g a}$,

donne: $\quad \frac{1}{Bq} = \frac{n^I - 1}{n^I g} - \frac{z}{n n^I \pi^I g a} = \frac{n(n^I - 1)\pi^I a - z}{n n^I \pi^I g a}.$

D'où puisque $Bq : Cq = \pi^I g : \pi^{II} h$, nous tirons d'abord:

$$\frac{1}{Cq} = \frac{n(n^I - 1)\pi^I a - z}{n n^I \pi^{II} h a}.$$

Cette valeur étant substituée dans la seconde relation, donne:

$$\frac{1}{Cr} = \frac{n^{II}-1}{n^{II}h} - \frac{n(n^{I}-1)\pi^{I}a+z}{nn^{I}n^{II}\pi^{II}ha} = \frac{nn^{I}(n^{II}-1)\pi^{II}a - n(n^{I}-1)\pi^{I}a+z}{nn^{I}n^{II}\pi^{II}ha},$$

et puisque: $Cr : Dr = Cc : Dd = \pi^{II}h : \pi^{III}i$,

nous aurons: $$\frac{1}{Dr} = \frac{nn^{I}(n^{II}-1)\pi^{II}a - n(n^{I}-1)\pi^{I}a+z}{nn^{I}n^{II}\pi^{III}ia}.$$

Maintenant la troisième relation: $$\frac{1}{Ds} = \frac{n^{III}-1}{n^{III}i} - \frac{1}{n^{III}Dr},$$

donnera: $$\frac{1}{Ds} = \frac{nn^{I}n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III}a - nn^{I}(n^{II}-1)\pi^{II}a + n(n^{I}-1)\pi^{I}a - z}{nn^{I}n^{II}n^{III}\pi^{III}ia},$$

et de là: $$\frac{1}{Es} = \frac{nn^{I}n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III}a - nn^{I}(n^{II}-1)\pi^{II}a + n(n^{I}-1)\pi^{I}a - z}{nn^{I}n^{II}n^{III}\pi^{IV}ka},$$

où la loi de progression est évidente. Au reste il est bien remarquable que tous ces intervalles sont exprimés par les seules lettres $n$, $\pi$, $a$, $z$ et les rayons des surfaces.

52. **Remarque.** Dans cette solution nous avons donné d'une double manière les valeurs des intervalles $Bq$, $Cq$; $Cr$, $Dr$; $Ds$, $Es$ etc., lesquelles, quoique très différentes, se réduisent les unes aux autres par les rapports trouvés ci-dessus:

$$z^{I} = \frac{\alpha z}{na}, \quad z^{II} = \frac{\alpha\beta z}{nn^{I}ab}, \quad z^{III} = \frac{\alpha\beta\gamma z}{nn^{I}n^{II}abc} \text{ etc.}$$

et ceux qui ont été établis entre les distances $a$, $\alpha$; $b$, $\beta$; $c$, $\gamma$; $d$, $\delta$ etc. et les rayons de courbure $f$, $g$, $h$, $i$ etc. Cependant les dernières valeurs méritent à tous égards la préférence, puisqu'elles ne renferment que les éléments $n$, $n^{I}$ etc., $\pi^{I}$, $\pi^{II}$ etc. et l'angle $\frac{z}{a}$ avec les rayons de courbure, circonstance, qui nous abbrégera très considérablement le calcul dans la suite.

53. **Coroll. 1.** Puisque $Bq + Cq = \beta + c$, les valeurs postérieures trouvées pour $Bq$ et $Cq$ nous conduisent à cette équation:

$$\frac{nn^{I}(\pi^{I}g + \pi^{II}h)a}{n(n^{I}-1)\pi^{I}a - z} = \beta + c,$$

qui se réduit à cette forme:

$$nn^{I}\pi^{II}h - n(n^{I}-1)\pi^{I}c + \frac{cz}{a} = \pi^{I}(n(n^{I}-1)\beta - nn^{I}g) - \frac{\beta z}{a}.$$

Or l'équation: $\frac{n^{I}-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^{I}}{\beta}$ donne $(n^{I}-1)\beta - n^{I}g = \frac{\beta g}{b}$,

d'où nous tirons:

$$nn^{I}\pi^{II}h - n(n^{I}-1)\pi^{I}c + \frac{cz}{a} = \frac{n\pi^{I}\beta g}{b} - \frac{\beta z}{a} = \frac{\beta}{b}\left(n\pi^{I}g - \frac{bz}{a}\right).$$

54. **Coroll. 2.** De la même manière l'équation $Cr + Dr = \gamma + d$ donne:

$$\frac{nn^I n^{II}(\pi^{II}h + \pi^{III}i)a}{nn^I(n^{II}-1)\pi^{II}a - n(n^I-1)\pi^I a + z} = \gamma + d,$$

d'où à cause de $(n^{II}-1)\gamma - n^{II}h = \frac{\gamma h}{c}$ nous tirons:

$$nn^I n^{II}\pi^{III}i - nn^I(n^{II}-1)\pi^{II}d + n(n^I-1)\pi^I d - \frac{dz}{a} = \frac{\gamma}{c}\left(nn^I\pi^{II}h - n(n^I-1)\pi^I c + \frac{cz}{a}\right)$$

et pour la surface suivante on aura pareillement:

$$nn^I n^{II} n^{III}\pi^{IV}k - nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III}e + nn^I(n^{II}-1)\pi^{II}e - n(n^I-1)\pi^I e + \frac{ez}{a} =$$

$$\frac{\delta}{d}\left(nn^I n^{II}\pi^{III}i - nn^I(n^{II}-1)\pi^{II}d + n(n^I-1)\pi^I d - \frac{dz}{a}\right).$$

55. **Coroll. 3.** Comme il est aisé de voir ici la continuation de ces équations, on en peut conclure celle qui les précède, en remarquant que selon l'hypothèse pour la première surface il faut mettre $\pi = o$, puisque son ouverture s'évanouit. Et partant cette première équation sera:

$$n\pi^I g - \frac{bz}{a} = + \frac{a}{a}z \quad \text{ou} \quad n\pi^I g = \frac{a+b}{a}z,$$

qui convient avec celle qui a été trouvée d'abord:

$$a + b = \frac{\pi^I g a}{z^I} \quad \text{a cause de} \quad z^I = \frac{az}{na}.$$

56. **I^ère^ Réflexion.** Il est très important de considérer bien ces équations que nous venons de trouver dans les corollaires précédents, lesquelles se peuvent plus convenablement représenter en sorte:

I. $\frac{n\pi^I g}{b} - \frac{z}{a} = \frac{a}{b}\cdot\frac{z}{a}$,

II. $\frac{nn^I\pi^{II}h}{c} - n(n^I-1)\pi^I + \frac{z}{a} = \frac{a\beta}{bc}\cdot\frac{z}{a}$,

III. $\frac{nn^I n^{II}\pi^{III}i}{d} - nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} + n(n^I-1)\pi^I - \frac{z}{a} = \frac{a\beta\gamma}{bcd}\cdot\frac{z}{a}$,

IV. $\frac{nn^I n^{II} n^{III}\pi^{IV}k}{e} - nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III} + nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - n(n^I-1)\pi^I + \frac{z}{a} = \frac{a\beta\gamma\delta}{bcde}\cdot\frac{z}{a}$

etc.

auxquelles on n'a qu'à ajouter celles-ci:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{n}{a}, \quad \frac{n^I-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta}, \quad \frac{n^{II}-1}{h} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma}, \quad \frac{n^{III}-1}{i} = \frac{1}{d} + \frac{n^{III}}{\delta} \text{ etc.}$$

pour avoir tous les rapports, dont ces éléments dépendent les uns des autres.

57. **II^de Réflexion.** En second lieu je remarque que la fraction $\frac{z}{a}$ exprime l'angle $EA\varepsilon$, qui est nommé le demi-diamètre du champ apparent, lequel étant posé $= \varphi$, de sorte que $\varphi = \frac{z}{a}$, les intervalles déterminés dans la solution du problème, seront exprimés plus élégamment en sorte:

$$AB = \frac{n\pi^I g}{\varphi}$$

$$\begin{cases} Bq = \dfrac{nn^I \pi^I g}{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}, \\ Cq = \dfrac{nn^I \pi^{II} h}{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cr = \dfrac{nn^I n^{II} \pi^{II} h}{nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - n(n^I - 1)\pi^I + \varphi}, \\ Dr = \dfrac{nn^I n^{II} \pi^{III} i}{nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - n(n^I - 1)\pi^I + \varphi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ds = \dfrac{nn^I n^{II} n^{III} \pi^{III} i}{nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} - nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} + n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}, \\ Es = \dfrac{nn^I n^{II} n^{III} \pi^{IV} k}{nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} - nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} + n(n^I - 1)\pi^I - \varphi} \end{cases}$$

etc.

Ces formules servent à déterminer le juste lieu de l'oeil, pour qu'il découvre le champ apparent tout entier. Ainsi pour une seule surface, l'oeil doit être placé en $A$ ou appliqué immédiatement à la surface; pour deux surfaces, il doit être placé en $q$; pour trois, en $r$; pour quatre, en $s$ etc.

58. **III^ème Réflexion.** Cette considération nous fournit un autre moyen pour juger du grossissement de la représentation; car l'objet $E\varepsilon$ étant vu à la distance $= a$ sous l'angle $= \varphi$, il paraîtra à une autre distance $h$ sous un angle $= \frac{a}{h}\varphi$ à la vue simple. Or par les surfaces réfringentes le même objet sera vu sous les angles suivants:

1° Par une seule surface, l'oeil étant placé en $A$, l'objet paraîtra sous l'angle $BA\beta = \frac{\varphi}{n}$ donc la raison du grossissement sera $= \frac{h}{na}$.

2° Par deux surfaces, l'oeil étant en $q$, l'objet sera vu sous l'angle:

$$Bqb = \frac{Bb}{Bq} = \frac{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I},$$

qui étant divisé par $\frac{a\varphi}{h}$, donne le grossissement $= \frac{h}{a} \cdot \frac{n(n^I - 1)\pi^I - \varphi}{nn^I\varphi}$.

3° Par trois surfaces, l'oeil étant en $r$, le grossissement sera:

$$= \frac{h}{a} \cdot \frac{nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - n(n^I - 1)\pi^I + \varphi}{nn^I n^{II}\varphi}.$$

4° Par quatre surfaces, l'oeil étant en $s$, le grossissement sera:

$$= \frac{h}{a} \cdot \frac{nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III} - nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} + n(n^I-1)\pi^I - \varphi}{nn^I n^{II} n^{III} \varphi}.$$

59. **Problème 9.** Si tant les rapports entre les ouvertures et les rayons de courbure de chaque surface, que les rapports entre les distances de chaque surface aux deux images qui la précèdent et suivent, sont donnés, trouver toutes les formules, par lesquelles la route du rayon $\varepsilon Abcde$ etc. est déterminée.

**Solution.** Conservant toujours les mêmes dénominations, soit le demi-diamètre du champ apparent, ou l'angle $EA\varepsilon = \varphi$, la distance de l'objet étant $EA = a$, et posons les rapports entre les distances de chaque surface aux images qui y appartiennent:

$$\frac{EA}{AF} = A, \quad \frac{BF}{BG} = B, \quad \frac{CG}{CH} = C, \quad \frac{DH}{DI} = D \text{ etc.}$$

ou bien:
$$\alpha = \frac{a}{A}, \quad \beta = \frac{b}{B}, \quad \gamma = \frac{c}{C}, \quad \delta = \frac{d}{D} \text{ etc.}$$

D'où la raison de réfraction de chaque surface donne pour les rayons de courbure les rapports suivants:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{An+1}{a}, \quad \frac{n^I-1}{g} = \frac{Bn^I+1}{b}, \quad \frac{n^{II}-1}{h} = \frac{Cn^{II}+1}{c}, \quad \frac{n^{III}-1}{i} = \frac{Dn^{III}+1}{d} \text{ etc.}$$

Ensuite pour les rapports entre les ouvertures et les rayons de courbure de chaque surface posons comme ci-dessus:

$$Bb = \pi^I g, \quad Cc = \pi^{II} h, \quad Dd = \pi^{III} i \text{ etc.}$$

ayant pour la première $Aa = \pi f = o$, puisque nous ne donnons à la première qu'une ouverture infiniment petite. Maintenant on verra que les lettres $n$, $n^I$, $n^{II}$ etc. $\pi^I$, $\pi^{II}$ etc. $A$, $B$, $C$ etc. avec l'angle $\varphi$ et la distance $EA = a$ suffisent pour déterminer tous les autres éléments. Car les formules du § 56 deviendront:

I. $$\frac{n(n^I-1)\pi^I}{Bn^I+1} - \varphi = \frac{a\varphi}{Ab},$$

II. $$\frac{nn^I(n^{II}-1)\pi^{II}}{Cn^{II}+1} - n(n^I-1)\pi^I + \varphi = \frac{a\varphi}{ABc},$$

III. $$\frac{nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III}}{Dn^{III}+1} - nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} + n(n^I-1)\pi^I - \varphi = \frac{a\varphi}{ABCd},$$

IV. $$\frac{nn^I n^{II} n^{III}(n^{IV}-1)\pi^{IV}}{En^{IV}+1} - nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III} + nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - n(n^I-1)\pi^I + \varphi = \frac{a\varphi}{ABCDe}$$

etc.

d'où l'on tire successivement les distances $b$, $c$, $d$, $e$ etc. et delà, par les formules précédentes, tant les distances $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ etc. que les rayons de courbure $g$, $h$, $i$ etc., le premier $f$ étant déjà donné

par l'équation $\frac{n-1}{f} = \frac{An+1}{a}$, de même que $\alpha = \frac{a}{A}$. Ensuite on a aussi pour les intersections du rayon réfracté avec l'axe les formules du § 57.

$$AB = \frac{n\pi^I g}{\varphi},$$

$$\begin{cases} Bq = \dfrac{nn^I \pi^I g}{n(n^I-1)\pi^I - \varphi}, \\ Cq = \dfrac{nn^I \pi^{II} h}{n(n^I-1)\pi^I - \varphi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cr = \dfrac{nn^I n^{II} \pi^{II} h}{nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - n(n^I-1)\pi^I + \varphi}, \\ Dr = \dfrac{nn^I n^{II} \pi^{III} i}{nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - n(n^I-1)\pi^I + \varphi} \end{cases}$$

etc.

et de là les angles, que le rayon réfracté fait dans ces endroits avec l'axe:

$$BAb = \frac{\varphi}{n},$$

$$Bqb = Cqc = \frac{n(n^I-1)\pi^I - \varphi}{nn^I},$$

$$Crc = Drd = \frac{nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - n(n^I-1)\pi^I + \varphi}{nn^I n^{II}}$$

etc.

Enfin pour la grandeur de chaque image, le demi-diamètre de l'objet étant $E\varepsilon = z = a\varphi$, on aura:

$$F\zeta = \frac{a\varphi}{nA} \text{ image renversée,}$$

$$G\eta = \frac{a\varphi}{nn^I AB} \text{ image directe,}$$

$$H\theta = \frac{a\varphi}{nn^I n^{II} ABC} \text{ image renversée}$$

etc.

en observant lesquelles sont debout ou renversées.

60. **I^ère Réflexion.** Étant parvenu par ce moyen à une solution assez commode du Problème 7, quelque grand que soit le nombre des surfaces réfringentes, ce qui parut d'abord assujetti aux plus grandes difficultés, ces formules sont fort propres à procurer aux instruments de dioptrique un aussi grand champ apparent, qu'il est possible, ce qui est sans doute un article de la dernière importance pour la perfection de ces instruments, et il est bien surprenant, que les grands Géomètres, qui se sont appliquées depuis quelque temps à ces recherches, ayent presque entièrement négligé cet article essentiel, surtout depuis j'en avais indiqué la route dans le XIII Volume des Mémoires de l'Académie de Berlin. Or on verra dans la suite, que pour grossir le champ apparent,

tout revient à rendre la valeur de cette expression:

$$n(n^I - 1)\pi^I - nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} + nn^In^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} - \text{ etc.}$$

aussi grande qu'il est possible, pour laquelle fin on n'a qu'à observer que les lettres $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. marquent des fractions moindres qu' $\frac{1}{4}$, et qu'elles peuvent être prises tant affirmativement que négativement. On n'aura donc qu'à les prendre alternativement positives et négatives, pour que tous les termes de la dite expression obtiennent les mêmes signes, et à leur donner des valeurs aussi grandes, que les circonstances le permettent. Cependant il faut bien prendre garde dans cet arrangement, que les intervalles entre les surfaces réfringentes $AB$, $BC$, $CD$ etc. en résultent tous positifs, ce qui restreint en quelque façon le choix des valeurs des lettres $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc.

61. **II^de Réflexion.** Puisque les formules qui viennent d'être trouvées deviennent pourtant un peu prolixes lorsque le nombre des surfaces est grand, on les peut très considérablement abréger, en introduisant dans le calcul les angles que fait avec l'axe le rayon réfracté. Posons donc:

$$BAb = \psi, \quad Bqb = \psi^I, \quad Crc = \psi^{II}, \quad Dsd = \psi^{III} \quad \text{etc.}$$

et nous aurons d'abord:

$$n\psi = \varphi,$$

$$n^I\psi^I = (n^I - 1)\pi^I - \psi,$$

$$n^{II}\psi^{II} = (n^{II} - 1)\pi^{II} - \psi^I,$$

$$n^{III}\psi^{III} = (n^{III} - 1)\pi^{III} - \psi^{II}$$

etc.

de sorte que chaque valeur se détermine aisément par la précédente. De là nous aurons pour les distances $b$, $c$, $d$ etc.:

$$\frac{a\varphi}{Ab} = \frac{nn^I(\psi^I - B\psi)}{Bn^I + 1},$$

$$\frac{a\varphi}{ABc} = \frac{nn^In^{II}(\psi^{II} - C\psi^I)}{Cn^{II} + 1},$$

$$\frac{a\varphi}{ABCd} = \frac{nn^In^{II}n^{III}(\psi^{III} - D\psi^{II})}{Dn^{III} + 1}$$

etc.

et partant:

| | | |
|---|---|---|
| | $\alpha = \frac{a}{A}$ | $f = \frac{(n-1)a}{An+1},$ |
| $b = \frac{a\varphi(Bn^I + 1)}{nn^IA(\psi^I - B\psi)}$ | $\beta = \frac{b}{B}$ | $g = \frac{a\varphi(n^I - 1)}{nn^IA(\psi^I - B\psi)},$ |
| $c = \frac{a\varphi(Cn^{II} + 1)}{nn^In^{II}AB(\psi^{II} - C\psi^I)}$ | $\gamma = \frac{c}{C}$ | $h = \frac{a\varphi(n^{II} - 1)}{nn^In^{II}AB(\psi^{II} - C\psi^I)},$ |
| $d = \frac{a\varphi(Dn^{III} + 1)}{nn^In^{II}n^{III}ABC(\psi^{III} - D\psi^{II})}$ | $\delta = \frac{d}{D}$ | $i = \frac{a\varphi(n^{III} - 1)}{nn^In^{II}n^{III}ABC(\psi^{III} - D\psi^{II})}$ |
| etc. | etc. | etc. |

et ensuite:

$$AB = \frac{\pi^I g}{\psi}$$ d'où l'on aura les intervalles entre les surfaces:

$$\left\{\begin{aligned} Bq &= \frac{\pi^I g}{\psi^I} \\ Cq &= \frac{\pi^{II} h}{\psi^I} \end{aligned}\right\} \qquad BC = \frac{\pi^I g + \pi^{II} h}{\psi^I},$$

$$\left\{\begin{aligned} Cr &= \frac{\pi^{II} h}{\psi^{II}} \\ Dr &= \frac{\pi^{III} i}{\psi^{II}} \end{aligned}\right\} \qquad CD = \frac{\pi^{II} h + \pi^{III} i}{\psi^{II}}$$

etc.

62. **III$^{\text{ème}}$ Réflexion.** En employant les mêmes éléments, toutes les déterminations du chapitre précédent se trouveront exprimées de la manière suivante:

1° Le demi-diamètre de l'ouverture de la première surface étant $= x$, ceux des surfaces suivantes seront:

$$x^I = \frac{Abx}{a} = \frac{\varphi\,(Bn^I + 1)}{nn^I\,(\psi^I - B\psi)}\,x,$$

$$x^{II} = \frac{ABcx}{a} = \frac{\varphi\,(Cn^{II} + 1)}{nn^I n^{II}\,(\psi^{II} - C\psi^I)}\,x,$$

$$x^{III} = \frac{ABCdx}{a} = \frac{\varphi\,(Dn^{III} + 1)}{nn^I n^{II} n^{III}\,(\psi^{III} - D\psi^{II})}\,x$$

etc.

lesquels joints à ceux que nous avons supposés ici $\pi^I g$, $\pi^{II} h$, $\pi^{III} i$ etc., donneront les vrais demi-diamètres des ouvertures, que chaque surface doit avoir pour transmettre tous les rayons qui sont entré dans la première de l'objet.

2° L'inclinaison des rayons, qui passent par les extrémités de la première surface, à chaque image sera:

$$\omega = \frac{Ax}{a}, \quad \omega^I = \frac{ABx}{a}, \quad \omega^{II} = \frac{ABCx}{a}, \quad \omega^{III} = \frac{ABCDx}{a} \quad \text{etc.}$$

3° Les espaces de confusion à chaque image seront exprimés en sorte:

$$y = \frac{xx}{2na} \cdot \frac{n\,(n + A)\,(A + 1)^2}{(n - 1)^2 AA},$$

$$y^I = \frac{xx}{2nn^I a}\left(\frac{n\,(n + A)\,(A + 1)^2}{(n - 1)^2 AABB} + \frac{A\,(n^I + B)\,(Bn^I + 1)\,(B + 1)^2\,\varphi}{(n^I - 1)^2\,BB\,(\psi^I - B\psi)}\right),$$

$$y^{II} = \frac{xx}{2nn^I n^{II} a}\left(\frac{n\,(n + A)\,(A + 1)^2}{(n - 1)^2\,AABBCC} + \frac{A\,(n^I + B)\,(Bn^I + 1)\,(B + 1)^2\,\varphi}{(n^I - 1)^2\,BBCC\,(\psi^I - B\psi)} + \frac{AB\,(n^{II} + C)\,(Cn^{II} + 1)\,(C + 1)^2\,\varphi}{(n^{II} - 1)^2\,CC\,(\psi^{II} - C\psi^I)}\right),$$

$$y^{III} = \frac{xx}{2nn^I n^{II} n^{III} a}\left(\begin{aligned} &\frac{n\,(n + A)\,(A + 1)^2}{(n - 1)^2\,AABBCCDD} + \frac{A\,(n^I + B)\,(n^I B + 1)\,(B + 1)^2\,\varphi}{(n^I - 1)^2\,BBCCDD\,(\psi^I - B\psi)} + \\ &\frac{AB\,(n^{II} + C)\,(n^{II} C + 1)\,(C + 1)^2\,\varphi}{(n^{II} - 1)^2\,CCDD\,(\psi^{II} - C\psi^I)} + \frac{ABC\,(n^{III} + D)\,(n^{III} D + 1)\,(D + 1)^2\,\varphi}{(n^{III} - 1)^2\,DD\,(\psi^{III} - D\psi^{II})} \end{aligned}\right)$$

où l'ordre de progression est plus clair, qu'auparavant. Ces espaces de confusion peuvent aussi être représentés en sorte:

$$y = \frac{(A+1)^2(n+A)\,xx}{2(n-1)^2 AAaa}\cdot a,$$

$$y^I = \frac{y}{n^I BB} + \frac{AA(B+1)^2(n^I+B)\,xx}{2(n^I-1)^2 BBaa}\cdot b,$$

$$y^{II} = \frac{y^I}{n^{II} CC} + \frac{AABB(C+1)^2(n^{II}+C)\,xx}{2(n^{II}-1)^2 CCaa}\cdot c,$$

$$y^{III} = \frac{y^{II}}{n^{III} DD} + \frac{AABBCC(D+1)^2(n^{III}+D)\,xx}{2(n^{III}-1)^2 DDaa}\cdot d,$$

$$y^{IV} = \frac{y^{III}}{n^{IV} EE} + \frac{AABBCCDD(E+1)^2(n^{IV}+E)\,xx}{2(n^{IV}-1)^2 EEaa}\cdot e$$

etc.

Ces formules paraîssent plus propres, pour en calculer successivement les espaces de confusion de chaque image.

63. **Remarque.** Ayant établi dans ce chapitre les principes qui regardent le champ apparent, les ouvertures de chaque surface, avec le juste lieu de l'oeil derrière la dernière, il ne reste plus que de déterminer aussi la confusion, qui résulte de la diverse réfrangibilité des rayons. C'est donc à cette recherche que les chapitres suivants sont destinés.

---

## Chapitre III.

### Sur la confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons.

64. **Problème 10.** Quand il n'y a qu'une surface réfringente $PAP$, dont le rayon de courbure $= f$ et la raison de réfraction $= n:1$, devant laquelle se trouve l'objet $E\varepsilon = z$ à la distance $AE = a$, déterminer les images formées par les rayons le plus et le moins réfrangibles.

**Solution.** Soit $F\zeta$ l'image formée par les rayons moyens, auxquels répond la raison de réfraction $n:1$, où je n'ai en vue que les rayons qui se trouvent dans la direction de l'axe, ou qui passent par le milieu $A$ de la surface. Donc posant la distance $AF = \alpha$, nous avons trouvé cette égalité:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{et} \quad F\zeta = \frac{\alpha}{na}\,z.$$

Cela posé pour les rayons le plus et le moins réfrangibles, puisque le changement de la raison $n:1$ n'est qu'extrêmement petit, on n'a qu'à regarder le nombre $n$ comme variable, et différentier les formules données pour la réfraction moyenne, en supposant les distances $a$ et $f$ avec la quantité $z$

constantes, de sorte que la seule distance $AF = \alpha$ soit variable; et on trouvera:

$$\frac{dn}{f} = \frac{dn}{a} - \frac{n\,da}{aa} \quad \text{et} \quad d\,.\,F\zeta = \frac{z}{a}\left(\frac{da}{n} - \frac{a\,dn}{nn}\right),$$

dont la première donne:

$$d\alpha = \frac{dn}{n}\left(\alpha - \frac{\alpha\alpha}{f}\right) = -\frac{\alpha\,(\alpha + a)\,dn}{n\,(n-1)\,a} \quad \text{ou} \quad d\alpha = -\frac{\alpha\,(\alpha - f)\,dn}{nf},$$

en éliminant le rayon $f$, substituons cette valeur:

$$d\alpha = -\frac{\alpha\,(\alpha + a)\,dn}{n\,(n-1)\,a},$$

dans l'autre formule pour avoir:

$$d\,.\,F\zeta = -\frac{z}{a}\cdot\frac{\alpha\,(\alpha + na)\,dn}{nn\,(n-1)\,a} \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\,.\,F\zeta}{F\zeta} = -\frac{(\alpha + na)\,dn}{n\,(n-1)\,a}.$$

Donc puisque: $\frac{n-1}{f} = \frac{\alpha + na}{\alpha a}$, on aura: $\frac{d\,.\,F\zeta}{F\zeta} = -\frac{\alpha\,dn}{nf}$;

cette simple formule suit immédiatement en prenant le différentiel logarithmique de la formule:

$F\zeta = \frac{\alpha}{na}\,z$, qui à cause de $l\,.\,F\zeta = l\,\frac{z}{a} - l\,\frac{n}{\alpha}$, puisque $\frac{z}{a}$ est constant,

et $d\,.\,\frac{n}{\alpha} = d\cdot\left(\frac{n-1}{f} - \frac{1}{a}\right) = \frac{dn}{f}$, produit: $\frac{d\,.\,F\zeta}{F\zeta} = -\frac{dn : f}{n : \alpha} = -\frac{\alpha\,dn}{nf}$.

65. **Coroll. 1.** Si l'on donne au différentiel $dn$ une valeur positive, afin que $n + dn : 1$ soit la raison de réfraction des rayons violet, alors $\alpha + d\alpha$ marquera la distance de l'image violette depuis le point $A$, et puisque les rayons moyens sont supposés au milieu entre les rouges et les violets, la distance de l'image rouge sera $= \alpha - d\alpha$.

66. **Coroll. 2.** Puisque le différentiel $d\alpha$ vient d'être trouvé négatif par rapport à $dn$, l'image violette sera moins éloignée du point $A$ que la moyenne, et l'image rouge en sera plus éloignée. Il en est de même de la grandeur des images, dont la violette sera la plus petite et la rouge la plus grande.

67. **Remarque.** Dans ces recherches je ne considérerai que les rayons les plus proches de l'axe, et partant je n'appliquerai la différentiation tirée de la variation de la réfraction, qu'aux images principales déterminées dans le premier chapitre. Il serait même bien superflu de la vouloir aussi appliquer aux images extrêmes; car puisque celles-ci ne diffèrent que très peu des principales, on trouverait d'abord la même différence que celle qui a lieu pour les images principales, et si l'on voulait pousser plus loin la précision, on parviendrait à de telles quantités quasi infiniment petites, qui appartiendraient à un ordre supérieur. Or puisque nous avons négligé les particules d'un tel ordre dans la détermination des images extrêmes, nous ne parviendrions point du tout à un plus haut degré de précision; de tels infiniment petits d'un ordre supérieur troubleraient plutôt le calcul et la précision qu'on espérait d'atteindre ne serait qu'apparente et illusoire, parce qu'on aurait négligé d'un autre coté des particules du même ordre, qui avec celles-là auraient entièrement changé les résultats

68. **I^ère Réflexion.** Il est extrêmement difficile de décider en général, quelle valeur on doit donner au différentiel $dn$, pour que la raison $n + dn : 1$ exprime la réfraction des rayons violets, et celle-ci $n - dn : 1$ la réfraction des rayons rouges, pendant que $n : 1$ est la raison de réfraction des rayons moyens. On est bien assuré que si la réfraction se fait de l'air dans le verre, et que la réfraction moyenne soit en raison de 1,55 à 1 ou bien $n = 1{,}55$, alors il faut prendre $dn = \frac{1}{100}$; mais pour le flintglas d'Angleterre, dont la réfraction moyenne est en raison de 1,60 à 1 ou $n = 1{,}60$, on prétend que la valeur du différentiel $dn$ est alors à peu près $= \frac{3}{200}$; mais cette détermination ne paraît pas encore assez constatée. D'autres expériences semblent plutôt confirmer cette hypothèse, que si la raison de réfraction des rayons moyens en passant de l'air dans un milieu transparent quelconque est $= n : 1$, alors il y aura $dn = \frac{n(nn-1)}{217}$, ou simplement $dn$ proportionel à $n(nn-1)$. Mais pour ne pas astreindre mes recherches à une hypothèse, qui pourrait être fausse, je ne déterminerai rien sur la valeur de ces différentiels, et si la raison de réfraction est $= n : 1$ pour les rayons moyens, j'employerai en général pour les rayons violets la raison $n + dn : 1$ et pour les rouges celle-ci $n - dn : 1$.

69. **II^de Réflexion.** Considérons plus attentivement le rapport qui se trouve entre les images rouge, violette et moyenne. Pour cet effet soit $Rr$ (Fig. 260.) l'image rouge, et $Vv$ la violette, la moyenne étant $F\zeta$ à la distance $AF = \alpha$, et sa grandeur $F\zeta = \frac{\alpha z}{na}$; et j'observe d'abord que tant les intervalles $FR$ et $FV$ peuvent toujours être regardés comme égaux, que les différences entre les images $Rr - F\zeta$ et $F\zeta - Vv$, puisque cela est conforme à la nature des différentiels que nous employons pour exprimer la différence dans la réfraction des différents rayons. Donc par la solution du problème nous aurons:

$$AR = \alpha + \frac{\alpha(a+\alpha)\,dn}{n(n-1)\,a} \quad \text{et} \quad AV = \alpha - \frac{\alpha(a+\alpha)\,dn}{n(n-1)\,a},$$

et pour la grandeur des images:

$$Rr = F\zeta + \frac{\alpha\,dn}{nf}\cdot F\zeta \quad \text{et} \quad Vv = F\zeta - \frac{\alpha\,dn}{nf}\cdot F\zeta.$$

Ensuite il est évident que tout l'espace $RV$ est rempli d'une infinité d'images moyennes entre les extrêmes, qui seront toutes terminées par une ligne droite $\nu\zeta v$, dont il sera important de remarquer l'intersection $o$ avec l'axe, puisqu'alors en sachant l'image principale $F\zeta$, la grandeur de toutes les images se détermine le plus aisément. Or par le I^er Chapitre il est clair que cette intersection $o$ tombe précisément dans le centre de courbure de la surface $PAP$, puisque le rayon $\varepsilon\alpha o$ doit nécessairement passer par les extrémités de toutes les images, cette proprieté étant indépendante de la raison de réfraction. La même chose suit aussi des formules trouvées ici, en faisant cette proportion: $Rr - F\zeta : FR = F\zeta : Fo$, ou bien:

$$\frac{\alpha\,dn}{nf}\cdot F\zeta : \frac{-\alpha\,dn\,(f-\alpha)}{nf} = F\zeta : \alpha - f,$$

de sorte que $Fo = \alpha - f$ et partant $Ao = f$.

70. **III^ème Réflexion.** La connaissance de ce point $o$, où la ligne droite, qui termine les images formées par tous les différents rayons, coupe l'axe, deviendra dans la suite de la plus grande importance; puisqu'un oeil placé dans ce point $o$ verra toutes les images sous le même angle optique $Fo\zeta$, et partant l'objet ne lui paraîtra point bordé des couleurs de l'arc en ciel, au lieu que si l'oeil était placé au delà des images en $O$, puisqu'il verrait alors l'image rouge $Rr$ sous un plus grand angle que les autres, l'extrémité de l'objet lui paraîtrait rouge; et s'il était placé entre $V$ et $o$, l'extrémité de l'objet lui paraîtrait violette; or en deçà de $o$ vers $A$ il verrait encore l'objet bordé de rouge. Mais le lieu $o$ est entièrement délivré de ces inconvénients, car puisque les rayons de toutes les extrémités des images se réunissent quasi dans un seul, ils exprimeront distinctement au fond de l'oeil l'extrémité de l'objet, de même que tous les autres points, et il n'y aura point d'autre confusion que celle qui résulte des différentes distances des images $Rr$ et $Vv$ à l'oeil. Or cette confusion est d'une tout autre nature et beaucoup moins considérable que celle que l'oeil éprouverait s'il était placé dans tout autre endroit, où les rayons qui y viendraient des extrémités des images, seraient divergents entr'eux, et tomberaient sur différents points au fond de l'oeil.

71. **Définition.** Je nommerai dans la suite *Espace de diffusion*, l'intervalle qui se trouve entre l'image moyenne et la rouge ou violette; ainsi dans le cas présent l'intervalle $FR$ ou $FV$ est l'espace de diffusion de l'image $F\zeta$.

72. **Remarque.** Je me sers ici du terme de diffusion pour mieux distinguer ce défaut dans les images, de celui que j'ai nommé ci-dessus l'espace de confusion, car quoique l'un et l'autre soit presque également nuisible à la représentation, l'effet en est bien différent, et il faut employer des moyens tout à fait différents pour prévenir ou diminuer l'un et l'autre de ces défauts. Nous voyons bien que dans le cas présent on ne saurait anéantir l'espace de diffusion, qui a été trouvé $d\alpha = -\frac{a(\alpha + a)\,dn}{n(n-1)\,a}$, puisqu'il faudrait qu'il fût $\alpha = -a$, et partant aussi $f = -a$, de sorte que tant l'objet que l'image se trouverait dans le centre de la surface réfringente. Alors l'espace de diffusion serait bien $= o$, mais les images violettes et rouges différeraient pourtant de l'image moyenne en grandeur, celle de la rouge étant $Rr = F\zeta\left(1 + \frac{dn}{n}\right)$, et de la violette $Vv = F\zeta\left(1 - \frac{dn}{n}\right)$ et la moyenne même $F\zeta = -\frac{z}{n}$, ou bien elle serait debout en $E$ et $= \frac{z}{n}$. D'où l'on voit qu'il ne suffit pas d'avoir réduit à rien l'espace de diffusion, il faudrait aussi anéantir la différence qui se trouve entre les images rouge et violette, ou bien le différentiel de $F\zeta$.

73. **Définition.** Le lieu de l'oeil pour la vision distincte est le point $o$ sur l'axe, où la ligne droite tirée par les extrémités de l'image moyenne et des extrêmes *la rouge* et *la violette*, coupe l'axe. Dans le cas présent la distance $Fo = \alpha - f$ donne la distance du lieu de l'oeil où l'image principale $F\zeta$, dirigée en avant ou vers l'objet.

74. **I^ère Réflexion.** Depuis la découverte de la différente réfrangibilité des rayons on s'est persuadé, que la confusion qui en résulte, était beaucoup plus nuisible aux instruments dioptriques que celle qui est causée par l'ouverture des verres ou leur figure sphérique. Mais par ce que e

viens de remarquer, j'espère qu'on conviendra déjà, que cette confusion n'est pas à beaucoup près si nuisible à la vision distincte, qu'on s'est imaginé, et qu'il est même possible d'en rendre l'effet insensible, sans même recourir aux moyens qu'on a découverts depuis, de réduire à rien l'aberration de la différente réfraction des rayons en employent différentes matières réfringentes. Car sans même diminuer l'espace de diffusion des images, on n'a qu'à placer l'oeil au lieu que je viens d'indiquer, et la vision ne sera plus troublée par la séparation des différentes couleurs; ce n'est alors que la diversité des distances *Ro* et *Vo* qui pourra causer dans l'oeil quelque confusion, parceque si le foyer de l'une tombe sur la rétine, celui de l'autre en peut être éloigné. Mais on sait, que quelque grand que soit l'espace *RV*, pourvu que la distance *oV* soit assez considérable, cet effet ne saurait être sensible.

75. **IIde Réflexion.** On n'aura donc à craindre que les cas, où les distances *oR* et *oV* deviennent extrêmement inégales, l'une n'étant par exemple que de quelques pouces, pendant que l'autre serait de plusieurs pieds, ou même quand l'une serait positive et l'autre négative, auquel cas la représentation dans l'oeil deviendrait sans doute insupportable. Mais on préviendra aisément cet accident facheux en empêchant seulement, que l'espace de diffusion *RV* ne devienne énormement grand; il suffit même de faire en sorte que la plus petite des distances *oR* ou *oV* soit encore assez considérable. Or il est toujours possible d'obtenir cet effet, sans avoir besoin d'employer deux ou plusieurs matières différentes en réfraction. Cependant il s'en faut beaucoup que je veuille négliger cet expédient, que je regarderais plutôt comme le plus sûr moyen pour porter les instruments dioptriques au plus haut degré de perfection, dont ils sont susceptibles, et dans cette vue je rendrai mes recherches si générales, qu'on les puisse appliquer à toutes les matières transparentes possibles, quelque différente que soit leur qualité réfractive.

76. **IIIème Réflexion.** Mais dans ce que je viens d'avancer sur la manière de rendre insensible l'effet de la différente réfrangibilité des rayons, j'ai entièrement fait abstraction de la première espèce de confusion, qui vient de l'ouverture des surfaces réfringentes, ou bien j'ai supposé que celle-ci soit réduite à rien, ou au moins rendue insensible. Car en effet, quand celle-ci est encore considérable, elle trouble non seulement la vision par soi même, mais elle rend aussi infructueux les moyens, qu'on aura pris pour rendre insensible l'effet de la diffusion. La raison deviendra bien évidente, quand on considère, que dans ce cas non seulement l'image principale sera répandue par un certain espace et multipliée selon toutes les couleurs possibles; mais que l'image extrême et aussi toutes les moyennes dans l'espace de confusion seront assujetties à une semblable diffusion, qu'il n'est plus possible de les délivrer de l'effet facheux qui en rejaillit sur la vision. Ainsi on ne saurait espérer un bon effet du lieu de l'oeil, que je viens d'indiquer, à moins qu'on n'ait déjà rendu insensible la confusion de la première espèce.

77. **Remarque.** Voilà donc déjà la troisième condition qui assigne à l'oeil son juste lieu; la première était tirée de la nature de l'oeil même qui exige toujours une certaine distance des objets, pour les voir distinctement; il faut que l'oeil soit placé à cette même distance derrière la dernière image, qu'un instrument dioptrique lui présente. Ensuite nous avons vu dans le chapitre

précédent qu'il est toujours un certain point dans l'axe, où l'oeil doit être placé, afin qu'il découvre tout le champ, que les rayons transmis par l'instrument représentent. Maintenant il se trouve une nouvelle condition qui marque le lieu, d'où les objets sont vûs sans aucune confusion de couleurs. Il s'agit donc toujours d'arranger les surfaces réfringentes en sorte que ces trois conditions se réunissent dans le même point, qui sera par conséquent alors le juste lieu de l'oeil, et c'est en quoi consiste une des plus importantes maximes, qu'on doit observer dans la construction des instruments dioptriques.

78. **Problème 11.** Quand les rayons de l'objet $E\varepsilon$ passent par deux surfaces réfringentes $PAP$ et $QBQ$ (Fig. 261.), où la réfraction moyenne est $n:1$ et $n^I:1$ et dont les rayons sont $f$ et $g$, déterminer l'espace de diffusion $Gg$ et le lieu de l'oeil $o^I$ où la vision devient distincte.

**Solution.** En conservant toujours les mêmes dénominations pour l'objet et les images principales $E\varepsilon = z$, $EA = a$, $AF = \alpha$, $FB = b$, $BG = \beta$, nous avons à considérer les formules suivantes:

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{n^I-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta}, \quad F\zeta = \frac{\alpha z}{na}, \quad G\eta = \frac{\alpha\beta z}{nn^I ab},$$

où les quantités $a$, $f$, $g$ et $z$ sont constantes en supposant variable l'une et l'autre raison de réfraction $n$ et $n^I$, et puisque l'intervalle $AB = \alpha + b$ demeure aussi invariable, nous aurons $db = -d\alpha$. Cela posé la première formule étant différentiée donne comme nous avons déjà vu:

$$d\alpha = -db = -\frac{\alpha(\alpha-f)dn}{nf} \quad \text{ou} \quad d\alpha = -db = -\frac{\alpha(a+\alpha)dn}{n(n-1)a},$$

or de la seconde nous tirons:

$$\frac{dn^I}{g} = -\frac{db}{bb} + \frac{dn^I}{\beta} - \frac{n^I d\beta}{\beta\beta},$$

et partant l'espace de diffusion cherché étant $Gg = d\beta$, nous aurons:

$$Gg = d\beta = -\frac{\beta\beta}{n^I bb}db + \frac{\beta dn^I}{n^I} - \frac{\beta\beta dn^I}{n^I g} = -\frac{\beta\beta}{n^I bb}db - \frac{\beta(\beta-g)}{n^I g}dn^I.$$

Substituons ici pour $db$ sa valeur $\frac{\alpha(\alpha-f)}{nf}dn$ pour avoir:

$$Gg = d\beta = -\frac{\alpha\beta\beta(\alpha-f)}{nn^I bbf}dn - \frac{\beta(\beta-g)}{n^I g}dn^I,$$

ou bien à cause de:

$$f = \frac{(n-1)a\alpha}{na+\alpha} \quad \text{et} \quad g = \frac{(n^I-1)b\beta}{n^I b+\beta}, \quad \text{donc} \quad \frac{\alpha-f}{f} = \frac{\alpha+a}{(n-1)a} \quad \text{et} \quad \frac{\beta-g}{g} = \frac{\beta+b}{(n^I-1)b},$$

on trouve:
$$Gg = d\beta = -\frac{\alpha\beta\beta(\alpha+a)}{nn^I(n-1)abb}dn - \frac{\beta(\beta+b)}{n^I(n^I-1)b}dn^I.$$

Pour le lieu de l'oeil, qui soit en $o^I$, on a $Go^I = \frac{G\eta \,.\, d\beta}{d\,.\,G\eta} = \frac{d\beta}{d\,.\,lG\eta}$, or: $lG\eta = l\alpha + l\beta - ln - ln^I - lb + l\frac{z}{a}$, d'où la différentiation donne:

$$d\,.\,lG\eta = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dn}{n} - \frac{dn^I}{n^I} - \frac{db}{b} = \frac{\alpha + b}{\alpha b}\,d\alpha + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dn}{n} - \frac{dn^I}{n^I},$$

introduisons ici les premières formules, comme les plus simples:

$$d\,.\,lG\eta = -\frac{\alpha\alpha\beta - n^I\alpha b\,(\alpha + b) + \alpha\,(n^I b + \beta)\,f}{nn^I bbf}\cdot dn - \frac{\beta}{n^I g}\,dn^I.$$

Maintenant on n'a qu'à diviser la valeur trouvée pour $d\beta$ par celle-ci, pour avoir la distance $Go^I$, qui détermine le juste lieu de l'oeil; ce qui mène à un calcul fort embarrassé.

79. **Coroll. 1.** On comprendra plus aisément l'ordre qui règne dans ces expressions en passant par degré. Ainsi pour la première surface réfringente nous avions:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right) \quad \text{et} \quad d\,.\,lF\zeta = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{dn}{n} = -\frac{dn}{n}\cdot\frac{\alpha}{f},$$

et ensuite pour la seconde surface nous avons d'une manière semblable d'abord $db = -d\alpha$ et depuis:

$$\frac{d\beta}{\beta} = -\frac{\beta\,db}{n^I bb} + \frac{dn^I}{n^I}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right) \quad \text{et} \quad d\,.\,lG\eta = d\,.\,lF\zeta + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dn^I}{n^I} - \frac{db}{b}.$$

80. **Coroll. 2.** Substituons ici pour $\frac{d\beta}{\beta}$ la valeur trouvée, pour avoir:

$$d\,.\,lG\eta = d\,.\,lF\zeta - \frac{db\,(n^I b + \beta)}{n^I bb} - \frac{dn^I}{n^I}\cdot\frac{\beta}{g},$$

et puisque $n^I b + \beta = \frac{(n^I - 1)\,b\beta}{g}$, cette formule se change en celle-ci:

$$d\,.\,lG\eta = d\,.\,lF\zeta - \frac{(n^I - 1)\,\beta\,db}{n^I bg} - \frac{\beta\,dn^I}{n^I g},$$

ou bien:
$$d\,.\,lG\eta = -\frac{\alpha\,dn}{nf} - \frac{\beta\,dn^I}{n^I g} - \frac{(n^I - 1)\,\beta\,db}{n^I bg}.$$

81. **Coroll. 3.** Nous aurons donc pour le lieu de l'oeil $o^I$ la distance:

$$Go^I = \frac{+\frac{\beta\beta\,db}{n^I bb} - \frac{\beta\,dn^I}{n^I}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right)}{+\frac{\alpha\,dn}{nf} + \frac{\beta\,dn^I}{n^I g} + \frac{(n^I - 1)\,\beta\,db}{n^I bg}},$$

d'où nous tirons à cause de $Bo^I = \beta - Go^I$:

$$Bo^I = \frac{\frac{\alpha\beta\,dn}{nf} + \frac{\beta\,dn^I}{n^I} + \frac{\beta\,db}{b}}{\frac{\alpha\,dn}{nf} + \frac{\beta\,dn^I}{n^I g} + \frac{(n^I - 1)\,\beta\,db}{n^I bg}}, \quad \text{puisque} \quad \frac{n^I - 1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta}.$$

82. **Réflexion.** Voyons sous quelles conditions l'espace de diffusion $Gg = d\beta$ pourrait être réduit à rien, la réfraction des deux milieux étant donnée. Posons donc $\frac{n(n-1)\,dn^I}{(n^I-1)\,dn} = N$, et il faudra résoudre cette équation:

$$\frac{a\beta(\alpha+a)}{ab} + N(\beta+b) = o,$$

considérons comme donné: 1° la distance de l'objet $EA = a$; 2° l'intervalle entre les surfaces $AB = \alpha + b$ qui soit $= s$ et 3° la distance de la seconde image à la seconde surface ou $BG = \beta$. Maintenant puisque $b = s - \alpha$, nous aurons multipliant par $ab$:

$$a\alpha\beta + a\alpha\beta + Na(ss - 2\alpha s + \alpha\alpha + \beta s - \alpha\beta) = o,$$

d'où il faut chercher $\alpha$, qui se trouve:

$$\alpha = \frac{2Nas + (N-1)\,a\beta \pm \sqrt{a\beta\,((N-1)^2 a\beta - 4Ns\,(a+s+\beta))}}{2\,(Na+\beta)},$$

dont tout le reste se détermine pourvu qu'on ait:

$$(N-1)^2\,a\beta > 4Ns\,(a+s+\beta),$$

d'où l'on voit que dans le cas $N = 1$ ou $\frac{dn^I}{n^I-1} = \frac{dn}{n(n-1)}$ la solution devient impossible.

Pour le cas où l'objet est infiniment éloigné on aura:

$$\text{ou} \quad \alpha = s \quad \text{ou} \quad \alpha = s + \frac{N-1}{N}\beta \qquad \text{donc} \qquad \text{ou} \quad b = o \quad \text{ou} \quad b = -\frac{(N-1)\beta}{N},$$

où le premier cas $\alpha = s$ ne saurait avoir lieu à cause de $b = o$; pour l'autre les rayons de courbure seront:

$$f = \frac{(n-1)(Ns + (N-1)\beta)}{nN} \quad \text{et} \quad g = \frac{(n^I-1)(N-1)\beta}{(n^I-1)N - n^I}.$$

Si l'on veut outre cela dans ce cas, que l'espace de confusion s'évanouisse, l'intervalle entre les surfaces $AB$ se détermine en sorte:

$$s = \frac{n^I(n-1)^2(N-1)(n^IN - N + 1)}{(n^I-1)^2 N^4}\beta - \frac{(N-1)}{N}\beta,$$

et toutes les fois que cette valeur devient positive, la solution réussit et on aura:

$$f = \frac{n^I(n-1)^3(N-1)(n^IN - N + 1)}{n(n^I-1)^2 N^4}\beta.$$

83. **Problème 12.** (Fig. 261.) Le nombre des surfaces réfringentes étant aussi grand qu'on voudra, les raisons de réfraction, qui leur conviennent, étant $n:1$, $n^I:1$, $n^{II}:1$ et et leurs rayons de courbure $f$, $g$, $h$, $i$ etc., déterminer pour chaque image tant son espace de diffusion que le lieu de l'oeil, d'où il serait vu distinctement, faisant abstraction de la confusion de la première espèce.

**Solution.** Posant pour l'objet $E\varepsilon = z$ et $EA = a$, et pour les images successivement formées les distances $AF = \alpha$, $FB = b$, $BG = \beta$, $GC = c$, $CH = \gamma$, $HD = d$, $DJ = \delta$ etc., les formules

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{n^I - 1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta}, \quad \frac{n^{II} - 1}{h} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma} \quad \text{etc.}$$

étant différentiées fourniront les valeurs suivantes pour les espaces de diffusion:

$$Ff = d\alpha = + \frac{\alpha dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right) = - db,$$

$$Gg = d\beta = \frac{\beta\beta d\alpha}{n^I bb} + \frac{\beta dn^I}{n^I}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right) = - dc,$$

$$Hh = d\gamma = \frac{\gamma\gamma d\beta}{n^{II} cc} + \frac{\gamma dn^{II}}{n^{II}}\left(1 - \frac{\gamma}{h}\right) = - dd,$$

$$Ji = d\delta = \frac{\delta\delta d\gamma}{n^{III} dd} + \frac{\delta dn^{III}}{n^{III}}\left(1 - \frac{\delta}{i}\right) = - de$$

etc.

Substituons ici successivement les valeurs précédentes, pour avoir:

$$d\alpha = - db = \frac{\alpha dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right),$$

$$d\beta = - dc = \frac{\alpha\beta\beta dn}{nn^I bb}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right) + \frac{\beta dn^I}{n^I}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right),$$

$$d\gamma = - dd = \frac{\alpha\beta\beta\gamma\gamma dn}{nn^I n^{II} bbcc}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right) + \frac{\beta\gamma\gamma dn^I}{n^I n^{II} cc}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right) + \frac{\gamma dn^{II}}{n^{II}}\left(1 - \frac{\gamma}{h}\right),$$

$$d\delta = - de = \frac{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta dn}{nn^I n^{II} n^{III} bbccdd}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right) + \frac{\beta\gamma\gamma\delta\delta dn^I}{n^I n^{II} n^{III} ccdd}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right) + \frac{\gamma\delta\delta dn^{II}}{n^{II} n^{III} dd}\left(1 - \frac{\gamma}{h}\right) + \frac{\delta dn^{III}}{n^{III}}\left(1 - \frac{\delta}{i}\right)$$

etc.

et maintenant la progression de ces formules est évidente.

Pour le lieu de l'oeil, il faut chercher les différentiels logarithmiques des images, qui nous fournissent ces formules:

$$d\,.\,lF\zeta = - \frac{\alpha dn}{nf},$$

$$d\,.\,lG\eta = d\,.\,lF\zeta - \frac{(n^I - 1)\beta db}{n^I bg} - \frac{\beta dn^I}{n^I g},$$

$$d\,.\,lH\theta = d\,.\,lG\eta - \frac{(n^{II} - 1)\gamma dc}{n^{II} ch} - \frac{\gamma dn^{II}}{n^{II} h},$$

$$d\,.\,lJ\iota = d\,.\,lH\theta - \frac{(n^{III} - 1)\delta dd}{n^{III} di} - \frac{\delta dn^{III}}{n^{III} i}$$

etc.

qui se développent dans les formes suivantes:

$$d\,.\,lF\zeta = \frac{dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right) - \frac{dn}{n},$$

$$d\,.\,lG\eta = d\,.\,lF\zeta + \frac{dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right)\cdot\frac{(n^{I}-1)\,\alpha\beta}{n^{I}bg} + \frac{dn^{I}}{n^{I}}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right) - \frac{dn^{I}}{n^{I}},$$

$$dl\,.\,H\theta = d\,.\,lG\eta + \frac{dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right)\cdot\frac{(n^{II}-1)\,\alpha\beta\beta\gamma}{n^{I}n^{II}bbch} + \frac{dn^{I}}{n^{I}}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right)\cdot\frac{(n^{II}-1)\,\beta\gamma}{n^{II}ch} + \frac{dn^{II}}{n^{II}}\left(1 - \frac{\gamma}{h}\right) - \frac{dn^{II}}{n^{II}}$$

etc.

où j'observe que la forme générale de ces expressions se réduit à celle-ci:

$$-\frac{dn}{n} + \frac{dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right)\left(1 + \frac{(n^{I}-1)\,\alpha\beta}{n^{I}bg} + \frac{(n^{II}-1)\,\alpha\beta\beta\gamma}{n^{I}n^{II}bbch} + \frac{(n^{III}-1)\,\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta}{n^{I}n^{II}n^{III}bbccdi} + \text{etc.}\right)$$

$$-\frac{dn^{I}}{n^{I}} + \frac{dn^{I}}{n^{I}}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right)\left(1 + \frac{(n^{II}-1)\,\beta\gamma}{n^{II}ch} + \frac{(n^{III}-1)\,\beta\gamma\gamma\delta}{n^{II}n^{III}ccdi} + \frac{(n^{IV}-1)\,\beta\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon}{n^{II}n^{III}n^{IV}ccddek} + \text{etc.}\right)$$

$$-\frac{dn^{II}}{n^{II}} + \frac{dn^{II}}{n^{II}}\left(1 - \frac{\gamma}{h}\right)\left(1 + \frac{(n^{III}-1)\,\gamma\delta}{n^{III}di} + \frac{(n^{IV}-1)\,\gamma\delta\delta\varepsilon}{n^{III}n^{IV}ddek} + \text{etc.}\right)$$

$$-\frac{dn^{III}}{n^{III}} + \frac{dn^{III}}{n^{III}}\left(1 - \frac{\delta}{i}\right)\left(1 + \frac{(n^{IV}-1)\,\delta\varepsilon}{n^{IV}ek} + \text{etc.}\right)$$

$$-\frac{dn^{IV}}{n^{IV}} + \frac{dn^{IV}}{n^{IV}}\left(1 - \frac{\iota}{k}\right)\left(1 + \text{etc.}\right)$$

on comprend aisément combien de ces termes il faut prendre pour chaque image, et ayant trouvé ces expressions, le lieu de l'oeil sera déterminé pour chaque cas en sorte:

$$Fo = \frac{d\alpha}{d\,.\,lF\zeta}, \quad Go^{I} = \frac{d\beta}{d\,.\,lG\eta}, \quad Ho^{II} = \frac{d\gamma}{d\,.\,lH\theta}, \quad Jo^{III} = \frac{d\delta}{d\,.\,lJ\iota} \quad \text{etc.}$$

84. **Coroll. 1.** En développant ces dernières formules nous trouverons:

$$Fo = \frac{\frac{\alpha dn}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right)}{-\frac{\alpha dn}{nf}} \quad \text{et delà } Ao = \alpha - Fo = f \text{ comme ci-dessus.}$$

Or en employant les premières valeurs nous aurons:

$$Go^{I} = \frac{\frac{\beta\beta d\alpha}{n^{I}bb} + \frac{\beta dn^{I}}{n^{I}}\left(1 - \frac{\beta}{g}\right)}{d\,.\,lF\zeta + \frac{(n^{I}-1)\,\beta d\alpha}{n^{I}bg} - \frac{\beta dn^{I}}{n^{I}g}},$$

d'où à cause de $Bo^{I} = \beta - Go^{I}$ nous tirons:

$$Bo^{I} = \frac{\beta d\,.\,lF\zeta + \frac{\beta d\alpha}{b} - \frac{\beta dn^{I}}{n^{I}}}{d\,.\,lF\zeta + \frac{(n^{I}-1)\,\beta d\alpha}{n^{I}bg} - \frac{\beta dn^{I}}{n^{I}g}} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta}{Bo^{I}} = \frac{d\,.\,lF\zeta + \frac{(n^{I}-1)\,\beta d\alpha}{n^{I}bg} - \frac{\beta dn^{I}}{n^{I}g}}{d\,.\,lF\zeta + \frac{d\alpha}{b} - \frac{dn^{I}}{n^{I}}},$$

$$\text{puisque } \frac{n^{I}-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^{I}}{\beta}.$$

85. **Coroll. 2.** De la même manière nous obtiendrons:

$$Co^{II} = \frac{\gamma d\,.\,lG\eta + \frac{\gamma d\beta}{c} - \frac{\gamma dn^{II}}{n^{II}}}{d\,.\,lG\eta + \frac{(n^{II}-1)\gamma d\beta}{n^{II}ch} - \frac{\gamma dn^{II}}{n^{II}h}} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma}{Co^{II}} = \frac{d\,.\,lG\eta + \frac{(n^{II}-1)\gamma d\beta}{n^{II}ch} - \frac{\gamma dn^{II}}{n^{II}h}}{d\,.\,lG\eta + \frac{d\beta}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}}},$$

$$Do^{III} = \frac{\delta d\,.\,lH\theta + \frac{\delta d\gamma}{d} - \frac{\delta dn^{III}}{n^{III}}}{d\,.\,lH\theta + \frac{(n^{III}-1)\delta d\gamma}{n^{III}di} - \frac{\delta dn^{III}}{n^{III}i}} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{Do^{III}} = \frac{d\,.\,lH\theta + \frac{(n^{III}-1)\delta d\gamma}{n^{III}di} - \frac{\delta dn^{III}}{n^{III}i}}{d\,.\,lH\theta + \frac{d\gamma}{d} - \frac{dn^{III}}{n^{III}}},$$

t ainsi de suite.

86. **Coroll. 3.** On peut encore transformer ces formules en sorte:

$$\frac{1}{Bo^{I}} = \frac{1}{g} + \frac{\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{g}\right) d\,.\,lF\zeta - \frac{da}{n^{I}bg}}{d\,.\,lF\zeta + \frac{da}{b} - \frac{dn^{I}}{n^{I}}} \quad \text{ou} \quad \frac{n^{I}}{Bo^{I}} = \frac{n^{I}-1}{g} - \frac{\frac{1}{b}\,d\,.\,lF\zeta - \frac{dn^{I}}{n^{I}g}}{d\,.\,lF\zeta + \frac{da}{b} - \frac{dn^{I}}{n^{I}}},$$

$$\frac{1}{Co^{II}} = \frac{1}{h} + \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{h}\right) d\,.\,lG\eta - \frac{d\beta}{n^{II}ch}}{d\,.\,lG\eta + \frac{d\beta}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}}} \quad \text{ou} \quad \frac{n^{II}}{Co^{II}} = \frac{n^{II}-1}{h} - \frac{\frac{1}{c}\,d\,.\,lG\eta - \frac{dn^{II}}{n^{II}h}}{d\,.\,lG\eta + \frac{d\beta}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}}},$$

$$\frac{1}{Do^{III}} = \frac{1}{i} + \frac{\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) d\,.\,lH\theta - \frac{d\gamma}{n^{III}di}}{d\,.\,lH\theta + \frac{d\gamma}{d} - \frac{dn^{III}}{n^{III}}} \quad \text{ou} \quad \frac{n^{III}}{Do^{III}} = \frac{n^{III}-1}{i} - \frac{\frac{1}{d}\,d\,.\,lH\theta - \frac{dn^{III}}{n^{III}i}}{d\,.\,lH\theta + \frac{d\gamma}{d} - \frac{dn^{III}}{n^{III}}}.$$

87. **I<sup></sup>ère Réflexion.** Puisqu'il s'agit de comparer le lieu de l'oeil, que la vision distincte ige, avec celui que le champ apparent demande, et qu'il faut même identifier ces deux lieux, il nviendra d'introduire ici les mêmes dénominations, dont nous nous sommes servis dans le chapitre cond. Posons donc comme là:

$$\alpha = \frac{a}{A}, \quad \beta = \frac{b}{B}, \quad \gamma = \frac{c}{C}, \quad \delta = \frac{d}{D} \quad \text{etc.}$$

nous aurons:

$$f = \frac{(n-1)a}{nA+1}, \quad g = \frac{(n^{I}-1)b}{n^{I}B+1}, \quad h = \frac{(n^{II}-1)c}{n^{II}C+1}, \quad i = \frac{(n^{III}-1)d}{n^{III}D+1} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{a}{f} = \frac{nA+1}{(n-1)A}, \quad \frac{\beta}{g} = \frac{n^{I}B+1}{(n^{I}-1)B}, \quad \frac{\gamma}{h} = \frac{n^{II}C+1}{(n^{II}-1)C}, \quad \frac{\delta}{i} = \frac{n^{III}D+1}{(n^{III}-1)D} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{f} - 1 = \frac{A+1}{(n-1)A}, \quad \frac{\beta}{g} - 1 = \frac{B+1}{(n^{I}-1)B}, \quad \frac{\gamma}{h} - 1 = \frac{C+1}{(n^{II}-1)C}, \quad \frac{\delta}{i} - 1 = \frac{D+1}{(n^{III}-1)D} \quad \text{etc.}$$

$$1 - \frac{f}{\alpha} = \frac{A+1}{nA+1}, \quad 1 - \frac{g}{\beta} = \frac{B+1}{n^{I}B+1}, \quad 1 - \frac{h}{\gamma} = \frac{C+1}{n^{II}C+1}, \quad 1 - \frac{i}{\delta} = \frac{D+1}{n^{III}D+1} \quad \text{etc.}$$

d'où nous tirons d'abord les formules suivantes:

$$d\alpha = -\frac{a(A+1)\,dn}{n(n-1)AA},$$

$$d\beta = \frac{d\alpha}{n^{I}BB} - \frac{b(B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)BB},$$

$$d\gamma = \frac{d\beta}{n^{II}CC} - \frac{c(C+1)\,dn^{II}}{n^{II}(n^{II}-1)CC},$$

$$d\delta = \frac{d\gamma}{n^{III}DD} - \frac{d(D+1)\,dn^{III}}{n^{III}(n^{III}-1)DD}$$

etc.

ou bien en les développant:

$$d\alpha = -\frac{a(A+1)\,dn}{n(n-1)AA},$$

$$d\beta = -\frac{a(A+1)\,dn}{n(n-1)n^{I}AABB} - \frac{b(B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)BB},$$

$$d\gamma = -\frac{a(A+1)\,dn}{n(n-1)n^{I}n^{II}AABBCC} - \frac{b(B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)n^{II}BBCC} - \frac{c(C+1)\,dn^{II}}{n^{II}(n^{II}-1)CC},$$

$$d\delta = -\frac{a(A+1)\,dn}{n(n-1)n^{I}n^{II}n^{III}AABBCCDD} - \frac{b(B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)n^{II}n^{III}BBCCDD} - \frac{c(C+1)\,dn^{II}}{n^{II}(n^{II}-1)n^{III}CCDD} - \frac{d(D+1)\,dn^{III}}{n^{III}(n^{III}-1)DD}$$

etc.

Ensuite pour le changement dans la grandeur des images:

$$d\,.\,lF\zeta = -\frac{(nA+1)\,dn}{n(n-1)A},$$

$$d\,.\,lG\eta = d\,.\,lF\zeta + \frac{(n^{I}B+1)\,d\alpha}{n^{I}Bb} - \frac{(n^{I}B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)B},$$

$$d\,.\,lH\theta = d\,.\,lG\eta + \frac{(n^{II}C+1)\,d\beta}{n^{II}Cc} - \frac{(n^{II}C+1)\,dn^{II}}{n^{II}(n^{II}-1)C},$$

$$d\,.\,lJ\iota = d\,.\,lH\theta + \frac{(n^{III}D+1)\,d\gamma}{n^{III}Dd} - \frac{(n^{III}D+1)\,dn^{III}}{n^{III}(n^{III}-1)D}$$

etc.

le développement des ces formules nous menerait à des expressions trop embrouillées. Enfin les formules du coroll. 3 deviendront:

$$\frac{f}{Ao} = 1,$$

$$\frac{g}{Bo^{I}} = 1 - \frac{\frac{(B+1)}{n^{I}B+1}\,d\,.\,lF\zeta - \frac{d\alpha}{n^{I}b}}{d\,.\,lF\zeta + \frac{d\alpha}{b} - \frac{dn^{I}}{n^{I}}},$$

$$\frac{h}{Co^{II}} = 1 - \frac{\frac{(C+1)}{n^{II}C+1}d.lG\eta - \frac{d\beta}{n^{II}c}}{d.lG\eta + \frac{d\beta}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}}},$$

$$\frac{i}{Do^{III}} = 1 - \frac{\frac{(D+1)}{n^{III}D+1}d.lH\theta - \frac{d\gamma}{n^{III}d}}{d.lH\theta + \frac{d\gamma}{d} - \frac{dn^{III}}{n^{III}}}$$

etc.

Ces expressions paraissent les plus commodes pour identifier les deux lieux où l'oeil doit être placé.

88. **II^de Réflexion.** Comme il est de la dernière importance de bien déterminer le lieu de l'oeil derrière la dernière surface d'où il voit les objets sans aucune confusion de couleur, il était bien nécessaire de détailler ces formules pour autant de surfaces réfringentes, qu'on voudra; et maintenant la loi de progression est évidente. Cependant on rencontre ici encore un grand obstacle de la part des valeurs trouvées pour les différentiels logarithmiques $d.lF\zeta$, $d.lG\eta$, $d.lH\theta$ etc., qui en les développant, deviennent bientôt si compliquées, qu'on n'en saurait espérer presque aucun avantage dans l'application, pendent que celles des $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$ etc., sont beaucoup plus simples et assez propres pour en faire l'application. Mais il arrive ici très heureusement, ce qu'il aurait été presqu'impossible de prévoir, qu'en identifiant ces lieux trouvés pour l'oeil avec ceux que la vision du champ exige, on parvient contre toute attente à des équations très simples, dont on pourra se promettre de très grands avantages. Pour mettre cela dans tout son jour, j'en ferai le sujet du chapitre suivant.

---

## Chapitre IV.

### Sur le lieu le plus avantageux de l'oeil.

89. **Définition.** Les conditions requises pour le lieu de l'oeil sont deux équations, par lesquelles les trois lieux marqués ci-dessus: 1° celui qui exige une certaine distance de la dernière image; 2° celui qu'exige la vision du champ apparent et 3° celui qu'exige la vision sans confusion de couleurs, sont réunis dans un même point.

90. **Remarque.** Nous avons déjà observé, que chaque oeil est ajusté à une certaine distance, à laquelle il voit les objets le plus distinctement et que cette distance varie très considérablement selon la disposition des yeux. Cette juste distance de chaque oeil à été marquée par la lettre $l$, et partant, en vertu de cette condition, il faut que l'oeil se trouve à cette distance $l$ derrière la dernière image, représentée par les surfaces réfringentes. Ensuite dans le second chapitre nous avons marqué sur l'axe les points, où le champ apparent tout entier est aperçu, et celui de ces points qui repond à la dernière surface réfringente, donne le lieu pour l'oeil. Enfin dans le chapitre précédent nous avons aussi découvert un tel lieu pour l'oeil, duquel il voit les objets sans

aucune confusion de couleurs; il s'agit donc à présent de chercher les conditions, sous lesquelles ces trois lieux se réunissent dans un même point. Pour cet effet on n'aura qu'à égaler entr'elles les distances de ces trois lieux à la dernière surface réfringente, ce qui donnera deux équations, auxquelles, quand on aura satisfait, chacune de ces trois distances indiquera le lieu le plus avantageux, où l'on puisse placer l'oeil.

91. **Réflexion.** Puisque pour cet effet il faut satisfaire à deux équations, on comprend aisément qu'une telle disposition n'est pas toujours possible. Ainsi quand il n'y a qu'une surface réfringente il n'est plus dans notre pouvoir d'égaler les trois dites distances, puisque la seconde doit être nulle dans ce cas, et la troisième égale au rayon de curbure de la surface; par cette raison nous sommes obligés de commencer nos recherches par deux surfaces réfringentes. Ensuite je dois encore avertir que le lieu de l'oeil doit nécessairement se trouver derrière la dernière surface, donc, quand le calcul le marque devant cette surface, c'est un signe que le cas est impossible. Enfin je conserverai toujours les mêmes dénominations, et partant je ne les détaillerai plus dans les problèmes suivants.

92. **Problème 13.** Lorsque les rayons passent par deux surfaces réfringentes *PAP* et *QBQ*, trouver les conditions requises pour procurer à l'oeil le lieu le plus avantageux.

**Solution.** La juste distance des objets à l'oeil étant posée $= l$ (Fig. 259 et 261.), le premier lieu de l'oeil doit se trouver derrière le point $B$ à la distance $= \beta + b$. Or le second lieu a été trouvé à la distance $Bq = \frac{\pi^I g}{\psi^I}$ (61) d'où l'on a $\frac{g}{Bq} = \frac{\psi^I}{\pi^I}$, enfin la vision distincte exige la distance $Bo^I$, de sorte qu'en posant $Bo^I = Bq$, on aura par le § 87 cette équation:

$$\frac{\psi^I}{\pi^I} = 1 - \frac{\frac{(B+1)}{n^I B + 1}\, d\,.\, lF\zeta - \frac{da}{n^I b}}{d\,.\, lF\zeta + \frac{da}{b} - \frac{dn^I}{n^I}},$$

dont l'évolution donne:

$$\left(\frac{\psi^I}{\pi^I} - 1 + \frac{B+1}{n^I B + 1}\right) d\,.\, lF\zeta + \left(\frac{\psi^I}{\pi^I} - 1 + \frac{1}{n^I}\right)\frac{da}{b} - \left(\frac{\psi^I}{\pi^I} - 1\right)\frac{dn^I}{n^I} = o.$$

Or puisque $n^I\psi^I = (n^I - 1)\,\pi^I - \psi$, et partant:

$$\pi^I = \frac{n^I\psi^I + \psi}{n^I - 1}, \quad \text{on a } \frac{\psi^I}{\pi^I} = \frac{(n^I - 1)\,\psi^I}{n^I\psi^I + \psi},$$

donc:

$$\left(\frac{(n^I - 1)\,\psi^I}{n^I\psi^I + \psi} - \frac{(n^I - 1)\,B}{n^I B + 1}\right) d\,.\, lF\zeta + \left(\frac{(n^I - 1)\,\psi^I}{n^I\psi^I + \psi} - \frac{(n^I - 1)}{n^I}\right)\frac{da}{b} - \left(\frac{\psi^I}{\pi^I} - 1\right)\frac{dn^I}{n^I} = o.$$

Multiplions par $\pi^I = \frac{n^I\psi^I + \psi}{n^I - 1}$ pour avoir:

$$\frac{\psi^I - B\psi}{n^I B + 1}\, d\,.\, lF\zeta - \frac{\psi}{n^I}\cdot\frac{da}{b} - (\psi^I - \pi^I)\,\frac{dn^I}{n^I} = o.$$

Maintenant puisque $\varphi = n\psi$ et $b = \frac{a\psi(Bn^I + 1)}{n^I A(\psi^I - B\psi)}$, multiplions par cette valeur $b$:

$$\frac{a\psi}{n^I A}\, d\,.\, lF\zeta - \frac{\psi}{n^I}\cdot d\alpha - b(\psi^I - \pi^I)\frac{dn^I}{n^I} = o,$$

ou:

$$Ab(\psi^I - \pi^I)\, dn^I + \psi(Ad\alpha - ad\,.\,lF\zeta) = o.$$

Or:

$$Ad\alpha = -\frac{adn(A+1)}{n(n-1)A} \quad \text{et} \quad -ad\,.\,lF\zeta = +\frac{a(nA+1)\,dn}{n(n-1)A},$$

le sorte que:

$$Ad\alpha - ad\,.\,lF\zeta = \frac{adn(nA - A)}{n(n-1)A} = \frac{adn}{n},$$

et par conséquent l'une des conditions requises est contenue dans cette équation:

$$\psi adn + nA(\psi^I - \pi^I)\, bdn^I = o.$$

L'autre condition demande $b + l = \frac{\pi^I g}{\psi^I}$ et par nos dénominations:

$$l = \frac{(n^I - 1)\pi^I b}{\psi^I(n^I B + 1)} - \frac{b}{B} = \frac{b(n^I\psi^I + \psi)}{\psi^I(n^I B + 1)} - \frac{b}{B} = \frac{b(B\psi - \psi^I)}{B\psi^I(n^I B + 1)},$$

Donc puisque:

$$b = \frac{a\varphi(n^I B + 1)}{nn^I A(\psi^I - B\psi)},$$

cette expression se réduit à cette forme très simple, qui renferme la seconde condition:

$$l = -\frac{a\varphi}{nn^I AB\psi^I} = -\frac{a\psi}{n^I AB\psi^I}.$$

93. **Coroll. 1.** Voilà donc les deux conditions requises pour le lieu de l'oeil; la première qui fait que l'oeil voye la dernière image à sa juste distance $l$, et qu'il apperçoive aussi le champ tout entier, demande cette équation:

$$l = -\frac{a\varphi}{nn^I AB\psi^I};$$

l'autre, qui fait que l'objet soit vu sans aucune confusion de couleurs, sera obtenue en satisfaisant à cette équation:

$$\psi adn + nA(\psi^I - \pi^I)\, bdn^I = o.$$

94. **Coroll. 2.** Après avoir rempli ces deux conditions, le lieu de l'oeil se trouvera derrière la seconde surface à la distance $Bo^I = Bq = \frac{\pi^I g}{\psi^I}$, laquelle doit nécessairement être positive. Quand elle devient négative, cette avantageuse position de l'oeil ne saurait avoir lieu, et la vision sera assujettie à des défauts très considérables.

95. **Coroll. 3.** S'il était possible de rendre outre cela encore la valeur de $d\beta$ égale à zero, on atteindrait au plus haut degré de perfection, quisqu'on préviendrait non seulement la confusion

des couleurs, mais l'espace de diffusion serait aussi anéanti. On arriverait donc à ce but en remplissant cette équation:

$$o = \frac{a(A+1)dn}{n(n-1)AA} + \frac{b(B+1)dn^I}{n^I-1} = o.$$

96. **Remarque.** Il faut bien distinguer ces conditions par rapport au degré de nécessité, où l'on est de les remplir. La première qui dépend de la nature de l'oeil, est la plus nécessaire, et quelqu'imparfait que soit un instrument dioptrique, on prétend qu'on le puisse ajuster à la nature de l'oeil, et que la dernière image en soit éloignée à la juste distance, quoique cette distance permette une latitude très considérable. La seconde condition, que l'oeil découvre le champ tout entier, est presque aussi essentielle, et on n'y saurait souffrir un défaut que dans les petits perspectifs de poche, où la valeur de $\frac{\pi^I g}{\psi^I}$ devient négative. Les autres conditions aboutissent à rendre la vision plus parfaite par rapport à la différente réfrangibilité des rayons; on y peut distinguer deux degrés, le premier délivre la vision de la confusion des couleurs et est compris dans cette équation: $\psi adn + nA(\psi^I - \pi^I)bdn^I = o$, et le second rapporté au § précédent procure le plus haut degré de distinction, mais conjointement à le premier, qui est par cette raison plus nécessaire à être observé. Cette remarque est générale et regarde également tous les cas, que je m'envais encore développer.

97. **Problème 14.** Lorsque les rayons passent par trois surfaces réfringentes, trouver les conditions requises pour procurer à l'oeil le lieu le plus avantageux.

**Solution.** Le premier lieu de l'oeil doit se trouver derrière le point $C$ à la distance $= l + \gamma$ (Fig. 259 et 261.), et à cause du champ apparent cette distance est $Cr = \frac{\pi^{II}h}{\psi^{II}}$, ainsi la première condition demande cette équation $l = \frac{\pi^{II}h}{\psi^{II}} - \gamma$. Or dans le § 61 nous avons trouvé

$$h = \frac{a\varphi(n^{II}-1)}{nn^In^{II}AB(\psi^{II} - C\psi^I)} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{a\varphi(n^{II}C+1)}{nn^In^{II}ABC(\psi^{II} - C\psi^I)}$$

d'où:

$$\pi^{II}h - \psi^{II}\gamma = \frac{a\varphi((n^{II}-1)C\pi^{II} - n^{II}C\psi^{II} - \psi^{II})}{nn^In^{II}ABC(\psi^{II} - C\psi^I)}.$$

Mais $(n^{II}-1)\pi^{II} = n^{II}\psi^{II} + \psi^I$, et partant:

$$\pi^{II}h - \psi^{II}\gamma = -\frac{a\varphi}{nn^In^{II}ABC},$$

d'où la première condition est comprise dans cette équation:

$$l = -\frac{a\varphi}{nn^In^{II}ABC\psi^{II}}.$$

Pour l'autre condition il faut rendre $Cr = Co^{IV}$, donc puisque $\frac{h}{Cr} = \frac{\psi^{II}}{\pi^{II}}$, nous avons cette équation:

$$\frac{\psi^{II}}{\pi^{II}} - 1 + \frac{\frac{C+1}{n^{II}C+1}\, d.\,lG\eta + \frac{d\beta}{n^{II}c}}{d.\,lG\eta + \frac{d\beta}{c} - \frac{dn^{II}}{n^{II}}} = o,$$

qui se réduit à celle-ci:

$$\left(\frac{\psi^{II}}{\pi^{II}} - \frac{(n^{II}-1)C}{n^{II}C+1}\right) d\,.\,lG\eta + \left(\frac{\psi^{II}}{\pi^{II}} - \frac{(n^{II}-1)}{n^{II}}\right)\frac{d\beta}{c} - \left(\frac{\psi^{II}}{\pi^{II}} - 1\right)\frac{dn^{II}}{n^{II}} = o,$$

multiplions par $\pi^{II} = \frac{n^{II}\psi^{II}+\psi^{I}}{n^{II}-1}$, pour avoir:

$$\left(\psi^{II} - \frac{n^{II}C\psi^{II} - C\psi^{I}}{n^{II}C+1}\right) d\,.\,lG\eta + \left(\psi^{II} - \frac{n^{II}\psi^{II}-\psi^{I}}{n^{II}}\right)\frac{d\beta}{c} - (\psi^{II} - \pi^{II})\frac{dn^{II}}{n^{II}} = o,$$

ou

$$-\left(\frac{\psi^{II} - C\psi^{I}}{n^{II}C+1}\right) d\,.\,lG\eta + \frac{\psi^{I}}{n^{II}}\cdot\frac{d\beta}{c} + (\psi^{II} - \pi^{II})\frac{dn^{II}}{n^{II}} = o,$$

or

$$\frac{\psi^{II} - C\psi^{I}}{n^{II}C+1} = \frac{a\varphi}{nn^{I}n^{II}ABc},$$

donc, multipliant par $nn^{I}n^{II}ABc$, nous aurons:

$$-a\varphi d\,.\,lG\eta + nn^{I}AB\psi^{I}d\beta + nn^{I}AB(\psi^{II} - \pi^{II})\,cdn^{II} = o.$$

Substituons ici pour $d\,.\,lG\eta$ et $d\beta$ les valeurs assignées ci-dessus (87):

$$\left.\begin{aligned} &-a\varphi d\,.\,lF\zeta - \frac{a\varphi(n^{I}B+1)\,d\alpha}{n^{I}Bb} + \frac{a\varphi(n^{I}B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)B} + nn^{I}AB(\psi^{II}-\pi^{II})\,cdn^{II} \\ &+ \frac{nA\psi^{I}d\alpha}{B} - \frac{nn^{I}A(B+1)\,b\,\psi^{I}dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)B} \end{aligned}\right\} = o,$$

mais $a\varphi(n^{I}B+1) = nn^{I}A(\psi^{I} - B\psi)\,b$, d'où l'on obtient:

$$-a\varphi d\,.\,lF\zeta + nA\psi\,d\alpha - \frac{nn^{I}A(\psi^{I}+\psi)\,bdn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)} + nn^{I}AB(\psi^{II}-\pi^{II})\,cdn^{II} = o.$$

Or dans le problème précédent, nous avons vu que:

$$Ad\alpha - ad\,.\,lF\zeta = \frac{adn}{n} \quad \text{et partant à cause de } n\psi = \varphi$$

$$nA\psi d\alpha - a\varphi d\,.\,lF\zeta = \frac{a\varphi dn}{n}.$$

Ensuite puisque: $\pi^{I} = \frac{n^{I}\psi^{I}+\psi}{n^{I}-1}$, et $\pi^{I} - \psi^{I} = \frac{\psi^{I}+\psi}{n^{I}-1}$,

notre équation prendra cette forme:

$$\frac{a\varphi dn}{n} + nAb(\psi^{I} - \pi^{I})\,dn^{I} + nn^{I}ABc(\psi^{II} - \pi^{II})\,dn^{II} = o.$$

98. **Coroll.** Après avoir satisfait à ces deux conditions, l'oeil doit être placé derrière la troisième surface à la distance $Cr = \frac{\pi^{II}h}{\psi^{II}}$, pourvu qu'elle soit positive; et la confusion s'évanouira tout à fait, quand on pourra encore satisfaire à cette équation $d\gamma = o$, ou bien:

$$\frac{a(A+1)\,dn}{n(n-1)\,n^{I}AABB} + \frac{b(B+1)\,dn^{I}}{n^{I}(n^{I}-1)\,BB} + \frac{c(C+1)\,dn^{II}}{n^{II}-1} = o.$$

99. **Problème 15.** Lorsque les rayons passent par quatre surfaces réfringentes, trouver les conditions requises pour procurer à l'oeil le lieu le plus avantageux.

**Solution.** Le premier lieu de l'oeil doit se trouver derrière le point $D$ à la distance $= l + \delta$, et à cause du champ cette distance doit être $Ds = \frac{\pi^{III} i}{\psi^{III}}$, de sorte que la première condition fournit cette égalite $l = \frac{\pi^{III} i}{\psi^{III}} - \delta$, qui, par les substitutions du § 61, se change en celle-ci:

$$l = -\frac{a\varphi}{nn^I n^{II} n^{III} ABCD\psi^{III}}.$$

Pour l'autre condition il faut faire $Ds = Do^{III}$, et puisque:

$$\frac{i}{Do^{III}} = \frac{i}{Ds} = \frac{\psi^{III}}{\pi^{III}},$$

nous aurons:
$$\frac{\psi^{III}}{\pi^{III}} - 1 + \frac{\frac{D+1}{n^{III}D+1}\, d\,.\, lH\theta + \frac{d\gamma}{n^{III}d}}{d\,.\, lH\theta + \frac{d\gamma}{d} - \frac{dn^{III}}{n^{III}}} = o,$$

ou bien:

$$\left(\frac{\psi^{III}}{\pi^{III}} - \frac{(n^{III}-1)D}{n^{III}D+1}\right) d\,.\, lH\theta + \left(\frac{\psi^{III}}{\pi^{III}} - \frac{n^{III}+1}{n^{III}}\right)\frac{d\gamma}{d} - \left(\frac{\psi^{III}}{\pi^{III}} - 1\right)\frac{dn^{III}}{n^{III}} = o,$$

multiplions par:
$$\pi^{III} = \frac{n^{III}\psi^{III} + \psi^{II}}{n^{III}-1},$$

pour avoir:
$$\frac{\psi^{III} - D\psi^{II}}{n^{III}D+1}\, d\,.\, lH\theta - \frac{\psi^{II}}{n^{III}}\cdot\frac{d\gamma}{d} - (\psi^{III} - \pi^{III})\frac{dn^{III}}{n^{III}} = o.$$

Or:
$$\frac{\psi^{III} - D\psi^{II}}{n^{III}D+1} = \frac{a\varphi}{nn^I n^{II} n^{III} ABCd},$$

donc multipliant par $-nn^I n^{II} n^{III} ABCd$

on a:
$$-a\varphi d\,.\, lH\theta + nn^I n^{II} ABC\psi^{II} d\gamma + nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} = o,$$

et substituant pour $d\,.\, lH\theta$ et $d\gamma$:

$$\left.\begin{aligned} -a\varphi d\,.\, lG\eta - \frac{a\varphi(n^{II}C+1)d\beta}{n^{II}Cc} + \frac{a\varphi(n^{II}C+1)dn^{II}}{n^{II}(n^{II}-1)C} + nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} \\ + \frac{nn^I AB\psi^{II} d\beta}{C} - \frac{nn^I n^{II} AB(C+1)c\psi^{II} dn^{II}}{n^{II}(n^{II}-1)C} \end{aligned}\right\} = o,$$

or:
$$a\varphi(n^{II}C+1) = nn^I n^{II} ABc(\psi^{II} - C\psi^I),$$

donc:

$$-a\varphi d\,.\, lG\eta + nn^I AB\psi^I d\beta - \frac{nn^I ABC(\psi^{II} + \psi^I)dn^{II}}{n^{II}-1} + nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} = o,$$

ou bien à cause de: $\frac{\psi^{II} + \psi^{I}}{n^{II} - 1} = \pi^{II} - \psi^{II}$

$$-a\varphi d\,.\,lG\eta + nn^{I}AB\psi^{I}d\beta + nn^{I}ABc\,(\psi^{II} - \pi^{II})\,dn^{II} + nn^{I}n^{II}ABCd\,(\psi^{III} - \pi^{III})\,dn^{III} = o.$$

Mais nous avons déjà trouvé dans le problème précédent:

$$-a\varphi d\,.\,lG\eta + nn^{I}AB\psi^{I}d\beta = \frac{a\varphi dn}{n} + nAb\,(\psi^{I} - \pi^{I})\,dn^{I},$$

d'où notre seconde condition sera contenue dans cette équation:

$$\frac{a\varphi dn}{n} + nAb\,(\psi^{I} - \pi^{I})\,dn^{I} + nn^{I}ABc\,(\psi^{II} - \pi^{II})\,dn^{II} + nn^{I}n^{II}ABCd\,(\psi^{III} - \pi^{III})\,dn^{III} = o.$$

Alors on aura pour le lieu de l'oeil $Ds = Do^{III} = \frac{\pi^{III}i}{\psi^{III}}$ et si l'on veut détruire encore l'espace de diffusion il faut observer cette équation:

$$\frac{a\,(A+1)\,dn}{n\,(n-1)\,n^{I}n^{II}AABBCC} + \frac{b\,(B+1)\,dn^{I}}{n^{I}\,(n^{I}-1)\,n^{II}BBCC} + \frac{c\,(C+1)\,dn^{II}}{n^{II}\,(n^{II}-1)\,CC} + \frac{d\,(D+1)\,dn^{III}}{n^{III}-1} = o.$$

100. **I^ère^ Réflexion.** La loi de progression de ces formules est déjà si évidente, puisque chaque cas se reduit au précédent, qu'il serait superflu d'étendre ces mêmes recherches a un plus grand nombre de surfaces. Il ne reste donc qu'à mettre devant les yeux les déterminations que nous venons de découvrir et d'abord pour la première condition nous aurons:

| Nombre des surfaces. | Distance de l'oeil à la dernière. | Équations qui renferment la première condition. |
|---|---|---|
| 2 | $Bo^{I} = \frac{\pi^{I}g}{\psi^{I}}$ | $a\varphi + nn^{I}AB\psi^{I}l = o,$ |
| 3 | $Co^{II} = \frac{\pi^{II}h}{\psi^{II}}$ | $a\varphi + nn^{I}n^{II}ABC\psi^{II}l = o,$ |
| 4 | $Do^{III} = \frac{\pi^{III}i}{\psi^{III}}$ | $a\varphi + nn^{I}n^{II}n^{III}ABCD\psi^{III}l = o,$ |
| 5 | $Eo^{IV} = \frac{\pi^{IV}k}{\psi^{IV}}$ | $a\varphi + nn^{I}n^{II}n^{III}n^{IV}ABCDE\psi^{IV}l = o$ |
| | etc. | etc. |

où l'on voit que pour le cas d'une seule surface on aurait $Ao = \frac{\pi f}{\psi}$ et $a\varphi + nA\psi l = o$. Donc puisque $\pi = o$, la distance $Ao$ s'évanouit, et à cause de $\varphi = n\psi$ il faudrait qu'il fût $l = -\frac{a}{A} = -\alpha$ ou $\alpha = -l$.

101. **II^de^ Réflexion.** Représentons de la même manière les équations, qui renferment la seconde condition pour chaque nombre de surfaces, et pour une plus grande uniformité au lieu de $\varphi$ écrivons $n\psi$ et nous aurons:

| Pour le nombre des faces. | Équations qui renferment la seconde condition. |
|---|---|
| 2 | $a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)dn^I = o,$ |
| 3 | $a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II})dn^{II} = o,$ |
| 4 | $a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II})dn^{II} +$ $nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} = o,$ |
| 5 | $a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II})dn^{II} +$ $nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} + nn^I n^{II} n^{III} ABCDe(\psi^{IV} - \pi^{IV})dn^{IV} = o$ |
| | etc. |

où la régularité de la progression est fort simple. Suivant cette loi on aurait pour le cas d'une surface cette équation: $a\psi dn = o$, et partant dans ce cas cette condition ne saurait être remplie

102. **III^ème Réflexion.** Comme la méthode qui nous a conduit a ces équations assez simples, est assujettie à bien des détours, on ne saurait douter, qu'il n'y eut une autre méthode par laquelle on pourrait plus aisément parvenir au même but. Pour découvrir une telle méthode je remarque d'abord, que les équations trouvées pour la première condition, qui donnent des valeur égales à la distante $l$, peuvent être employées à faciliter le calcul. En effet on voit d'abord qu puisque dans chaque cas l'oeil doit être placé dans les points $o$, $o^I$, $o^{II}$; $o^{III}$ etc. (Fig. 261.), l'imag étant derrière lui en $F$, $G$, $H$ etc., il faut que les distances $oF$, $o^IG$, $o^{II}H$ etc., deviennent égale à $-l$. Ce qui nous fournit d'abord ces équations pour chaque nombre de surfaces:

| | |
|---|---|
| 1 | $-l = \frac{a\varphi}{nA\psi} = \frac{d\alpha}{d\,.\,lF\zeta},$ |
| 2 | $-l = \frac{a\varphi}{nn^I AB\psi^I} = \frac{d\beta}{d\,.\,lG\eta},$ |
| 3 | $-l = \frac{a\varphi}{nn^I n^{II} ABC\psi^{II}} = \frac{d\gamma}{d\,.\,lH\theta},$ |
| 4 | $-l = \frac{a\varphi}{nn^I n^{II} n^{III} ABCD\psi^{III}} = \frac{d\delta}{d\,.\,lJ\iota}$ |
| | etc. |

Posons pour rendre la chose plus évidente:

$$a\varphi d\,.\,lF\zeta - nA\psi d\alpha = P,$$

$$a\varphi d\,.\,lG\eta - nn^I AB\psi^I d\beta = Q,$$

$$a\varphi d\,.\,lH\theta - nn^I n^{II} ABC\psi^{II} d\gamma = R,$$

$$a\varphi d\,.\,lJ\iota - nn^I n^{II} n^{III} ABCD\psi^{III} d\delta = S$$

etc.

où après avoir remarqué que $P = -\frac{a\varphi dn}{n} = -a\psi dn$ je prend les différences:

$$Q - P = \frac{a\varphi(n^I B + 1)}{n^I Bb} d\alpha - \frac{a\varphi(n^I B + 1) dn^I}{n^I(n^I - 1) B} - nA(n^I B\psi^I d\beta - \psi d\alpha),$$

où: $a\varphi(n^I B + 1) = nn^I Ab(\psi^I - B\psi)$ et $n^I B\psi^I d\beta = \frac{\psi^I d\alpha}{B} - \frac{(B+1) b\psi^I dn^I}{(n^I - 1) B}$;

donc:

$$\frac{Q-P}{nA} = \frac{\psi^I - B\psi}{B} d\alpha - \frac{b(\psi^I - B\psi) dn^I}{(n^I - 1) B} - \frac{\psi^I d\alpha}{B} + \psi d\alpha + \frac{(B+1) b\psi^I dn^I}{(n^I - 1) B} = \frac{b(\psi^I + \psi) dn^I}{n^I - 1},$$

or: $\frac{\psi^I + \psi}{n^I - 1} = \pi^I - \psi^I$ et partant $\frac{Q-P}{nA} = -b(\psi^I - \pi^I) dn^I$,

ou:

$$Q = P - nAb(\psi^I - \pi^I) dn^I.$$

De la même manière on trouvera:

$$R = Q - nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II}) dn^{II}; \quad S = R - nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III}) dn^{III} \text{ etc.}$$

et partant quelque grand que soit le nombre des surfaces on aura:

$$0 = a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I) dn^I + nn^I ABc(\psi^{II} - \pi^{II}) dn^{II} + nn^I n^{II} ABCd(\psi^{III} - \pi^{III}) dn^{III} \text{ etc.}$$

103. **Remarque.** Maintenant nous voyons, de quelle importance sont les nouvelles dénominations, que nous avons introduites dans les calculs du second chapitre, où il s'agissait seulement de réduire la détermination du champ apparent et du lieu de l'oeil à des formules assez simples, et dont on sache la loi de progression pour autant de surfaces réfringentes, qu'on voudra. Alors il était certainement impossible de prévoir, que les mêmes dénominations pourraient être propre à abréger les formules, qui servent à détruire l'effet de la différente réfraction des rayons, ou à le rendre au moins insensible. En n'employant que les premiers éléments, ces formules, en augmentant le nombre des surfaces, sont devenues bientôt si compliquées, qu'il n'aurait pas été possible d'en retirer quelque sécours pour la pratique, mais en y introduisant les dénominations du chapitre second, ces expressions si compliquées ont enfin été réduites à une très grande simplicité, de sorte que je ne doute plus d'assurer que toute la perfection, dont la Théorie de la Dioptrique est susceptible, doit uniquement être attribuée à l'heureux choix de ces dénominations. Maintenant il sera facile de développer tous les autres articles, qui concourent à perfectionner cette sciences, les principaux, qui contiennent le fondement des autres, étant déjà traités avec le meilleur succès. Je passe donc au grossissement et au degré de clarté, dont l'oeil étant convenablement placé, apperçoit les objets et ensuite il ne reste plus que de bien déterminer l'impression, que cause dans l'oeil la confusion qui se trouve encore dans l'image représentée, quand on n'a pu réussir à la détruire entièrement; cette recherche sert à fixer les limites, au delà des quelles la vision devient insupportable; afin qu'on la puisse réduire à ses justes bornes.

## Chapitre V.

### Sur le Grossissement et le degré de clarté.

104. **Définition.** Le terme de *grossissement* marquera la raison que tient l'angle, sous lequel l'objet est vu par les surfaces réfringentes, à l'angle sous lequel le même objet paraîtrait à la vue simple, en étant éloigné à une certaine distance laquelle je nommerai la *distance d'estime*.

Le grossissement étant donc un nombre, la lettre $m$ marquera dans la suite ce nombre; à quoi j'ajouterai encore cette condition, que lorsque ce nombre $m$ est positif, l'objet est vu debout; mais renversé, lorsqu'il est négatif.

Pour la *distance d'estime* je la marquerai par le caractère $\Delta$, pour ne pas le confondre avec les autres lettres.

105. **Coroll. 1.** Plus on suppose grande la distance d'estime, plus paraîtra petit l'objet à la vue simple; et partant le grossissement deviendra d'autant plus grand. Au contraire plus la distance d'estime sera prise petite, le grossissement sera diminué dans le même rapport.

106. **Coroll. 2.** Donc puisque le grossissement $m$ est proportionel à la distance d'estime $\Delta$ pour la même représentation par les surfaces réfringente, de quelque manière qu'on fasse varier la distance d'estime $\Delta$, le grossissement souffrira les même variations, et $\frac{m}{\Delta}$ sera une quantité constante.

107. **I^ère Réflexion.** Sans une distance d'estime on ne saurait se former aucune idée juste du grossissement, lorsqu'il s'agit de microscopes on suppose communement la distance d'estime de 8 pouces; et quand on dit, qu'un microscope grossit 100 fois, il faut entendre que le diamètre de l'objet paraît 100 fois plus grand, que si on regardait le même objet à la distance de 8 pouces on comprend aisément que cette estime ne saurait avoir lieu dans les télescopes, où l'on contemple des objets fort éloignés, et il serait bien ridicule de vouloir comparer la grandeur de la lune vue par un télescope, avec celle que nous verrions à la distance de 8 pouces. Ainsi pour les télescopes on prend la distance d'estime précisément égale à la distance de l objet du télescope, ou bien on met $\Delta = a$. Par cette raison afin que nos recherches puissent être appliquées tant aux microscopes qu'aux télescopes, je laisse la distance d'estime $\Delta$ indéterminée.

108. **Problème 16.** Quelque grand que soit le nombre des surfaces, à travers desquelles on regarde l'objet $E\varepsilon$ (Fig. 257.), l'oeil étant placé dans son juste lieu, déterminer le grossissement $m$ rapporté à la distance d'estime $\Delta$.

**Solution.** Ayant posé l'angle $EA\varepsilon = \varphi$, qui est celui, sous lequel cet objet serait vu à la distance $EA = a$; à la distance $\Delta$ ce même objet serait vu sous l'angle $= \frac{a\varphi}{\Delta}$, c'est donc avec cet angle qu'il faut comparer celui, sous lequel le même objet paraîtra à l'oeil par les surfaces; en supposant que l'oeil se trouve à sa juste distance $l$ derrière la dernière image.

I. Pour le cas d'une surface l'image $F\zeta$ étant $= \frac{a\varphi}{n}$ et renversée, il sera vu à la distance $l$, sous l'angle $= \frac{a\varphi}{nl}$, d'où le grossissement $m = -\frac{a\Delta}{nla} = -\frac{\Delta}{nAl}$.

II. Pour le cas de deux surfaces l'image $G\eta$ étant $= \frac{\alpha\beta\varphi}{nn^I b}$ et debout, le grossissement sera:

$$m = + \frac{\alpha\beta\Delta}{nn^I abl} = + \frac{\Delta}{nn^I ABl}.$$

III. Pour le cas de trois surfaces le grossissement sera:

$$m = - \frac{\alpha\beta\gamma\Delta}{nn^I n^{II} abcl} = - \frac{\Delta}{nn^I n^{II} ABCl}.$$

IV. Pour le cas de quatre surfaces le grossissement sera:

$$m = + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\Delta}{nn^I n^{II} n^{III} abcdl} = + \frac{\Delta}{nn^I n^{II} n^{III} ABCDl}.$$

Mais puisque nous supposons que l'oeil se trouve aussi au lieu d'où il découvre le champ tout entier, si nous substituons ici pour $l$ les valeurs assignées ci-dessus (100), nous aurons:

| Pour tant de surfaces. | Le grossissement. |
|---|---|
| 1 | $m = + \frac{\Delta\psi}{a\varphi} = + \frac{\Delta}{a}\cdot\frac{1}{n},$ |
| 2 | $m = - \frac{\Delta\psi^I}{a\varphi} = - \frac{\Delta}{a}\cdot\left(\frac{(n^I-1)\pi^I}{n^I\varphi} - \frac{1}{nn^I}\right),$ |
| 3 | $m = + \frac{\Delta\psi^{II}}{a\varphi} = + \frac{\Delta}{a}\cdot\left(\frac{(n^{II}-1)\pi^{II}}{n^{II}\varphi} - \frac{(n^I-1)\pi^I}{n^I n^{II}\varphi} + \frac{1}{nn^I n^{II}}\right),$ |
| 4 | $m = - \frac{\Delta\psi^{III}}{a\varphi} = - \frac{\Delta}{a}\cdot\left(\frac{(n^{III}-1)\pi^{III}}{n^{III}\varphi} - \frac{(n^{II}-1)\pi^{II}}{n^{II}n^{III}\varphi} + \frac{(n^I-1)\pi^I}{n^I n^{II} n^{III}\varphi} - \frac{1}{nn^I n^{II} n^{III}}\right)$ |

etc.

109. **Coroll. 1.** Ces dernières formules peuvent être représentées plus commodement en sorte pour chaque nombre de surfaces:

| | |
|---|---|
| 1 | $\frac{ma}{\Delta}\varphi = \frac{\varphi}{n},$ |
| 2 | $\frac{ma}{\Delta}\varphi = \frac{\varphi - n(n^I-1)\pi^I}{nn^I},$ |
| 3 | $\frac{ma}{\Delta}\varphi = \frac{\varphi - n(n^I-1)\pi^I + nn^I(n^{II}-1)\pi^{II}}{nn^I n^{II}},$ |
| 4 | $\frac{ma}{\Delta}\varphi = \frac{\varphi - n(n^I-1)\pi^I + nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III}}{nn^I n^{II} n^{III}}$ |

etc.

110. **Coroll. 2.** Donc pour quelque nombre de surfaces, qu'il y ait, le grossissement $m$ pourra être en général exprimé en sorte:

$$\frac{ma}{\Delta}\varphi = \frac{\varphi - n(n^I-1)\pi^I + nn^I(n^{II}-1)\pi^{II} - nn^I n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III} + \text{ etc.}}{nn^I n^{II} n^{III} \text{ etc.}},$$

où il faut aller jusques à la raison de réfraction de la dernière surface.

111. **Coroll. 3.** Ces formules servent principalement à déterminer le champ apparent, le grossissement étant donné. Ainsi posant pour abréger $nn^{I}n^{II}n^{III}$ etc. $\cdot \frac{ma}{\Delta} = M$, on aura:

$$\varphi = \frac{-n(n^{I}-1)\pi^{I} + nn^{I}(n^{II}-1)\pi^{II} - nn^{I}n^{II}(n^{III}-1)\pi^{III} + \text{etc.}}{M-1},$$

de sorte que cette détermination dépend principalement des fractions $\pi^{I}$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. qu'on peut prendre tant négatives que positives, pourvu qu'elles soient plus petites que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$.

112. **Remarque.** Cette formule est de la plus grande importance dans la Dioptrique à cause du petit nombre d'éléments, qu'elle renferme, ne contenant outre le demi-diamètre du champ apparent $\varphi$ et le grossissement $m$, que les raisons de réfractions des surfaces $n$, $n^{I}$, $n^{II}$, $n^{III}$ etc., avec les indices de leurs ouvertures $\pi^{I}$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc., qui sont des fractions tant positives que négatives moindres que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$, selon qu'on veut admettre de plus grands ou plus petits arcs dans les ouvertures. Cette formule exprime donc proprement le rapport entre le champ apparent et le grossissement, et sert par conséquent à déterminer l'un pas l'autre. Or principalement, quand le grossissement $m$ est donné, on découvre aisément les conditions, qui procurent le plus grand champ apparent; et on voit d'abord que plus on emploie de surfaces réfringentes, plus sera-t-il possible d'augmenter le champ. C'est aussi par cette seule raison, qu'on multiplie le nombre des surfaces réfringentes; qui d'ailleurs ne serviraient qu'à affaiblir les rayons.

113. **Définition.** Le *degré de clarté*, dont l'oeil voit les objets par les surfaces réfringentes, est le rapport que tient à l'ouverture de la prunelle, le cône lumineux, qui est transmis dans l'oeil de chaque point de l'objet.

Ainsi de ce cône lumineux nous considérerons la base à son entrée dans l'oeil, et le demi-diamètre de cette base nous donnera la juste mesure du *degré de clarté*, que j'exprimerai dans la suite par la lettre $\varpi$.

114. **Coroll. 1.** Donc lorsque le degré de clarté $\varpi$ égale ou surpasse le demi-diamètre de la prunelle, qu'on estime d'une $\frac{1}{12}$ de pouce, la clarté sera aussi grande qu'il est possible, puisqu'on voit alors les objets aussi clairement qu'à la vue simple.

115. **Coroll. 2.** Mais plus le degré de clarté $\varpi$ se trouvera plus petit que $\frac{1}{12}$ pouce, plus aussi l'objet paraîtra-t-il obscur, et cela selon la raison quarrée de la quantité $\varpi$; ainsi dans ce cas on pourra dire que la clarté vue est à la clarté entière, comme $\varpi\varpi$ est à $\frac{1}{144}$, en exprimant $\varpi$ en pouces.

116. **I$^{ère}$ Réflexion.** Dans les instruments dioptriques il n'arrive que trop souvent, surtout quand on prétend un grand grossissement, que le degré de clarté $\varpi$ devient trop petit, et partant il est très important d'examiner, par quels moyens on le puisse augmenter. Nous verrons bientôt que l'unique moyen est d'amplifier l'ouverture de la première surface réfringente dont le demi-diamètre a été nommé $= x$; or cette amplification entraine nécessairement une plus grande confusion; et d'ailleurs le rayon de courbure de cette surface étant déjà déterminé par d'autres circonstances, le demi-diamètre de son ouverture ne saurait être pris plus grand que la cinquième partie du rayon de courbure, quand même on aurait réussi à anéantir la confusion qu'en dépend.

117. **II$^{de}$ Réflexion.** Puisqu'on est obligé de se contenter ordinairement d'une beaucoup plus petite valeur de $\varpi$ que $\frac{1}{12}$ pouce, il est important d'examiner jusqu'à quel point cette diminution peut aller, avant que de produire une obscurité insupportable, or en consultant l'expérience, et en examinant les lunettes, dont le degré de clarté paraît encore suffisant, on trouve que la valeur de $\varpi$ y surpasse guère une $\frac{1}{60}$ partie de pouce; et quand les objets sont fort brillant, un plus petit degré est encore suffisant. Ainsi il faut se régler principalement sur la propre clarté des objets, de sorte que plus celle-ci est grande, on puisse admettre de plus petites valeurs de $\varpi$; mais si l'on voulait contempler des objets sombres et peu éclairés, il faudrait faire de tels arrangements, que la valeur de $\varpi$ égalât presque $\frac{1}{12}$ pouce, ce qui est sans doute le cas des télescopes nocturnes, qu'on vient de mettre en usage. Dans les microscopes, où il n'est presque point possible de procurer à $\varpi$ une juste valeur, on a recours à éclairer d'autant plus les objets mêmes.

118. **Problème 17.** Quelque grand que soit le nombre des surfaces réfringentes, déterminer le degré de clarté $\varpi$ dont les objets seront vus, l'oeil étant placé dans son juste lieu.

**Solution.** La solution de ce problème doit être tirée de celle du probl. 6 (§ 35), (Fig. 257.) où nous avons déterminé à chaque image l'inclinaison des rayons extrêmes à l'axe. Car posant cette inclinaison $=\omega$, l'oeil étant éloigné de l'image à la distance $=l$, le demi-diamètre de la base du cône lumineux à l'entrée dans l'oeil sera $=\omega l$, d'où nous tirons d'abord le degré de clarté $\varpi=\omega l$. Nous n'avons donc qu'à en faire l'application à chaque nombre de surfaces, en remarquant que le demi-diamètre de l'ouverture de la première surface est supposé $=x$.

I. Pour une seule surface nous avions $\omega=\frac{x}{a}=\frac{Ax}{a}$, donc le degré de clarté sera $\varpi=\frac{Ax}{a}\,l$. Mais pour le grossissement $m$ nous venons de trouver $m=-\frac{\Delta}{nAl}$, ou bien $Al=-\frac{\Delta}{nm}$, d'où le degré de clarté devient $\varpi=\frac{\Delta x}{nma}$, puisqu'il est indifférent de prendre cette valeur positive ou négative.

II. Pour deux surfaces réfringentes nous avions $\omega=\frac{bx}{a\beta}=\frac{ABx}{a}$, d'où le degré de clarté est $\varpi=\frac{ABx}{a}\,l$. Mais pour le grossissement nous venons de trouver $m=+\frac{\Delta}{nn^{I}ABl}$, de sorte que $ABl=\frac{\Delta}{nn^{I}m}$, et partant le degré de clarté $\varpi=\frac{\Delta x}{nn^{I}ma}$.

III. Pour trois surfaces nous aurons de la même manière le degré de clarté:

$$\varpi=\frac{ABCx}{a}\cdot l=\frac{\Delta x}{nn^{I}n^{II}ma}.$$

IV. Pour quatre surfaces le degré de clarté sera:

$$\varpi=\frac{ABCDx}{a}\cdot l=\frac{\Delta x}{nn^{I}n^{II}n^{III}ma}.$$

Par conséquent en général pour autant de surface qu'on voudra on aura ce beau rapport entre le grossissement $m$ et le degré de clarté $\varpi$:

$$\frac{\Delta x}{ma\varpi}=nn^{I}n^{II}n^{III}\text{ etc.}$$

119. **Coroll. 1.** Ainsi le degré de clarté $\varpi$ étant donné avec le grossissement $m$ rapporté à la distance d'estime $\Delta$, on en déterminera d'abord l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre doit être $x = \frac{ma\varpi}{\Delta} \cdot nn^I n^{II} n^{III}$ etc.

120. **Coroll. 2.** Mais si l'ouverture de la première surface est donnée avec le grossissement, on en connaîtra d'abord le degré de clarté $\varpi$, dont l'objet sera vu, car on aura:

$$\varpi = \frac{\Delta x}{ma} \cdot \frac{1}{nn^I n^{II} n^{III} \text{ etc.}}$$

121. **I^ère Réflexion.** Comme le produit de toutes les raisons de réfraction $nn^I n^{II} n^{III}$ etc. entre dans ces formules, et aussi en plusieurs autres, que nous avons développées ci-dessus, il est important de savoir, quelle idée il faut attacher à ce produit. Or puisque $n:1$ exprime la réfraction des rayons, qui passent de l'objet dans le premier milieu terminé par la première surface; et $n^I:1$ celle des rayons qui passent du premier milieu dans le second et ainsi de suite; il est évident que la raison $nn^I:1$ exprime la réfraction que les rayons de l'objet souffriraient, s'ils passaient immédiatement dans le second milieu, et la raison $nn^I n^{II}:1$ celle que les mêmes rayons souffriraient s'ils passaient immédiatement dans le troisième milieu, et ainsi de suite. Donc posant le produit de tous ces nombre $nn^I n^{II} n^{III}$ etc. $= N$ la raison $N:1$ exprimera la réfraction, que les rayons de l'objet souffriraient, s'ils passaient immédiatement dans le milieu où se trouve l'oeil; d'où l'on voit que si l'objet et l'oeil se trouvaient dans le même milieu par exemple dans l'air, on aurait $N = 1$ mais si l'objet était par exemple dans l'eau et l'oeil dans l'air, on aurait $N = \frac{3}{4}$ et si l'oeil était dans l'eau et l'objet dans l'air, on aurait $N = \frac{4}{3}$. Ayant donc pour le degré de clarté $\varpi = \frac{\Delta x}{Nm}$ il s'ensuit que les objets dans l'eau nous doivent paraître plus clairement, que s'ils étaient dans l'air.

122. **II^de Réflexion.** Introduisons donc dans le calcul cette raison de réfraction $N:1$ que les rayons de l'objet souffriraient, s'ils passaient immédiatement dans le milieu, où se trouve l'oeil, et puisque $N = nn^I n^{II} n^{III}$ etc. nous aurons indépendamment du nombre des surfaces réfringentes cette relation entre le grossissement le degré de clarté et l'ouverture de la première surface

$$x = \frac{Nma\varpi}{\Delta}, \quad \text{ou} \quad \varpi = \frac{\Delta x}{Nma}, \quad \text{ou} \quad m = \frac{\Delta x}{Na\varpi}.$$

Par la aussi la rélation entre le grossissement et le champ apparent deviendra plus simple et sera exprimée en sorte:

$$\frac{ma}{\Delta}\varphi = \frac{\varphi - n(n^I - 1)\pi^I + nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} + \text{etc.}}{N},$$

d'où nous tirons pour le champ apparent:

$$\varphi = \frac{-n(n^I - 1)\pi^I + nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - nn^I n^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} + \text{etc.}}{\frac{ma}{\Delta}N - 1}$$

où il est bon d'observer, que cette valeur doit toujours être positive puisqu'elle exprime l'angle $EAe$ dont la position est supposée positive.

## Chapitre VI.

### Sur la sensation que la confusion des images cause dans l'oeil.

123. **Problème 18.** Un assemblage d'images $N\nu n$ (Fig. 262.) se trouvant devant l'oeil $OV$ à sa juste distance $ON = l$, trouver la confusion qui en est causée dans la vision, ou dans l'image dépeinte sur la rétine.

**Solution.** Dans l'assemblage d'images proposé il faut distinguer: 1° l'image principale $N\nu$ qui n'envoit dans l'oeil que des rayons selon la direction de l'axe, ou qui ne s'en éloignent qu'infiniment peu; 2° l'espace de confusion $Nn$, supposant que l'image formée par les rayons extrêmes, qui passent par l'extrémité de la première surface, tombe en $n$: nommons cet espace $Nn = s$; 3° Il y faut remarquer la direction des rayons, qui concourent au point $n$, posons donc l'inclinaison de ces rayons à l'axe $nNO = \omega$. Cela posé considérons l'oeil comme une petite chambre obscure formée par une lentille convexe placée à l'entrée $O$, et soit la distance $OV = u$. Il importe fort peu que cette hypothèse s'écarte de la verité: nos conclusions demeureront toujours les mêmes. D'abord donc, puisque l'image principale $N\nu$ se trouve à la juste distance de l'oeil, son image y sera dépeinte sur la rétine, et celle du point $N$ tombera sur le point $V$, mais le point étant plus éloigné, les rayons qui en viennent à l'oeil concourront en-deça de la rétine en $v$, en sorte que cette égalité aura lieu à peu près:

$$\frac{1}{OV} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{Ov} + \frac{1}{On} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{l} = \frac{1}{Ov} + \frac{1}{l+s},$$

donc:

$$\frac{1}{Ov} = \frac{1}{u} + \frac{s}{(l+s)l} \quad \text{et} \quad Ov = \frac{(l+s)ul}{(l+s)l+su}.$$

Par conséquent le petit espace: $Vv = \dfrac{suu}{(l+s)l+su}$.

Or les rayons, qui se réunissent dans ce point $v$, en sortant du point $n$ font avec l'axe un angle $Ono = \omega$, et partant ils rencontrent la prunelle en $o$, de sorte que $Oo = (l+s)\omega$; d'où l'on voit que ces mêmes rayons feront en $v$ avec l'axe un angle $Ovo = \frac{(l+s)\omega}{Ov}$, et formeront par conséquent sur la rétine un cercle, dont le demi-diamètre sera $Vu = \frac{Vv}{Ov}(l+s)\omega$. Or $\frac{Vv}{Ov} = \frac{su}{(l+s)l}$ et partant $Vu = \frac{su\omega}{l}$. Donc puisque les points $N$ et $n$ repondent au même point de l'objet, il est clair que ce point de l'objet sera représenté sur la rétine par un petit cercle, dont le rayon est $Vu = \frac{su\omega}{l}$, auquel sans doute la confusion causée dans la vision doit être estimée proportionnelle, et puisqu'il ne s'agit que de la proportion, on voit bien que la défectuosité de notre hypothèse n'y influe point; et partant, en omettant la quantité $u$ relative à l'oeil, nous pourrons prononcer, que la confusion causée dans l'oeil est proportionnelle à la formule $\frac{s\omega}{l}$, et il sera même permis de la regarder comme égale à cette formule, puisqu'on ne détermine point une certaine unité pour y rapporter les mesures.

124. **Coroll. 1.** Ainsi quel que soit l'assemblage d'images offert à l'oeil dans sa juste distance, la confusion causée dans l'oeil sera égale au produit de l'espace de confusion $Nn$ par l'inclinaison des rayons en $n$, divisé par la juste distance de l'oeil.

125. **Coroll. 2.** Soit $\omega$ le point, où les rayons du point $n$ passent par l'image principale et l'espace $N\omega$ sera $= s\omega$, donc $\frac{N\omega}{l}$ exprimera la confusion. Cette confusion est donc proportionnelle ou égale à l'angle sous lequel l'espace $N\omega$ paraîtrait à l'oeil.

126. **I^ère Réflexion.** Cette dernière considération nous aurait pu d'abord conduire à la véritable estime de la confusion, dont la vision est troublée, sans avoir recours à la constitution de l'oeil; ce qui mérite bien d'être mis dans tout son jour, puisque la solution rapportée ci-dessus pourrait bien paraître suspecte à plusieurs égards. On n'a donc qu'à tourner le raisonnement en sorte. Puisque l'image principale $N\nu$ se trouve à la distance juste de l'oeil, elle sera distinctement exprimée sur la rétine; donc le point $n$ étant vu par le rayon $n\omega o$, qui passe par le point $\omega$ de l'image principale, sera confondu dans l'oeil avec le point $\omega$. Mais le point $n$ répond au même point du vrai objet que le point $N$, et partant ce point de l'objet paraîtra répandu dans un cercle dont le demi-diamètre est $= N\omega$, ce qu'il faut entendre de tous les points du vrai objet, de sorte que chacun paraîtra comme une tache ronde, dont le demi-diamètre apparent sera égal à l'angle $NO\omega$; qui étant $= \frac{s\omega}{l}$ nous donne la plus juste mesure de la confusion, dont la vision de l'objet sera troublée.

127. **II^de Réflexion.** Nous avons vu dans le premier chapitre que pour chaque nombre de surfaces réfringentes, le dernier assemblage d'images, qui devient l'objet immédiat de la vision, dépend principalement de l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre a été nommé $= x$, en sorte que l'espace de confusion $Nn = s$ a été trouvé proportionel au quarré de $x$, et l'inclinaison des rayons en $n$, ou bien l'angle $Nn\omega = \omega$ à $x$ même. Posons donc en général $s = Px^2$ et $\omega = Qx$; et la confusion de la vision sera représentée par la formule $\frac{PQx^3}{l}$, d'où nous tirons cette vérité de la plus grande importance dans la dioptrique, *que les surfaces réfringentes demeurant les mêmes, la confusion de la vision est toujours proportionnelle au cube du demi-diamètre de l'ouverture de la première surface.*

128. **III^ème Réflexion.** Dans cette détermination j'ai supposé, que la prunelle de l'oeil est assez ouverte pour recevoir encore les rayons $no$; ce qu'on peut bien supposer depuis que nous avons remarqué dans le chapitre précédent, qu'ordinairement le cône lumineux, qui entre dans l'oeil de chaque point de l'objet, est moins large que la prunelle. Cependant s'il arrivait, que le demi-diamètre de la prunelle fût plus petit que l'espace $Oo$, il est évident que la confusion causée dans l'oeil serait plus petite que nous venons de marquer, et une telle diminution pourra aussi être obtenue, quand on met devant l'oeil une lame percée d'un petit trou, qui exclue les rayons qui viennent du point $n$; c'est aussi la raison que, regardant par un petit trou les objets qui paraîtraient sans cela fort confus, on les voit assez distinctement, mais on perd par ce moyen autant de la clarté. Ensuite j'ai aussi supposé une telle situation de l'oeil, que l'image principale $N\nu$ se trouve

à sa juste distance $l$, et qu'elle soit distinctement représentée dans l'oeil; mais si l'on y approchait l'assemblage d'images, qu'une image moyenne se trouvât à la juste distance de l'oeil, la confusion deviendrait plus petite, et il vaudra la peine de déterminer cette disposition de l'oeil où la confusion apperçue devient la plus petite.

129. **Problème 19.** Un assemblage d'images étant proposé, trouver la situation de l'oeil où la confusion causée dans la vision devient la plus petite.

**Solution.** Soit l'espace de confusion $Nn = s$ (Fig. 263.) et l'inclinaison des rayons en $n = \omega$, et puisque nous venons de voir, que $s = Pxx$ et $\omega = Qx$, il s'ensuit que l'angle $\omega$ est proportionnel à la racine quarrée de l'espace $Nn = s$; nous pourrons donc poser $\omega = \sqrt{\frac{s}{a}}$, et cette proportion aura lieu pour tous les points moyens de l'espace de confusion $Nn$, en sorte que prenant $NZ = z$, l'inclinaison des rayons en $Z$ sera $= \sqrt{\frac{z}{a}}$. Maintenant supposons qu'une image moyenne quelconque $P\pi$ se trouve à la juste distance $= l$ devant l'oeil, en nommant l'espace $NP = p$, de sorte que cette image soit distinctement exprimée sur la rétine; et il est clair que les rayons du point $n$ y causeront une confusion proportionnelle à l'espace $Pp = Pn \,.\, \omega = (s - p)\sqrt{\frac{s}{a}}$, qui est ouvertement d'autant plus petite, plus on approche le point $P$ de l'extrémité $n$; mais il faut considérer qu'alors l'obliquité des rayons entre $P$ et $N$ pourrait causer une plus grande confusion. Pour cet effet considérons les rayons du point $Z$ posant $NZ = z$, dont l'inclinaison est $= \sqrt{\frac{z}{a}}$, et de là naîtra l'espace $Pz = (p - z)\sqrt{\frac{z}{a}}$, qui deviendra le plus grand en prenant $z = \frac{1}{3}p$. Soit donc $z = \frac{1}{3}p$ et la confusion causée par les rayons de l'espace $NP$ sera comme $Pz = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3a}}$. Donc pour rendre la confusion la plus petite, on n'aura qu'à prendre le point $P$ en sorte qu'il devienne $Pz = Pp$ ou $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3a}} = (s - p)\sqrt{\frac{s}{a}}$, d'où nous parvenons à cette équation $s(s - p)^2 = \frac{4}{27}p^3$, dont la racine est $s = \frac{4}{3}p$ ou $p = \frac{3}{4}s$. Il faudra donc disposer l'oeil en sorte que sa juste distance $l$ réponde au point $P$ de l'espace de confusion $Nn$, en sorte que $NP = \frac{3}{4}Nn$, et alors la confusion dans l'oeil sera proportionnelle à l'espace $Pp = \frac{1}{4}s\sqrt{\frac{s}{a}}$, le plus petit qu'il soit possible.

130. **Coroll. 1.** Si l'on ajustait l'oeil à l'image principale, comme nous avons fait auparavant, la confusion dans l'oeil serait proportionnelle à l'espace $s\sqrt{\frac{s}{a}}$, et partant quatre fois plus grande que dans le cas que nous venons de déterminer.

131. **Coroll. 2.** Ayant donc dans le problème précédent estimé la confusion causée dans la vision par l'angle $\frac{s\omega}{l}$, nous voyons à-présent que par une meilleure disposition de l'oeil cette confusion peut être réduite à sa quatrième partie. Ainsi la juste mesure de cette confusion pourra être établie à $\frac{s\omega}{4l}$; de sorte que tous les points de l'objet paraissent à l'oeil comme des taches circulaires dont le demi-diamètre apparent est $= \frac{s\omega}{4l}$.

132. **Remarque.** Pour cet effet il faudra placer l'oeil en sorte qu'il se trouve à sa juste distance $= l$, non pas derrière l'image principale, mais derrière une autre image moyenne $P\pi$, en

sorte que l'intervalle $NP$ soit trois quarts de l'entier espace de confusion $Nn = s$, ou bien il fau que l'image principale en $N$ soit éloignée de l'oeil à la distance $= l - \frac{3}{4}s$. Mais il n'est pas nécessaire d'observer si scrupuleusement cette règle, puisque la juste distance elle même $l$ admet un changement assez considérable sans que la distinction de la vision en soit troublée. La raison en doit être cherchée dans la conformation de l'oeil, qui est doué d'une faculté d'approcher ou d'éloigner tant soit peu la rétine du crystallin, en sorte qu'il est également disposé de voir distinctement les objets en des distances assez différentes. Ainsi pourvu que la distance de l'oeil à l'assemblage d'images proposé ne s'écarte très considérablement de la juste distance $l$, l'oeil se conformera quasi de lui même pour y appercevoir la plus petite confusion; et par cette raison la formule $\frac{s\omega}{4l}$ pourra être regardée comme la juste mesure de la confusion, dont la vision de l'objet est troublée.

133. **Problème 20.** Quelque grand que soit le nombre des surfaces réfringentes à travers desquelles on regarde l'objet $E\varepsilon$ (Fig. 257.) l'oeil se trouvant dans son juste lieu, déterminer la confusion, dont la vision sera troublée.

**Solution.** Puisqu'il s'agit d'assigner pour chaque cas la valeur de la formule $\frac{s\omega}{4l}$, nous n'avons qu'à prendre les valeurs des lettres $s$ et $\omega$ du premier chapitre, en observant que l'espace de confusion, qui y est exprimé par lettres $y$, $y^I$, $y^{II}$ etc., est marqué ici par $s$. Mais pour avoir d'abord des formules exprimées par les éléments établis dans le second chapitre, qui sont si propres à abréger le calcul, je tirerai ces mêmes valeurs du § 62 du second chapitre, en y introduisan d'abord le grossissement $m$ au lieu de la juste distance $l$ de l'oeil:

I. Pour le cas d'une *seule surface* nous avons d'abord l'inclinaison $\omega = \frac{Ax}{a}$, et du § 100 l juste distance $l = -\frac{a\varphi}{nA\psi}$; or le grossissement rapporté à la distance d'estime donn $l = -\frac{\Delta}{mnA}$, d'où nous tirons $\frac{\omega}{4l} = \frac{mnAAx}{4\Delta a}$. Multiplions par la valeur de $s = y$ et nou aurons le degré de confusion exprimé en sorte:

$$\frac{mx^3}{8\Delta aa} \cdot \frac{n(n+A)(\Delta+1)^2}{(n-1)^2}.$$

II. Pour le cas de *deux surfaces* nous avons $\omega = \frac{ABx}{a}$, et par le grossissement $l = \frac{\Delta}{mnn^I AB}$ d'où $\frac{\omega}{4l} = \frac{mnn^I AABBx}{4\Delta a}$, ce qui étant multiplié par $s = y^I$ donne le degré de confusio

$$= \frac{mx^3}{8\Delta aa}\left(\frac{n(n+A)(\Delta+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^I B+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I - B\psi)}\right).$$

III. Pour le cas de *trois surfaces* nous avons $\omega = \frac{ABCx}{a}$, et par le grossissement:

$$l = -\frac{\Delta}{mnn^I n^{II} ABC}, \text{ de sorte que } \frac{\omega}{4l} = \frac{mnn^I n^{II} AABBCCx}{4\Delta a}.$$

Par conséquent multipliant par $s = y^{II}$, le degré de confusion se trouve:

$$= \frac{mx^3}{8\Delta aa}\left(\frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^IB+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I-B)} + \frac{A^3B^3(n^{II}+C)(n^{II}C+1)(C+1)^2\varphi}{(n^{II}-1)^2(\psi^{II}-C\psi^I)}\right).$$

Ainsi en général pour un nombre de surfaces quelconque, en introduisant le grossissement $m$ rapporté à la distance d'estime $\Delta$; si nous posons le degré ou plutôt la mesure de la confusion, apperçue lans l'oeil $= Z$, nous aurons pour la valeur de $Z$ l'équation suivante:

$$Z\cdot\frac{8\Delta aa}{mx^3} = \left\{\begin{array}{l}\frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^IB+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I-B\psi)} + \frac{A^3B^3(n^{II}+C)(n^{II}C+1)(C+1)^2\varphi}{(n^{II}-1)^2(\psi^{II}-C\psi^I)} + \\ \frac{A^3B^3C^3(n^{III}+D)(n^{III}D+1)(D+1)^2\varphi}{(n^{III}-1)^2(\psi^{III}-D\psi^{II})} + \frac{A^3B^3C^3D^3(n^{IV}+E)(n^{IV}E+1)(E+1)^2\varphi}{(n^{IV}-1)^2(\psi^{IV}-E\psi^{III})}\end{array}\right\}$$

etc.

où il faut prendre autant de termes qu'il y a de surfaces réfringentes.

134. **Coroll. 1.** De là on voit comment chaque surface concourt à augmenter ou à diminuer la confusion; et s'il est possible de faire évanouir cette expression, toute la confusion qui provient de l'ouverture de la première surface sera réduite à rien.

135. **Coroll. 2.** Mais s'il n'est pas possible de rendre cette expression égale à zéro, il faut u moins la diminuer au point, que la confusion devienne insensible. Pour cet effet il faut fixer ne certaine limite, que cette expression ne saurait surpasser, sans que la confusion devient insupportable.

136. **Remarque.** Cette limite doit sans doute être fixée par l'expérience. Cependant, comme Z marque le demi-diamètre apparent des taches, dont tous les points de l'objet sont vus, il semble ue cet angle ne saurait surpasser une seconde; aussi en consultant l'expérience on remarque que ans les instruments, où cet angle $Z$ est de 2 secondes, la confusion est déjà assez sensible; par ette raison je voudrais assigner à $Z$ une seconde ou bien la valeur de cette fraction $\frac{1}{200000}$, quand n'est pas possible de la réduire entièrement à zéro.

---

## Chapitre VII.

### Précis de la Théorie de toute la Dioptrique.

137. **Problème 21.** Expliquer tous les éléments sur lesquels la Théorie de la Dioptrique est fondée; ou bien mettre devant les yeux toutes les dénominations qui entreront dans les formules qui renferment cette Théorie.

**Solution.** En considérant un nombre quelconque de surfaces réfringentes sphériques $PAP$, $BQ$, $RCR$, $SDS$ etc. (Fig. 264.), dont les centres soient disposés sur le même axe $EJ$, et les onvexités tournées en même sens vers l'objet $E\varepsilon$, je nomme:

I. Les rayons de courbure de chacune de ces surfaces:

$$\text{de } PAP = f, \quad \text{de } QBQ = g, \quad \text{de } RCR = h, \quad \text{de } SDS = i \text{ etc.}$$

II. La raison de réfraction pour les rayons moyens qui entrent dans chacune de ces surfaces

$$\text{de } PAP = n:1, \quad \text{de } QBQ = n^{I}:1. \quad \text{de } RCR = n^{II}:1, \quad \text{de } SDS = n^{III}:1.$$

III. Pour les autres rayons j'emploie ces mêmes lettres $n$, $n^{I}$, $n^{II}$, $n^{III}$ etc., augmentées ou diminuées de leurs différentiels $dn$, $dn^{I}$, $dn^{II}$, $dn^{III}$ etc.

IV. Ensuite, en ayant égard à l'objet $E\varepsilon$ proposé devant ces surfaces, je considère les points $F$, $G$, $H$, $J$ etc., où les rayons moyens, venant du point $E$ de l'objet, étant réfractés par chaque surface, coupent l'axe, et je nomme les distances:

$$EA = a,\ AF = \alpha;\ FB = b,\ BG = \beta;\ GC = c,\ CH = \delta;\ HD = d,\ DJ = \delta \text{ etc.};$$

et je suppose outre cela:

$$\alpha = \frac{a}{A}, \quad \beta = \frac{b}{B}, \quad \gamma = \frac{c}{C}, \quad \delta = \frac{d}{D};$$

d'où les rayons de courbure seront déterminés en sorte:

$$f = \frac{(n-1)a}{nA+1}, \quad g = \frac{(n^{I}-1)b}{n^{I}B+1}, \quad h = \frac{(n^{II}-1)c}{n^{II}C+1}, \quad i = \frac{(n^{III}-1)d}{n^{III}D+1}.$$

V. En considérant le rayon moyen qui venant du point de l'objet $E$ passe par l'extrémité de l'ouverture de la première surface $P$, qu'on marque les points $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. où il passe par les autres surfaces, et posant le demi-diamètre de l'ouverture de la première surface $AP = x$, on aura pour les autres surfaces:

$$B\beta = Ab \cdot \frac{x}{a}, \qquad C\gamma = ABc \cdot \frac{x}{a}, \qquad D\delta = ABCd \cdot \frac{x}{a} \text{ etc.}$$

VI. Ensuite je considère un rayon moyen, partant de l'extrémité de l'objet $\varepsilon$ (Fig. 259.), qui passe par le milieu $A$ de la première surface $PAP$, et traverse ensuite toutes les autres surfaces, cette considération fournit les éléments suivants:

1° L'angle $EA\varepsilon$ connu sous le nom de demi-diamètre du champ apparent, cet angle sera nommé $EA\varepsilon = \varphi$.

2° Je rapporte les arcs $Bb$, $Cc$, $Dd$ etc. chacun au rayon de courbure à sa surface, en posant:

$$Bb = \pi^{I} g, \quad Cc = \pi^{II} h, \quad Dd = \pi^{III} i \quad \text{etc.};$$

où il faut remarquer, que ces lettres $\pi^{I}$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. signifient des fractions ou positives ou négatives, qui ne sauraient surpasser $\frac{1}{4}$.

VII. La même considération offre aussi les angles, que fait avec l'axe le rayon $\varepsilon A$ étant rompu successivement par toutes les surfaces; ces angles donc seront nommés en sorte:

$$BAb = \psi, \quad Bqb = Cqc = \psi^{I}, \quad Crc = Drd = \psi^{II}, \quad Dsd = Ese = \psi^{III} \text{ etc.}$$

Ce sont les éléments ou dénominations dont je me servirai dans la suite, entre lesquels il faut remarquer les relations suivantes:

1° Entre les éléments $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc., et les angles $\varphi$, $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc.:

$$n\psi = \varphi, \quad n^I\psi^I + \psi = (n^I - 1)\,\pi^I, \quad n^{II}\psi^{II} + \psi^I = (n^{II} - 1)\,\pi^{II},$$
$$n^{III}\psi^{III} + \psi^{II} = (n^{III} - 1)\,\pi^{III} \quad \text{etc.}$$

2° Entre ces éléments et les précédents:

$$b = \frac{a\varphi\,(n^I B + 1)}{nn^I A\,(\psi^I - B\psi)}, \qquad g = \frac{a\varphi\,(n^I - 1)}{nn^I A\,(\psi^I - B\psi)},$$

$$c = \frac{a\varphi\,(n^{II} C + 1)}{nn^I n^{II} AB\,(\psi^{II} - C\psi^I)}, \qquad h = \frac{a\varphi\,(n^{II} - 1)}{nn^I n^{II} AB\,(\psi^{II} - C\psi^I)},$$

$$d = \frac{a\varphi\,(n^{III} D + 1)}{nn^I n^{II} n^{III} ABC\,(\psi^{III} - D\psi^{II})}, \qquad i = \frac{a\varphi\,(n^{III} - 1)}{nn^I n^{II} n^{III} ABC\,(\psi^{III} - D\psi^{II})}$$

etc. | etc.

auxquels on peut encore ajouter les déterminations suivantes:

$$AB = \frac{\pi^I g}{\psi}, \quad Bq = \frac{\pi^I g}{\psi^I}, \quad Cr = \frac{\pi^{II} h}{\psi^{II}}, \quad Ds = \frac{\pi^{III} i}{\psi^{III}},$$
$$Cq = \frac{\pi^{II} h}{\psi^I}, \quad Dr = \frac{\pi^{III} i}{\psi^{II}}, \quad Es = \frac{\pi^{IV} k}{\psi^{III}}.$$

138. **Réflexion.** C'est sur ces éléments que rouleront dans la suite toutes les formules ui renferment la Théorie de la Dioptrique, et que j'ai jugé à-propos d'expliquer ici de nouveau et l'en remarquer les rapports, pour les mettre ensemble devant les yeux, et afin qu'on ne soit pas bligé d'en rechercher la signification dans les chapitres précédents, toutes les fois qu'on en a esoin. Mais il est aussi bon de remarquer ici quelques conditions que la nature de ces éléments enferme nécessairement, et qu'on ne doit jamais perdre de vue. D'abord il est évident que les ombres $n$, $n^I$, $n^{II}$ etc. sont toujours positifs; et ensuite tant la distance de l'objet $EA = a$, que e demi-diamètre du champ, ou l'angle $EA\varepsilon$, sont nécessairement des quantités positives; toutes les utres lettres peuvent être prises aussi bien négatives que positives, cependant il y faut soigneusement observer les deux conditions suivantes.

*Première condition nécessaire.* Les intervalles entre les surfaces doivent tous être positifs; donc s formules suivantes doivent être nécessairement plus grandes que zéro:

$$\alpha + b > o, \quad \beta + c > o, \quad \gamma + d > o, \quad \delta + e > o \quad \text{etc.}$$

u bien celles-ci:

$$AB = \frac{\pi^I g}{\psi}, \quad BC = \frac{\pi^I g + \pi^{II} h}{\psi^I}, \quad CD = \frac{\pi^{II} h + \pi^{III} i}{\psi^{II}} \quad \text{etc.}$$

*Seconde condition nécessaire.* Aucune surface ne saurait avoir une ouverture trop grande par pport à son rayon de courbure, en prenant un quart du rayon de courbure pour la limite du

demi-diamètre de l'ouverture; puisque nous avons indiqué deux valeurs pour chacun (No. V et VI.), les deux ensemble ne doivent point surpasser cette limite, ce qui donne ces conditions:

$$x < \tfrac{1}{4} f, \quad Ab \cdot \frac{x}{a} + \pi^I g < \tfrac{1}{4} g, \quad ABc \cdot \frac{x}{a} + \pi^{II} h < \tfrac{1}{4} h \text{ etc.},$$

dont chaque terme doit être pris positivement, quand même il aurait une valeur négative.

Cette condition est nécessaire, afin que tous les rayons de l'objet qui passent par la première surface, soient transmis par toutes les autres; car pour cette fin il faut établir le demi-diamètre de l'ouverture de chacune de cette manière:

$$AP = x, \quad BQ = Ab \cdot \frac{x}{a} + \pi^I g, \quad CR = ABc \cdot \frac{x}{a} + \pi^{II} h, \quad DS = ABCd \cdot \frac{x}{a} + \pi^{III} i \text{ etc.}$$

en prenant chaque partie positivement.

139. **Problème 22.** Quelque grand que soit le nombre des surfaces réfringentes, exposer toutes les conditions suivant lesquelles on doit arranger ces surfaces, pour en former un instrument dioptrique doué de toutes les perfections dont il est susceptible.

**Solution.** D'abord il faut bien considérer les conditions, qui sont ordinairement données, avant qu'on puisse entreprendre la construction. La première est la distance des objets qu'on veut contempler, laquelle a été posée $EA = a$, qui est par conséquent donnée. Ensuite il faut avoir égard à la nature de l'oeil, qui se rapporte toujours à une certaine distance, à laquelle on voit le plus distinctement les objets; je nomme cette distance $= l$. Outre cela, en cas que l'objet et l'oeil soient situés en différents milieux, la raison $N:1$ marquera la réfraction des rayons moyens en passant du milieu de l'objet dans celui de l'oeil. Après ces conditions préliminaires je passe à développer celles qui regardent plus particulièrement la construction:

I. Ici se présente d'abord le *grossissement*, que j'indique par le nombre $m$ rapporté à la distance d'estime $= \Delta$, ce qui signifie que le diamètre de l'objet paraisse par l'instrument $m$ fois plus grand que si on le regardait simplement à la distance $\Delta$; le nombre $m$, étant positif marque qu'on voit l'objet debout, mais s'il est négatif, on le voit renversé. Or la condition du grossissement est renfermée dans cette équation:

$$ml = \pm \frac{\Delta}{N \cdot ABCD \text{ etc.}} \quad (108.)$$

où le signe $+$ a lieu, quand le nombre des surfaces ou celui des lettres $A, B, C, D$ etc est pair; mais il faut prendre le signe $-$, quand le nombre des surfaces est impair.

II. En second lieu il faut avoir égard au degré de clarté dont les objets seront vus. Je mesure ce degré de clarté par le demi-diamètre du cône lumineux, qui entre dans l'oeil de chaque point de l'objet; et je le nomme $= \varpi$, dont le rapport au demi-diamètre de la prunelle montre, combien de fois l'objet paraîtra moins clairement qu'à la vue simple. On estime que pourvu que la valeur de $\varpi$ ne soit plus petite que $\frac{1}{60}$ pouce, la clarté

est suffisante. Or la condition du degré de clarté donne cette équation:

$$\Delta x = Nma\varpi,$$

qui détermine d'abord l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre est $= x$.

III. En troisième lieu la condition du champ apparent, dont le demi-diamètre est supposé $= \varphi$, est contenue dans cette formule:

$$\left(\frac{Nma}{\Delta} - 1\right)\varphi = -n(n^I - 1)\pi^I + nn^I(n^{II} - 1)\pi^{II} - nn^In^{II}(n^{III} - 1)\pi^{III} + \text{etc.}$$

d'où l'on jugera aisément, quelles valeurs il faut donner aux fractions $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc., pour que la valeur de $\varphi$ devienne positive et la plus grande qu'il est possible.

IV. Ayant déterminé les fractions $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ etc. avec le demi-diamètre du champ apparent $\varphi$, on en connaîtra les angles $\psi$, $\psi^I$, $\psi^{II}$ etc. par les formules suivantes:

$$\psi = \frac{1}{n}\varphi, \quad \psi^I = \frac{n^I - 1}{n^I}\pi^I - \frac{1}{n^I}\psi, \quad \psi^{II} = \frac{(n^{II} - 1)\pi^{II} - \psi^I}{n^{II}}, \quad \psi^{III} = \frac{(n^{III} - 1)\pi^{III} - \psi^{II}}{n^{III}} \quad \text{etc.}$$

où il faut remarquer que le dernier de ces angles, qui répond à la dernière surface réfringente, est $= \pm \frac{ma\varphi}{\Delta}$, le signe $+$ ayant lieu quand le nombre des surfaces est impair, et le signe $-$, quand il est pair.

V. Maintenant il s'agit de fixer le lieu de l'oeil derrière la dernière surface, afin qu'il reçoive tous les rayons de l'objet, qui sont transmis par l'instrument, et qu'il découvre le champ apparent tout entier. Soit donc $O$ la distance de l'oeil derrière la dernière surface, laquelle doit nécessairement être positive, et on aura pour chaque nombre de surfaces les formules suivantes:

| Nombre des surf. | |
|---|---|
| 1 | $O = o = \alpha + l,$ |
| 2 | $O = \frac{\pi^I g}{\psi^I} = -\frac{\Delta\pi^I g}{ma\varphi} = -\frac{\Delta(n^I - 1)\pi^I}{NmA(\psi^I - B\psi)} = -\frac{B}{l}\cdot\frac{(n^I - 1)\pi^I}{\psi^I - B\psi} = \beta + l,$ |
| 3 | $O = \frac{\pi^{II} h}{\psi^{II}} = +\frac{\Delta\pi^{II} h}{ma\varphi} = +\frac{\Delta(n^{II} - 1)\pi^{II}}{NmAB(\psi^{II} - C\psi^I)} = -\frac{C}{l}\cdot\frac{(n^{II} - 1)\pi^{II}}{\psi^{II} - C\psi^I} = \gamma + l,$ |
| 4 | $O = \frac{\pi^{III} i}{\psi^{III}} = -\frac{\Delta\pi^{III} i}{ma\varphi} = -\frac{\Delta(n^{III} - 1)\pi^{III}}{NmABC(\psi^{III} - D\psi^{II})} = -\frac{D}{l}\cdot\frac{(n^{III} - 1)\pi^{III}}{\psi^{III} - D\psi^{II}} = \delta + l,$ |
| 5 | $O = \frac{\pi^{IV} k}{\psi^{IV}} = +\frac{\Delta\pi^{IV} k}{ma\varphi} = +\frac{\Delta(n^{IV} - 1)\pi^{IV}}{NmABCD(\psi^{IV} - E\psi^{III})} = -\frac{E}{l}\cdot\frac{(n^{IV} - 1)\pi^{IV}}{\psi^{IV} - E\psi^{III}} = \varepsilon + l$ |

etc.

De ces différentes expressions on pourra se servir dans chaque cas de celle, qu'on jugera la plus convenable.

VI. Mais il faut toujours satisfaire en sorte à ces conditions, que les deux conditions rapportées au § précédent soient aussi remplies, c'est à dire que: 1° les distances entre les surfaces $AB$, $BC$, $CD$ etc. deviennent toutes positives, et 2° que les ouvertures des surfaces ne deviennent pas trop grandes par rapport à leurs rayons de courbure.

VII. Les articles suivants servent à rendre la vision distincte, et d'abord pour détruire la confusion causée par l'ouverture des surfaces, ou pour la rendre au moins insensible, comme l'effet de cette confusion est, que tous les points de l'objet paraissent comme des taches circulaires. Soit $\theta$ le demi-diamètre apparent d'une telle tache, qu'on veut encore admettre, et il faudra satisfaire à cette équation:

$$\frac{8\theta\Delta aa}{mx^3} = \left\{\begin{array}{l} \frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^IB+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I-B\psi)} + \\ \frac{A^3B^3(n^{II}+C)(n^{II}C+1)(C+1)^2\varphi}{(n^{II}-1)^2(\psi^{II}-C\psi^I)} + \frac{A^3B^3C^3(n^{III}+D)(n^{III}D+1)(D+1)^2\varphi}{(n^{III}-1)^2(\psi^{III}-D\psi^{II})} \end{array}\right\}$$

etc.

De sorte qu'en prenant $\theta = o$, on fera évanouir entièrement cette confusion.

VIII. Enfin il faut aussi détruire la confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons ce qui demande deux conditions: la première nous procure l'avantage, que les objets ne paraissent point environnés de fausses couleurs. Pour cet effet il faut satisfaire à cette équation:

$$o = a\psi dn + nAb(\psi^I - \pi^I)dn^I + nn^IABc(\psi^{II} - \pi^{II})dn^{II} + nn^In^{II}ABCd(\psi^{III} - \pi^{III})dn^{III} + \text{etc.}$$

IX. Cette condition nous délivrera déjà des plus grands inconvenients de la différente réfraction des rayons, sans réunir toutes les images colorées; mais quand on souhaite aussi réunir toutes ces images, on n'à qu'à satisfaire à l'équation suivante:

$$o = \left\{\begin{array}{l} \frac{a(A+1)dn}{n-1} + \frac{nA\Delta b(B+1)dn^I}{n^I-1} + \frac{nn^IAABBc(C+1)dn^{II}}{n^{II}-1} + \\ \frac{nn^In^{II}AABBCCd(D+1)dn^{III}}{n^{III}-1} + \frac{nn^In^{II}n^{III}AABBCCDDe(E+1)dn^{IV}}{n^{IV}-1} \end{array}\right\} \quad (\S\ 87.)$$

etc.

En remplissant toutes ces conditions, il n'y a aucun doute que l'instrument dioptrique ne soit doué de toutes les bonnes qualités qu'on puisse désirer.

140. **Coroll. 1.** Comme il faut satisfaire à tant de conditions pour procurer aux instruments dioptriques le plus haut degré de perfection dont ils sont susceptibles, on comprend aisément qu'il faut pour cela employer plusieurs surfaces réfringentes, pour avoir autant de quantités à déterminer, qu'il y a d'équations à résoudre.

141. **Coroll. 2.** Sur tout par rapport au champ apparent, on voit par l'article III., que plus on emploie de surfaces réfringentes, et plus sera-t-on en état d'amplifier le champ apparent. On en voit aussi, que plus on veut grossir, moins sera-t-il possible d'augmenter la valeur de $\varphi$.

142. **Réflexion.** Je ne doute pas de donner ces recherches pour un précis de toute la dioptrique, puisque j'ai tenu compte de toutes les circonstances, qui peuvent accompagner la vision par les instruments dioptriques. En effet après avoir trouvé moyen de réduire à des formules assez simples tant la confusion causée par l'ouverture des surfaces, que celle qui provient de la diverse réfrangibilité des rayons, il ne reste plus rien, qui puisse contribuer à la perfection des instruments dioptriques, surtout après que j'ai aussi développé tout ce qui regarde le grossissement, le degré de clarté, le champ apparent et le lieu de l'oeil avec l'ouverture qu'il faut donner à chaque surface. Cependant je ne saurais disconvenir, que la grande généralité de ces formules, qui s'étendent à des surfaces et des milieux réfringents quelconques, renferme encore bien des obstacles, pour en faire l'application à des cas particuliers, comme lorsqu'il s'agit de lentilles de verre, dont on veut construire ou des télescopes, ou des microscopes; cependant on voit bien que tous ces cas sont compris dans nos formules, et cela non seulement quand on suppose à chaque lentille de verre une réfraction particulière, mais aussi quand on veut employer des lentilles composées de verre et d'eau ou d'un autre fluide transparent. Par cette raison je m'en vais faire l'application de la théorie générale, que je viens d'exposer, à tous ces différents cas qui peuvent avoir lieu dans la pratique, et d'abord je commencerai par les lentilles simples de verre, comme on les considère ordinairement dans la dioptrique, en supposant que les rayons y entrent de l'air, et qu'ils en sortent dans l'air; ensuite je considérerai de semblables lentilles environnées d'un coté d'air et de l'autre d'eau ou d'un autre milieu transparent, ce qui me conduira à des lentilles composées de deux différents milieux réfringents. Après cela il ne s'agira plus que d'appliquer nos formules générales à des instruments composés de plusieurs lentilles, tant simples que composées. Alors dans chaque on verra plus aisément, à quel degré il est possible de remplir les conditions prescrites, pour porter les instruments dioptriques à leur plus haut degré de perfection.

---

# XXIV.

# Recherche pour servir à la perfection des Lunettes.

## Section I.

1. Quoique le hazard ait produit la découverte des lunettes, ce n'est qu'à l'aide de la théorie, qu'on les puisse porter à leur plus haut degré de perfection, surtout quand on y veut employer plusieurs verres. Puisque deux verres ne sauraient représenter distinctement les objets, qu'étant fixés à une certaine distance, la seule expérience suffisait à trouver cette distance, et par le même moyen il n'était pas difficile de découvrir la proportion des deux verres, pour que la représentation devint la plus belle. Mais dès qu'il s'agit de joindre trois ou plusieurs verres, le nombre des combinaisons possibles, tant par rapport à leur éloignement qu'à leur proportion, devient trop grand, pour qu'on les puisse essayer toutes et en choisir celle qui produise le meilleur effet; et plus le nombre des verres sera grand, et moins sera-t-on en état de découvrir par la seule expérience la disposition la plus avantageuse. Ce n'est alors que la théorie qui nous y puisse conduire.

2. Or c'est le nombre des verres qui constitue la principale différence entre les lunettes, et partant la première espèce contient les lunettes composées de deux verres, lesquelles étant les plus simples, la seule expérience était suffisante à les porter à leur plus haut degré de perfection. A la seconde espèce je rapporte les lunettes composées de trois verres, dont il y a qu'on a mises en pratique avec bien du succès, après qu'on s'est aperçu, qu'en doublant le verre oculaire, on peut augmenter considérablement le champ apparent. Ensuite la troisième espèce renferme les lunettes composées de quatre verres, dont on ne connaît presque que celles qui, par l'addition de deux verres oculaires aux lunettes communes astronomiques, redressent le renversement des objets. De même les lunettes à cinq verres donneront la quatrième espèce, celles à six la cinquième et ainsi de suite.

3. Comme la première espèce a fourni deux sortes de lunettes, l'une composée d'un verre convexe et d'un concave, et l'autre de deux verres convexes, on comprend que la seconde espèce

contient plusieurs sortes différentes, la troisième encore davantage et ainsi de suite. Mais il faut bien examiner quels avantages on puisse retirer de chaque sorte, avant que de les mettre en pratique, car il est certain qu'on ferait très mal d'employer plusieurs verres, si l'on pouvait obtenir les mêmes avantages avec un plus petit nombre; non seulement les défauts inévitables dans la construction de chaque verre, allant en multipliant, détruiraient les avantages espérés, mais aussi la seule multitude des verres, en interceptant plusieurs rayons, obscurcirait la représentation des objets. Donc pour juger des avantages qu'on pouvait espérer en employant plusieurs verres, je m'en vais étaler les bonnes qualités qu'on prétend de chaque lunette.

4. Or les bonnes qualités qu'on exige d'une lunette peuvent être réduites aux quatre articles suivants:

1. Elle doit présenter distinctement les objets.
2. Elle doit présenter clairement les objets.
3. Elle doit grossir les objets.
4. Elle doit découvrir un grand champ.

Je n'ajoute pas la condition que la lunette présente les objets debout, puisque la représentation renversée ne trouble point les observations astronomiques que j'ai ici principalement en vue, et pour les objets terrestres l'analyse que je ferai, fournira assez d'espèces qui les représentent debout. Or il n'y a aucun doute que plus une lunette satisfait aux conditions rapportées, plus elle doit être jugée parfaite; il est aussi évident que, si deux lunettes sont d'une bonté égale par rapport à ces 4 conditions, la préférence doit être donnée à celle qui est plus courte et composée d'un moindre nombre de verres. Je m'en vais donc développer plus soigneusement ces 4 conditions et montrer les arrangements que chacune exige séparément.

## 1. *De la représentation distincte.*

5. Pour rendre la représentation distincte, il faut que tous les rayons qui partent de chaque point de l'objet, soient rassemblés derechef dans un seul point au fond de l'oeil. Cela demande une telle disposition des verres que l'image de l'objet, qui en est représentée, se trouve à une juste distance de l'oeil; car cette image, étant l'objet immédiat de notre vue, il faut qu'elle ne soit ni trop éloignée ni trop proche de l'oeil, ce qui dépend de la nature de l'oeil. Or nonobstant la diversité des yeux, le plus sûr moyen de réussir est d'arranger les verres en sorte que la dernière image, objet immédiat de la vue, tombe à une fort grande distance, qu'on puisse regarder comme infinie. Car cette distance est la plus convenable pour ceux qui ont la vue parfaitement bonne, et pour ceux qui ont la vue courte ou pour la plupart des vieillards, ils n'ont qu'à raccourcir ou qu'à allonger la lunette, jusqu'à ce qu'ils la trouvent la plus propre à leur état. Voilà donc la première condition requise pour cet article, qui est, que la dernière image représentée par la lunette tombe à une distance quasi infinie de l'oeil.

6. Mais cela ne suffit pas pour satisfaire au premier article, il faut outre cela prévenir la confusion qui pourrait troubler la représentation des objets. Cette circonstance détermine l'ouverture

qu'on doit donner à chaque verre, car, quelques soins qu'on ait apportés à travailler un verre, on observe toujours que les rayons qui passent vers les bords du verre sont autrement réfractés, que ceux qui passent par le milieu et qu'ils ne se réunissent pas parfaitement; pour prévenir cette confusion, on est obligé de rétrécir l'ouverture qu'on donne aux verres tantôt plus, tantôt moins. La figure sphérique qu'on donne ordinairement aux faces des verres n'est pas la plus convenable pour ce dessein et demande un rétrécissement assez considérable. Or, il peut arriver qu'en s'écartant insensiblement de cette figure, le verre puisse souffrir ou une plus grande ou une plus petite ouverture; et dans le premier cas le verre sera d'autant plus excellent, plus il admet une grande ouverture. L'expérience fournira donc le plus sûr moyen, pour connaître la juste ouverture de chaque verre.

7. Cependant en supposant que les faces des verres soyent sphériques et semblables de part et d'autre, on peut donner une règle pour déterminer l'ouverture qui ne produise point une confusion sensible. Cette règle est fondée en partie sur l'expérience et en partie sur la théorie. Mr. Huygens, ayant remarqué qu'un verre objectif de 30 pieds de foyer pouvait bien souffrir une ouverture de 3 pouces de diamètre; si l'on y joint de la théorie, que le diamètre de l'ouverture suit la raison sous-doublée de la distance du foyer, on en tirera cette règle: Soit la distance de foyer d'un verre quelconque $= p$, le demi-diamètre de l'ouverture $= x$ et qu'on pose $x = \sqrt{ip}$, la quantité $i$ doit être prise de $\frac{1}{150}$ pouce. Si l'on voulait se contenter d'un moindre degré de distinction, on pourrait augmenter la valeur de $i$; et si l'on demandait encore une plus parfaite distinction, on devrait prendre la valeur de $i$ encore plus petite; c'est pour cette raison que je laisserai la valeur de $i$ indéterminée.

8. Mais outre qu'une petite aberration de la figure sphérique peut admettre une ouverture tantôt plus grande, tantôt plus petite, selon que le hazard tombe, cette règle ne peut pas aussi être suivie pour tous les verres, quoique leurs faces soient sphériques. Car la distance du foyer demeurant la même, la figure des deux faces peut varier à l'infini, et c'est de l'inégalité des faces selon qu'elles sont convexes ou planes ou concaves, que l'ouverture depend beaucoup, et selon que l'une ou l'autre est tournée vers l'objet. On a trouvé que les verres plano-convexes ont à peu près le plus grand avantage à cet égard, quand on tourne la face convexe vers l'objet, et alors on pourra bien mettre $i = \frac{1}{100}$ pouce. Or on suppose ici que l'objet est infiniment éloigné. De distances plus petites demanderaient d'autres règles, qu'il est difficile de déterminer, mais à l'égard de la figure des verres, on peut remarquer que plus l'une ou l'autre face a de courbure, l'ouverture en devient diminuée, et c'est la raison que les ménisques souffrent une beaucoup plus petite ouverture, qui semble suffisante pour les exclure entièrement de la dioptrique.

9. Puisqu'on regarde dans les lunettes la distance des objets comme infinie, il sera toujours avantageux de donner au verre objectif une figure plano-convexe, en tournant la convexité vers l'objet, et la même raison nous porte à donner une figure semblable au dernier verre oculaire, qui envoye ses rayons immédiatement dans l'oeil, avec cette différence seulement, que dans ce cas la convexité doit être tournée vers l'oeil. Pour les autres verres intermédiaires, s'il y en a, on n'a pas encore établi des règles assez sûres, pour en déterminer l'ouverture; cependant il est certai

que, plus le foyer d'un verre est court, plus aussi son ouverture doit être diminuée. Cependant nous verrons qu'ordinairement les rayons, transmis par l'objectif, remplissent sur les autres verres un fort petit espace, d'où il n'y a rien à craindre à cause de l'inégalité de la réfraction, et partant, on leur peut laisser une si grande ouverture que leur figure supporte, et, à cet égard, il est aussi indifférent de quelle espèce qu'on prenne le verre oculaire.

10. Il est aussi fort essentiel de considérer ici la confusion qui naît de la diverse réfrangibilité des rayons; car, si l'objet renvoie toutes les espèces de rayons, la confusion sera d'autant plus grande, plus le foyer du verre est éloigné, et elle ne saurait être diminuée par le rétrécissement de l'ouverture. J'ai déjà montré, comment ce défaut pourrait être corrigé par la composition de deux différentes matières transparentes, mais comme cet expédient demande des ménisques d'une grande courbure, leur ouverture se réduit presque à rien, ce qui est un inconvénient presque aussi important, sans compter les difficultés d'exécuter bien ces sortes de verres. Or si l'objet n'est teint que d'une simple couleur et que tous ses rayons souffrent la même réfraction, on peut avec tout le succès employer des verres ordinaires, sans craindre de ce côté la moindre confusion, et, par cette raison, je bornerai mes recherches aux verres ordinaires.

## *De la représentation claire.*

11. La clarté est une propriété très essentielle qu'on exige d'une bonne lunette et on a raison de regarder comme fort défectueuses les lunettes qui ne représentent les objets que fort obscurément. La cause d'une telle obscurité est évidemment, que, trop peu des rayons qui partent de chaque point de l'objet, entrent dans l'oeil, lorsque les verres ne sont pas bien polis, la perte de plusieurs rayons qui ne sont pas transmis, causera nécessairement une obscurité; et, quand la lunette est composée de plusieurs verres, quelque polis qu'ils soient, la représentation en doit devenir plus obscure, puisque chaque verre intercepte quelque partie des rayons. On remédiera à ce défaut, en polissant les verres autant qu'il est possible, et en leur donnant aussi peu d'épaisseur que les circonstances le permettent, puisqu'on sait, que, plus un verre est épais, plus il fait périr de rayons dans leur passage; en prenant cette précaution, on n'a pas trop à craindre d'obscurité de ce côté, quand même on employerait plusieurs verres.

12. Mais il faut ici principalement avoir égard à la quantité des rayons qui sont transmis par la lunette dans l'oeil; si le cône lumineux qui passe de chaque point de l'objet par la lunette remplit toute l'ouverture de la pupille, c'est le plus grand degré de clarté que l'on puisse prétendre; et les objets ne paraissent ordinairement obscurs que parceque les rayons qui viennent d'un point de l'objet, ne remplissent pas toute l'ouverture de la pupille. On obtient donc le plus grand degré de clarté, lorsque la section du cône lumineux de chaque point de l'objet, là où il entre dans l'oeil, est égale ou même plus grande que l'ouverture de la pupille; mais, si elle est plus petite, la vision devient nécessairement obscure. Cependant on n'exige pas ordinairement le plus grand degré de clarté, et on est obligé de se contenter, lorsque l'amplitude du cône lumineux qui entre dans l'oeil est deux, trois ou même plusieurs fois plus petite que l'ouverture de la pupille.

13. A l'égard de la clarté c'est donc principalement l'ouverture de la pupille qui doit être tirée en considération. Pour cet effet je poserai dans la suite le demi-diamètre de l'ouverture de la pupille $= \omega$, et il suffira de remarquer que cette quantité $\omega$ est ordinairement $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{25}$ pouce, puisqu'on sait que la pupille est assujettie à de fort grands changements et qu'elle se dilate très considérablement dans l'obscurité, tandis qu'une forte lumière la rétrécit. Donc, si le demi-diamètre du cône lumineux, là où il entre dans l'oeil, est égal ou plus grand que $\omega$, on obtient la plus grande clarté possible; mais, si ce demi-diamètre n'est que $\frac{1}{2}\omega$ ou $\frac{1}{3}\omega$, la clarté deviendra 4 ou 9 fois plus petite. J'exprimerai dans la suite par l'unité la plus grande clarté possible, et les autres degrés de clarté que chaque lunette fournit, seront indiqués relativement à cette unité par des fractions, ainsi $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{9}$ marqueront une clarté qui est ou quatre ou neuf fois plus petite que la pleine et plus grande.

14. Cette circonstance sert aussi principalement à déterminer l'endroit le plus propre où il faut placer l'oeil derrière la lunette, pour en recevoir le plus copieusement les rayons. On sait par l'expérience que, pour voir clairement par une lunette de deux verres dont l'oculaire est concave, il y faut approcher l'oeil autant qu'il est possible; mais, si l'oculaire est convexe, l'oeil doit être mis derrière l'oculaire à une distance qui est à peu près égale à la distance de son foyer. Or, il en est de même de toutes les autres espèces de lunettes où il y a toujours un certain endroit pour l'oeil, qui rend la vision la plus claire, et qu'il est fort important de bien déterminer. Cette condition de la clarté met aussi des bornes au grossissement des objets, en déterminant le verre oculaire, dont on peut se servir sans perdre trop de la clarté en agrandissant l'apparition de l'objet, ce que je m'en vais examiner plus soigneusement dans l'article suivant.

### 3. *Du grossissement des objets.*

15. Plus une lunette grossit les objets, plus elle est estimée parfaite, à moins qu'elle ne soit par là dépouillée des autres propriétés également nécessaires, surtout de la clarté; car, si l'on voulait négliger la clarté, rien ne serait plus aisé que d'augmenter la représentation autant qu'on voudrait. Mais, puisqu'il faut conserver un certain degré de clarté, on verra par la suite que l'augmentation dépend principalement de la longueur de la lunette, de sorte que, la longueur étant donnée, il est impossible de pousser l'augmentation au de là d'un certain degré. Cependant les verres, s'il y en a plusieurs, peuvent souvent être tellement arrangés que, sans déroger aux autres propriétés, la même longueur produise un plus grand grossissement, lequel, quoiqu'il ne soit pas fort considérable, ne laisse pas de mériter une attention particulière, et une lunette qui grossit plus qu'une autre de la même longueur, sans que les autres propriétés en souffrent, est estimée d'autant plus excellente.

16. Or, l'augmentation, produite par la lunette, se détermine par le rapport entre l'angle sous lequel on voit l'objet par la lunette et celui sous lequel on le voit à la vue simple, en supposant la distance de l'objet quasi infinie. Ainsi, p. ex., lorsque nous voyons par la lunette un objet sous un angle de dix degrés que nous voyons à la vue simple sous un angle d'un degré, on

dit que cette lunette grossit dix fois ou que la multiplication de l'objet vaut dix: ce qui doit s'entendre du diamètre ou des dimensions linéaires de l'objet; et il est clair que, dans ce cas, la surface de l'objet doit paraître cent fois et la solidité mille fois plus grande. J'employerai dans la suite la lettre $m$ pour marquer combien de fois l'angle visuel par la lunette surpasse celui à la vue simple; donc, $m$ étant la multiplication des dimensions linéaires, la multiplication de la surface sera exprimée par le quarré $m^2$ et celle de la solidité par le cube $m^3$.

17. A la multiplication de l'objet on peut commodément rapporter la situation sous laquelle on l'aperçoit, si elle est droite ou renversée. Le seul signe du nombre $m$ nous éclaircira sur ce point. Car, si nous donnons au nombre $m$, aux cas que l'objet est représenté debout, des valeurs positives, qui marquent l'augmentation de son diamètre apparent, les valeurs négatives de ce nombre nous donneront à connaître, que les objets sont représentés dans une situation renversée, mais autant de fois augmentés dans leurs diamètres que le nombre $m$ montre. Ainsi la détermination du grossissement des objets nous fera voir en même temps si les lunettes nous présentent les objets debout ou renversés. Au reste, puisqu'il s'agit ici de la multiplication de l'angle visuel et que cet angle, présenté par une lunette quelconque, est toujours fort petit, je prendrai les tangentes de ces angles pour leurs mesures, de sorte que le nombre $m$ résulte en divisant la tangente de l'angle sous lequel on aperçoit l'objet par la lunette, par la tangente de l'angle vu à la vue simple.

### 4. *De la quantité du champ apparent.*

18. Pour le champ apparent on comprend d'abord, qu'il est fort étroitement lié avec la multiplication, et que, plus celle-ci est grande, plus celui-là doit devenir petit. Car une lunette qui multiplie les angles en raison centuple, ne nous saurait découvrir dans le ciel un angle d'un degré, puisque l'apparition de cet angle devrait être de 100 degrés, ce qui est évidemment impossible d'effectuer par quelque lunette que ce soit. Il faut donc avoir égard à l'étendue que l'oeil, en voyant par une lunette, peut embrasser, et si cette étendue ne saurait jamais surpasser, p. ex., 30 degrés, il est évident que, posant la multiplication $= m$, il serait impossible que la lunette nous découvrît dans le ciel un espace plus grand que de $\frac{30}{m}$ degrés, et dans cette hypothèse une lunette qui augmenterait 100 fois les diamètres, ne nous saurait découvrir dans le ciel un espace plus grand que de $\frac{3}{10}$ degré ou de 18 minutes environ. Mais l'étendue, vue par la lunette que nous avons supposée ici de 30 degrés, dépend beaucoup de l'arrangement des verres, qui peut être tel, que cette étendue est plus ou moins au-dessous de 30 degrés, et c'est de cette circonstance qu'il faut juger de la perfection d'une lunette à l'égard du champ apparent.

19. Je mesurerai le champ apparent qu'une lunette nous découvre par la moitié de son angle visuel, sous lequel on le verrait à la vue simple. Ce champ étant un espace circulaire au centre duquel aboutit l'axe de la lunette, le demi-diamètre de ce cercle, divisé par la distance de l'oeil, donnera la mesure du champ apparent; ou bien la tangente du demi-angle visuel, que nous pourrons aisément confondre avec l'angle lui-même, vu que ces angles ne deviennent jamais si grands qu'ils ne puissent être regardés proportionnels à leurs tangentes, et cela d'autant plus qu'il ne

s'agit pas ici d'une précision géométrique. La lettre $\varphi$ me marquera dans la suite cette moitié du champ apparent, d'où l'on comprend que, pour voir la lune tout entière, il faut que cet angle $\varphi$ surpasse environ $\frac{1}{4}$ de degré. Ainsi, posant le grossissement $= m$, un espace du ciel qui paraît à la vue simple sous l'angle $\varphi$ paraîtra par la lunette sous un angle $= m\varphi$, qui sera la moitié de l'étendue vue par la lunette. Une lunette sera donc d'autant plus parfaite, plus cet angle $\varphi$ sera grand, la clarté et l'augmentation des objets demeurant les mêmes.

20. Cependant il faut bien considérer que tout cet espace qu'une lunette découvre, ne paraît pas par toute son étendue avec le même degré de clarté; les objets qui se trouvent au milieu sont ordinairement représentés avec plus de clarté que ceux qui se trouvent vers les extrémités, où la clarté semble s'évanouir peu à peu. Par cette raison il est fort important de distinguer bien le champ apparent absolu de celui où la même clarté, qui se trouve au milieu, est également répandue: en vertu de cette distinction je remarquerai toujours, si $\varphi$ exprime le demi-diamètre du champ apparent entier ou seulement celui du champ apparent clair; souvent la différence est très considérable et quelquefois elle se réduit presque à rien, d'où résulte une différence bien remarquable entre les diverses espèces de lunettes. Cependant, quoiqu'un plus grand champ apparent soit une propriété fort importante, il y a pourtant des cas où un petit champ ne serait pas à mépriser pourvu que les autres conditions soyent bien remplies, comme s'il s'agissait de contempler bien le corps d'une planète ou comète.

*Considérations générales sur les lunettes à plusieurs verres.*

21. Après avoir donné une idée générale des perfections qu'on exige d'une bonne lunette je m'en vais considérer en général la combinaison de plusieurs verres, que je supposerai toujours disposés perpendiculairement sur une ligne droite qu'on nomme l'axe de la lunette. Or il faut d'abord commencer par un seul verre, dont il n'entre dans le calcul que sa distance de foyer, et il n'importe de quelle figure soient ses faces, soit égales soit inégales entr'elles, pourvu qu'il représente l'image des objets infiniment éloignés à la même distance derrière lui: car, quoique la diversité de ses faces puisse contribuer à augmenter ou diminuer son ouverture, puisqu'on en peut tenir compte séparément, et qu'il est à propos d'employer toujours un tel verre qui admette la plus grande ouverture, on peut se passer entièrement de cette considération dans la recherche que j'entreprends et il suffira d'avoir égard à la distance de foyer de chaque verre, qu'on veut employer. Les règles pour trouver cette distance de foyer, en sachant les deux faces du verre, sont assez connues, mais il vaut toujours mieux de la déterminer par l'expérience.

22. Or il y a deux sortes de verres dont on se sert dans la dioptrique: les uns sont nommés convexes, qui représentent l'image des objets infiniment éloignés derrière eux, quoique les plans-convexes et les ménisques produisent aussi cet effet; et les autres, où l'image tombe en avant, sont nommés concaves; pour distinguer ces deux sortes je considérerai la distance de foyer des premiers comme positive, et celle des concaves comme négative; ainsi posant la distance de foyer d'un verre $= p$, tant que cette quantité $p$ sera positive, il faut entendre un verre convexe, qui jette en derri-

à la distance $= p$, l'image des objets qui sont quasi infiniment éloignés. Or si $p$ est une quantité négative, le verre doit être pris concave. Dans l'un et l'autre cas le demi-diamètre de l'ouverture se détermine par la formule $\sqrt{ip}$, en mettant pour $i$ la $\frac{1}{150}$ d'un pouce environ, lorsque le verre reçoit les rayons immédiatement de l'objet, ou lorsqu'il est objectif: car pour les autres verres, on verra bientôt qu'on leur peut donner autant d'ouverture que leur structure permet, dont le demi-diamètre peut bien égaler la quatrième partie de leur distance de foyer. Cependant pour ne rien décider je le poserai $= np$.

23. **Lemme.** La distance de foyer d'un verre étant donnée, trouver le lieu et la grandeur de l'image qu'elle représente, lorsque l'objet se trouve à une distance donnée devant un verre.

**Solution.** Que $p$ marque la distance de foyer du verre $MN$ (Fig. 265.), posé sur l'axe $PQ$, qui passe perpendiculairement par le centre $A$ du verre. Que l'objet se trouve à la distance $AP = a$ devant le verre et qu'on y conçoive une ligne donnée de grandeur $Pp = z$, dont il faut déterminer le lieu et la grandeur $Qq$ représentée par le verre. Or par les principes de dioptrique, on sait que la distance sera $AQ = \frac{ap}{a-p}$, et puisque la continuation de la droite $pA$, tirée par le bout de l'objet $p$ et le centre du verre $A$, termine l'image, la grandeur de l'image sera $Qq = \frac{pz}{a-p}$, dont la situation comme elle est réprésentée dans la figure, est renversée.

24. **Coroll. 1.** Si la distance de l'objet $AP = a$ était infinie, la distance de l'image deviendrait $AQ = p$, ou bien égale à la distance de foyer, tout comme la définition du foyer exige. Mais si la distance de l'objet $AP = a$ était prise égale à la distance de foyer du verre ou $a = p$, l'image $Qq$ s'éloignerait à l'infini et deviendraît aussi infiniment grande. Enfin si la distance de l'objet $AP = a$ était moindre que la distance de foyer du verre, ou $a < p$, l'image $Qq$, à cause de $AQ$ négative, tomberait en avant et de renversée deviendrait droite.

25. **Coroll. 2.** Si le verre $MN$ était concave ou $p$ une quantité négative $= -\pi$, l'image $Qq$ tomberait aussi avant le verre à une distance $= \frac{a\pi}{a+\pi}$ et serait debout. Cette distance deviendra $= \pi$, si l'objet était infiniment éloigné, et plus l'objet serait approché du verre, plus aussi la distance de l'image deviendrait petite et s'évanouirait enfin entièrement avec celle de l'objet.

26. **Coroll. 3.** Quoique l'objet $Pp$ se trouve toujours naturellement devant le verre, lorsque c'est un objet réel, cependant puisque l'image, présentée par un verre, tient lieu de l'objet à l'égard du verre suivant, il peut arriver que la distance de l'objet $AP = a$ doit être prise négative, et dans ce cas, donnant à $a$ une valeur négative, les mêmes formules fourniront tant le lieu que la grandeur de l'image.

27. **Coroll. 4.** Si nous posons la distance de l'image après le verre $AQ = \alpha$, nous aurons $\alpha = \frac{ap}{a-p}$, d'où nous tirons ou $a = \frac{\alpha p}{\alpha - p}$ ou $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$. Cette dernière formule nous découvre le verre qu'il faut placer en $A$, pour que l'image de l'objet $Pp$ soit représentée en $Q$, et alors la grandeur de l'image sera $Qq = \frac{\alpha z}{a}$.

28. **Problème 1.** Autant de verres qu'on voudra étant disposés sur l'axe $OZ$ en $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ (Fig. 266.), devant lesquels se trouve un objet $Oo$, trouver tant le lieu que la grandeur de toutes les images qui seront représentées par tous ces verres.

**Solution.** Soient les distances de foyer de chacun des verres, de celui en $A=p$, de celui en $B=q$, en $C=r$, en $D=s$, en $E=t$ etc., et que la distance de l'objet $Oo$ devant le premier verre en $A$ soit $AO=a$, et la hauteur, prise à volonté, $Oo=z$, dont il s'agit de déterminer les images. Soit donc $Pp$ l'image formée par le premier verre, qui, tenant lieu de l'objet à l'égard du second verre $B$, soit $Qq$ la seconde image, et ainsi de suite $Rr$ la troisième, $Ss$ la quatrième, $Tt$ la cinquième etc., où il faut concevoir que de ces images la première $Pp$, la troisième $Rr$, la cinquième $Tt$ etc. sont renversées, et les autres savoir la seconde, la quatrième, la sixième etc. droites. Qu'on pose donc les distances:

$$AP=\alpha,\quad BQ=\beta,\quad CR=\gamma,\quad DS=\delta,\quad ET=\varepsilon,$$

$$BP=b,\quad CQ=c,\quad DR=d,\quad ES=e \text{ etc.},$$

et pour la grandeur des images on aura d'abord indépendamment des verres les déterminations suivantes:

$$Pp=\frac{\alpha z}{a},\quad Qq=\frac{\alpha\beta z}{ab},\quad Rr=\frac{\alpha\beta\gamma z}{abc},\quad Ss=\frac{\alpha\beta\gamma\delta z}{abcd} \text{ etc.}$$

Or, en tenant compte des verres mêmes, on obtiendra les formules suivantes:

$$p=\frac{a\alpha}{a+\alpha},\quad q=\frac{\beta b}{b+\beta},\quad r=\frac{\gamma c}{c+\gamma},\quad s=\frac{\delta d}{d+\delta},\quad t=\frac{\varepsilon e}{e+\varepsilon} \text{ etc.}$$

Où il faut observer que les distances $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$, $d$, $\delta$ etc. peuvent souvent devenir négatives, mais puisque les distances entre les verres sont nécessairement positives, savoir:

$$AB=\alpha+b,\quad BC=\beta+c,\quad CD=\gamma+d,\quad DE=\delta+e \text{ etc.},$$

ces quantités composées doivent toujours être positives, quoique l'une ou l'autre des parties devienne négative.

29. **Coroll. 1.** Pour appliquer ce problème général aux lunettes, il faut supposer la distance de l'objet $AO=a$ infinie, mais en sorte que $\frac{z}{a}$ devienne une quantité finie qui exprimera le demi-diamètre du champ apparent, lorsque $z$ est pris pour le demi-diamètre de toute l'étendue du ciel qu'on découvre par la lunette. Donc si nous posons $\frac{z}{a}=\varphi$, nous aurons:

$$Pp=\alpha\varphi,\quad Qq=\frac{\alpha\beta}{b}\varphi,\quad Rr=\frac{\alpha\beta\gamma}{bc}\varphi,\quad Ss=\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd}\varphi \text{ etc.}$$

et $p=\alpha$, les autres formules demeurent les mêmes.

30. **Coroll. 2.** Mais la condition de la vision distincte exige que la dernière image soit aussi infiniment éloignée. Donc si nous regardons l'image $Tt$ comme la dernière, il faut qu'il soit $ET=\varepsilon=-\infty$ et partant $t=e$. Or la grandeur de cette dernière image étant $Tt=\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{bcde}\varphi$,

puisqu'elle est regardée à une distance infinie $= -\varepsilon$, elle paraîtra sous un angle dont la tangente est $= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}\varphi$, et cette apparition sera maintenant droite, puisque l'image $Tt$ était renversée dans la figure.

31. **Coroll. 3.** Dans ce cas donc ce qui paraît à la vue simple sous un angle $= \varphi$, paraîtra par la lunette sous un angle $= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}\varphi$, et partant la multiplication sera $m = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}$. D'où l'on voit que, si le quatrième verre $D$ était le dernier, on aurait $\delta = -\infty$ et $m = \frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}$, la représentation étant maintenant renversée, si cette fraction est positive. Or en chaque cas cette disposition, qui montre d'abord le grossissement de la lunette, est suffisante pour rendre la vision distincte.

32. **Coroll. 4.** Puisqu'ici les fractions $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$, $\frac{\gamma}{d}$ etc. entrent en considération, si nous y introduisons de plus les distances des verres, en posant:

$$AB = \alpha + b = A, \quad BC = \beta + c = B, \quad CD = \gamma + d = C, \quad DE = \delta + e = D$$

$$\text{et} \quad \frac{\alpha}{b} = \mathfrak{A}, \quad \frac{\beta}{c} = \mathfrak{B}, \quad \frac{\gamma}{d} = \mathfrak{C}, \quad \frac{\delta}{e} = \mathfrak{D} \text{ etc.}$$

nous en tirerons $m = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ etc., et

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}B}{1+\mathfrak{B}}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{C}C}{1+\mathfrak{C}}, \quad \delta = \frac{\mathfrak{D}D}{1+\mathfrak{D}} \text{ etc.}$$

$$b = \frac{A}{1+\mathfrak{A}}, \quad c = \frac{B}{1+\mathfrak{B}}, \quad d = \frac{C}{1+\mathfrak{C}}, \quad e = \frac{D}{1+\mathfrak{D}} \text{ etc.}$$

où il faut remarquer que si $E$ est le dernier verre, il faut qu'il soit $\mathfrak{E} = -1$, si $D$ était le dernier, $\mathfrak{D} = -1$; si $C$ était le dernier, $\mathfrak{C} = -1$, et si $B$ était le dernier, il faudrait qu'il fût $\mathfrak{B} = -1$.

33. **Coroll. 5.** Par ces lettres $A$, $B$, $C$, $D$ etc. et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc., on déterminera les distances de foyer de tous les verres de la manière suivante:

$$p = \alpha = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A + (1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}BC}{(1+\mathfrak{C})B + (1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}C},$$

$$s = \frac{\mathfrak{D}CD}{(1+\mathfrak{D})C + (1+\mathfrak{C})\mathfrak{D}D}, \quad t = \frac{\mathfrak{E}DE}{(1+\mathfrak{E})D + (1+\mathfrak{D})\mathfrak{E}E} \text{ etc.}$$

Si le verre $E$ était le dernier, à cause de $\mathfrak{E} = -1$ on aurait $t = \frac{D}{1+\mathfrak{D}}$; et dans ce cas on pourrait regarder l'oeil comme tenant lieu du verre suivant, et $E$ marquerait sa distance depuis le dernier verre.

34. **Coroll. 6.** Prenant donc pour $A$, $B$, $C$, $D$ etc. des distances quelconques positives et pour $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. des nombres quelconques tant positifs que négatifs, en sorte pourtant que le dernier soit $= -1$, on trouvera des verres convenables à placer dans les points $A$, $B$, $C$ etc., pour que la représentation devienne distincte, et on connaîtra d'abord la multiplication ou le grossissement des objets par la formule $m = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ etc., d'où il est en chaque cas aisé de juger, si la représentation sera droite ou renversée.

35. **Scholie.** Comme ce premier problème contient les fondements pour juger du premier et troisième article, sans qu'il nous mette en état de décider rien sur le second et quatrième article, le problème suivant suppléera à ce défaut et fournira tous les principes dont on a besoin pour estimer la bonté de toutes les lunettes, de combien de verres qu'elles soient composées, et pour en choisir celles, qui seront pourvues des plus grands avantages pour chaque cas qu'on aura en vue.

36. **Problème 2.** (Fig. 266.). Les verres étant disposés d'une manière quelconque, comme dans le problème précédent, trouver la forme du cône lumineux qui est transmis par tous les verres de chaque point de l'objet.

**Solution.** Soit comme auparavant la distance de l'objet devant le premier verre $AO = a$, et qu'on y considére un point quelconque $o$ éloigné de l'axe $OZ$ de la distance $Oo = z$, soient de plus les verres en $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ etc., dont les distances de foyer soient $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ etc., et que les images successives de l'objet $Oo$ soient $Pp$, $Qq$, $Rr$, $Ss$, $Tt$ etc. Nommons aussi les distances:

$$AP = \alpha, \quad BQ = \beta, \quad CR = \gamma, \quad DS = \delta, \quad ET = \varepsilon$$

$$BP = b, \quad CQ = c, \quad DR = d, \quad ES = e \quad \text{etc.}$$

et nous avons trouvé:

$$Pp = \frac{\alpha}{a} z, \quad Qq = \frac{\alpha\beta}{ab} z, \quad Rr = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} z, \quad Ss = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} z \quad \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}, \quad q = \frac{\beta b}{b+\beta}, \quad r = \frac{\gamma c}{c+\gamma}, \quad s = \frac{\delta d}{d+\delta}, \quad t = \frac{\varepsilon e}{e+\varepsilon} \quad \text{etc.}$$

Cela posé, si nous nommons le demi-diamètre du premier verre $AM = AN = x$, de sorte que $x = \sqrt{ip}$, il entrera du point $o$ dans la lunette un cône, dont le sommet est en $o$ et le demi-diamètre de la base en $A = x$; après le passage du premier verre, il se réunira au point $p$ et de là il s'élargira jusqu'à la rencontre du second verre en $mn$; ensuite il sera de nouveau pointu en $q$ et rencontrera le troisième verre par l'espace $m^I n^I$ et ainsi de suite. A moins donc que chaque verre n'ait assez d'ouverture pour recevoir tous les rayons contenus dans ce cône, (?) ne saurait paraître assez clairement par la lunette, d'où l'on voit que du rapport de l'ouverture des verres à ce cône lumineux dépend le jugement tant de la clarté que du champ apparent. Supposons donc que $o$ soit le dernier point de l'objet, d'où tous les rayons qui passent par le premier verre sont transmis par tous les suivants; et pour cet effet, sans avoir égard à l'ouverture des autres verres cherchons en général sur le plan de chaque verre les points $m$, $n$; $m^I$, $n^I$; $m^{II}$, $n^{II}$; $m^{III}$, $n^{III}$ etc. Or la considération des triangles semblables nous fournit d'abord les déterminations suivantes:

$$Bm = \frac{(\alpha+b)z}{a} + \frac{bx}{\alpha} \qquad -Bn = \frac{(\alpha+b)z}{a} - \frac{bx}{\alpha}$$

$$Cm^I = \frac{(\beta+c)\alpha z}{ab} + \frac{c}{\beta} Bm \qquad Cn^I = \frac{(\beta+c)\alpha z}{ab} - \frac{c}{\beta} Bn$$

$$Dm^{II} = \frac{(\gamma+d)\alpha\beta z}{abc} + \frac{d}{\gamma} Cm^I \qquad Dn^{II} = \frac{(\gamma+d)\alpha\beta z}{abc} - \frac{d}{\gamma} Cn^I$$

$$Em^{III} = \frac{(\delta+\varepsilon)\alpha\beta\gamma z}{abcd} + \frac{e}{\delta} Dm^{II} \qquad En^{III} = \frac{(\delta+e)\alpha\beta\gamma z}{abcd} - \frac{e}{\delta} Dn^{II}.$$

d'où nous tirons pour ces limites les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{matrix} Bm \\ -Bn \end{matrix}\right\} = \frac{(\alpha + b)z}{\alpha} \pm \frac{bx}{\alpha},$$

$$\left.\begin{matrix} Cm^{I} \\ Cn^{I} \end{matrix}\right\} = \frac{(\beta + c)\,\alpha z}{ab} + \frac{(\alpha + b)\,cz}{a\beta} \pm \frac{bcx}{a\beta},$$

$$\left.\begin{matrix} Dm^{II} \\ Dn^{II} \end{matrix}\right\} = \frac{(\gamma + d)\,\alpha\beta z}{abc} + \frac{(\beta + c)\,adz}{ab\gamma} + \frac{(\alpha + b)\,cdz}{a\beta\gamma} \pm \frac{bcdx}{a\beta\gamma},$$

$$\left.\begin{matrix} Em^{III} \\ En^{II} \end{matrix}\right\} = \frac{(\delta + e)\,\alpha\beta\gamma z}{abcd} + \frac{(\gamma + d)\,\alpha\beta ez}{abc\delta} + \frac{(\beta + c)\,adez}{ab\gamma\delta} + \frac{(\alpha + b)\,cdez}{a\beta\gamma\delta} \pm \frac{bcdex}{a\beta\gamma\delta}.$$

Éloignons maintenant l'objet à l'infini et posons $\frac{z}{a} = \varphi$ et encore comme ci-dessus:

$$AB = \alpha + b = A, \quad BC = \beta + c = B, \quad CD = \gamma + d = C, \quad DE = \delta + e = D \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{b} = \mathfrak{A}, \quad \frac{\beta}{c} = \mathfrak{B}, \quad \frac{\gamma}{d} = \mathfrak{C}, \quad \frac{\delta}{e} = \mathfrak{D}, \quad \frac{\varepsilon}{f} = \mathfrak{E},$$

t ces limites seront exprimées de la manière suivante:

$$\left.\begin{matrix} Bm \\ -Bn \end{matrix}\right\} = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\left.\begin{matrix} Cm^{I} \\ Cn^{I} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{A}B\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

$$\left.\begin{matrix} Dm^{II} \\ Dn^{II} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}C\varphi + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}}\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}},$$

$$\left.\begin{matrix} Em^{III} \\ En^{II} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}D\varphi + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}C}{\mathfrak{D}}\varphi + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}.$$

yant déterminé les distances de ces limites depuis l'axe $OZ$, il est aisé d'en conclure l'amplitude u cône lumineux à la rencontre de chaque verre; car on aura:

$$mn = \frac{2x}{\mathfrak{A}}, \quad m^{I}n^{I} = \frac{2x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}, \quad m^{II}n^{II} = \frac{2x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \quad m^{III}n^{III} = \frac{2x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}.$$

37. **Coroll. 1.** Si le point de l'objet est pris sur l'axe en $O$ l'angle $\varphi$ s'évanouira et les rmules trouvées marqueront les limites du cône lumineux, transmis de ce point par la lunette à rencontre de chaque verre. Or il est évident que dans ce cas l'axe du cône tombe sur l'axe de lunette, et que les limites $Bm$, $Bn$, $Cm^{I}$, $Cn^{I}$ etc. seront de part et d'autre égaux entr'eux.

38. **Coroll. 2.** Donc si nous supposons qu'il y ait 4 verres en $A$, $B$, $C$, $D$ et que l'oeil it en $E$, la base du cône lumineux qui vient du point de milieu $O$ de l'objet aura à la rencontre

de l'oeil en $E$ pour demi-diamètre $Em''' = En''' = \frac{x}{\mathfrak{ABCD}} = \frac{x}{m}$, puisque nous avons vu que le produit $\mathfrak{ABCD}$ marque le grossissement de l'objet. Donc si $\frac{x}{m}$ est égal ou plus grand que le demi-diamètre de la pupille $\omega$, on verra le milieu de l'objet avec toute la clarté possible; or si $\frac{x}{m}$ est plus petit que $\omega$, la clarté sera moindre en raison $\frac{xx}{mm}$ à $\omega\omega$.

39. **Coroll. 3.** Donc si l'on veut que le milieu de l'objet $O$ soit vu avec la pleine clarté, il faut qu'il soit $\frac{x}{m} =$ ou $> \omega$. Mais puisqu'il serait superflu de rendre $\frac{x}{m} > \omega$, posons $x = m\omega$, d'où l'on connaît le demi-diamètre de l'ouverture du verre objectif en $A$, pour que le milieu de l'objet paraisse avec la pleine clarté, le grossissement de l'objet étant donné. Or de là on trouve immédiatement la distance de foyer de l'objectif $p$ nécessaire pour cet effet, car, puisque $x = \sqrt{ip}$, et partant $p = \frac{xx}{i}$, on aura $p = \frac{mm\omega\omega}{i}$.

40. **Coroll. 4.** Si l'on voulait se contenter d'un moindre degré de clarté qui fût à la pleine clarté comme 1 à $ll$, il faudrait mettre $x = \frac{m\omega}{l}$, et de là on tirerait la distance de foyer $p = \frac{mm\omega\omega}{ill}$, qui serait par conséquent autant de fois moindre que la précédente, que la clarté apparente est plus petite que la pleine clarté.

41. **Coroll. 5.** Pour un autre point de l'objet $o$ éloigné du milieu $O$ de l'angle $\varphi$, les deux limites de son cône lumineux à la rencontre de l'oeil seront $M\varphi + \frac{x}{m}$ et $M\varphi - \frac{x}{m}$, où $M$ marque, pour abréger, le coëfficient de $\varphi$ dans les formules trouvées. Donc si l'un et l'autre est moindre que le demi-diamètre de la pupille, le point $o$ sera encore vu avec la pleine clarté, ou en cas que $x < m\omega$ avec la clarté du centre, et si la plus grande limite $M\varphi + \frac{x}{m}$ est précisément égal au demi-diamètre de la pupille $\omega$, on aura le demi-diamètre du champ apparent clair $\varphi = \frac{m\omega - x}{Mm}$.

42. **Coroll. 6.** Mais si la moindre limite $M\varphi - \frac{x}{m}$ est déjà égal au demi-diamètre de la pupille $\omega$, le point $o$ est le dernier qui soit encore visible, et partant, on aura le demi-diamètre du champ apparent tout entier $\varphi = \frac{m\omega + x}{Mm}$. Une partie donc de ce champ autour du centre, dont le rayon est $\frac{m\omega - x}{Mm}$, paraîtra avec la pleine clarté, et l'espace annulaire extérieur, dont la largeur est $= \frac{2x}{Mm}$, avec une clarté qui va de plus en plus en diminuant et s'évanouit enfin entièrement au bord extérieur.

43. **Coroll. 7.** (Fig. 267.). Le champ apparent étant un cercle, nous voyons que le demi-diamètre de ce cercle tout entier est $OZ = \frac{m\omega + x}{Mm}$, que je nommerai celui du champ apparent tout entier. Mais il faut distinguer dans cet espace un cercle intérieur, qui paraît partout avec la même clarté, que je nommerai le champ apparent clair, dont le rayon est $OX = \frac{m\omega - x}{Mm}$. On pourra donc concevoir un cercle moyen, que je nommerai le champ apparent moyen, dont le rayon sera $OY = \frac{\omega}{M}$ duquel on aura de part et d'autre $YX = YZ = \frac{x}{Mm}$.

44. **Scholie 1.** Voilà donc les principes qui serviront en chaque cas à déterminer tant la clarté de la représentation que le champ apparent. Or il semble des formules que je viens de trouver, qu'il pourrait arriver que le champ apparent devînt non seulement très grand, mais aussi infini, ce qui devrait arriver lorsque $M = o$, et on verra effectivement qu'il y a des cas, où la quantité $M$ peut s'évanouir. Cependant il est certain que le champ apparent ne saurait jamais être augmenté au-delà d'une certaine quantité, car il faut bien remarquer que nous avons supposé jusqu'ici aux verres intermédiaires une si grande ouverture que le cône lumineux puisse passer par chacun: donc s'il arrivait que quelque verre ne fût pas assez large pour recevoir les cônes qui devraient entrer dans l'oeil, ce serait alors de l'ouverture de ce verre et non plus de la pupille qu'il faudrait tirer le jugement du champ apparent. Le raisonnement dans ce cas serait tout à fait le même; car, posant le demi-diamètre de l'ouverture de ce verre $= v$, et les limites du cône lumineux qui lui répondent, la plus grande $= M\varphi + \frac{x}{\mu}$ et la plus petite $= M\varphi - \frac{x}{\mu}$, le demi-diamètre du champ apparent entier serait $= \frac{\mu v + x}{M\mu}$, du champ apparent clair $= \frac{\mu v - x}{M\mu}$, et celui du champ apparent moyen $= \frac{v}{M}$. Il faudra donc tirer ces valeurs non seulement de la pupille, mais aussi de chaque verre intermédiaire entre l'objectif et l'oeil, et les plus petites valeurs qu'on trouvera seront celles qui auront actuellement lieu.

45. **Scholie 2.** Il en est aussi de même du jugement de la clarté dont on voit le milieu de l'objet: cette clarté ne sera pleine au cas de $\frac{x}{m} = \omega$ ou $\frac{x}{m} > \omega$ que lorsqu'il y aura aussi en même temps pour chaque verre intermédiaire $\frac{x}{\mu} =$ ou $< v$, pour que tout le cône lumineux, venant du point $O$, soit transmis par ce verre. Car si, pour quelque verre intermédiaire, il était $\frac{x}{\mu} > v$, quoiqu'il fût pour l'oeil ou $\frac{x}{m} = \omega$ ou $\frac{x}{m} > \omega$, la clarté ne serait pas pleine, mais diminuée dans la raison de $\frac{x^2}{\mu^2}$ à $v^2$; ou bien posant la clarté pleine $= 1$, cette clarté serait $\frac{\mu^2 v^2}{x^2}$. Mais puisque ce serait un défaut très essentiel, qui ne viendrait que du trop peu d'ouverture d'un verre intermédiaire, on peut poser pour une règle fixe, que tous les verres intermédiaires ayent tant d'ouverture qu'il soit toujours $v > \frac{x}{m}$; et il faut soigneusement exclure tous les cas où cette condition ne trouverait pas lieu. Cette règle nous fournira donc les principes pour déterminer l'ouverture de tous les verres intermédiaires, et partant aussi, leurs distances de foyer, d'où une infinité de lunettes imparfaites sera rejetée. J'ai déjà remarqué qu'on peut donner à ces verres autant d'ouverture que leur figure permet; ainsi, posant la distance de foyer $= s$, si nous supposons ses deux faces convexes, le rayon de l'une étant $= f$ et de l'autre $= g$, on aura à peu près $s = \frac{2fg}{f+g}$; posons de plus $f = g$ ou le verre des deux côtés également convexe, pour qu'il devienne susceptible de la plus grande étendue, et nous aurons $s = f$; posons, pour ne pas rendre le verre trop épais, ses faces comprendre un arc de $45^0$, et la demi-largeur du verre sera $= s . \sin 22\frac{1}{2}^0 = 0{,}3826 . s$. Or l'ouverture doit encore être plus petite, et partant, on pourrait bien mettre le demi-diamètre de l'ouverture $v = \frac{1}{3} s$, et sans balancer $v = \frac{1}{4} s$ et, par conséquent, il faut qu'il soit pour chaque

verre intermédiaire $s > \frac{4x}{\mu}$. Or le diamètre de la base du cône lumineux sur ce verre étant $= \frac{2x}{\mu}$, pour qu'il n'y embrasse un arc de plus de $22\frac{1}{2}^0$, il faut qu'il soit $\frac{2x}{\mu} < \frac{1}{3}s$, et ainsi la distinction exige qu'il soit $s > \frac{6x}{\mu}$ et partant $v > \frac{3x}{2\mu}$.

---

## Section II.

### Recherches sur les lunettes à deux verres.

46. L'objet étant éloigné à l'infini, soient les deux verres en $A$ et $B$, leurs distances de foyer $p$ et $q$ et que l'oeil soit placé en $C$. Posons les distances $AB = A$, $BC = B$ et des lettres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, celle-ci doit être $\mathfrak{B} = -1$ comme la distinction exige, et alors nous aurons:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}} \quad \text{et} \quad q = \frac{A}{1+\mathfrak{A}},$$

et le nombre $\mathfrak{A}$ marquera le grossissement de la lunette; lequel étant positif, l'objet paraîtra renversé; ou droit, si le nombre $\mathfrak{A}$ est négatif. Ensuite, posant le demi-diamètre de l'ouverture du verre objectif $= x$, de sorte que $x = \sqrt{ip}$, et considérant un point de l'objet éloigné de l'axe de l'angle $\varphi$, les limites du cône lumineux seront:

$$\text{sur le verre oculaire en } B = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\text{et sur l'oeil en } C = \mathfrak{A}B\varphi - A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}.$$

47. Si nous posons le demi-diamètre de la pupille $= \omega$, pour que le milieu de l'objet paraisse avec la pleine clarté, il faut qu'il soit $\frac{x}{\mathfrak{A}} = \omega$ ou bien $x = m\omega$, puisque $m$ marque le grossissement de la lunette; mais comme nous venons de remarquer, il faut que pour le verre en $B$ ou l'oculaire, il soit $q > \frac{6x}{\mathfrak{A}}$ ou bien $q > 6\omega$. Donc puisque $\omega$ est environ une ligne ou $\frac{1}{12}$ pouce, on ne saurait jamais employer des verres oculaires dont la distances de foyer soit moindre qu'un demi-pouce, à moins qu'on ne veuille perdre sur la clarté. Mais pour les autres déterminations, il faut considérer deux cas, selon que $\mathfrak{A}$ est un nombre positif ou négatif; car dans le premier cas l'objet sera vu renversé et dans l'autre debout, laquelle différence nous conduit aux deux espèces assez connues des lunettes à deux verres.

#### 1. *Cas des lunettes à deux verres où $\mathfrak{A}$ est un nombre positif.*

48. Ce cas renferme les lunettes qui représentent les objets renversés, et si nous marquons la multiplication par la lettre $m$, nous aurons $\mathfrak{A} = m$ et partant:

$$p = \frac{mA}{1+m} \quad \text{et} \quad q = \frac{A}{1+m}, \quad \text{donc} \quad p = mq.$$

Ensuite les limites seront: pour le verre oculaire $= A\varphi \pm \frac{x}{m}$,

pour l'oeil $= (Bm - A)\,\varphi \pm \frac{x}{m}$,

d'où nous tirons, pour que le milieu de l'objet paraisse avec la pleine clarté, $x = m\omega$, et partant:

$$p = \frac{m^2\omega^2}{i}, \quad \text{donc} \quad q = \frac{m\omega^2}{i},$$

et la distance des deux verres:

$$AB = A = (1 + m)\,q = \frac{m(1+m)\,\omega^2}{i},$$

d'où la lunette est entièrement déterminée pour chaque cas de multiplication et, puisque $m$ est essentiellement un nombre plus grand que l'unité; il n'y a pas à craindre que $q$ devienne $< 6\omega$.

49. Voyons maintenant ce qui regarde le champ apparent, tant clair que moyen et entier, et pour le champ moyen, son demi-diamètre se trouve par les limites de l'oeil $= \frac{\omega}{mB - A}$, il dépend donc principalement du lieu de l'oeil derrière le verre oculaire $BC = B$, qui pourrait être pris en sorte, savoir $B = \frac{A}{m} = \frac{(1+m)\,\omega^2}{i}$, que le champ apparent devient infini. Mais alors il sera déterminé par le verre oculaire, dont le demi-diamètre de l'ouverture étant environ $\frac{1}{4}q$ ou en général $= nq$, on trouve de là le demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{nq}{A} = \frac{n}{m+1}$: qui diffère tant de celui du champ apparent clair que de l'entier de la quantité:

$$\frac{x}{mA} = \frac{\omega}{A} = \frac{i}{m(1+m)\,\omega},$$

d'où nous aurons:

le demi-diamètre du champ apparent clair $= \frac{n}{m+1} - \frac{i}{m(1+m)\,\omega}$,

le demi-diamètre du champ apparent entier $= \frac{n}{m+1} + \frac{i}{m(1+m)\,\omega}$.

50. Mais ces déterminations, tirées du verre oculaire, n'ont lieu qu'autant que la position de l'oeil ne donne point de plus petites, ce qui arriverait, si $mB - A$ n'était pas $= o$; car alors à cause de $\frac{x}{m} = \omega$, le champ clair s'évanouirait. Donc pour obtenir ce champ apparent, que nous venons de déterminer, il faut placer l'oeil en sorte en $C$, que sa distance derrière l'oculaire en soit $BC = B = \frac{A}{m}$ ou bien $BC = \frac{(1+m)\,\omega^2}{i}$. Voilà donc toutes les déterminations pour une telle lunette qui, en représentant les objets avec toute la clarté possible, les grossit en diamètre autant de fois que le nombre $m$ contient d'unités:

I. La distance de foyer de l'objectif en $A = \frac{m^2\omega^2}{i}$.

II. Le demi-diamètre de son ouverture $x = m\omega$.

III. La distance des verres $AB = A = \frac{m(1+m)\,\omega^2}{i}$.

*

IV. La distance de foyer de l'oculaire en $B$ ou $q = \frac{m\omega^2}{i}$.

V. Le demi-diamètre de son ouverture $= nq = \frac{nm\omega^2}{i}$.

VI. La distance de l'oeil derrière l'oculaire $BC = \frac{(1+m)\,\omega^2}{i}$.

VII. Le demi-diamètre du champ clair $= \frac{n}{m+1} - \frac{i}{m(1+m)\,\omega}$.

VIII. Le demi-diamètre du champ moyen $= \frac{n}{m+1}$.

IX. Le demi-diamètre du champ entier $= \frac{n}{m+1} + \frac{i}{m(1+m)\,\omega}$.

51. Ces déterminations doivent être observées, si l'on veut que la représentation ait toute la clarté possible que nous indiquons par l'unité, laquelle condition exige qu'il soit $x = m\omega$. Mais si l'on voulait se contenter d'un moindre degré de clarté, qui fût $\frac{1}{l^2}$, il suffirait de prendre $x = \frac{m\omega}{l}$ et par conséquent:

$$p = \frac{m^2\omega^2}{il^2} \quad \text{donc} \quad q = \frac{m\omega^2}{il^2} \quad \text{et} \quad A = \frac{m(1+m)\,\omega^2}{il^2}.$$

Or pour le champ apparent les limites seront alors:

$$\text{à l'égard de l'oculaire } A\varphi \pm \frac{\omega}{l},$$

$$\text{à l'égard de l'oeil } (mB - A)\,\varphi \pm \frac{\omega}{l}.$$

D'où nous tirons les demi-diamètres du champ apparent

| | de l'oculaire: | de l'oeil: |
|---|---|---|
| clair | $\frac{nlq - \omega}{lA}$ | $\frac{l\omega - \omega}{l(mB - A)}$, |
| moyen | $\frac{nq}{A} = \frac{n}{m+1}$ | $\frac{\omega}{mB - A}$, |
| entier | $\frac{nlq + \omega}{lA}$ | $\frac{l\omega + \omega}{l(mB - A)}$. |

52. Le demi-diamètre du champ apparent clair est donc:

$$\frac{nlq - \omega}{lA} = \frac{n}{m+1} - \frac{il}{m(1+m)\,\omega},$$

à moins que $\frac{(l-1)\,\omega}{l(mB - A)}$ ne soit plus petit, ce qui arrive, lorsque la distance $BC$ est renfermée entr ces limites:

$$\frac{(m+1)\,\omega^2}{il^2} \pm \frac{(l-1)(m+1)\,\omega^2}{l(nm\omega - il)}.$$

Et pour que le demi-diamètre du champ moyen soit $= \frac{n}{m+1}$, la distance $BC$ doit être entre ce limites:

$$\frac{(m+1)\,\omega^2}{il^2} \pm \frac{(m+1)\,\omega}{mn},$$

et que le demi-diamètre du champ apparent entier soit:

$$\frac{n}{m+1}+\frac{il}{m(m+1)\omega},$$

les limites de la distance $BC$ sont:

$$\frac{(m+1)\omega^2}{il^2} + \frac{(l+1)(m+1)\omega^2}{l(nm\omega+il)},$$

On satisfait donc à toutes ces conditions en mettant:

$$BC = \frac{(m+1)\omega^2}{il^2} = \frac{A}{m},$$

d'où l'on voit qu'on aurait pu déduire ce cas de celui de la clarté pleine, si l'on avait supposé le demi-diamètre de la pupille $=\omega$ moindre dans la raison $l$ à 1, ou bien si nous avions mis $\frac{\omega}{l}$ au lieu de $\omega$.

53. De là il est évident que si l'on veut être content d'un moindre degré de clarté, on peut produire la même multiplication par une lunette autant de fois plus courte: ce qui est sans doute un grand avantage; cependant il ne serait pas à propos de perdre trop de la clarté, pour diminuer la longueur de la lunette, la multiplication demeurant la même, ou pour augmenter la multiplication en conservant la même longueur de la lunette. Il y aura un certain milieu, où la compensation de la perte de la clarté par l'augmentation du grossissement sera la plus avan*t*ageuse, mais il ne paraît pas que ce milieu puisse être déterminé par la théorie. Or si nous consultons là-dessus les expériences, Mr. Huygens a trouvé que, pour produire une multiplication $=100$, un verre objectif peut être employé, dont la distance de foyer ne soit plus grande que de 300 pouces.

Posons donc: $m=100$ et $p=\frac{10000\omega^2}{il^2}=300$,

d'où nous tirons: $\frac{\omega^2}{l^2}=\frac{300i}{10000}=\frac{1}{5000}$,

à cause de: $i=\frac{1}{150}$ donc $\frac{\omega}{l}=\frac{1}{70}$.

54. Puisque $\omega$ est bien $\frac{1}{10}$ pouce, surtout quand l'oeil voit dans l'obscurité, la valeur de $l$ étant ici trouvée $=7$, cette expérience montre qu'on peut se contenter d'une clarté qui est 50 fois plus petite que celle qu'on apperçoit à la vue simple. Mais il semble que cette expérience est poussée, un peu trop loin et qu'il vaut pour la plupart mieux de se contenter d'une moindre multiplication pour obtenir un plus grand degré de clarté, et peut-être choisira-t-on le milieu le plus convenable, si l'on pose $l=5$ ou $\frac{\omega}{l}=\frac{1}{50}$, puisqu'alors la clarté sera deux fois plus grande que dans le cas $l=7$. Cette diminution du nombre $l$ sert aussi à augmenter le champ apparent clair, dont le demi-diamètre a été trouvé $\frac{n}{m+1}-\frac{il}{m(m+1)\omega}$, qui sera d'autant plus grand, plus on diminue le nombre $l$. Or le champ apparent moyen, dont le demi-diamètre est $=\frac{n}{m+1}$, ne dépend point de ce nombre $l$.

55. Prenons donc $\frac{\omega}{l}=\frac{1}{50}$, et à cause de $i=\frac{1}{150}$, nous aurons $\frac{\omega}{i}=3$ et $\frac{\omega^2}{il^2}=\frac{3}{50}$, d'où nous tirons les déterminations suivantes pour une lunette à deux verres convexes, qui augmente les diamètres des objets en raison de $m$ à 1, avec un degré de clarté vingt cinq fois plus petit que celle dont on aperçoit à la vue simple.

I. La distance de foyer d'objectif $p = \frac{3}{50} m^2$ pouces.

II. Le demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{1}{50} m$.

III. La distance des verres $AB = A = \frac{3}{50} m (m + 1)$.

IV. La distance de foyer de l'oculaire $q = \frac{3}{50} m$.

V. Le demi-diamètre de son ouverture $= \frac{3}{50} mn$.

VI. La distance de l'oeil de l'oculaire $BC = \frac{3}{50} (m + 1)$.

VII. Le demi-diamètre du champ moyen $= \frac{n}{m + 1}$.

VIII. La différence du clair et entier $= \frac{1}{3m(m + 1)}$.

Où il faut remarquer que la valeur de la fraction $n$ est environ $\frac{1}{4}$; or pour ne pas la supposer trop grande, mettons $n = \frac{1}{5}$, et dans cette hypothèse j'ai calculé la table suivante:

*Table des lunettes à deux verres convexes,*

dans l'hypothèse $i = \frac{1}{150}$, $\frac{\omega}{i} = \frac{1}{50}$ pouce et $n = \frac{1}{5}$, les longueurs étant exprimées en pouces.

| Multi-plica-tion. | Objectif | | Oculaire | | Distance des verres. | Distance de l'oeil. | Demi-diam. du champ apparent moyen. | Différence au champ clair et entier. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | distance de foyer. | demi-d. de l'ou-verture. | distance de foyer. | demi-d. de l'ou-verture. | | | | |
| $m$ | $p$ | $x$ | $q$ | $\frac{1}{5}q$ | $AB$ | $BC$ | | |
| 5 | 1,5 | 0,1 | 0,3 | 0,06 | 1,8 | 0,36 | 1°54′ 33″ | 38′ 11″ |
| 10 | 6,0 | 0,2 | 0,6 | 0,12 | 6,6 | 0,66 | 1 2 29 | 10 25 |
| 15 | 13,5 | 0,3 | 0,9 | 0,18 | 14,4 | 0,96 | 0 42 58 | 4 46 |
| 20 | 24,0 | 0,4 | 1,2 | 0,24 | 25,2 | 1,26 | 0 32 44 | 2 44 |
| 25 | 37,5 | 0,5 | 1,5 | 0,30 | 39,0 | 1,56 | 0 26 27 | 1 46 |
| 30 | 54,0 | 0,6 | 1,8 | 0,36 | 55,8 | 1,86 | 0 22 11 | 1 14 |
| 35 | 73,5 | 0,7 | 2,1 | 0,42 | 75,6 | 2,16 | 0 19 6 | 0 54 |
| 40 | 96,0 | 0,8 | 2,4 | 0,48 | 98,4 | 2,46 | 0 16 46 | 0 42 |
| 45 | 121,5 | 0,9 | 2,7 | 0,54 | 124,2 | 2,76 | 0 14 57 | 0 33 |
| 50 | 150,0 | 1,0 | 3,0 | 0,60 | 153,0 | 3,06 | 0 13 29 | 0 27 |
| 60 | 216,0 | 1,2 | 3,6 | 0,72 | 219,6 | 3,66 | 0 11 17 | 0 19 |
| 70 | 294,0 | 1,4 | 4,2 | 0,84 | 298,2 | 4,26 | 0 9 41 | 0 14 |
| 80 | 384,0 | 1,6 | 4,8 | 0,96 | 388,8 | 4,86 | 0 8 29 | 0 11 |
| 90 | 486,0 | 1,8 | 5,4 | 1,08 | 491,4 | 5,46 | 0 7 33 | 0 9 |
| 100 | 600,0 | 2,0 | 6,0 | 1,20 | 606,0 | 6,06 | 0 6 49 | 0 7 |
| 120 | 864,0 | 2,4 | 7,2 | 1,44 | 871,2 | 7,26 | 0 5 41 | 0 5 |
| 140 | 1176,0 | 2,8 | 8,4 | 1,68 | 1184,4 | 8,46 | 0 4 53 | 0 3 |
| 160 | 1536,0 | 3,2 | 9,6 | 1,92 | 1545,6 | 9,66 | 0 4 16 | 0 2 |
| 180 | 1944,0 | 3,6 | 10,8 | 2,16 | 1954,8 | 10,86 | 0 3 48 | 0 2 |
| 200 | 2400,0 | 4,0 | 12,0 | 2,40 | 2412,0 | 12,06 | 0 3 25 | 0 2 |
| 225 | 3037,5 | 4,5 | 13,5 | 2,70 | 3051,0 | 13,56 | 0 3 3 | 0 1 |
| 250 | 3750,0 | 5,0 | 15,0 | 3,00 | 3765,0 | 15,06 | 0 2 44 | 0 1 |
| 275 | 4537,5 | 5,5 | 16,5 | 3,30 | 4554,0 | 16,56 | 0 2 29 | 0 1 |
| 300 | 5400,0 | 6,0 | 18,0 | 3,60 | 5418,0 | 18,06 | 0 2 17 | 0 1 |
| 350 | 7350,0 | 7,0 | 21,0 | 4,20 | 7371,0 | 21,06 | 0 1 58 | 0 1 |
| 400 | 9600,0 | 8,0 | 24,0 | 4,80 | 9624,0 | 24,06 | 0 1 43 | 0 0 |
| 450 | 12150,0 | 9,0 | 27,0 | 5,40 | 12177,0 | 27,06 | 0 1 31 | 0 0 |
| 500 | 15000,0 | 10,0 | 30,0 | 6,00 | 15030,0 | 30,06 | 0 1 22 | 0 0 |

56. Quoique cette table suppose un degré de clarté 25 fois moindre que celui dont on voit le même objet à la vue simple, il est aisé d'en déduire la construction des lunettes qui donnent ou un plus grand ou un plus petit degré de clarté, comme on jugera à propos en chaque cas. Car, si l'objet qu'on veut examiner est fort obscur de sa nature, comme le corps de Saturne ou d'une comète, il sera convenable de perdre sur la multiplication, pour gagner d'autant plus sur la clarté, et pour cet effet, on n'aura qu'à joindre au même verre objectif un plus grand oculaire. Or, posant la distance de foyer de l'objectif $= p$, au lieu de donner à l'oculaire la distance de foyer $= q$ selon la table, si on lui donne $\lambda q$, la multiplication du diamètre de l'objet sera moindre $= \frac{m}{\lambda}$, mais la clarté deviendra $\lambda^2$ fois plus grande que si l'on suivait la table. Ainsi dans un tel cas, si l'on joignait avec l'objectif de 600 pouces de foyer un oculaire de 12 pouces de foyer, la multiplication ne vaudrait que 50, mais la clarté deviendrait 4 fois plus forte que selon la table.

57. Mais si au contraire l'objet est fort lumineux de soi-même, on pourra bien admettre une plus grande perte sur la clarté pour gagner d'autant plus sur la multiplication. Dans ce cas il sera donc avantageux de joindre avec un objectif donné un plus petit oculaire que la table fournit, pour obtenir une d'autant plus grande multiplication, quoique la clarté en soit diminuée en raison du quarré. Pour de tels objets on pourra bien joindre à l'objectif de 600 pouces de foyer un oculaire de 3 pouces, pour avoir une multiplication de 200, avec une clarté 4 fois plus petite que la table suppose. Ou bien, ce qui revient au même, puisque les mesures dans la table sont exprimées en pouces, sans déterminer à quel pied ils répondent, on prendra ces pouces plus grands, quand on veut avoir une plus grande clarté, et on supposera les mêmes pouces plus petits, quand on veut se contenter d'une moindre clarté; et c'est pour cette raison que je ne détermine pas la véritable quantité de ces pouces.

58. Pour le champ apparent, on voit qu'il dépend d'un côté de la multiplication $m$ et de l'autre côté de l'ouverture de l'oculaire, de sorte que, plus on donne d'ouverture à l'oculaire, le champ apparent moyen devient d'autant plus grand. J'ai supposé dans la table, que le demi-diamètre de l'ouverture de l'oculaire soit la cinquième partie de la distance de foyer: mais si on le pouvait augmenter à la quatrième ou même à la troisième partie, le champ apparent croîtrait dans la raison 4 à 5 ou 3 à 5. Mais en supposant $n = \frac{1}{5}$ comme dans la table, le diamètre du champ apparent est à peu près réciproquement comme la multiplication; ainsi lorsqu'on veut que la lunette nous découvre un certain espace dans le ciel, comme, par exemple, le corps entier de la lune, la multiplication ne saurait être poussée au-delà d'un certain terme, et dans le cas de la lune, on ne la saurait pousser au-delà de 40 ou 45 tout au plus.

59. Lorsque la lunette n'augmente pas beaucoup les objets, la différence entre le champ apparent moyen et l'entier ou le clair, est assez considérable. Ainsi quand la lunette ne multiplie que 10 fois, on aura:

| | | | |
|---|---|---|---|
| le demi-diamètre du champ apparent clair | $0^\circ$ | $52'$ | $4''$ |
| „ „ „ moyen | 1 | 2 | 29 |
| „ „ „ entier | 1 | 12 | 54 |

et partant, une bonne partie du champ apparent paraîtra avec une clarté plus faible que le milieu; mais, dans les grandes multiplications, cette différence devient presque insensible. Or, pour ce champ apparent, quelque petit qu'il soit, il paraîtra par la lunette sous un angle visuel, dont la tangente de sa moitié est $=\frac{nm}{m+1}$ ou $=n$ fort à peu près. Donc si $n=\frac{1}{5}$, la moitié de l'angle visuel sous lequel on voit le champ apparent, sera environ 11° 18′; et s'il était $n=\frac{1}{4}$, cet angle serait 14° 2′ et même 18° 26′, si l'on posait $n=\frac{1}{3}$; dans ce cas l'oeil embrasserait un espace de 36° 52′.

2. *Cas des lunettes à deux verres où $\mathfrak{A}$ est un nombre négatif.*

60. Par ces lunettes les objets sont présentés debout et le nombre $\mathfrak{A}$ marque la multiplication; soit donc $\mathfrak{A}=-m$, nous aurons:

$$p=\frac{mA}{m-1},\quad q=-\frac{A}{m-1}\quad \text{donc}\quad p=-mq,$$

ensuite les limites seront:

$$\text{pour le verre oculaire }=A\varphi\pm\frac{x}{m},$$

$$\text{pour l'oeil en }C=(mB+A)\varphi\pm\frac{x}{m}\cdot$$

Donc, si le milieu de l'objet doit paraître avec une clarté $=\frac{1}{l^2}$, il faut qu'il soit $x=\frac{m\omega}{l}$, et partant $p=\frac{m^2\omega^2}{il^2}$ et $q=-\frac{m\omega^2}{il^2}$, d'où l'on voit que l'oculaire doit être concave. Ensuite ayant $A=-(m-1)q$, la distance des verres sera $AB=A=\frac{m(m-1)\omega^2}{il^2}$, et ainsi toute la lunette sera déterminée; cependant il faut exclure les cas où $q$ ou la quantité $\frac{m\omega^2}{il^2}$ deviendrait plus petite que $\frac{6\omega}{l}$, puisque sans cette condition la représentation ne serait plus distincte. Il faut donc qu'il soit $m>\frac{6il}{\omega}$ ou $m>2$.

61. Pour le champ apparent, il est évident par les limites de l'oeil, qu'il ne saurait devenir plus grand qu'en posant $B=o$, et partant la distance $BC=B$ devant s'évanouir, il faut appliquer l'oeil immédiatement au verre oculaire. De là on aura les demi-diamètres:

$$\text{du champ apparent moyen }=\frac{il^2}{m(m-1)\omega},$$

$$\text{,, ,, clair }=\frac{il(l-1)}{m(m-1)\omega},$$

$$\text{,, ,, entier }=\frac{il(l+1)}{m(m-1)\omega};$$

mais il faut que les limites du verre oculaire ne donnent point des valeurs plus petites. Pour cet effet il faut que l'ouverture du verre oculaire ne soit pas plus petite que la pupille, ou qu'il soit $nq>\omega$; ou bien $nm\omega>il^2$, par conséquent $m>\frac{il^2}{n\omega}\cdot$ Donc, posant $n=\frac{1}{5}$; $i=\frac{1}{150}$ pouce $l=5$ et $\frac{\omega}{l}=\frac{1}{50}$ pouce, on aura $m>\frac{25}{3}$, de sorte que cet inconvénient n'est pas à craindre

aussitôt que la multiplication est plus grande que 8. Mais si $m < \frac{25}{3}$ le champ apparent est moindre que nous le venons de déterminer, et le demi-diamètre du moyen sera $= \frac{n}{m-1}$, et sa différence au clair et entier $= \frac{il}{m(m-1)\omega}$.

62. De-là il est clair que, pour les petites multiplications, où $m < 8$, ces lunettes découvrent un plus grand champ que celles du premier cas, puisque le demi-diamètre du champ moyen est ici $= \frac{n}{m-1}$, au lieu qu'il était pour le premier cas $= \frac{n}{m+1}$; et partant, ces lunettes avec un oculaire concave ont un avantage sur celles qui ont l'oculaire convexe, outre celui que ces lunettes, à cause de $A = \frac{m(m-1)\omega}{il^2}$, sont plus courtes que les premières; sans compter l'intervalle de l'oeil $BC$ qui s'évanouit ici entièrement. Cet avantage s'étend encore plus loin qu'au cas $m = 8$ et subsiste tant que:

$$\frac{il^2}{m(m-1)\omega} > \frac{n}{m+1} \quad \text{ou} \quad \frac{il^2(m+1)}{n\omega} > m^2 - m,$$

d'où nous tirons:

$$m < \frac{il^2}{2n\omega} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{i^2 l^4}{4n^2\omega^2} + \frac{3il^2}{2n\omega} + \frac{1}{4}\right)}.$$

Donc si $n = \frac{1}{5}$, $l = 5$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $i = \frac{1}{150}$, puisque $\frac{il^2}{n\omega} = \frac{25}{3}$, l'avantage est du côté de ces lunettes tant que $m < \frac{14 + \sqrt{271}}{3}$ ou $m < 10$. Or si $m > 10$, plus que la lunette doit grossir, plus les lunettes du premier cas auront à leur tour d'avantage sur celles du cas présent.

63. Posant donc, comme auparavant $l = 5$, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $i = \frac{1}{150}$ pouce; on aura pour chaque multiplication $m$ les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif convexe $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50} m^2$.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l} = \frac{1}{50} m$.

III. La distance des deux verres $AB = A = \frac{m(m-1)\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50} m(m-1)$.

IV. Distance de foyer de l'oculaire concave $-q = \frac{m\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50} m$.

V. Demi-diamètre de son ouverture $= \frac{nm\omega^2}{il^2} = \frac{3}{250} m$.

VI. Distance de l'oeil derrière l'oculaire $= o$.

VII. Demi-diamètre du champ moyen $= \frac{il^2}{m(m-1)\omega} = \frac{5}{3m(m-1)}$.

VIII. La différence au clair et entier $= \frac{il}{m(m-1)\omega} = \frac{1}{3m(m-1)}$.

Mais si $m < 8$, le demi-diamètre du champ moyen est $= \frac{1}{5(m-1)}$. Sur cette hypothèse la table suivante est calculée.

*Table des lunettes à deux verres.*

L'objectif étant convexe et l'oculaire concave, et les mesures exprimées en pouces.

| Multiplication. | Objectif distance de foyer. | Objectif demi-d. de l'ouverture. | Oculaire Distance de foyer. | Oculaire demi-d. de l'ouverture. | Distance des verres. | Demi-diam. du champ apparent moyen. | Différence aux champs clair et entier. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $p$ | $x$ | $q$ | $\frac{1}{5}q$ | $AB$ | | |
| 5 | 1,5 | 0,1 | 0,3 | 0,06 | 1,2 | 2°51′45″ | 34′21″ |
| 10 | 6,0 | 0,2 | 0,6 | 0,12 | 5,4 | 1 3 40 | 12 44 |
| 15 | 13,5 | 0,3 | 0,9 | 0,18 | 12,6 | 0 27 17 | 5 27 |
| 20 | 24,0 | 0,4 | 1,2 | 0,24 | 22,8 | 0 15 5 | 3 1 |
| 25 | 27,5 | 0,5 | 1,5 | 0,30 | 36,0 | 0 9 33 | 1 55 |
| 30 | 54,0 | 0,6 | 1,8 | 0,36 | 52,2 | 0 6 35 | 1 19 |
| 35 | 73,5 | 0,7 | 2,1 | 0,42 | 71,4 | 0 4 49 | 0 58 |
| 40 | 96,0 | 0,8 | 2,4 | 0,48 | 93,0 | 0 3 40 | 0 44 |
| 45 | 121,5 | 0,9 | 2,7 | 0,54 | 118,8 | 0 2 54 | 0 35 |
| 50 | 150,0 | 1,0 | 3,0 | 0,60 | 147,0 | 0 2 20 | 0 28 |

64. Je n'ai continué cette table que jusqu'à la multiplication de 50, puisque le champ apparent est déjà si petit qu'on ne saurait plus employer ces lunettes; non seulement une telle lunette qui devrait grossir 50 fois, ne découvrira au ciel qu'un espace de 4′40″, mais l'oeil n'embrassera qu'un angle visuel de 50 fois 4′40″, c'est à dire de 3°53′20″, au lieu que dans les lunettes à deux verres convexes cet angle visuel est de 22°36′. Puis que donc les autres conditions sont les mêmes il n'est jamais à propos de se servir d'une telle lunette, dès que la multiplication doit surpasser 10 et partant on a raison de donner l'exclusion à toutes les lunettes de cette espèce, dont la longueur surpasse 6 pouces. Mais toutes les fois qu'on ne désire qu'une multiplication au-dessous de 10, les lunettes de cette espèce auront toujours un grand avantage sur celles qui ont l'oculaire convexe puisqu'elles découvrent pour la même multiplication un plus grand champ, outre qu'elles représentent les objets debout, ce qui est un grand avantage dans les occasions où l'on se sert de cette espèce de lunettes.

---

## Section III.

### Recherches sur les lunettes à trois verres.

65. Je supposerai donc les 3 verres en $A$, $B$, $C$, dont les distances de foyer soyent $p$, $q$, et l'oeil placé en $D$; je nomme les distances $AB = A$, $BC = B$, $CD = C$, et pour les nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ il faut que le troisième $\mathfrak{C} = -1$, d'où nous tirons les distances de foyer des trois verres par § 33.

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A + (1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{B}{1+\mathfrak{B}}.$$

Or la lunette grossira autant de fois que le nombre $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ contient d'unités, et cela en sorte q…

quand le nombre $\mathfrak{AB}$ est positif, la représentation est droite, et renversée, quand il devient négatif. Soit du premier verre en $A$, qui est toujours nommé l'objectif, le demi-diamètre de l'ouverture $= x$, et nous avons vu qu'il doit y avoir $x = \sqrt{ip}$ ou $p = \frac{x^2}{i}$; où $i$ marque $\frac{1}{150}$ pouce.

66. Considérons maintenant un point de l'objet, eloigné de l'axe de la lunette de l'angle $\varphi$, et le cône lumineux, qui est transmis de ce point par la lunette, aura tant sur les deux verres $B$ et $C$ que sur l'oeil les limites suivantes:

Sur le premier oculaire en $B = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

Sur le second oculaire en $C = \mathfrak{A}B\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{AB}}$,

Sur l'oeil en $D = \mathfrak{AB}C\varphi - \mathfrak{A}B\varphi - \frac{A}{\mathfrak{B}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{AB}}$.

Donc le demi-diamètre du cône lumineux qui vient du milieu de l'objet étant à son entrée dans l'oeil $= \frac{x}{\mathfrak{AB}} = \frac{x}{m}$, pour que la clarté dont il est vu soit $= \frac{1}{l^2}$, il faut qu'il soit $\frac{x}{m} = \frac{\omega}{l}$, et partant $x = \frac{m\omega}{l}$, et de plus $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$; mais afin que les verres en $B$ et $C$ ne rendent point la vision confuse, il faut qu'il soit $q > \frac{6x}{\mathfrak{A}}$ et $r > \frac{6x}{\mathfrak{AB}}$ ou bien $q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$. La division de ces lunettes en espèces doit être tirée de la nature des nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ selon qu'ils seront positifs ou négatifs, d'où nous aurons 4 espèces à considérer.

## I. Cas des lunettes à 3 verres.

### *Les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant positifs.*

67. Les lunettes de cette espèce présenteront donc les objets debout, et ayant $\mathfrak{AB} = m$, nous aurons $\mathfrak{B} = \frac{m}{\mathfrak{A}}$; de plus, comme nous avons déjà trouvé la distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$, nous aurons $A = \frac{(1+\mathfrak{A})p}{\mathfrak{A}}$, et ensuite:

$$q = \frac{\mathfrak{B}Bp}{(1+\mathfrak{B})p + \mathfrak{AB}B} = \frac{mBp}{(m+\mathfrak{A})p + m\mathfrak{A}B} \text{ et } r = \frac{\mathfrak{A}B}{m+\mathfrak{A}}.$$

Pour les limites à l'égard de l'oeil il est évident que l'endroit le plus avantageux de l'oeil est derrière le verre $C$ à la distance:

$$CD = C = \frac{B}{\mathfrak{B}} + \frac{A}{\mathfrak{AB}^2} = \frac{\mathfrak{A}B}{m} + \frac{(1+\mathfrak{A})p}{m^2},$$

Or, pour le champ apparent moyen, il se tire de l'un des deux oculaires:

$$\varphi = \frac{nq}{A} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A + mB},$$

car la plus petite de ces deux valeurs donnera son demi-diamètre.

*

68. Substituant pour $q$, $r$, et $\mathfrak{B}$ et $A$ les valeurs trouvées, on aura le demi-diamètre du champ apparent moyen:

$$\text{par l'oculaire } B \ldots \varphi = \frac{nm\mathfrak{A}B}{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A})p + m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})B},$$

$$\text{par l'oculaire } C \ldots \varphi = \frac{nm\mathfrak{A}B}{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A})p + m\mathfrak{A}(m+\mathfrak{A})B}.$$

Il faut donc déterminer les quantités $\mathfrak{A}$ et $B$ en sorte que la plus petite de ces deux valeurs devienne aussi grande qu'il est possible. Or, à l'égard du nombre $\mathfrak{A}$, l'une et l'autre devient un *maximum*, si l'on prend $\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{mp}{p+mB}}$, et de là on tire:

$$\text{pour l'oculaire } B \ldots \varphi = \frac{nmB}{(m+1)p + mB + 2\sqrt{mp(p+mB)}},$$

$$\text{pour l'oculaire } C \ldots \varphi = \frac{nmB}{(m+1)p + m^2B + 2\sqrt{mp(p+mB)}},$$

d'où l'on voit que la dernière, à cause de $m > 1$, est toujours la plus petite, et partant ce sera de celle-ci qu'il faut tirer la grandeur du champ apparent.

69. Il s'agit maintenant de déterminer $B$ en sorte que cette valeur de $\varphi$ devienne la plus grande. Or il est évident qu'elle s'évanouit en posant $B = o$, et qu'elle ne saurait devenir plus grande qu'en prenant $B = \infty$, auquel cas le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{n}{m}$, qui sera en vérité plus grand que celui des lunettes à deux verres convexes. Mais il faut bien remarquer que toutes les deux distances des verres $AB = A$ et $BC = B$ deviendraient infinies, et partant, une telle lunette ne serait absolument d'aucun usage. Or si l'on prenait $B = p$, auquel cas on aurait:

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{m}{1+m}} \quad \text{et} \quad A = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{(1+m)}}{\sqrt{m}}\, p,$$

et partant $A > 2p$, de plus:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{m(1+m)} \quad \text{et} \quad C = \frac{p\sqrt{m+1}}{m\sqrt{m}} + \frac{p}{m^2},$$

le demi-diamètre du champ apparent moyen serait:

$$= \frac{nm}{m^2 + m + 1 + 2\sqrt{m(m+1)}},$$

et par conséquent plus petit qu'au cas de deux verres convexes; mais puisque la lunette serai environ trois fois plus longue, pour la même multiplication, toutes les circonstances concourent rejeter entièrement cette espèce de lunettes.

70. Si, pour raccourcir la lunette, on voulait prendre la distance $B$ plus petite, on tomberai dans l'inconvénient que le champ apparent devînt trop petit, de sorte que les lunettes à deux verre

auraient toujours un grand avantage sur celles-ci, tant par rapport à la longueur qu'au champ apparent. Car posons $B = \frac{p}{m}$ ou $mB = p$ et nous aurons les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif en $A = p = \frac{m^2\omega^2}{d^2}$.

II. Distance de foyer du premier oculaire en $B = q = \frac{p}{m + \sqrt{2m}}$.

III. Distance de foyer du second oculaire en $C = r = \frac{p}{m + m\sqrt{2m}}$.

IV. Distance des verres $AB = A = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{2}}{\sqrt{m}}\, p$.

V. Distance des verres $BC = B = \frac{1}{m}\, p$.

VI. Distance de l'oeil $CD = C = \frac{1 + \sqrt{2m}}{m^2}\, p$.

VII. Demi-diamétre du champ apparent moyen $= \frac{n}{2m + 2\sqrt{2m} + 1} = \frac{n}{(\sqrt{2m} + 1)^2}$.

71. Cette lunette aura donc deux défauts considérables à l'égard des lunettes à deux verres convexes; l'un est que sa longueur, étant:

$$A + B = \frac{m + \sqrt{2m} + 1}{m}\, p,$$

sera plus grande de la partie $\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$; et l'autre que le demi-diamètre du champ apparent sera plus que deux fois plus petit. Pour en donner un exemple, posons $m = 50$, et nous aurons:

I. La distance de foyer de l'objectif $p = 150$ pouces.

II. La distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{5}{2}$.

III. La distance de foyer du second oculaire $r = \frac{3}{11}$.

IV. La distance des verres $AB = A = 180$ pouces.

V. La distance des verres $BC = B = 3$.

VI. La distance de l'oeil $CD = C = \frac{33}{50}$.

VII. Le demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{n}{121} = 5' 41''$, posant $n = \frac{1}{5}$.

72. Or une lunette à deux verres convexes, qui grossit aussi 50 fois, n'est longue que 153 pouces, de sorte que celle-ci est de 30 pouces plus longue, outre que le demi-diamètre du champ moyen est encore moindre que la moitié que dans le cas des deux verres. Donc, puisque les lunettes de cette espèce ne méritent aucune attention, je ne m'arrêterai pas à en calculer une table, semblable à celles que j'ai données pour les lunettes à deux verres. Je passe donc aux autres espèces des lunettes à trois verres, selon que l'une ou l'autre des quantités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ est négative ou toutes les deux, où je ne développerai en détail que celles qui ont quelqu'avantage sur les lunettes à deux verres, puisqu'il ne serait pas raisonnable d'employer des lunettes à 3 ou plusieurs

verres, lorsqu'on n'en saurait tirer de plus grands avantages; car, les avantages étant les mêmes, il n'y a nul doute que, moins le nombre des verres est grand et plus sont préférables les lunettes.

### II. Cas des lunettes à 3 verres.

*Le nombre $\mathfrak{A}$ étant positif et $\mathfrak{B}$ négatif.*

73. Cette espèce représentera les objets renversés, et posant la multiplication $= m$, nous n'avons qu'à écrire $-\mathfrak{B}$ pour $\mathfrak{B}$ dans les formules précédentes, pour avoir les distances de foyer:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}; \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(\mathfrak{B}-1)A+(1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B} \quad \text{et} \quad r = \frac{B}{1-\mathfrak{B}},$$

d'où l'on voit que, si $\mathfrak{B} < 1$, le dernier verre en $C$ est convexe, ou concave si $\mathfrak{B} > 1$. Ensuite pour les limites nous aurons:

$$\text{sur le premier oculaire en } B = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\text{sur le second oculaire en } C = \left(\mathfrak{A}B - \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

$$\text{sur l'oeil en } D = \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C + \mathfrak{A}B - \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

car pour ces limites il est indifférent de les prendre affirmatifs ou négatifs, puisqu'ils règnent tout autour de l'ouverture de chaque verre.

74. Nous avons donc d'abord $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$ et la distance de foyer de l'objectif $A$ comme toujours $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$ à cause de $x = \frac{m\omega}{l}$, de sorte que le grossissement avec la clarté détermine l'objectif; ensuite il faut qu'il soit $q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$; pour que la représentation ne devienne pas confuse. Nous tirerons aussi pour le demi-diamètre du champ apparent moyen les formules suivantes:

$$\text{de l'oculaire } B \ldots\ldots \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)A+(1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B},$$

$$\text{de l'oculaire } C \ldots\ldots \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{mB-A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1-\mathfrak{B})(mB-A)},$$

$$\text{de l'oeil } D \ldots\ldots \varphi = \frac{\mathfrak{B}\omega}{m\mathfrak{B}C+mB-A},$$

dont la plus petite valeur seule aura lieu; et partant, il faut déterminer les quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $A$, $B$ en sorte que la plus petite de ces trois valeurs devienne la plus grande qu'il est possible. Or puisque $p$ est déjà déterminé, nous avons encore ces deux égalités $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$ et $(1+\mathfrak{A})p = \mathfrak{A}A$

75. Ces deux égalités nous fournissent $\mathfrak{A} = \frac{m}{\mathfrak{B}}$ et $A = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m}$, et, substituant ces valeurs le demi-diamètre du champ apparent moyen sera:

I. A l'égard de l'oculaire $B$ . . . . $\varphi = \frac{nm\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)(m+\mathfrak{B})p+m(m+\mathfrak{B})B}$.

II. A l'égard de l'oculaire $C$ . . . . $\varphi = \frac{nm\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)(m+\mathfrak{B})p-m^2(\mathfrak{B}-1)B}$.

III. A l'égard de l'oeil $D$ . . . . $\varphi = \frac{m\mathfrak{B}\omega}{m^2\mathfrak{B}C+m^2B-(m+\mathfrak{B})p}$.

Or ici il arrive fort heureusement que tant la première formule que la seconde devient un *maximum* au cas $\mathfrak{B}^2 = \frac{m(mB-p)}{p}$, ce qui est sans doute le cas le plus avantageus; et alors, à cause de $m^2B = (m+\mathfrak{B}^2)p$, on aura pour la place de l'oeil $\varphi = \frac{m\omega}{m^2C+(\mathfrak{B}-1)p}$, dont la valeur peut être rendue infinie, si $\mathfrak{B} < 1$, prenant $C = \frac{(1-\mathfrak{B})p}{m^2}$.

76. Mais pour mieux juger comment la valeur de ces formules peut être augmentée, posons pour $B$ sa valeur $(1-\mathfrak{B})r$, en remarquant que $(1-\mathfrak{B})r$ ne doit jamais devenir négatif; et nos valeurs seront:

$$\text{I.}\quad \varphi = \frac{nm\mathfrak{B}r}{m(m+\mathfrak{B})r-(m+\mathfrak{B})p} = \frac{nm\mathfrak{B}r}{(m+\mathfrak{B})(mr-p)}.$$

$$\text{II.}\quad \varphi = \frac{nm\mathfrak{B}r}{m^2(1-\mathfrak{B})r-(m+\mathfrak{B})p}.$$

$$\text{III.}\quad \varphi = \frac{m\mathfrak{B}\omega}{m^2\mathfrak{B}C+m^2(1-\mathfrak{B})r-(m+\mathfrak{B})p}.$$

Ici on voit d'abord que si l'on prenait $\mathfrak{B} > 1$, puisque la valeur de $r$ devrait être négative, la première formule serait bien éloignée de la plus grande valeur dont elle est susceptible, au cas $r = \frac{p}{m}$. Soit donc $\mathfrak{B} < 1$, et la seconde formule sera infinie en posant $r = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m^2(1-\mathfrak{B})}$. Mais si l'on prend $r = \frac{p}{m}$, la seconde formule donne $\varphi = \frac{n}{m+1}$, et si l'on prend $r = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m^2(1-\mathfrak{B})}$, la première donne aussi $\varphi = \frac{n}{m+1}$; et partant dans l'un et l'autre cas le champ apparent serait le même qu'au cas de deux verres convexes.

77. Mais si l'on prend $r$ en sorte que les deux premières formules deviennent égales, ce qui arrive lorsque $r = \frac{2(m+\mathfrak{B})p}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}$, et alors la première et la seconde formule donne: $\varphi = \frac{2n}{m+1}$, ce qui est sans doute la plus grande valeur qu'on puisse obtenir, car toute autre valeur de $r$ rendrait l'une ou l'autre des deux formules plus petite. Dans ce cas donc la lunette découvrira un champ dont le diamètre est deux fois plus grand que dans les lunettes à deux verres, ce qui est un avantage très considérable. Pour cet effet il faut donc qu'on prenne:

$$r = \frac{2(m+\mathfrak{B})p}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}, \quad B = \frac{2(1-\mathfrak{B})(m+\mathfrak{B})p}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})},$$

$$A = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m}, \quad \mathfrak{A} = \frac{m}{\mathfrak{B}}, \quad q = \frac{2(m+\mathfrak{B})p}{m(m+1)},$$

et alors le lieu le plus convenable pour l'oeil sera:

$$C = \frac{(m+1)(m+\mathfrak{B})p}{m^2(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}.$$

78. Il est ici fort remarquable, qu'après avoir rempli toutes les conditions, le nombre $\mathfrak{B}$ demeure encore indéterminé, de sorte qu'on le puisse prendre à volonté, pourvu qu'on ne le prenne plus grand que 1, et toujours le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{2n}{m+1}$, c'est à dire deux fois plus grand qu'au cas de deux verres convexes. Mais pour que la distinction soit maintenue, il faut faire en sorte qu'il devienne $q > \frac{6\mathfrak{B}\omega}{l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$. Maintenant on voit aussi que rien n'empêche qu'on ne donne à $\mathfrak{B}$ des valeurs négatives, et par ce moyen, on pourra rendre la longueur de la lunette plus petite. Car la longueur entière de la lunette étant:

$$A + B = \frac{(m+1)(m+\mathfrak{B})(1-\mathfrak{B})}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}p,$$

il est évident qu'elle devient plus petite, en donnant à $\mathfrak{B}$ une valeur négative; mais il faut pourtant que $m+\mathfrak{B}$ demeure une quantité positive, afin que la distance $A$ ne devienne négative. Il vaudra donc la peine d'examiner plus soigneusement ces cas où $\mathfrak{B}$ est tant un nombre positif moindre que 1, que zéro, ce qui est un cas de milieu et qu'un nombre négatif mais moindre que $m$.

79. Mais puisque le cas des valeurs négatives de $\mathfrak{B}$ nous menerait au troisième cas que je me propose de développer séparément, je m'arrêterai ici aux valeurs positives, dont la plus grande étant $= 1$, nous aurons les déterminations suivantes, pour la multiplication $= m$.

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{ll^2}$.

II. Son demi-diamètre d'ouverture $x = \frac{m\omega}{l}$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2}{m}p$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2}{m}p$.

V. Distance des verres en $A$ et $B$ ou $AB = \frac{m+1}{m}p$.

VI. Distance des verres en $B$ et $C$ ou $BC = o$.

VII. Distance de l'oeil en $D$ ou $CD = \frac{m+1}{m^2}p$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1}$;

où $nq$ et $nr$ marque le demi-diamètre de l'ouverture des verres oculaires. Or il faut que $\frac{2p}{m}$ so[it] plus grand que $\frac{6\omega}{l}$ ou $m > \frac{3ll}{\omega}$, ce qui arrive toujours si $m > 1$.

80. Par rapport à ce cas je remarque que la distance des verres oculaires $BC$ étant $= o$, revient au cas des lunettes à deux verres convexes, car tant le verre objectif que la distance $A$

est la même. La différence consiste en ce qu'au lieu d'un oculaire de foyer $\frac{1}{m}p$ on emploie ici deux qui se touchent ensemble, dont la distance de foyer de chacun est double. Or on sait qu'à l'égard de la réfraction ces deux verres rendent le même service qu'un seul. Or puisque ces deux verres admettent une ouverture deux fois plus grande selon le diamètre, c'est la raison que cette lunette découvre un champ deux fois plus grand. Cet avantage s'étend aussi à trois ou plusieurs verres oculaires immédiatement joints ensemble, par le moyen desquels on pourra augmenter le champ apparent au triple et davantage, pourvu que la distance de foyer de chacun soit la triple ou multiple de celle qu'un seul verre oculaire devrait avoir. Pour cette raison la table donnée ci-dessus pour les lunettes à deux verres convexes servira aussi à construire les lunettes de cette espèce.

81. Mais il faut pourtant remarquer que ce cas ne saurait être exécuté exactement dans la pratique, puisque les verres ont toujours quelqu'épaisseur qui empêche que la distance $BC$ ne peut être réduite absolument à rien. D'ailleurs quoique nous posions $\mathfrak{B}$ plus petit que l'unité, nous n'obtiendrons point la lunette sensiblement plus courte, ce qui est un avantage souvent assez considérable. Je considérerai donc deux cas, l'un où $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$ et l'autre où $\mathfrak{B} = o$, et pour le premier nous obtiendrons les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2 \omega^2}{ll^2}$.

II. Son diamètre d'ouverture $x = \frac{m\omega}{l}$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{(2m+1)p}{m(m+1)}$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2(2m+1)p}{m(3m+1)}$.

V. Distance des verres $A$ et $B$ ou $AB = \frac{(2m+1)p}{2m}$.

VI. Distance des verres $B$ et $C$ ou $BC = \frac{(2m+1)p}{m(3m+1)}$.

VII. Distance de l'oeil du seconde oculaire $CD = \frac{(m+1)(2m+1)p}{m^2(3m+1)}$.

VIII. Demi-diamètre du champ moyen $= \frac{2n}{m+1}$.

82. Les demi-diamètres de l'ouverture des verres $B$ et $C$ sont ici indiqués par $nq$ et $nr$, et nous avons vu que la valeur de $n$ peut croître de $\frac{1}{5}$ jusqu'à $\frac{1}{3}$. La longueur entière de cette lunette sera donc $AB + BC = \frac{3(m+1)(2m+1)}{2m(3m+1)}p$, qui est à la précédente comme $6m+3$ à $6m+2$, et partant la lunette ne sera pas sensiblement plus longue qu'au cas précédent, et la distance des deux verres oculaires semble récompenser ce petit excès. D'ailleurs il faut compter la distance de l'oeil encore à la longueur de la lunette et alors pour le cas précédent où $\mathfrak{B} = 1$ cette entière longueur est $AD = \frac{(m+1)^2}{m^2}p$, or dans ce cas $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$, il est $AD = \frac{(m+1)(2m+1)(3m+2)}{2m^2(3m+1)}p$, et celle-là est à celle-ci comme $6m^2+8m+3$ à $6m^2+7m+2$, de sorte que celle-ci est plus petite, quoique la différence soit à peine sensible.

*Table des lunettes à trois verres convexes,*

dans l'hypothèse $i = \frac{1}{150}$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, $n = \frac{1}{5}$ et $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$.

| Multi-plica-tion. | Objectif distance de foyer. | Objectif demi-d. de l'ouverture. | 1r ocul. distance de foyer. | 2d ocul. distance de foyer. | Distance de l'object. au 1r ocul. | Distance du 1r ocul. au 2d ocul. | Distance du 2d ocul. à l'oeil. | Demi-diam. du champ app. moyen. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $p$ | $x$ | $q$ | $r$ | $AB$ | $BC$ | $CD$ | |
| 5 | 1,5 | 0,1 | 0,55 | 0,42 | 1,65 | 0,21 | 0,25 | 3° 49′ 0″ |
| 10 | 6,0 | 0,2 | 1,15 | 0,82 | 6,30 | 0,41 | 0,45 | 2 4 53 |
| 15 | 13,5 | 0,3 | 1,74 | 1,22 | 13,95 | 0,61 | 0,65 | 1 25 52 |
| 20 | 24,0 | 0,4 | 2,34 | 1,62 | 24,60 | 0,81 | 0,85 | 1 5 25 |
| 25 | 37,5 | 0,5 | 2,94 | 2,02 | 38,25 | 1,01 | 1,05 | 0 52 52 |
| 30 | 54,0 | 0,6 | 3,54 | 2,42 | 54,90 | 1,21 | 1,25 | 0 44 20 |
| 35 | 73,5 | 0,7 | 4,14 | 2,82 | 74,55 | 1,41 | 1,45 | 0 38 11 |
| 40 | 96,0 | 0,8 | 4,74 | 3,22 | 97,20 | 1,61 | 1,65 | 0 33 32 |
| 45 | 121,5 | 0,9 | 5,34 | 3,62 | 122,85 | 1,81 | 1,85 | 0 29 54 |
| 50 | 150,0 | 1,0 | 5,94 | 4,02 | 151,50 | 2,01 | 2,05 | 0 26 58 |
| 60 | 216,0 | 1,2 | 7,14 | 4,82 | 217,80 | 2,41 | 2,45 | 0 22 34 |
| 70 | 294,0 | 1,4 | 8,34 | 5,62 | 296,10 | 2,81 | 2,85 | 0 19 22 |
| 80 | 384,0 | 1,6 | 9,54 | 6,42 | 386,40 | 3,21 | 3,25 | 0 16 58 |
| 90 | 486,0 | 1,8 | 10,74 | 7,22 | 488,70 | 3,61 | 3,65 | 0 15 6 |
| 100 | 600,0 | 2,0 | 11,94 | 8,02 | 603,00 | 4,01 | 4,05 | 0 13 38 |
| 120 | 864,0 | 2,4 | 14,34 | 9,62 | 867,60 | 4,81 | 4,85 | 0 11 22 |
| 140 | 1176,0 | 2,8 | 16,74 | 11,22 | 1180,20 | 5,61 | 5,65 | 0 9 46 |
| 160 | 1536,0 | 3,2 | 19,14 | 12,82 | 1540,80 | 6,41 | 6,45 | 0 8 32 |
| 180 | 1944,0 | 3,6 | 21,54 | 14,42 | 1949,40 | 7,21 | 7,25 | 0 7 36 |
| 200 | 2400,0 | 4,0 | 23,94 | 16,02 | 2406,00 | 8,01 | 8,05 | 0 6 50 |
| 225 | 3037,5 | 4,5 | 26,94 | 18,02 | 3044,25 | 9,01 | 9,05 | 0 6 6 |
| 250 | 3750,0 | 5,0 | 29,94 | 20,02 | 3757,50 | 10,01 | 10,05 | 0 5 28 |
| 275 | 4537,5 | 5,5 | 32,94 | 22,02 | 4545,75 | 11,01 | 11,05 | 0 4 58 |
| 300 | 5400,0 | 6,0 | 35,94 | 24,02 | 5409,00 | 12,01 | 12,05 | 0 4 34 |
| 350 | 7350,0 | 7,0 | 41,94 | 28,02 | 7360,50 | 14,01 | 14,05 | 0 3 56 |
| 400 | 9600,0 | 8,0 | 47,94 | 32,02 | 6912,00 | 16,01 | 16,05 | 0 3 26 |
| 450 | 12150,0 | 9,0 | 53,94 | 36,02 | 12163,50 | 18,01 | 18,05 | 0 3 2 |
| 500 | 15000,0 | 10,0 | 59,94 | 40,02 | 15015,00 | 20,01 | 20,05 | 0 2 44 |

83. Posons pour l'autre cas $\mathfrak{B} = o$ qui constituera quasi la limite entre cette espèce de lunettes et la suivante, et les déterminations pour cette sorte de lunettes seront:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2 \omega^2}{u^2} = \frac{3}{50} m^2$.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l} = \frac{1}{50} m$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2p}{m+1}$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{p}{m}$.

V. Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = p$.

VI. Distance du premier oculaire au second oculaire $BC = \frac{p}{m}$.

VII. Distance du second oculaire à l'oeil $CD = \frac{(m+1)p}{2m^2}$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1}$.

Pour la distinction, il faut outre cela qu'il soit $q > o$ et $r > \frac{6\omega}{l}$, ou bien selon nos déterminations supérieures $r > \frac{6}{50}$, d'où nous tirons $m > 2$ à cause de $r = \frac{3}{50}m$.

84. Le cas des lunettes à 3 verres est très remarquable, puisqu'il ne diffère presque point du cas des lunettes à deux verres convexes, le verre objectif, le dernier oculaire et leur distance étant absolument les mêmes, de sorte qu'il est aisé de changer une lunette à deux verres convexes en une telle lunette. On n'aura qu'à y ajouter un troisième verre convexe, dont la distance de foyer est $= \frac{2p}{m+1}$, précisément au foyer de l'objectif, sans changer la longueur de la lunette. Par ce moyen on conserve d'abord la même multiplication et la même clarté, mais quoique l'addition de ce troisième verre ne semble rien changer dans la nature de la lunette, on en retire pourtant cet important avantage, que le diamètre du champ apparent devient deux fois plus grand. Outre cela cette addition du troisième verre produit encore cet effet, qu'il faut approcher l'oeil deux fois davantage du dernier oculaire; et à cet égard cette lunette doit être censée un peu plus courte que si l'on n'employait que deux verres.

## III. Cas des lunettes à trois verres.

### *Le nombre $\mathfrak{A}$ étant négatif et $\mathfrak{B}$ positif.*

85. Cette espèce de lunettes représentera encore les objets renversés, et posant la multiplication $= m$, nous n'avons qu'à écrire $-\mathfrak{A}$ au lieu de $+\mathfrak{A}$ dans les formules du premier cas, d'où nous tirons pour les distances de foyer:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{\mathfrak{A}-1}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{B}{1+\mathfrak{B}},$$

et pour les limites:

du premier oculaire en $B \ldots . A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

du second oculaire en $C \ldots . \left(\mathfrak{A}B - \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$,

de l'oeil en $D \ldots . \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C - \mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$.

Or nous avons toujours $x = \frac{m\omega}{l}$ et $p = \frac{m^2\omega^2}{ul^2}$, et pour rendre la représentation distincte il faut qu'il soit $q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$.

86. De là nous obtiendrons trois valeurs pour le demi-diamètre du champ apparent moyen:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1+\mathfrak{B})A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+A},$$

desquelles la plus petite aura lieu; il s'agit donc de rendre la plus petite de ces trois valeurs auss grande qu'il est possible. Or, puisque $p$ est donné nous avons $A = \frac{(\mathfrak{A}-1)}{\mathfrak{A}} p$, et partant $\mathfrak{A} > 1$ ensuite $B = (1+\mathfrak{B}) r$, et partant $r$ positif et $\mathfrak{AB} = m$; d'où nos trois formules deviennent:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nmr}{(\mathfrak{A}-1)(p-mr)},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{nmr}{m(\mathfrak{A}+m)r-(\mathfrak{A}-1)p},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{m^2 C - m(\mathfrak{A}+m)r+(\mathfrak{A}-1)p}.$$

87. Puisque chacune de ces trois valeurs peut devenir infinie, voyons les valeurs qui e résultent pour les autres; ainsi, posant $mr = p$, on aura la première infinie et:

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n}{m+1} \quad \text{et} \quad \text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{m^2 C-(m+1)p}.$$

Or, posant $mr = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}+m} p$, la seconde devient infinie, et I. $\varphi = \frac{n}{m+1}$ et III. $\varphi = \frac{\omega}{mC}$. Et partar si l'on donne à $mr$ une valeur moyenne entre $p$ et $\frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}+m} p$, tant la première que la second obtiendra une valeur moyenne entre $\infty$ et $\frac{n}{m+1}$, d'où l'on comprend que le cas le plus favo rable sera celui où la seconde et la première valeur de $\varphi$ deviennent égales, ce qui arrive $(\mathfrak{A}-1)p - m(\mathfrak{A}-1)r = m(\mathfrak{A}+m)r-(\mathfrak{A}-1)p$, ou bien si $mr = \frac{2(\mathfrak{A}-1)p}{m-1+2\mathfrak{A}}$.

88. Posons donc $mr = \frac{2(\mathfrak{A}-1)p}{m-1+2\mathfrak{A}}$, et nos trois valeurs du demi-diamètre du champ app rent moyen seront: la première et la seconde $\varphi = \frac{2n}{m+1}$,

$$\text{et la troisième} \quad \varphi = \frac{m\omega(m-1+2\mathfrak{A})}{m^2 C(m-1+2\mathfrak{A})-(\mathfrak{A}-1)(m+1)p},$$

et partant dans ce cas on gagne sans doute le plus grand champ apparent, pourvu qu'on ne prem la distance de l'oeil $C$ en sorte que la dernière valeur de $\varphi$, ne devienne pas plus petite que $\frac{2n}{m+}$; or la place la plus avantageuse sera en prenant: $C = \frac{(\mathfrak{A}-1)(m+1)p}{m^2(m-1+2\mathfrak{A})}$, où la dernière valeur devit même infinie. Voilà donc encore une espèce de lunettes qui découvrent un champ presque dx fois plus grand que les lunettes à deux verres convexes, ce qui est le plus haut point de perf- tion auquel on peut porter les lunettes à trois verres. Je dis que ce champ devient presque dx fois plus grand, puisque c'est proprement la tangente du demi-diamètre du champ apparent mo n qui devient double, et non pas l'angle même.

89. La valeur du nombre $\mathfrak{A}$ demeure encore arbitraire, et substituant les valeurs déjà dé- minées, nous trouverons les déterminations suivantes pour la multiplication donnée $m$:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l}$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2(\mathfrak{A}-1)p}{(m+1)\mathfrak{A}}$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2(\mathfrak{A}-1)p}{m(m-1+2\mathfrak{A})}$.

V. Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = \frac{(\mathfrak{A}-1)p}{\mathfrak{A}}$.

VI. Distance du premier oculaire au second oculaire $BC = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m+\mathfrak{A})p}{m\mathfrak{A}(m-1+2\mathfrak{A})}$.

VII. Distance du seconde oculaire à l'oeil $CD = \frac{(\mathfrak{A}-1)(m+1)p}{m^2(m-1+2\mathfrak{A})}$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1}$,

où $nq$ et $nr$ marquent les demi-diamètres de l'ouverture des deux verres oculaires.

90. Puisque le nombre $\mathfrak{A}$ est permis à notre volonté, il est évident qu'on le pourrait, prendre tel que la longueur de la lunette devient aussi courte qu'on voudrait et qu'elle s'évanouit même, ce qui arriverait au cas $\mathfrak{A} = 1$. Mais en donnant à $\mathfrak{A} - 1$ une trop petite valeur, on tomberait dans l'inconvénient qu'il ne serait plus $q = \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$; c'est donc en remplissant ces conditions qu'on doit procurer à la lunette la plus petite longueur. Or en supposant $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ pouce à cause de $p = \frac{3}{50}m^2$ pouces, ces conditions demandent qu'il soit:

$$m(\mathfrak{A}-1) > m+1 \quad \text{et} \quad m(\mathfrak{A}-1) > m-1+2\mathfrak{A},$$

ou bien:

$$\mathfrak{A} > \frac{2m+1}{m} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} > \frac{2m-1}{m-2},$$

et puisque la dernière est plus grande que la première, il faut de toute nécessité prendre $\mathfrak{A} > \frac{2m-1}{m-2}$.

91. Donc la plus petite longueur qu'on puisse convenablement donner à la lunette résulte en posant $\mathfrak{A} = \frac{2m-1}{m-2}$, d'où nous trouverons les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m^2$ pouces.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l} = \frac{1}{50}m$ pouces.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2p}{2m-1} = \frac{6}{50}\frac{m^2}{2m-1}$ pouces.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2p}{m^2} = \frac{6}{50}$ pouce.

V. Distance de l'objectif au premier oculair $AB = \frac{(m+1)p}{2m-1} = \frac{3}{50}\frac{m^2(m+1)}{2m-1}$.

VI. Distance du premier oculaire au second oculaire $BC = \frac{2(m^2-1)p}{m^2(2m-1)} = \frac{6}{50}\frac{m^2-1}{2m-1}$.

VII. Distance du second oculaire à l'oeil $CD = \frac{(m+1)p}{m^3} = \frac{3}{50}\frac{m+1}{m}$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1} = \frac{2}{5(m+1)}$, en supposant comme ci-dessus $n = \frac{1}{5}$. Par ce moyen la longueur de la lunette devient:

$$AC = \frac{m^3 + 3m^2 - 2}{m^2(2m-1)}\, p = \frac{3}{50}\; \frac{m^3 + 3m^2 - 2}{2m-1},$$

et partant presque deux fois plus courte qu'aux cas de deux verres convexes.

92. C'est ici sans doute qu'il faut chercher le plus grand avantage des lunettes à 3 verres, qui consiste en deux conditions, dont l'une et l'autre est de la dernière importance. Car, par l'addition d'un troisième verre, on obtient non seulement cet avantage que le champ apparent est doublé en diamètre et partant quadruplé dans toute son étendue, mais aussi on en peut tirer cet avantage que la longueur de la lunette se réduit presqu'à la moitié que si l'on ne voulait employer que deux verres, la multiplication et la clarté demeurant les mêmes. Pour le verre objectif, il demeure toujours le même, étant determiné par la multiplication et le degré de clarté qu'on désire; le premier oculaire est presque le même que celui qu'il faut employer au cas de deux verres convexes, mais le second a toujours $\frac{6}{50}$ pouce pour distance de foyer, quelque grande que soit la multiplication.

*Table des lunettes à 3 verres convexes, qui semblent les plus parfaites dans leur espèce,* dans l'hypothèse $i = \frac{1}{150}$, $\frac{\omega}{i} = \frac{1}{50}$, $n = \frac{1}{5}$ et $\mathfrak{A} = \frac{2m-1}{m-2}$, les mesures étant exprimées en pouces.

| Multiplication. | Objectif distance de foyer. | Objectif demi-d. de l'ouverture. | 1r ocul. distance de foyer. | 2d ocul. distance de foyer. | Distance de l'object. au 1r ocul. | Distance du 1r ocul. au 2d ocul. | Distance du 2d ocul. à l'oeil. | Demi-diam. du champ app. moyen. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $p$ | $x$ | $q$ | $r$ | $AB$ | $BC$ | $CD$ | |
| 5 | 1,5 | 0,1 | 0,33 | 0,12 | 1,00 | 0,33 | 0,07 | 3° 48′ 51″ |
| 10 | 6,0 | 0,2 | 0,63 | 0,12 | 3,47 | 0,63 | 0,07 | 2 4 47 |
| 15 | 13,5 | 0,3 | 0,93 | 0,12 | 7,45 | 0,93 | 0,06 | 1 25 48 |
| 20 | 24,0 | 0,4 | 1,23 | 0,12 | 12,93 | 1,23 | 0,06 | 1 5 22 |
| 25 | 37,5 | 0,5 | 1,53 | 0,12 | 19,89 | 1,53 | 0,06 | 0 52 51 |
| 30 | 54,0 | 0,6 | 1,83 | 0,12 | 28,38 | 1,83 | 0,06 | 0 44 20 |
| 35 | 73,5 | 0,7 | 2,13 | 0,12 | 38,34 | 2,13 | 0,06 | 0 38 11 |
| 40 | 96,0 | 0,8 | 2,43 | 0,12 | 49,83 | 2,43 | 0,06 | 0 33 32 |
| 45 | 121,5 | 0,9 | 2,73 | 0,12 | 62,79 | 2,73 | 0,06 | 0 29 54 |
| 50 | 150,0 | 1,0 | 3,03 | 0,12 | 77,28 | 3,03 | 0,06 | 0 26 58 |
| 60 | 216,0 | 1,2 | 3,63 | 0,12 | 110,73 | 3,63 | 0,06 | 0 22 34 |
| 70 | 294,0 | 1,4 | 4,23 | 0,12 | 150,18 | 4,23 | 0,06 | 0 19 22 |
| 80 | 384,0 | 1,6 | 4,83 | 0,12 | 195,63 | 4,83 | 0,06 | 0 16 58 |
| 90 | 486,0 | 1,8 | 5,43 | 0,12 | 247,08 | 5,43 | 0,06 | 0 15 6 |
| 100 | 600,0 | 2,0 | 6,03 | 0,12 | 304,53 | 6,03 | 0,06 | 0 13 38 |
| 120 | 864,0 | 2,4 | 7,23 | 0,12 | 437,43 | 7,23 | 0,06 | 0 11 22 |
| 140 | 1176,0 | 2,8 | 8,43 | 0,12 | 594,33 | 8,43 | 0,06 | 0 9 46 |
| 160 | 1536,0 | 3,2 | 9,63 | 0,12 | 775,23 | 9,63 | 0,06 | 0 8 32 |
| 180 | 1944,0 | 3,6 | 10,83 | 0,12 | 980,13 | 10,83 | 0,06 | 0 7 36 |
| 200 | 2400,0 | 4,0 | 12,03 | 0,12 | 1209,03 | 12,03 | 0,06 | 0 6 50 |
| 225 | 3037,5 | 4,5 | 13,53 | 0,12 | 1528,89 | 13,53 | 0,06 | 0 6 6 |
| 250 | 3750,0 | 5,0 | 15,03 | 0,12 | 1886,28 | 15,03 | 0,06 | 0 5 28 |
| 275 | 4537,5 | 5,5 | 16,53 | 0,12 | 2281,14 | 16,53 | 0,06 | 0 4 58 |
| 300 | 5400,0 | 6,0 | 18,03 | 0,12 | 2713,53 | 18,03 | 0,06 | 0 4 34 |
| 350 | 7350,0 | 7,0 | 21,03 | 0,12 | 3690,78 | 21,03 | 0,06 | 0 3 56 |
| 400 | 9600,0 | 8,0 | 24,03 | 0,12 | 4818,03 | 24,03 | 0,06 | 0 3 26 |
| 450 | 12150,0 | 9,0 | 27,03 | 0,12 | 6095,28 | 27,03 | 0,06 | 0 3 2 |
| 500 | 15000,0 | 10,0 | 30,03 | 0,12 | 7522,53 | 30,03 | 0,06 | 0 2 44 |

## IV. Cas des lunettes à trois verres,

### *tous les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant négatifs.*

**93.** Cette espèce représentera donc les objets debout, comme la première, et mettant $-\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{B}$ pour $+\mathfrak{A}$, $+\mathfrak{B}$, nous aurons:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{\mathfrak{A}-1}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(\mathfrak{B}-1)A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{B}{1-\mathfrak{B}},$$

Et les limites:

$$\text{sur le premier oculaire en } B \ldots\ldots A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\text{sur le second oculaire en } C \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{m},$$

$$\text{sur l'oeil en } D \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C + \mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{m}.$$

Dans ce cas donc le lieu le plus convenable pour l'oeil est immédiatement derrière le second oculaire en $C$, de sorte qu'il faut prendre la distance $CD = o$. Ensuite ayant toujours:

$$x = \frac{m\omega}{l} \quad \text{et} \quad p = \frac{m^2\omega^2}{\mu^2},$$

On doit observer ces conditions:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l} \quad \text{et} \quad r > \frac{6\omega}{l}.$$

**94.** De là nous tirons pour le demi-diamètre du champ apparent moyen les trois valeurs suivantes:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1-\mathfrak{B})(A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+A},$$

d'où l'on voit que $nr$ ne doit pas être plus petit que $\omega$, afin que le second oculaire ne diminue point le champ que l'oeil admettrait sans cela. Donc si nous supposons $\omega = \frac{1}{10}$ et $n = \frac{1}{4}$, cette condition demande qu'il soit $\frac{1}{4}r > \frac{1}{10}$, et partant $r > \frac{4}{10}$; laquelle renferme par conséquent déjà celle qui exige $r > \frac{6\omega}{l}$ ou $r > \frac{6}{50}$ pouce. Cela observé, à cause de $A = \frac{(\mathfrak{A}-1)p}{\mathfrak{A}}$, $B = (1-\mathfrak{B})r$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$, nous aurons ces deux valeurs:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nm(1-\mathfrak{B})r}{(\mathfrak{B}-1)(\mathfrak{A}-1)p - m(\mathfrak{A}-1)(1-\mathfrak{B})r} = -\frac{nmr}{(\mathfrak{A}-1)(p+mr)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{m(1-\mathfrak{B})}{(1-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-1)p + m(\mathfrak{A}-m)(1-\mathfrak{B})r} = \frac{m\omega}{(\mathfrak{A}-1)p - m(m-\mathfrak{A})r}.$$

95. Puisque $A$ et $B$ sont nécessairement des quantités positives, il faut qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$ et $(1 - \mathfrak{B}) r > o$. Donc si le second oculaire est convexe ou $r > o$, il faut qu'il soit $\mathfrak{B} < 1$ et partant $\mathfrak{A} > m$, et dans ce cas nos deux valeurs de $\varphi$ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = -\frac{nmr}{(\mathfrak{A}-1)(p+mr)} \quad \text{et} \quad \text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{(\mathfrak{A}-1)p + m(\mathfrak{A}-m)r},$$

dont la première, qui est la plus petite si $nr = \omega$, sera celle qui determine le champ apparent. Puisqu'il convient donc de rendre $\mathfrak{A} - 1$ si petit qu'il est possible, soit $\mathfrak{A} = m$ et à cause de $\mathfrak{B} = 1$, il sera $B = o$, d'où l'on tire $q = \frac{\mathfrak{B}pr}{p+mr}$, de sorte que le premier oculaire doit être concave, ou pour ce cas $q = -\frac{pr}{p+mr}$, et le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{nmr}{(m-1)(p+mr)}$ qui devient d'autant plus grand, plus on augmente $r$. Mais puisque $nr = \omega$, il sera $= \frac{nm\omega}{(m-1)(np+m\omega)}$ et partant plus petit que si l'on employait seulement deux verres.

96. Mais si $nr$ est plus grand que $\omega$, il peut arriver que l'autre valeur de $\varphi$ soit la plu[s] petite, savoir si $r = \frac{\omega p}{np - m\omega}$, et alors celle-ci aura lieu qui sera $\varphi = \frac{m\omega}{(m-1)p} = \frac{il^2}{m(m-1)\omega}$ tout comme dans le cas de deux verres dont l'oculaire est concave. Or si l'on prend $\mathfrak{A} > m$ l[e] champ apparent devient encore plus petit, de sorte que ce cas ne fournisse aucune lunette q[ui] vaille mieux que celles à deux verres. Examinons donc l'autre cas où l'oculaire est concave, [et] posons pour cet effet $r = -\varrho$ et à cause de $B = (\mathfrak{B} - 1)\varrho$, nous aurons $\mathfrak{B} > 1$ et $\mathfrak{A} < m$, d'o[ù] nos deux formules pour $\varphi$ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nm\varrho}{(\mathfrak{A}-1)(p-m\varrho)}, \qquad \text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{(\mathfrak{A}-1)p + m(m-\mathfrak{A})\varrho},$$

dont la dernière est la plus petite, à moins que $m\varrho$ ne surpasse beaucoup $p$. Cependant on [ne] saurait en aucune manière obtenir un plus grand champ apparent qu'au cas de deux verres.

97. Puisqu'il serait mal à propos de se servir de lunettes à 3 verres, si l'on n'en pouv[ait] retirer aucun avantage sur celles à deux verres, je ne m'arrêterai pas à développer davantage [ce] dernier cas, comme ne fournissant aucune lunette qui mériterait la moindre attention, surtout ap[rès] avoir découvert une si excellente espèce de lunettes à 3 verres, qui ont un double avantage, ta[nt] par rapport au champ apparent qu'à la longueur entière de la lunette. Car, quand l'effet répo[ndra] au calcul, comme on n'en saurait douter, les avantages ne manqueront pas de devenir très considérables. Si une lunette à deux verres de 6 pieds de longueur a été suffisante pour observer [les] éclipses des satellites de Jupiter, on pourra faire les mêmes observations par le moyen d'une lune[tte] de trois pieds à peu près, ce qui rendra peut-être ces observations possibles en mer, car non seulement la moindre longueur est propre à ce dessein, mais puisqu'une telle lunette découvre [un] champ quatre fois plus grand, cela doit faciliter considérablement son usage en mer, puisqu'il s[era] d'autant plus facile de conserver une étoile dans la lunette et de la retrouver quand [on] l'aura perdue.

98. Ces mêmes avantages deviennent surtout fort importants à l'égard des objectifs d'une fort grande distance de foyer qui en rend l'usage extrêmement difficile. Car dès qu'un tel verre a deux cents pieds de foyer ou davantage, quelqu'excellent qu'il soit d'ailleurs, il y faut presqu'entièrement renoncer, vu qu'on ne saurait manier une si grande longueur, et quoiqu'on y eût réussi, le fruit en serait toujours fort petit pour l'astronomie à cause de la rapidité du mouvement dont on ferrait passer les étoiles par la lunette. Or, employant le même objectif pour une telle lunette à trois verres, on gagne d'abord sur la longueur presque la moitié, ce qui doit rendre la manoeuvre beaucoup plus aisée, et quoiqu'elle grossit également, le plus grand champ apparent qu'elle découvre diminue fort l'incommodité que la rapidité du mouvement cause. Mais il sera important de pousser ces recherches plus loin, pour voir si, en employant plusieurs verres, on pourrait encore davantage raccourcir la longueur de la lunette et en augmenter en même temps le champ apparent.

---

## Section IV.

### Recherches sur les lunettes à quatre verres.

99. Que les quatre verres soyent en $A$, $B$, $C$, $D$, leurs distances de foyer $p$, $q$, $r$, $s$ et l'oeil en $E$. Posant les distances $AB = A$, $BC = B$, $CD = C$ et $DE = D$, il faut qu'il soit $\mathfrak{D} = -1$, où nous aurons les distances de foyer:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A+(1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}BC}{(1+\mathfrak{C})B+(1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}C}, \quad s = \frac{C}{1+\mathfrak{C}};$$

posons pour abréger:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

afin que nous ayons:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et il faut remarquer que les quantités $A$, $B$, $C$, $D$ doivent toujours être positives. Or posant la multiplication $= m$, nous avons vu qu'il doit être toujours $x = \frac{m\omega}{l}$ et $p = P = \frac{m^2\omega^2}{ll^2}$, de sorte que $P$ est une quantité donnée.

100. Pour les limites du cône lumineux sur chaque verre oculaire et sur l'oeil, nous aurons:

sur $B$ . . . . $A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

sur $C$ . . . . $\left(\mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$,

sur $D$ . . . . $\left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}} + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$,

sur $E$ . . . . $\left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}D + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}C}{\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$,

où pour éviter la confusion les condition suivantes sont requises:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}, \qquad s > \frac{6\omega}{l},$$

et de là pour le demi-diamètre du champ apparent moyen nous obtiendrons:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{A}Q}{(1+\mathfrak{A})(P+\mathfrak{A}Q)},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B} = \frac{n\mathfrak{A}\mathfrak{B}QR}{((1+\mathfrak{A})P+\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q)(Q+\mathfrak{B}R)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}\mathfrak{C}s}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C} = \frac{n\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{(1+\mathfrak{A})P+\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q+\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{C})R},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D-\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{C})R-\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q-(1+\mathfrak{A})P},$$

dont la plus petite valeur aura lieu.

101. Mais sans introduire ces nouvelles lettres $P$, $Q$, $R$, posons seulement $A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}p$ et $C = (1+\mathfrak{C})s$, de sorte que nous ayons:

$$q = \frac{\mathfrak{B}Bp}{(1+\mathfrak{B})p+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B}, \qquad r = \frac{\mathfrak{C}Bs}{B+(1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}s},$$

et nos quatre valeurs de $\varphi$ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}\mathfrak{C}s}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = -\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D},$$

où il est d'abord clair que pour que le champ apparent ne devienne trop petit, il faut qu'il n dépende pas de l'oeil, et partant on aura pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2},$$

laquelle quantité ne doit jamais devenir négative.

102. La multiplication est ici égale à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, en sorte que si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ est un nombre positif, représentation est renversée, mais droite si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ est négatif. A cause de ces trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, selon qu'ils sont positifs ou négatifs, nous aurons huit cas à examiner où la multiplication se toujours $= m$, le demi-diamètre de la pupille $= \omega$, la clarté pleine qu'on aperçoit à la vue simp en chaque objet $= 1$ et la clarté dont la lunette montre le même objet $= \frac{1}{l^2}$. Or, en examinant

ces huit cas, je ne développerai que les espèces qui auront quelqu'avantage sur les lunettes à deux ou trois verres, c'est à dire qui découvrent un plus grand champ ou qui fournissent des lunettes plus courtes. Dans cette vue je donnerai l'exclusion à celles où la quatrième valeur de $\varphi$ détermine le champ apparent puisqu'il deviendrait alors trop petit. Ainsi, ayant ou:

$$D = \frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{B}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2} + \frac{C}{\mathfrak{C}},$$

ou selon les lettres introduites:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

cette quantité doit toujours être positive.

### I. Cas des lunettes à 4 verres,

### *où les trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont positifs.*

103. Dans ce cas la représentation est renversée et la multiplication $m = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Donc si nous introduisons les lettres $P$, $Q$, $R$, qu'il soit:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

nous aurons pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

et partant les quantités $Q$ et $R$ doivent être positives; la quantité $P$ étant toujours donnée $P = p = \frac{m^2\omega^2}{u^2}$. Or, pour le demi-diamètre du champ apparent moyen $\varphi$ nous aurons ces trois formules:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}).$$

Ces formules étant les renversées des précédentes, c'est la plus grande qui aura lieu. Mais pour les distances de foyer on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}}.$$

104. Or la quelle de ces trois formules soit la plus grande, il faut faire en sorte qu'elle devienne la plus petite qu'il soit possible, afin qu'on obtienne le plus grand champ apparent possible. Mais si la troisième est la plus grande, il est évident qu'à cause de $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, sa valeur est plus grande que $m$, et partant $\varphi < \frac{n}{m}$; et si la première ou la seconde était la plus grande, le champ apparent

deviendrait encore plus petit, d'où il est évident que ce cas ne fournit aucune lunette qui soit préférable à celles de deux ou trois verres; et partant je ne m'arrêterai pas à développer plus soigneusement les qualités des lunettes de ce cas. Or, en cas qu'on ait construit une lunette qui y appartient, il sera aisé par ces formules d'en connaître les propriétés, et on trouvera toujours que non seulement le champ apparent est trop petit, mais que la lunette même devient trop longue.

### II. Cas des lunettes à 4 verres, *où $\mathfrak{A}$ est négatif mais $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ positifs.*

105. Posons donc $-\mathfrak{A}$ pour $+\mathfrak{A}$ et nos formules seront:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{1+C}{\mathfrak{C}} R;$$

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P-\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les 3 valeurs de $\frac{n}{\varphi}$:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

ou:

$$\frac{n}{\varphi} = \left(\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - m,$$

à cause de la multiplication $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, et pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

106. Ici il est d'abord évident que le nombre $\mathfrak{A}$ doit être plus grand que l'unité et:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} < \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

pour que les intervalles $A$ et $D$ proviennent positifs, et par la même raison les quantités $Q$ et $R$ seront positives. Maintenant il faut voir laquelle des 3 valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ est la plus grande et ensuite il faut tâcher de la rendre aussi petite qu'il est possible. Pour cet effet voyons sous quelles conditions chacune de ces trois valeurs devient la plus petite, afin qu'on puisse rendre la plus grande aussi petite qu'il est possible. Or la première s'évanouit en faisant $\mathfrak{A} = 1$, et alors les deux autres valeurs seront:

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + 1 + \mathfrak{B}, \qquad \text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{B} + m,$$

dont la plus grande aurait lieu qui est indubitablement la troisième. Cependant il serait toujours $\frac{n}{\varphi} > m$ et partant $\varphi < \frac{n}{m}$, ce qui ne produirait aucun avantage sur les lunettes à deux verres

107. Il faut donc mettre $\mathfrak{A} > 1$, d'où la première valeur de $\frac{n}{\varphi}$ devient plus grande, et en changeant de signes les deux autres valeurs, puisque les signes ne font rien à notre dessein et qu'il s'agit uniquement des valeurs absolues, nous aurons:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}) + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

ou:

$$\frac{n}{\varphi} = \left(\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

où il faut de plus qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}i}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}i}, \qquad s > \frac{6\omega}{i}.$$

Cependant il pourrait bien arriver que la seconde devînt négative, auquel cas il y faudrait changer les signes; mais la troisième est toujours positive, puisque la valeur de $D$ est telle et que la troisième se change en $\frac{n}{\varphi} = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}$.

108. Or pour qu'il devienne $\varphi > \frac{n}{m}$ en vertu de la troisième formule, il faut qu'il soit $\frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}}P > \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R$, et partant la seconde doit être présentée ainsi:

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \left(\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

laquelle ne doit pas être plus grande que la troisième. Rendons-les donc égales pour avoir:

$$\frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} = \frac{2\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + m + \mathfrak{A}(1+2\mathfrak{B}),$$

d'où nous tirons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q + \frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{B}QR}{2Q+\mathfrak{B}R};$$

Il faut donc qu'il soit:

$$\frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})Q}{2Q+\mathfrak{B}R} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{ou} \quad (m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})Q > \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R.$$

Donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m$ et $\mathfrak{C} > 1$, soit $\lambda > 1$ et posons $Q = \frac{\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R}{m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, d'où nous tirons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} = \frac{\lambda\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{B})}{m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}R + \frac{\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}+m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}R.$$

109. Mais pour mieux développer ces formules, puisque ce n'est que la plus grande qui saurait avoir lieu, dans les autres on pourra donner à $n$ une plus petite valeur, afin qu'elles soient

d'accord entr'elles. Que $n$, $n^I$, $n^{II}$ marquent donc des valeurs de $n$ telles que la plus grande ne surpasse point $\frac{1}{4}$, si nous supposons que le demi-diamètre de l'ouverture d'un oculaire ne doive être plus grand que le quart de sa distance de foyer. Ayant donc rendu positives nos trois formules, nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

D'où nous tirons:

$$\frac{n^{II}+n^I-n}{\varphi} = m-1, \quad \text{et partant} \quad \varphi = \frac{n^{II}+n^I-n}{m-1},$$

et partant le champ apparent sera le plus grand, si les valeurs $n^{II}$ et $n^I$ sont les plus grandes et $n$ la plus petite.

**110.** Posons donc $\mathfrak{A}Q = P$ pour rendre $n = o$ et que les deux autres $n^{II}$ et $n^I$ deviennent égales pour avoir $\varphi = \frac{2n^I}{m-1}$, d'où résulte le plus grand champ apparent qui soit possible dans ce cas, et nous aurons:

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}S} + \mathfrak{A} - 1 - \frac{(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

ou:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{-(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1.$$

Or, cette valeur devenant négative, on voit qu'on doit prendre $P > \mathfrak{A}Q$; et partant $n$ ne saurait s'évanouir. Soit donc $P = \mathfrak{A}(Q+\mathfrak{B})$ pour avoir:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{Q},$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}(Q+\mathfrak{B}R)}{\mathfrak{B}QR} - \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1,$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}R}.$$

**111.** Posons donc ces deux dernières valeurs égales entr'elles et nous aurons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}(2Q+\mathfrak{B}R)}{\mathfrak{B}QR} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 1 + m,$$

donc:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{Q} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q + (2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)\mathfrak{B}R + m\mathfrak{B}R}{2Q+\mathfrak{B}R} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + 1 + \frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{B}R}{2Q+\mathfrak{B}R}.$$

Ce qui est la valeur de $\frac{n}{\varphi}$, et les deux autres seront:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{AB} - \frac{(m + \mathfrak{AB})\,Q}{2Q + \mathfrak{B}R} = \frac{(m + \mathfrak{AB})\,(Q + \mathfrak{B}R)}{2Q + \mathfrak{B}R},$$

d'où la distance de l'oeil devient:

$$D = \frac{\mathfrak{AB}R\,(m + \mathfrak{AB})\,(Q + \mathfrak{B}R)}{m^2\,(2Q + \mathfrak{B}R)}.$$

Ensuite la première valeur de $\frac{n}{\varphi}$ donne:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + 1) + \frac{(m + \mathfrak{AB})\,\mathfrak{B}R}{2Q + \mathfrak{B}R} = \frac{2\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + 1)\,Q + (m + 2\mathfrak{AB} + \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}R}{2Q + \mathfrak{B}R},$$

d'où nous tirons:

$$\frac{\mathfrak{B}R}{Q} = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,P - 2\mathfrak{A}^2\,(\mathfrak{B} + 1)\,Q}{\mathfrak{A}\,(m + 2\mathfrak{AB} + \mathfrak{A})\,Q - (\mathfrak{A} - 1)\,P},$$

et partant:
$$\frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

et:
$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{2\mathfrak{A}Q} + \frac{m - \mathfrak{A}}{2}.$$

112. Or, afin que la fraction $\frac{\mathfrak{B}R}{Q}$ soit positive, nous avons ces limites:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} > \mathfrak{AB} + \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} < m + 2\mathfrak{AB} + \mathfrak{A},$$

ensuite que la valeur de $\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi}$ surpasse $\frac{n}{\varphi}$, on a $\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} < m + \mathfrak{A} - 2$. Posons donc $\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} = m + \mathfrak{A} - 2 - \mu$ de sorte que $\mathfrak{AB} < m - 2 - \mu$, et nous aurons: $\frac{n}{\varphi} = m - 1 - \mu$ et $\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = m - 1 - \frac{\mu}{2}$ et $\frac{\mathfrak{B}R}{Q} = \frac{2\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{AB})}{2\mathfrak{AB} + 2 + \mu}$.

Alors le demi-diamètre du champ moyen sera $\varphi = \frac{n^I}{m - 1 - \frac{\mu}{2}}$, et les autres quantités:

$$Q = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)}, \quad R = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{AB})\,P}{\mathfrak{AB}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{AB} + 2 + \mu)};$$

il faut prendre $\mu < m - 2 - \mathfrak{AB}$, et partant il sera $\varphi < \frac{2n^I}{m + \mathfrak{AB}}$.

113. Avant que de déterminer quelque chose de précis, il faut considérer les autres quantités et les conditions qu'il faut remplir; or nous trouverons:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,(1 + \mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{AB}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)}, \quad C = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(1 + \mathfrak{C})\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{AB})\,P}{m\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{AB} + 2 + \mu)},$$

$$p = P, \quad q = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,p}{\mathfrak{A}\,(m - \mu - 1)}, \quad r = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{AB})\,P}{\mathfrak{AB}\,(2m - 2 - \mu)\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)} \quad \text{et} \quad s = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{AB})\,P}{m\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{AB} + 2 + \mu)},$$

et il est requis qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l} \quad \text{et} \quad s > \frac{6\omega}{l}.$$

Ces dernières conditions nous montrent qu'on ne peut pas prendre $m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ trop petit ou $\mu$ trop grand, comme il serait avantageux pour l'augmentation du champ apparent. Donc dans l'hypothèse:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{l} = \frac{1}{50},$$

il faut qu'il soit:

$$m\mathfrak{A} > 3m - 2\mu - 2,$$

$$m^2\mathfrak{A} > 3m^2 + (4m + \mu m - \mu - 2)\mathfrak{A} - 8m - 4m\mu + (\mu + 2)^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}m(\mathfrak{A} - 1),$$

$$m^2(\mathfrak{A} - 1) > m\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + 2 + \mu + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 4\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mu + \mathfrak{A}\mu - (\mu + 2)^2.$$

114. Soit $\mu + 2 = \lambda$, de sorte que $\lambda < m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et $\lambda > 2$ et ces conditions seront:

$$m\mathfrak{A} > 3m - 2\lambda + 2,$$

$$m^2\mathfrak{A} > 3m^2 + (\lambda m + 2m - \lambda)\mathfrak{A} - 4\lambda m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1)m + \lambda^2,$$

$$m^2(\mathfrak{A} - 1) > m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + \lambda) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2,$$

et le demi-diamètre du champ moyen $\varphi = \frac{2n}{2m - \lambda}$. Par la seconde formule on reconnait que $\lambda$ doit être moindre que $m$ et même plus petit que $m - 1$. Après quelques essais j'ai trouvé qu'on satisfait assez près à ces conditions, en posant $\mathfrak{A} = 4$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = \frac{m}{4}$, $\lambda = m - 8$, de sorte que $\varphi = \frac{2n}{m + 8}$; donc on aura:

$$A = \frac{3}{4}P, \quad B = \frac{1}{8}P, \quad C = \frac{m + 4}{2m^2}P, \quad D = \frac{m + 8}{m^3}P,$$

$$p = P, \quad q = \frac{1}{12}P, \quad r = \frac{1}{2m + 16}P, \quad s = \frac{2}{m^2}P.$$

Il faut seulement remarquer que $r$ ne devient pas plus grand que $\frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}$, mais le défaut est si petit qu'on le peut aisément négliger, surtout si $m$ est un nombre fort grand.

115. Pour éviter cet inconvénient, posons en général $\lambda = m - \nu$, et nos trois conditions deviendront:

I. $m\mathfrak{A} > m + 2\nu + 2,$

II. $\nu m\mathfrak{A} > m\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{A} + m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1) + 2m\nu + \nu^2,$

III. $\nu m\mathfrak{A} > m\mathfrak{A} - \nu\mathfrak{A} + m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2m\nu - \nu^2,$

où la seconde renferme la troisième si $\nu > \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, mais si $\nu < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, la seconde est renfermée dans la troisième. Donc si nous posons $\nu = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, la seconde et la troisième seront identiques et chacune

se réduit à $0 > m + m\mathfrak{B} + \mathfrak{AB} + \mathfrak{AB}^2$, ce qui est impossible. Il faut donc qu'il soit $\nu > \mathfrak{AB}$ et alors il suffit de remplir la seconde condition. Posons donc $\nu = \mathfrak{AB} + \pi$, et la seconde condition exige:

$$\pi m(\mathfrak{A}-2) > \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})(m+\mathfrak{AB}) + \pi\mathfrak{A} + 2\pi\mathfrak{AB} + \pi^2.$$

D'où l'on voit que si $m$ était infini, il faudrait qu'il fût $\pi > \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2}$. Soit donc $\pi = \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho$, et il est requis:

$$\varrho m(\mathfrak{A}-2) > \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{AB}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{AB}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2.$$

116. Il est donc nécessaire qu'il soit $\mathfrak{A} > 2$ et $\varrho > 0$, et ayant trouvé des valeurs conve-ables pour $\varrho$, on aura $\nu = \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{AB}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho$; $\lambda = m - \nu$ et le demi-diamètre du champ apparent:

$$\varphi = \frac{2n}{m + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{AB}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho} = \frac{2n(\mathfrak{A}-2)}{(m+\varrho)(\mathfrak{A}-2) + \mathfrak{A}(1+\mathfrak{AB}-\mathfrak{B})}.$$

upposons d'abord $\mathfrak{A} = 3$ et il faut prendre:

$$\varrho m > 18(1+\mathfrak{B})(1+2\mathfrak{B}) + 3\varrho(3+4\mathfrak{B}) + \varrho^2.$$

osons de plus $\mathfrak{B} = 1$, et si l'on prend $\varrho m > 108 + 21\varrho + \varrho^2$, on aura $\varphi = \frac{2n}{m+9+\varrho}$. Or puis-ue $m > \frac{108}{\varrho} + 21 + \varrho$, ce cas ne saurait avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m > 21 + 2\sqrt{108}$ ou $> 41$, car la plus petite valeur de $m$ résulte en posant $\varrho = \sqrt{108}$.

117. Mais avant que d'entrer en détail, voilà la théorie générale de ce cas. Qu'on prenne , $\mathfrak{B}$ et $\varrho$, en sorte qu'il soit:

$$\varrho m(\mathfrak{A}-2) > \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{AB}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{AB}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2,$$

qu'on fasse $\lambda = m - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{AB}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} - \varrho$, d'où le demi-diamètre du champ apparent moyen ra: $\varphi = \frac{2n}{2m-\lambda}$; et ensuite les distances de foyer des quatre verres seront:

$$p = P = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \qquad q = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+1-\lambda)},$$

$$r = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m-\lambda-\mathfrak{AB})P}{\mathfrak{AB}(2m-\lambda)(m+\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad s = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m-\lambda-\mathfrak{AB})P}{m(m+\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}+\lambda)},$$

les distances des verres deviendront:

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{AB}(m+\mathfrak{A}-\lambda)}, \quad C = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m+\mathfrak{AB})(m-\lambda-\mathfrak{AB})P}{m\mathfrak{AB}(m+\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}+\lambda)},$$

la distance de l'oeil:

$$D = \frac{(\mathfrak{A}-1)(2m-\lambda)(m-\lambda-\mathfrak{AB})}{m^2(m+\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}+\lambda)}P = \frac{\mathfrak{AB}(2m-\lambda)C}{2m(m+\mathfrak{AB})}, \text{ ou bien } D = \frac{(2m-\lambda)s}{2m}.$$

118. Je remarque ici d'abord que, pour rendre la lunette le plus court qu'il est possible, il faut donner à $\mathfrak{A}$ une valeur qui surpasse tant soit peu 2, et à $\mathfrak{B}$ une valeur fort grande; mais alors le champ apparent devient fort petit et à moins que la multiplication $m$ ne soit extrêmement grande, la valeur de $\varrho$ devient fort grande, ce qui diminue encore le champ apparent. Si nous posons comme ci-dessus $\mathfrak{A} = 3$ et $\mathfrak{B} = 1$, et que nous prenions $\varrho = 9$, le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{2n}{m+18}$, pourvu qu'il soit $m > 42$. Dans ce cas on aura donc $\lambda = m - 18$ et partant les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{2}{57} P, \quad r = \frac{20P}{21(m+18)}, \quad s = \frac{20P}{7m(m-12)},$$

$$A = \frac{2}{3} P, \quad B = \frac{4}{63} P, \quad C = \frac{20(m+3)P}{21m(m-12)}, \quad D = \frac{10(m+18)P}{7m^2(m-12)}.$$

119. Examinons un autre exemple, en posant $\mathfrak{A} = 4$ et $\mathfrak{B} = 2$ et la condition à remplir sera $\varrho m > 126 + 16\varrho + \frac{\varrho^2}{2}$. Posons $\varrho = 9$, et ce cas aura lieu quand $m > 34\frac{1}{2}$. Donc pour ce cas nous aurons $\lambda = m - 23$ et les autres déterminations se trouveront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{32} P, \quad r = \frac{5P}{12(m+23)}, \quad s = \frac{10P}{3m(m-7)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{1}{24} P, \quad C = \frac{5(m+8)P}{12m(m-7)}, \quad D = \frac{5(m+23)P}{3m^2(m-7)},$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+23}$. Mais lorsque la multiplication est beaucoup plus grande, on peut prendre pour $\varrho$ une plus petite valeur. Ainsi, posant $\varrho = 6$, pour les cas où $m > 43$ on aura $\lambda = m - 20$, et les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{28} P, \quad r = \frac{3P}{8m+20}, \quad s = \frac{3P}{m(m-4)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{3}{64} P, \quad C = \frac{3(m+8)P}{8m(m-4)}, \quad D = \frac{3(m+20)P}{2m^2(m-4)}.$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+20}$.

120. Quand on a principalement en vue le raccourcissement de la lunette, on peut bien mettre $\mathfrak{A} = 2\frac{1}{2}$ et on aura:

$$m > \frac{75(1+\mathfrak{B})(2+3\mathfrak{B})}{2\varrho} + 5(5+6\mathfrak{B}) + 2\varrho \quad \text{et} \quad \lambda = m - \tfrac{5}{2}(2+3\mathfrak{B}) - \varrho.$$

Soit $\mathfrak{B} = 1$, de sorte que $\lambda = m - \frac{25}{2} - \varrho$ et $m > \frac{375}{\varrho} + 55 + 2\varrho$.

Afin que $m$ ne doive être extrêmement grand, posons $\varrho = \frac{15}{2}$, pour avoir $\lambda = m - 20$ et $m > 12$ et $\varphi = \frac{2n}{m+20}$. Or les autres déterminations de la lunette seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{1}{35}P, \quad r = \frac{14P}{15(m+20)}, \quad s = \frac{7p}{3m(m-15)},$$

$$A = \frac{3}{5}P, \quad B = \frac{4}{75}P, \quad C = \frac{7(2m+5)P}{15m(m-15)}, \quad D = \frac{7(m+20)P}{6m^2(m-15)}.$$

Ces valeurs sont donc fort propres pour les lunettes qui doivent beaucoup grossir.

121. Or, si l'on veut construire des lunettes qui ne doivent pas beaucoup grossir, il faut donner à $\mathfrak{A}$ des valeurs plus grandes. Ainsi supposant $\mathfrak{A} = 4$, puisque:

$$m > \frac{6(1+\mathfrak{B})(1+3\mathfrak{B})}{\varrho} + 4 + 6\mathfrak{B} + \frac{\varrho}{2},$$

prenons $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$, et $\varrho = 4$ pour avoir $m > 12$, et nous obtiendrons $\lambda = m - 8$ et le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2n}{m+8}$; les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{1}{12}P, \quad r = \frac{5P}{2(m+8)}, \quad s = \frac{10P}{m(3m-16)},$$

$$A = \frac{3}{4}P, \quad B = \frac{1}{4}P, \quad C = \frac{5(3m+4)P}{2m(3m-16)}, \quad D = \frac{5(m+8)P}{m^2(3m-16)}.$$

Cette lunette sera pourtant considérablement plus courte que les ordinaires à 4 verres et a outre cela le même avantage qu'elle représente les objets debout; mais le plus grand avantage qui la rend préférable aux ordinaires, est que le champ apparent est considérablement plus grand. Et, par les mêmes raisons, elle surpasse aussi beaucoup les lunettes à deux verres.

122. Pour les grandes multiplications il est avantageux de donner à $\mathfrak{A}$ une plus petite valeur, pour diminuer d'autant plus la longueur de la lunette, comme nous venons de remarquer dans le § 120. Mais puisque ces déterminations ne sauraient avoir lieu à moins qu'il ne fût $m > 120$, pour de moindres multiplications il faut donner à $\mathfrak{B}$ de plus petites valeurs. Ainsi posant $\mathfrak{A} = 2\frac{1}{2}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$, $\varrho = 7\frac{1}{2}$, on aura $m > 70$ et $\lambda = m - 15$, donc le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2n}{m+15}$, et les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{3}{80}P, \quad r = \frac{102P}{35(m+15)}, \quad s = \frac{51P}{7m(3m-40)},$$

$$A = \frac{3}{5}P, \quad B = \frac{24}{175}P, \quad C = \frac{51(6m+5)P}{53m(3m-40)}, \quad D = \frac{51(m+15)P}{14m^2(3m-40)}.$$

Cette lunette devient un peu plus longue que celle du § 120. Car la distance $B$ est ici plus grande. Mais en récompense le champ apparent est ici aussi un peu plus grand. Ces exemples sont suffisants pour faire voir comment on doit construire en chaque cas proposé une lunette qui réponde le mieux à notre intention, tant par rapport au champ apparent qu'à la longueur de la lunette.

### Exemple 1.

123. *On demande la construction d'une lunette à quatre verres qui grossisse le diamètre des objets 20 fois.*

Ayant $m = 20$, la distance de foyer de l'objectif doit être 24 pouces et partant $P = 24$. Je choisis pour cet effet les formules du § 121, qui donnent d'abord un champ apparent dont le demi-diamètre est $= \frac{2n}{28}$ ou bien de $1^0 1' 22''$ en posant $n = \frac{1}{4}$, et les autres déterminations seront:

Distance de foyer du premier oculaire en $B = 2$ pouces,
" " du second oculaire en $C = 2\frac{1}{7}$ pouces,
" " du troisième oculaire en $D = \frac{3}{11}$ pouces,
Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = 18$ pouces,
" du premier oculaire au second oculaire $BC = 6$ pouces,
" du second au troisième oculaire $CD = 4\frac{4}{11}$ pouces,
" du troisième oculaire à l'oeil $DE = \frac{21}{100}$ pouces.

Et partant, la longueur de la lunette est $AD = 28\frac{4}{11}$.

### Exemple 2.

124. *On demande la construction d'une lunette qui grossisse le diamètre des objets 40 fois.*

Ayant $m = 40$ l'objectif doit avoir pour sa distance de foyer 96 pouces, de sorte que $P = 96$. Pour ce cas je poserai $\mathfrak{A} = 3$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$; $\varrho = 6$ d'où l'on tire $\lambda = m - 12$, $\varphi = \frac{2n}{m + 12}$ et $m > 30$,

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{2P}{39}, \quad r = \frac{28P}{15(m + 12)}, \quad s = \frac{14P}{5m(m - 9)},$$

$$A = \frac{2}{3} P, \quad B = \frac{2}{15} P, \quad C = \frac{24(2m + 3)P}{15m(m - 9)}, \quad D = \frac{7(m + 12)P}{5m^2(m - 9)};$$

et partant pour la lunette requise, nous aurons:

Distance de foyer du premier oculaire en $B = 4\frac{12}{13}$ pouces,
" " du second oculaire en $C = 3\frac{29}{65}$ pouces,
" " du troisième oculaire en $D = \frac{168}{775}$ pouces,
Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = 64$ pouces,
" du premier oculaire au second oculaire $BC = 12\frac{4}{5}$ pouces,
" du second oculaire au troisième oculaire $CD = 5\frac{773}{775}$ pouces,
" du troisième oculaire à l'oeil $DE = \frac{546}{3875}$ pouces.

Le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{n}{26} = 34'$, en posant $n = \frac{1}{4}$, et la longueur de cette lunette est $82\frac{618}{775}$.

125. Avant que d'abandonner ce cas des lunettes à quatre verres, je développerai encore plus généralement les formules générales du § 117, et d'abord pour que la valeur de $m$ puisse être prise la plus petite, j'observe qu'il faut mettre:

$$\varrho = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-2}\sqrt{(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})},$$

et mettant ensuite:

$$\varrho m(\mathfrak{A}-2) = \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2,$$

on en tire la valeur de:

$$\mathfrak{B} = \frac{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-(2m-1)\mathfrak{A}^2}{4m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)};$$

et partant: $\varrho = \frac{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-\mathfrak{A}^2}{4m(\mathfrak{A}-2)}$, et $\lambda = 2m - \frac{1}{2}(m-1)\mathfrak{A}$,

d'où le demi-diamètre du champ apparent moyen devient $\varphi = \frac{4n}{(m-1)\mathfrak{A}}$. Puis les autres déterminations se trouveront:

$$p = P = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{(m-1)\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-2)}, \quad r = \frac{8(\mathfrak{A}-1)P}{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2}, \quad s = \frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{m(m-\mathfrak{A})},$$

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{2(\mathfrak{A}-1)[m(\mathfrak{A}-2)+\mathfrak{A}]P}{\mathfrak{A}[m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2]}, \quad C = \frac{-2(m-1)^2\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)P}{m[m-\mathfrak{A}][m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2]}$$

$$\text{et } D = \frac{(m-1)\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)P}{2m^2(m-\mathfrak{A})}.$$

Or il faut prendre: $\mathfrak{A} > \frac{2m(m+\sqrt{2m-1})}{(m-1)^2}$.

126. Plus on prend grande la valeur de $\mathfrak{A}$ celle de $\mathfrak{B}$ sera diminuée, mais aussi le champ apparent est rétréci et la distance $A$ devient plus grande. Il faut donc dans chaque cas choisir une telle valeur pour $\mathfrak{A}$ qui augmente le champ apparent, sans augmenter trop la distance $B$. Ainsi, posant $m = 20$, puisque $\mathfrak{A} > \frac{40(20+\sqrt{39})}{19^2}$, on peut prendre $\mathfrak{A} = 3$ et le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{4n}{57}$, tant soit peu plus petit que dans le § 123, mais la lunette sera aussi plus longue. Car les déterminations seront:

$$p = P = 24 \text{ pouces}, \quad q = \frac{32}{19}, \quad r = \frac{384}{49}, \quad s = \frac{24}{85},$$

$$A = 16, \quad B = \frac{736}{49}, \quad C = \frac{77976}{4165}, \quad D = \frac{171}{850}.$$

Or on voit par cet exemple, qu'on n'obtient pas par ce moyen la lunette la plus avantageuse, et partant il vaudra mieux de se servir dans chaque cas plutôt des formules particulières développées ci-dessus qui paraîtront les plus convenables. Or, ayant déjà donné quelques exemples, je ne m'arrêterai pas plus long-temps à ce cas qui paraît d'ailleurs mériter un examen plus soigneux.

### III. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ est positif, $\mathfrak{B}$ négatif et $\mathfrak{C}$ positif.*

127. Posons donc $-\mathfrak{B}$ pour $+\mathfrak{B}$, et nos formules seront:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} R,$$

et posant $m$ pour $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ on aura:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

et les lunettes de ces cas représenteront les objets debout. Ensuite nous aurons les distances de foyer:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q-\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ seront:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}).$$

128. Ici il est d'abord évident que $\frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q$ doit être une quantité positive et:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2} > \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2},$$

ou bien:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}) > \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R},$$

et partant la troisième formule est négative.

Posons donc:

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

et la seconde deviendra:

$$\frac{n^I}{\varphi} = -\frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + m + \mathfrak{A} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q}.$$

Mais pour que le champ apparent provienne plus grand, que dans le cas des deux verres, il fau qu'il soit:

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} > \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

D'où la seconde formule est positive et nos trois formules, étant rendues positives, seront:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A},$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m.$$

129. Les lettres $n$, $n'$, $n''$ marqueront donc des fractions positives ou égales à $\frac{1}{4}$ ou plus petites, et leur combinaison fournit:

$$\frac{n^{II} + n^I - n}{\varphi} = m - 1.$$

Il faut donc tâcher de rendre $n^I$ et $n^{II}$ égales à $\frac{1}{4}$, et la valeur de $n$ aussi petite qu'il est possible. Posons donc $n^I = n^{II}$, ce qui donne:

$$\frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{2\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A},$$

ou:
$$\frac{2}{\mathfrak{B}R}\left(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}\right) = m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A} - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q},$$

et on aura:
$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[\mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-1)Q - (1+\mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{A})Q - (1+\mathfrak{A})P},$$

et ensuite:
$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+\mathfrak{A}}{2} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q}.$$

Cette valeur doit être plus grande que $\frac{n}{\varphi}$, ce qui donne $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} < m - \mathfrak{A} - 2$.

130. Posons donc $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} = m - \mathfrak{A} - \lambda$, de sorte que $\lambda > 2$, et nous aurons pour le champ apparent $\frac{n^I}{\varphi} = m - \frac{\lambda}{2}$, par sonséquent $\varphi = \frac{2n^I}{2m-\lambda}$. Ensuite nous aurons:

$$Q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad R = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

d'où l'on voit que $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda$ et $m > \mathfrak{A} + \lambda$. Or ayant trouvé ces valeurs de $Q$ et $R$, nos distances des verres seront:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

et la distance de l'oeil:

$$D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{m^2}\cdot\frac{n^I}{\varphi} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R(2m-\lambda)}{2m^2},$$

ou bien:
$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})(2m-\lambda)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m^2(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)}.$$

Ensuite les distances de foyer:

$$p = P, \qquad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1-\lambda)}, \qquad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB}-m+\lambda)P}{\mathfrak{AB}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)},$$

et enfin: $$s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB}-m+\lambda)P}{m(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}+\lambda)}, \qquad \text{donc} \qquad D = \frac{(2m-\lambda)s}{2m}.$$

131. Mais il reste de remplir ces conditions, qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{AB}l}, \qquad s > \frac{6\omega}{l},$$

Donc, posant $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $P = \frac{3}{50}m^2$, ces conditions donnent:

I. $m(1+\mathfrak{A}) > 2(m+1-\lambda)$ ou $m\mathfrak{A} > m+2-2\lambda$,

II. $m\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\mathfrak{B}+\lambda) > (\mathfrak{A}+3)m^2 - 2m\mathfrak{A} - 4\lambda m + \lambda\mathfrak{A} + \lambda^2$,

III. $m\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}-\mathfrak{B}+\lambda) > (\mathfrak{A}+1)m^2 - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{AB} - \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2$;

la première se remplit d'elle même et les deux autres soyent remplies en sorte:

$$m\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\lambda) = (\mathfrak{A}+3)m^2 - m\mathfrak{AB} - 2m\mathfrak{A} - 4\lambda m + \lambda\mathfrak{A} + \lambda^2 + \zeta,$$

$$m\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\lambda) = (\mathfrak{A}+1)m^2 + m\mathfrak{AB} - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} \quad 2\lambda\mathfrak{AB} - \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2 + \eta,$$

prenant pour $\zeta$ et $\eta$ des quantités positives, d'où l'on tire:

$$\zeta - \eta + 2(m - \lambda - \mathfrak{A})(m - \lambda - \mathfrak{AB}) = 0.$$

132. Mais nous avons vu que $m > \lambda + \mathfrak{A}$ et $m < \mathfrak{AB} + \lambda$, donc $\zeta - \eta > 0$, et partant, si nous posons $\eta = o$ ou que nous remplissions la dernière condition, l'autre sera remplie d'elle-même. Posons donc comme auparavant $\lambda = m - \nu$, et la dernière condition donne:

$$m\mathfrak{AB}(\mathfrak{A}+1) > \nu m\mathfrak{A} - m\mathfrak{A} + 2\nu m - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{AB} + \nu\mathfrak{A} - \nu^2,$$

d'où le cas $m = \infty$ donne $\nu < \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2}$. Soit donc de plus $\nu = \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} - \pi$, et il est requis:

$$\pi m(\mathfrak{A}+2) > \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}+1)(\mathfrak{B}-1)\mathfrak{AB}+3\mathfrak{B}-1)}{(\mathfrak{A}+2)^2} - \frac{\pi\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}+2} - \pi^2.$$

On aura donc:

$$\lambda = m - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} - \pi \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{2n}{m + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} + \pi},$$

et outre cela: $$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{AB}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} + \pi > \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad < \mathfrak{AB},$$

d'où l'on aura: $$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+1)(\mathfrak{B}-1)}{\mathfrak{A}+2} + \pi > 0 \qquad \text{et} \qquad \pi < \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)}{\mathfrak{A}+2},$$

de sorte que la première se remplit d'elle-même, à cause de $\pi > 0$, si $\mathfrak{B} > 1$.

133. On découvre ici d'abord un cas aussi remarquable qu'avantageux, si l'on met $\mathfrak{B} = 1$, car alors toutes les conditions requises se remplissent en posant $\pi = 0$ et on aura:

$$\lambda = m - \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2n}{m + \mathfrak{A}};$$

d'où le champ apparent deviendra plus grand plus qu'on prendra petite la valeur de $\mathfrak{A}$. Mais pour trouver les déterminations il faut bien considérer qu'on aura $Q = \infty$ et $(\mathfrak{B} - 1)\,Q = B$. D'où on tire:

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m + \mathfrak{A})\,Q} \quad \text{donc} \quad R = \frac{2[\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m + \mathfrak{A})},$$

et partant:
$$A = \frac{(1 + \mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = B, \quad C = \frac{2[\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P]}{m\mathfrak{A}},$$

$$p = P, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{2[\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m + \mathfrak{A})}, \quad s = \frac{2[\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P]}{m(m + \mathfrak{A})}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P}{m^2}.$$

Or puisque $s > \frac{6\omega}{l}$, il faut qu'il soit:

$$B > \frac{3m}{50\mathfrak{A}^2}(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) \quad \text{ou} \quad B > \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2} \quad \text{et} \quad m > \mathfrak{A} + 2 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} < m - 2.$$

134. Donc pour que la distance $B$ devienne la plus petite, posons:

$$B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2}, \quad \text{et à cause de} \quad \mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A})P = \frac{(m + \mathfrak{A})P}{m},$$

nous aurons:

$$A = \frac{(1 + \mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2} \quad C = \frac{2(m + \mathfrak{A})P}{m^2\mathfrak{A}} \quad D = \frac{(m + \mathfrak{A})P}{m^3},$$

$$p = P, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{2P}{m\mathfrak{A}}, \quad s = \frac{2P}{m^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2n}{m + \mathfrak{A}}.$$

Où il est clair, que plus on prend $\mathfrak{A}$ petit, plus le champ apparent sera augmenté, mais la longueur de la lunette devient plus grande; or elle deviendra la plus petite, si l'on prend $\mathfrak{A} = m - 2$, et le champ apparent le plus petit $\varphi = \frac{n}{m - 1}$, qui est pourtant encore plus grand qu'au cas des deux verres. Soit donc $\mathfrak{A} = m - 2$ et les autres déterminations seront:

$$A = \frac{m - 1}{m - 2}P, \quad B = \frac{(m - 1)(m + 2)}{m(m - 2)^2}P, \quad C = \frac{4(m - 1)}{m^2(m - 2)}P, \quad D = \frac{2(m - 1)}{m^3}P,$$

$$p = P, \quad q = \frac{P}{m - 2}, \quad r = \frac{2P}{m(m - 2)}, \quad s = \frac{2P}{m^2}, \quad \varphi = \frac{n}{m - 1}.$$

135. La construction commune des lunettes à quatre verres est aussi renfermée dans ce cas $\mathfrak{A} = 1$; on n'a qu'à supposer que $q = r$, d'où l'on tire $B = \frac{m + 3\mathfrak{A} + 2}{2\mathfrak{A}^2}P$, et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{P}{\mathfrak{A}} \text{ et } s = \frac{P}{m}, \text{ et } \varphi = \frac{2n}{m + \mathfrak{A}},$$

$$A = \frac{1 + \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{m + 3\mathfrak{A} + 2}{2\mathfrak{A}^2}P, \quad C = \frac{m + \mathfrak{A}}{m\mathfrak{A}}P, \quad D = \frac{m + \mathfrak{A}}{2m^2}P.$$

Or pour $\mathfrak{A}$ qui doit être $< m - 1$, il semble qu'on ait choisi la valeur qui produit le moindr champ apparent et cela peut être pour raccourcir la lunette. Car posant $\mathfrak{A} = m - 2$, il résulte l construction commune des lunettes à 4 verres que voilà:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{P}{m-2}, \quad r = \frac{P}{m-2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{n}{m-1},$$

$$A = \frac{m-1}{m-2}P, \quad B = \frac{2(m-1)}{(m-2)^2}P, \quad C = \frac{2(m-1)}{m(m-2)}P, \quad D = \frac{m-1}{m^2}P.$$

Mais outre que rien n'oblige à faire $r = q$, on peut aussi donner à la lunette un peu plus de lon gueur, pour procurer un plus grand champ apparent.

136. Soit p. ex. $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{2}$, et les déterminations du cas $q = r$ seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{2P}{m-2}, \quad r = \frac{2P}{m-2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{4n}{3m-2},$$

$$A = \frac{m}{m-2}P, \quad B = \frac{5m-2}{(m-2)^2}P, \quad C = \frac{(3m-2)}{m(m-2)}P, \quad D = \frac{3m-2}{4m^2}P,$$

où la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{m^3 + 6m^2 - 10m + 4}{m(m-2)^2}P,$$

qui est dans le cas précédent:

$$A + B + C = \frac{m^3 + m^2 - 6m + 4}{m(m-2)^2}P,$$

de sorte que l'excès de celle-ci est seulement:

$$= \frac{5mm - 4m}{m(m-2)^2}P = \frac{5m-4}{(m-2)^2}P,$$

pendant que le diamètre du champ apparent est à celui-là comme $4m - 4$ à $3m - 2$ ou à p près d'un tiers plus grand; et la différence dans la longueur s'évanouit, si la multiplication $m$ e fort grande. Mais on peut mettre en général $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{\nu}$, marquant par $\nu$ un nombre quelconq plus grand que l'unité. De là on aura les déterminations suivantes:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{\nu P}{m-2}, \quad r = \frac{\nu P}{m-2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{2\nu n}{(\nu+1)m-2},$$

$$A = \frac{m-2+\nu}{m-2}P, \quad B = \frac{(\nu+3)m + 2(\nu-3)}{2(m-2)^2}\nu P, \quad C = \frac{(\nu+1)m-2}{m(m-2)}P, \quad D = \frac{(\nu+1)m-2}{2\nu m^2}P,$$

où la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{2m^3 + (\nu^2 + 7\nu - 6)m^2 + 2\nu(\nu-7)m + 8}{2m(m-2)^2}P,$$

qui surpasse celle du cas $\nu = 1$ de la quantité:

$$\frac{(\nu^2 + 7\nu - 8)m^2 + 2(\nu^2 - 7\nu + 6)m}{2m(m-2)^2} P = \frac{(\nu - 1)[(\nu + 8)m + 2(\nu - 6)]}{2(m-2)^2} P.$$

137. Ce cas $q = r$ fournit la commodité, si c'en est une, que les deux premiers oculaires sont égaux et qu'on peut employer pour le troisième le même oculaire, que la lunette à deux verres exige; l'objectif étant le même, on peut aussi dans ce cas obtenir le même champ apparent qu'en général, sans supposer $q = r$. Mais on allonge de cette manière sans nécessité la lunette, et l'hypothèse la plus avantageuse est sans doute si l'on met $B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2}$. Qu'on prenne donc aussi $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{\nu}$, posant $\nu > 1$, et les déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{\nu P}{m-2}, \quad r = \frac{2\nu P}{m(m-2)}, \quad s = \frac{2P}{m^2} \text{ et } \varphi = \frac{2\nu n}{(\nu+1)m - 2},$$

$$A = \frac{(m + \nu - 2)P}{m-2}, \quad B = \frac{\nu[m^2 + (2\nu - 1)m - 2]P}{m(m-2)^2}, \quad C = \frac{2[(\nu+1)m - 2]P}{m^2(m-2)}, \quad D = \frac{[(\nu+1)m - 2]P}{\nu m^3},$$

d'où l'on trouve la longueur de la lunette:

$$A + B + C = \frac{m^4 + 2(\nu - 2)m^3 + (2\nu^2 - \nu + 6)m^2 - 2(3\nu + 4)m + 8}{m^2(m-2)^2} P,$$

qui est plus petite que la précédente de la quantité:

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)m^3 - 2(\nu^2 + 6\nu + 6)m^2 + 12(\nu+2)m - 16}{2m^2(m-2)^2} P = \frac{[(\nu+1)m - 2][(\nu+2)m - 4]}{2m^2(m-2)} P.$$

Ici on a la commodité que le dernier oculaire demeure toujours le même, puisqu'à cause de $P = \frac{3}{50}m^2$ on a $s = \frac{6}{50} = 0{,}12$ pouces.

138. Quoique je n'aie développé que le cas $\mathfrak{B} = 1$, puisqu'il est le plus avantageux, je n'ai pas besoin de m'arrêter aux autres cas où $\mathfrak{B} > 1$. Car alors il faudrait qu'il fût $m > \lambda + \mathfrak{A}$, et partant le demi-diamètre du champ apparent deviendrait plus petit que $\frac{2n}{m + \mathfrak{A}}$; ce qui renfermerait une imperfection considérable. D'ailleurs, si nous regardons la longueur de la lunette, la seconde espèce l'emporte bien sur celle-ci, vu qu'elle fournit non seulement un aussi grand champ apparent, mais qu'elle réduit la lunette à une longueur beaucoup plus petite, qui souvent n'excède pas même la moitié. Or on peut remarquer ici en général que, toutes les fois que la lettre $\mathfrak{A}$ est positive, la longueur de la lunette devient fort considérable; car la distance de l'objectif au premier oculaire est déjà $A = \frac{(1 + \mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}$, et partant plus grande que $P$, sans conter les autres distances $B$, $C$; tandisque les cas où $\mathfrak{A}$ est négatif, fournissent des lunettes dont la longueur tout entière est au-dessous de $P$.

### IV. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont positifs, mais $\mathfrak{C}$ négatif.*

139. Cette espèce représente encore les objets debout, et si nous posons $-\mathfrak{C}$, au lieu de $+\mathfrak{C}$, nos formules seront:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}} = \frac{(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})R}{m}.$$

Ensuite on aura:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2},$$

donc à cause de $(\mathfrak{C}-1)$ positif, il faut qu'il soit:

$$(1+\mathfrak{A})P + \mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q > \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(\mathfrak{C}-1)R \quad \text{ou} \quad > \mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})R.$$

Ensuite nous avons:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ seront:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - m = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

140. Si $R$ est positif et partant le dernier oculaire concave, toutes ces trois formules son positives, et puisque:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} > m,$$

la seconde donne $\frac{n^I}{\varphi} > m + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A}$, et partant on aurait $\varphi < \frac{n}{m}$; donc puisque le cham apparent serait plus petit qu'au cas des deux verres, j'exclus d'abord ce cas. Soit donc $R$ négati et partant $\mathfrak{C} < 1$ ou $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$; et posant $-R$ au lieu de $+R$, nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}; \quad B = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)R}{m}, \quad r = \frac{QR}{\mathfrak{B}R-Q}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(1-\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A}. \qquad \text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Car il faut qu'il soit:

$$\mathfrak{AB} > \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R},$$

pour augmenter le champ apparent.

141. De là nous tirons d'abord $\frac{n^I + n^{II} - n}{\varphi} = m - 1$, et partant il faut rendre $n^{II} = n^I$ et $n$ plus petit que $n^I$, d'où il s'ensuit:

$$m + \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \frac{2\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{AB} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q},$$

ou:

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[(1+\mathfrak{A})P + \mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q]}{\mathfrak{A}(2\mathfrak{AB} + \mathfrak{A} - m)Q + (1+\mathfrak{A})P},$$

et de là on obtient:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+\mathfrak{A}}{2} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q};$$

et puisque cette valeur doit être plus grande que $\frac{n}{\varphi}$, on aura:

$$\frac{m+\mathfrak{A}}{2} > 1 + \mathfrak{A} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q}, \quad \text{ou} \quad \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} < m - \mathfrak{A} - 2;$$

donc il faut qu'il soit $m > \mathfrak{A} + 2$ ou $\mathfrak{A} < m - 2$; outre cela il faut avoir égard à cette condition $m < \mathfrak{AB}$ donc $\mathfrak{AB} > \mathfrak{A} + 2$ ou $\mathfrak{B} > \frac{\mathfrak{A}+2}{\mathfrak{A}}$.

142. Posons donc $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} = m - \mathfrak{A} - \lambda$, de sorte que $\lambda > 2$, et nous aurons $\frac{n^I}{\varphi} = m - \frac{1}{2}\lambda$, par conséquent le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{2n^I}{2m - \lambda}$. Or ayant maintenant $Q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m - \mathfrak{A} - \lambda)}$, cette valeur substituée donne $R = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m + \mathfrak{AB} - \lambda)P}{\mathfrak{AB}(m - \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{AB} - \lambda)}$. Et de là les distances des verres proviennent:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{AB}(m - \mathfrak{A} - \lambda)}, \quad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB} - m)(m + \mathfrak{AB} - \lambda)P}{m\mathfrak{AB}(m - \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{AB} - \lambda)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{AB}R}{m^2} \cdot \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})(2m - \lambda)(m + \mathfrak{AB} - \lambda)P}{m^2(m - \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{AB} - \lambda)},$$

et les distances de foyer:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m + 1 - \lambda)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m + \mathfrak{AB} - \lambda)P}{\mathfrak{AB}(m - \mathfrak{A} - \lambda)(2m - \lambda)},$$

et enfin:

$$s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m + \mathfrak{AB} - \lambda)P}{m(m - \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{AB} - \lambda)}, \quad \text{donc} \quad D = \frac{(2m - \lambda)}{2m}s.$$

Il reste donc à remplir ces conditions qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{AB}l} \quad \text{et} \quad s > \frac{6\omega}{l},$$

ou bien, si nous posons $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, à cause de $P = \frac{3}{50}m^2$, nous aurons $\frac{6\omega}{l} = \frac{2P}{m^2}$, et nos conditions seront:

$$q > \frac{2P}{m\mathfrak{A}}, \quad r > \frac{2P}{m\mathfrak{AB}}, \quad s > \frac{2P}{m^2}.$$

143. Nous devons donc satisfaire à ces conditions:

$$\text{I.} \quad \frac{m(1+\mathfrak{A})}{m+1-\lambda} > 2.$$

$$\text{II.} \quad \frac{m(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{AB}-\lambda)}{(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)} > 1.$$

$$\text{III.} \quad \frac{m(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{AB}-\lambda)}{(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}-\lambda)} > 1.$$

Or puisque $\mathfrak{AB} > m$, il s'ensuit $2\mathfrak{AB}-\lambda > 2m-\lambda$, et partant la troisième formule est moindr que la seconde, d'où il suffit de remplir la troisième et la seconde sera d'autant plus remplie. O aura donc:

$$\mathfrak{AB} > \frac{\lambda^2+\lambda m\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{A}-m^2(\mathfrak{A}+1)}{2\lambda+m\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}-m},$$

et partant:

$$\mathfrak{AB}-m > \frac{(\lambda+m\mathfrak{A}+\mathfrak{A})(\lambda-2m)}{2\lambda+m\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}-m},$$

ce qui est toujours vrai à cause de $\lambda < 2m$.

144. Or $\lambda$ doit être plus petit que $m-\mathfrak{A}$; donc si nous posons $\lambda = m-\mathfrak{A}-\pi$, nous aurons

$$\mathfrak{AB} > \frac{\pi^2+\pi\mathfrak{A}-\pi m(2+\mathfrak{A})-m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi},$$

et si nous posons:

$$\mathfrak{AB} = \frac{\pi^2+\pi\mathfrak{A}-\pi m(2+\mathfrak{A})-m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi}+\varrho,$$

puisque $\mathfrak{AB}-m$ doit être une quantité positive, il faut qu'il soit:

$$\varrho > \frac{(m+\mathfrak{A}+\pi)[m(1+\mathfrak{A})-\pi]}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi}.$$

Or, à cause de $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$, il faut prendre $\pi$ aussi petit qu'il est possible pour augmenter champ apparent; cependant si l'on prend $\pi$ trop petit, à cause de $m-\mathfrak{A}-\lambda=\pi$, la longueur la lunette deviendrait énorme. Outre cela, puisque $\frac{m(1+\mathfrak{A})}{m+1-\lambda} > 2$, il faut prendre $\pi < \frac{m-2}{2}(\mathfrak{A}+$ ou $\mathfrak{A}+1 > \frac{2\pi}{m-2}$; ensuite puisque $\lambda > 2$, on aura $m-\mathfrak{A}-\pi > 2$ et $\mathfrak{A} < m-\pi-2$. ( prendra donc pour $\mathfrak{A}$ et $\pi$ des valeurs convenables, et posant $\varrho = \frac{(m+\mathfrak{A}+\pi)[m(1+\mathfrak{A})-\pi]}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi}+$ on aura $\mathfrak{AB} = m+\nu$ et $\mathfrak{B} = \frac{m+\nu}{\mathfrak{A}}$; $\lambda = m-\mathfrak{A}-\pi$; donc $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$; $1+\mathfrak{B} = \frac{m+\mathfrak{A}+}{\mathfrak{A}}$ $m-\mathfrak{A}-\lambda=\pi$; $\mathfrak{AB}-m=\nu$; $m+\mathfrak{AB}-\lambda = m+\nu+\mathfrak{A}+\pi$; $2\mathfrak{AB}-\lambda = m+2\nu+\mathfrak{A}+$ $2m-\lambda = m+\mathfrak{A}+\pi$.

145. Prenant donc $\mathfrak{A}$ et $\pi$ en sorte que le champ apparent devienne si grand qu'on souhae et qu'il soit $\mathfrak{A} < m-\pi-2$, et $\mathfrak{A}+1 > \frac{2\pi}{m-2}$, et donnant a $\nu$ aussi une valeur quelconce positive, les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi(m+\nu)(m+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi m(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\nu)P}{\pi\mathfrak{A}(m+\nu)}, \quad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})\nu(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi m(m+\nu)(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\pi)(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)}{\pi m^2(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)}P \quad \text{enfin} \quad \varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}.$$

Si l'on met $\nu = o$, l'intervalle entre les deux derniers oculaires $C$, s'évanouit et ces deux verres deviennent égaux, savoir $r = s = \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\pi m}$; ils tiennent alors lieu d'un seul, dont la distance de foyer n'est que la moitié; mais puisqu'ils admettent une plus grande ouverture, c'est de là que l'avantage d'un plus grand champ apparent résulte; car d'ailleurs c'est le cas de la première espèce des lunettes à trois verres.

146. Il y a dans cette espèce un cas bien remarquable, qui résulte en posant $\nu = \infty$; car alors les déterminations se réduisent aux formes suivantes:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\pi(m+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad s = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi m},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi\mathfrak{A}}, \quad C = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi m}, \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\pi)P}{2\pi m^2},$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$. Qu'on suppose par exemple $\mathfrak{A} = 2$; et $\pi = 4$ et on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{3}{14}P, \quad r = \frac{3P}{2(m+6)}, \quad s = \frac{3P}{4m}, \quad \varphi = \frac{2n}{m+6},$$

$$A = \frac{3}{2}P, \quad B = \frac{3}{8}P, \quad C = \frac{3}{4m}P, \quad D = \frac{3(m+6)}{8m^2}P.$$

Mais ces lunettes, où $m$ doit être plus grand que 8, deviennent trop longues par rapport à l'avantage qu'on en retire, et puisqu'on peut obtenir le même avantage par des lunettes beaucoup plus courtes; il ne serait pas à propos d'employer cette espèce; je m'en vais donc examiner l'espèce suivante.

## V. Cas des lunettes à quatre verres,

### *où les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont négatifs et $\mathfrak{C}$ positif.*

147. Cette espèce représentera les objets renversés. Posons donc dans nos formules générales $-\mathfrak{A}$ et $-\mathfrak{B}$ au lieu de $+\mathfrak{A}$ et $+\mathfrak{B}$, et nous aurons:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}}Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

et pour l'oeil:

$$D = -\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

Il faut donc qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$, $(\mathfrak{B} - 1) Q > 1$ et:

$$(\mathfrak{A} - 1) P + \mathfrak{A}^2 (\mathfrak{B} - 1) Q < \mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 (1 + \mathfrak{C}) R \quad \text{ou} \quad < \mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) R;$$

ensuite:
$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P - \mathfrak{A} Q}, \quad r = \frac{QR}{Q - \mathfrak{B} R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R}{m},$$

et les valeurs de $\frac{n}{\varphi}$;

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} Q} - \mathfrak{A} + 1.$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R} - \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} Q} + \frac{\mathfrak{A} (\mathfrak{B} - 1) Q}{\mathfrak{B} R} + \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = - \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R} - \frac{\mathfrak{A} (\mathfrak{B} - 1) Q}{\mathfrak{B} R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m.$$

148. Pour augmenter le champ apparent au-delà des lunettes à deux verres, il faut qu'il soit:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R} + \frac{\mathfrak{A} (\mathfrak{B} - 1) Q}{\mathfrak{B} R} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{et} \quad < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m,$$

et alors ces trois formules fournissent cette égalité:

$$\frac{n + n^I + n^{II}}{\varphi} = m + 1, \quad \text{et partant} \quad \varphi = \frac{n + n^I + n^{II}}{m + 1}.$$

Donc le plus grand champ apparent qu'on puisse obtenir est lorsque chaque lettre $n$, $n^I$, $n^{II}$ reçoit la plus grande valeur dont elle est susceptible, savoir $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ au moins. Le meilleur moyen est donc de les rendre égales entr'elles, pour qu'il en résulte $\varphi = \frac{3n}{m + 1}$, de sorte que dans ce cas le demi-diamètre du champ apparent devient trois fois plus grand qu'au cas des deux verres. Or, posant $n = n^I = n^{II}$, on aura $\frac{n}{\varphi} = \frac{m + 1}{3}$; d'où l'on tire:

$$Q = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} (m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad \text{et} \quad R = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)};$$

ou bien:
$$\frac{Q}{P} = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1)}{\mathfrak{A} (m + 3\mathfrak{A} - 2)} \quad \text{et} \quad \frac{R}{Q} = \frac{m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2}{\mathfrak{B} (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}.$$

149. De là on trouve les autres déterminations:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (\mathfrak{B} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad C = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R}{m^2} \cdot \frac{m + 1}{3} = \frac{(m + 1) (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{m^2 (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)},$$

$$p = P, \quad q = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} (m + 1)}, \quad r = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 1) (m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad s = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{m (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}.$$

Mais il faut de plus qu'il soit $q > \frac{2P}{m\mathfrak{A}}$, $r > \frac{2P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, $s > \frac{2P}{m^2}$; ou bien:

$$\text{I.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+3\mathfrak{A}-2)(2m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)} > \frac{2}{m}.$$

Puisque $\mathfrak{B} > 1$, la seconde formule est plus grande que la première, de sorte qu'il suffit de remplir celle-ci qui donne $\mathfrak{A} > \frac{5m+2}{3m}$. Donc, si nous posons $\mathfrak{A} = 2$, la troisième donne $\mathfrak{B} > \frac{m^2-20m-8}{6(m-8)}$.

150. Si nous avions pris $\mathfrak{A}$ plus grand, la valeur de $\mathfrak{B}$ serait devenue plus petite et même égale à l'unité, auquel cas la distance $B$ s'évanouirait. Mais il faut remarquer, qu'en augmentant la valeur de $\mathfrak{A}$, la distance $A$ et partant la longueur de la lunette devient plus grande, d'où il convient de donner à $\mathfrak{B}$ la plus grande valeur qui soit possible. Pour cet effet posons $\mathfrak{B} = \infty$ et puisque la seconde formule s'accomplit d'elle-même, il ne reste qu'à satisfaire à la première et la troisième:

$$\text{I.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+3\mathfrak{A}-2} > \frac{2}{m},$$

et puisque $\mathfrak{A} > 1$, celle-ci renferme déjà celle-là; il faut donc prendre $\mathfrak{A}$ en sorte qu'il soit $\mathfrak{A} > \frac{5m-4}{3(m-2)}$. Or posant $\mathfrak{B} = \infty$, les déterminations des lunettes sont:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{(m+1)\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{9(\mathfrak{A}-1)P}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad s = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)},$$

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad C = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad D = \frac{(m+1)(\mathfrak{A}-1)P}{m^2(m+3\mathfrak{A}-2)};$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3n}{m+1}$, qui est précisément trois fois plus grand qu'au cas des lunettes à deux verres convexes.

151. Donc si nous nous proposons de rendre la lunette la plus courte qu'il soit possible, il faut donner à $\mathfrak{A}$ la moindre valeur dont elle est susceptible. Posons donc $\mathfrak{A} = \frac{5m-4}{3m-6}$, et les déterminations des lunettes les plus parfaites de cette espèce seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{6P}{5m-4}, \quad r = \frac{6P}{m(m+1)}, \quad s = \frac{2P}{m^2},$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m-4}, \quad B = \frac{6(m-1)P}{m(5m-4)}, \quad C = \frac{9P}{m^2}, \quad D = \frac{2(m+1)P}{3m^3},$$

qui donnent le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3n}{m+1}$.

Or la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{2(m+1)(m^2-1)}{m^2(5m-4)}P,$$

laquelle était au cas des lunettes à deux verres $=\frac{m+1}{m}P$; de sorte que celle-là est à celle-ci comme: $2(m+4)(m-1)$ à $m(5m-4)$, ou comme $2m^2+6m-8$ à $5m^2-4m$; donc si la multiplication $m$ est fort grande ou seulement $m>15$, les lunettes de cette espèce sont plus que deux fois plus courtes.

152. Considérons quelques exemples, et soit $m=25$ et partant $P=37,5$ pouces, lequel objectif suffit à observer les satellites de Jupiter, et les déterminations de la lunette seront:

$$p=37,5, \quad q=\frac{225}{121}=1,8595, \quad r=\frac{9}{16}=0,3461, \quad s=\frac{3}{25}=0,12,$$

$$A=\frac{1950}{121}=16,1157, \quad B=\frac{207}{121}=1,7107, \quad C=\frac{3}{25}=0,12, \quad D=0,0416.$$

Et si nous posons $n=\frac{1}{5}$, le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi=\frac{3}{130}=1^0, 19', 20''$; si nous avions mis $n=\frac{1}{4}$, nous aurions $\varphi=1^0, 39', 20''$. Or si l'on joignait à ce même objectif un seul oculaire convexe, pour en former une lunette commune à deux verres, le demi-diamètre du champ apparent ne serait que $26', 27''$, en posant $n=\frac{1}{5}$; et au cas $n=\frac{1}{4}$ on aurait $\varphi=33', 7''$. Mais ce plus grand champ apparent n'est pas le seul avantage qu'on retire de cette lunette a 4 verres: elle en est aussi plus courte; toute sa longueur, en y ajoutant la distance de l'oeil, n'étant que de 17,988 pouces ou presque de 18 pouces, pendant que la lunette à 2 verres a 40,56 ou $40\frac{1}{2}$ pouces de longueur. Voilà donc une lunette de 18 pouces fort propre à observer les satellites de Jupiter.

153. Posons aussi $m=50$, et la distance de foyer de l'objectif doit être de 150 pouces. Une lunette de deux verres serait longue 156,06 pouces et découvrirait un champ apparent dont le demi-diamètre serait $13', 29''$. Or une lunette à 4 verres de cette espèce où $m=50$ aura les déterminations suivantes:

$$p=150 \text{ pouces}, \quad q=\frac{150}{41}=3,6585, \quad r=\frac{6}{17}=0,3529, \quad s=\frac{3}{25}=0,12,$$

$$A=\frac{2550}{41}=62,1951, \quad B=\frac{147}{41}=3,5122, \quad C=\frac{3}{25}=0,12, \quad D=0,0408;$$

le demi-diamètre du champ apparent étant de $40', 27''$, posant $n=\frac{1}{5}$ et de $50', 34''$ posant $n=\frac{1}{4}$ Toute la longueur de cette lunette est donc 65,8681 ou presque de 66 pouces, et partant presque plus que de la moitié plus courte que celles à deux verres qui multiplient autant de fois. En comptant 12 pouces pour un pied, on aura une lunette de $5\frac{1}{2}$ pieds qui grossit les objets autant qu'une à deux verres de 13 pieds de longueur, avec la même clarté et qui découvre outre cela un champ neuf fois plus grand. Une telle lunette sera d'un grand usage dans l'astronomie.

154. Posons de plus $m=100$, et la distance de foyer de l'objectif doit être $p=600$ pouces Si l'on en faisait une lunette à deux verres, nous avons vu ci-dessus que le demi-diamètre du champ apparent serait de $6', 49''$ et toute la longueur de la lunette de 612,06 pouces. Or si nous

employons le même objectif à une lunette de 4 verres de cette espèce, les déterminations seront les suivantes:

$$p = 600 \text{ pouces}, \quad q = \frac{275}{31} = 7,2581, \quad r = \frac{36}{101} = 0,3564, \quad s = \frac{3}{25} = 0,12,$$

$$A = \frac{7575}{31} = 244,3548, \quad B = \frac{441}{62} = 7,1129, \quad C = 0,12, \quad D = 0,0404;$$

le demi-diamètre du champ apparent étant de $20', 27''$, posant $n = \frac{1}{5}$; et toute la longueur de la lunette est 251,6281 pouces ou de 21 pieds à peu près, qui rendra donc non seulement les mêmes mais encore de plus grands services qu'une lunette ordinaire de 51 pieds. Une telle lunette sera donc propre à observer même les satellites de Saturne et, puisqu'elle découvre à la fois la lune tout entière, son usage doit être très important dans l'astronomie.

155. De même une lunette ordinaire de 200 pieds pourra être réduite à une de 80 pieds et partant mise en pratique. Soit donc $m = 200$, et on doit prendre $p = 2400$ pouces pour la distance de foyer de l'objectif, et une lunette ordinaire à deux verres serait longue 2412 pouces et ne découvrirait qu'un champ dont le demi-diamètre $3', 25''$. Mais faisant de cet objectif une lunette de cette espèce, on aura les déterminations suivantes:

$$p = 2400, \quad q = 14,4578, \quad r = 0,3582, \quad s = 0,12 \text{ pouces},$$

$$A = 968,6747, \quad B = 14,3133, \quad C = 0,12, \quad D = 0,0402 \text{ pouces};$$

donc toute la longueur ne sera que de 983,1482 pouces ou environ de 82 pieds, tandisque la lunette de deux verres, qui grossit également, a 201 pieds de longueur. Outre cela le demi-diamètre du champ apparent est ici 3 fois plus grand et $10', 15''$, avantage qui est très considérable étant joint à une longueur au delà de deux fois plus courte.

156. Il n'y a donc aucun doute que cette espèce ne renferme des lunettes très excellentes tant à cause du grand champ qu'elles découvrent que par rapport à leur longueur. Nous avons déjà remarqué ces mêmes avantages dans les lunettes à trois verres et maintenant nous voyons qu'on les peut porter à un plus haut degré par l'addition du 4$^{\text{ème}}$ verre. Cependant il semble qu'on puisse encore davantage raccourcir ces lunettes en posant, comme nous avons trouvé d'abord, $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$ et $\mathfrak{B} = 1$, car alors la distances $A$ devient plus petite $= \frac{2(m+1)}{5m+2} P$, et la distance $B$ s'évanouit entièrement; mais la distance $C$ devient d'autant plus grande et partant les déterminations seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6}{5m+2} P, \quad r = \frac{6}{5m+2} P, \quad s = \frac{1}{2m} P,$$

$$A = \frac{2(m+1)}{5m+2} P, \quad B = 0, \quad C = \frac{(m+1)(3m+2)}{2m(5m+2)} P, \quad D = \frac{m+1}{6m^2} P.$$

Ainsi posant $m = 100$ et $P = 600$, on aura:

$$p = 600, \quad q = 7,171, \quad r = 7,171, \quad s = 3,$$

$$A = 241,434, \quad B = 0, \quad C = 181,980, \quad D = 1,01,$$

*

de sorte que cette lunette est beaucoup plus longue que la précédente. Il est donc plus avantageux de se tenir aux déterminations précédentes où il a été supposé $\mathfrak{B} = \infty$.

### VI. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont négatifs et $\mathfrak{B}$ positif.*

157. Les lunettes de cette espèce représentent encore les objets renversés, et en faisant le développement de nos formules, comme auparavant, on pourra faire en sorte que le demi-diamètre du champ apparent devient aussi $\varphi = \frac{3n}{m+1}$; nous n'avons qu'à y mettre $\mathfrak{B}$ négatif, puis qu'alors $\mathfrak{C}$ devient de soi-même négatif. Nous avons donc, aprés avoir satisfait aux premières conditions:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+3\mathfrak{A}-2)} P, \quad C = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} P$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(m+1)(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m^2(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} P;$$

et ensuite:

$$p = P, \quad q = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad s = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)};$$

et les autres conditions à remplir sont:

$$\text{I.} \ \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m}, \quad \text{II.} \ \frac{3(\mathfrak{A}-1)\,3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m}, \quad \text{III.} \ \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} > \frac{2}{m}.$$

158. Donc pour que les distances $A, B, C, D$ soyent positives, il faut qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$, et partant $3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2m + 2 > m + 2$. Par conséquent il suffit de remplir la première et la troisième condition, puisque la seconde y est déjà renfermée. Or la première donne $\mathfrak{A} > \frac{5m+2}{3m}$; donc puisqu'il est avantageux de prendre $\mathfrak{A}$ si petit qu'il est possible, posons $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$ et la troisième condition donne $6\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m^2 + 5m - 2$, et il faut qu'il soit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$, ce qui ne saurait avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m^2 + 5m - 2 > 6m$ ou $m^2 > m + 2$ ou $m > 2$, ce qu'on peut toujours supposer. Ayant donc pris $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$, il faut qu'il soit:

$$\mathfrak{B} < \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} > \frac{3m^2}{5m+2}.$$

Or, plus on prend grand $\mathfrak{B}$ et plus deviendra petite la distance $B$, et la valeur de $\mathfrak{A}$ rend déjà la distance $A$ plus petite qu'au cas précédent. Cependant la distance $B$ devient plus grande, puisqu'il n'est pas permis de prendre $\mathfrak{B} = \infty$.

159. Or posant $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$, pour rendre la distance $A$ la plus petite qu'il soit possible, les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6P}{5m+2}, \quad r = \frac{6[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{(m+1)(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}}, \quad s = \frac{2[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{m(m+2)[(5m+2)\mathfrak{B} - 2m^2 + m]},$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m+2}, \quad B = \frac{6m(\mathfrak{B}+1)P}{(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{2[(5m+2)\mathfrak{B}-3m^2][(5m+2)\mathfrak{B}-m^2+2m]P}{m(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}[(5m+2)\mathfrak{B}-2m^2+m]}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{2(m+1)[(5m+2)\mathfrak{B}-m^2+2m]P}{3m^2(m+2)[(5m+2)\mathfrak{B}-2m^2+m]},$$

pourvu qu'on prenne:

$$\mathfrak{B} > \frac{3m^2}{5m+2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} < \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)}.$$

Or, puisqu'il semble avantageux de prendre $\mathfrak{B}$ si grand qu'il est possible, posons $\mathfrak{B} = \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)}$, et les déterminations seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6}{5m+2}P, \quad r = \frac{6}{m^2+5m-2}P, \quad s = \frac{2}{m^2}P,$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m+2}, \quad B = \frac{6(m+1)(m+2)P}{(5m+2)(m^2+5m-2)}, \quad C = \frac{2(m+1)(m-2)P}{m^2(m^2+5m-1)} \quad \text{et} \quad D = \frac{2(m+1)P}{3m^3}.$$

160. Puisque $m$ marque toujours un nombre assez considérable, l'application sera rendue plus aisée par ces formules:

$$q = \frac{6}{5}P\left(\frac{1}{m} - \frac{2}{5m^2} + \frac{4}{25m^3} - \frac{8}{125m^4}\right) = \frac{9}{125}\left(m - \frac{2}{5} + \frac{4}{25m} - \frac{8}{125m^2}\right),$$

$$r = 6P\left(\frac{1}{m^2} - \frac{5}{m^3} + \frac{27}{m^4}\right) = 3s\left(1 - \frac{5}{m} + \frac{27}{m^2}\right) = \frac{9}{25}\left(1 - \frac{5}{m} + \frac{27}{m^2}\right),$$

$$s = \frac{2}{m^2}P = \frac{6}{50} \quad \text{à cause de} \quad P = \frac{3}{50}m^2.$$

$$A = \frac{2}{5}P + \frac{1}{3}q,$$

$$B = q - \frac{2}{5}r + \frac{144}{25m^3}P - \frac{3888}{125m^4}P = q - \frac{2}{5}r + \frac{216}{625m} - \frac{5832}{3125m^2},$$

$$C = 5\left(1 - \frac{6}{m} + \frac{30}{m^2}\right),$$

$$D = 5\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3m}\right);$$

et le demi-diamètre du champ apparent est toujours $\varphi = \frac{3n}{m+1}$. Soit $m = 25$ et $P = 37,5$, et les déterminations pour ce cas seront:

$$p = 37,5, \quad q = 1,77, \quad r = 0,30, \quad s = 0,12,$$

$$A = 15,59, \quad B = 1,67, \quad C = 0,09, \quad D = 0,0416;$$

où la longueur de la lunette est 17,39 qui est presque d'un pouce plus petite qu'au cas précédent, de sorte que ce cas comprend l'espèce la plus parfaite des lunettes à 4 verres.

### *Table des lunettes à 4 verres,*
### qui semblent les plus parfaites.

| Multiplication. | Distances de foyer du 1r oculaire. | Distances de foyer du 2d oculaire. | Distances de foyer du 3e oculaire. | Distances de l'objectif au 1r ocul. | Distances du 1r ocul. au 2d ocul. | Distances du 2d oc. au 3e oc. | Distances du 3e oc. à l'oeil. | Demi-diam. du champ app. moyen. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $q$ | $r$ | $s$ | $AB$ | $BC$ | $CD$ | $DE$ | |
| 5 | 0,33 | 0,19 | 0,12 | 0,71 | 0,30 | 0,04½ | 0,05 | 5° 43′ 11″ |
| 10 | 0,69 | 0,24 | 0,12 | 2,63 | 0,62 | 0,07 | 0,04 | 3 7 7 |
| 15 | 1,05 | 0,27 | 0,12 | 5,75 | 0,97 | 0,08 | 0,04 | 2 8 42 |
| 20 | 1,41 | 0,29 | 0,12 | 10,07 | 1,31 | 0,09 | 0,04 | 1 38 3 |
| 25 | 1,77 | 0,30 | 0,12 | 15,59 | 1,67 | 0,09 | 0,04 | 1 19 16 |
| 30 | 2,13 | 0,31 | 0,12 | 22,31 | 2,03 | 0,10 | 0,04 | 1 6 30 |
| 35 | 2,49 | 0,31 | 0,12 | 30,23 | 2,38 | 0,10 | 0,04 | 0 57 16 |
| 40 | 2,85 | 0,32 | 0,12 | 39,35 | 2,74 | 0,11 | 0,04 | 0 50 18 |
| 45 | 3,21 | 0,32 | 0,12 | 49,67 | 3,10 | 0,11 | 0,04 | 0 44 51 |
| 50 | 3,57 | 0,33 | 0,12 | 61,19 | 3,45 | 0,11 | 0,04 | 0 40 27 |
| 60 | 4,29 | 0,33 | 0,12 | 87,83 | 4,16 | 0,11 | 0,04 | 0 33 51 |
| 70 | 5,01 | 0,33 | 0,12 | 119,22 | 4,88 | 0,11 | 0,04 | 0 29 3 |
| 80 | 5,73 | 0,34 | 0,12 | 155,51 | 5,59 | 0,11 | 0,04 | 0 25 27 |
| 90 | 6,45 | 0,34 | 0,12 | 196,55 | 6,31 | 0,11 | 0,04 | 0 22 39 |
| 100 | 7,17 | 0,34 | 0,12 | 242,39 | 7,03 | 0,11 | 0,04 | 0 20 27 |
| 120 | 8,61 | 0,34 | 0,12 | 348,47 | 8,47 | 0,11 | 0,04 | 0 17 3 |
| 140 | 10,05 | 0,35 | 0,12 | 473,75 | 9,91 | 0,12 | 0,04 | 0 14 39 |
| 160 | 11,49 | 0,35 | 0,12 | 618,23 | 11,36 | 0,12 | 0,04 | 0 12 48 |
| 180 | 12,93 | 0,35 | 0,12 | 781,91 | 12,79 | 0,12 | 0,04 | 0 11 28 |
| 200 | 14,37 | 0,35 | 0,12 | 964,79 | 14,23 | 0,12 | 0,04 | 0 10 15 |
| 225 | 16,17 | 0,35 | 0,12 | 1220,39 | 16,03 | 0,12 | 0,04 | 0 9 9 |
| 250 | 17,97 | 0,35 | 0,12 | 1505,99 | 17,83 | 0,12 | 0,04 | 0 8 12 |
| 275 | 19,77 | 0,35 | 0,12 | 1821,59 | 19,63 | 0,12 | 0,04 | 0 7 27 |
| 300 | 21,57 | 0,35 | 0,12 | 2167,19 | 21,43 | 0,12 | 0,04 | 0 6 51 |
| 350 | 25,17 | 0,36 | 0,12 | 2948,39 | 25,03 | 0,12 | 0,04 | 0 5 54 |
| 400 | 28,77 | 0,36 | 0,12 | 3849,59 | 28,63 | 0,12 | 0,04 | 0 5 9 |
| 450 | 32,37 | 0,36 | 0,12 | 4870,79 | 32,23 | 0,12 | 0,04 | 0 4 33 |
| 500 | 35,97 | 0,36 | 0,12 | 6011,99 | 35,83 | 0,12 | 0,04 | 0 4 6 |

Les distances de foyer de l'objectif doivent être prises des tables précédentes.

## VII. Cas des lunettes à quatre verres,
### $\mathfrak{A}$ *étant positif et* $\mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{C}$ *négatifs.*

**161.** Ces lunettes représentent encore les objets renversés, mais puisque $\mathfrak{A}$ est positif, le longueur sera plus grande qu'au cas précédent.

Or posant $-\mathfrak{B}$ et $-\mathfrak{C}$ pour $+\mathfrak{B}$ et $+\mathfrak{C}$ dans les formules principales, nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{\mathfrak{C}-1}{\mathfrak{C}} R \quad \text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)}{\mathfrak{C}^2}$$

de sorte qu'à cause de $(\mathfrak{B}-1)Q > 0$ et $(\mathfrak{C}-1)R > 0$, il faut qu'il soit:

$$(1+\mathfrak{A})P > \mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-1)Q + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(\mathfrak{C}-1)R.$$

Ensuite les distances de foyer sont:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q-\mathfrak{B}R}, \quad s = -\frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^{I}}{\varphi} = + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{I}}{\varphi} = - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = - \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

162. J'ai donné à ces formules les signes, afin qu'on en puisse tirer le plus grand champ pparent; et partant il faut que $R$ soit une quantité négative et par conséquent $\mathfrak{C} < 1$. De là ous tirons:

$$\frac{n + n^{I} + n^{II}}{\varphi} = m + 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{n + n^{I} + n^{II}}{m+1};$$

'où l'on obtient le plus grand champ apparent en rendant à $n$, $n^{I}$, $n^{II}$ les plus grandes valeurs ont ces lettres sont susceptibles. Posons donc $n^{I} = n^{II} = n$, pour avoir $\varphi = \frac{3n}{m+1}$, et à cause e $\frac{n}{\varphi} = \frac{n^{I}}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+1}{3}$, nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{m-2}{3} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A}; \quad \text{donc} \quad Q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-3\mathfrak{A}-2)},$$

$$\text{II.}\quad \frac{2(m+1)}{3} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + 1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

'où l'on tire: $$R = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)};$$

puisque $R$ doit être une quantité négative, il faut qu'il soit ou $3\mathfrak{A} > m-2$ ou $3\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m-2$.

163. Or ces valeurs étant substituées donnent les déterminations suivantes:

$$p = P, \quad q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(m-3\mathfrak{A}-3}, \quad s = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)}, \quad C = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)}$$

$$\text{et} \quad D = - \frac{(1+\mathfrak{A})(m+1)(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m^2(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)}.$$

aintenant nous devons satisfaire à ces conditions:

$$\text{I.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})}{m+1} > \frac{2}{m},$$

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+1)(m-3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m},$$

$$\text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)} > \frac{2}{m};$$

où il faut observer que $s$ est une quantité positive étant $s = + \frac{3mD}{m+1}$; et puisque $\mathfrak{C} < 1$ nous avons $m < \mathfrak{AB}$, et partant:

$$C = \frac{-3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB}-m)(m-3\mathfrak{AB}-2)P}{m\mathfrak{AB}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)}.$$

164. Il faut donc que $\frac{m-3\mathfrak{AB}-2}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)}$, soit une quantité négative et que $\frac{\mathfrak{B}-1}{m-3\mathfrak{A}-2}$, soit une quantité positive, d'où résultent deux cas à considérer selon que $\mathfrak{B} > 1$ ou $\mathfrak{B} < 1$. Soit donc d'abord $\mathfrak{B} > 1$ et il faut qu'il soit $3\mathfrak{A} < m-2$ et $3\mathfrak{AB} > m-2$, mais pourtant $3\mathfrak{AB} < 2m-1$. Or la première condition exige $3m\mathfrak{A} + 3m > 2m + 1$, ce qui est toujours vrai, et les deux autres doivent être présentées en sorte:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m+1)(m-3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m} \quad\text{et}\quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)} > \frac{2}{m};$$

mais puisque $m-3\mathfrak{AB}-2 < 0$, en ajoutant de part et d'autre $m+1$, on aura $2m-3\mathfrak{AB}-1 < m+1$, et partant en satisfaisant à la II., l'autre sera aussi remplie. De là nous tirons en égalant la seconde à $\frac{2}{m}$:

$$\mathfrak{AB} = \frac{(m-2)(5m+2)+3\mathfrak{A}(m^2-4m-2)}{9m(1+\mathfrak{A})},$$

et cette valeur satisfait aussi à la condition $3\mathfrak{AB} < 2m-1$. Mais dans ce cas on trouve $\mathfrak{AB} < m$, de sorte que la distance $C$ deviendrait négative.

165. Soit donc $\mathfrak{B} < 1$ et partant $3\mathfrak{A} > m-2$, d'où la fraction $\frac{m-3\mathfrak{AB}-2}{2m-3\mathfrak{AB}-1}$ doit être positive, par conséquent ou $3\mathfrak{AB} < m-2$ ou $3\mathfrak{AB} > 2m-1$. Au premier cas on aura:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{AB}-2)}{(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)} > \frac{2}{m} \quad\text{et}\quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{AB}-2)}{(3\mathfrak{A}-m+2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)} > \frac{2}{m},$$

où $2m-3\mathfrak{AB}-1$ étant $> m+1$, la III. formule renferme la seconde. Mais la condition $\mathfrak{AB} < \frac{m-2}{3}$ répugne à celle qui exige $\mathfrak{AB} > m$. Il ne reste donc que le cas $3\mathfrak{AB} > 2m-1$ qui donne:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)} > \frac{2}{m}, \quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{AB}-2m+1)} > \frac{2}{m};$$

ou à cause de $\mathfrak{AB} > m$ il est $3\mathfrak{AB}-2m+1 > m+1$, de sorte que la III. formule renferme la seconde. Posons donc:

$$\frac{3\mathfrak{AB}-m+2}{3\mathfrak{AB}-2m+1} > \frac{2(3\mathfrak{A}-m+2)}{3m(1+\mathfrak{A})},$$

et de là on tirera:

$$3\mathfrak{AB} > \frac{(m-2)(7m-2)+3\mathfrak{A}(m^2-6m+2)}{5m-4+3\mathfrak{A}(m-2)}.$$

Or cela est toujours vrai, si $\mathfrak{AB} > m$.

166. Nous n'avons donc qu'à remplir ces conditions:

$$\text{I. } \mathfrak{B} < 1, \quad \text{II. } \mathfrak{A} > \frac{m-2}{3} \quad \text{et} \quad \text{III. } \mathfrak{A}\mathfrak{B} > m,$$

où la troisième renferme déjà la seconde à cause de $\mathfrak{B} < 1$. Ayant donc pris $\mathfrak{B} < 1$, on n'a qu'à prendre $\mathfrak{A} > \frac{m}{\mathfrak{B}}$; et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)}, \quad s = \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(1+\mathfrak{A})(1-\mathfrak{B})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(3\mathfrak{A}-m+2)}, \quad C = \frac{3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m^2(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}.$$

Alors le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $\varphi = \frac{3n}{m+1}$. Une des limites principales de cette espèce de lunettes provient en posant $\mathfrak{B} = 1$ et $\mathfrak{A} = m$, qui donne:

$$p = P, \quad q = r = s = \frac{3}{m}P, \quad A = \frac{1+m}{m}P, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{(1+m)}{m^2}P,$$

et se déduit des lunettes à deux verres convexes, en triplant le verre oculaire pour lui donner une ouverture trois fois plus grande. On peut aussi faire que l'une ou l'autre des distances $B$ et $C$ s'évanouisse.

167. Un cas particulier mérite encore d'être remarqué, si l'on met $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{A} = \infty$, mais en sorte que $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ soit un nombre fini $> m$; soit donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mu$ et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{(3\mu-m+2)P}{\mu(m+1)}, \quad s = \frac{(3\mu-m+2)P}{m(3\mu-2m+1)},$$

$$A = P, \quad B = \frac{P}{\mu}, \quad C = \frac{(\mu-m)(3\mu-m+2)P}{\mu m(3\mu-2m+1)}, \quad D = \frac{(m+1)(3\mu-m+2)P}{3m^2(3\mu-2m+1)},$$

pourvu qu'on prenne $\mu > m$. Donc si l'on met $\mu = \infty$, on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{3P}{m+1}, \quad s = \frac{P}{m},$$

$$A = P, \quad B = 0, \quad C = \frac{P}{m}, \quad D = \frac{m+1}{3m^2}P.$$

Or si l'on met $\mu = m$, on aura l'autre limite de ce cas:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{2P}{m}, \quad s = \frac{2P}{m},$$

$$A = P, \quad B = \frac{P}{m}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2(m+1)}{3m^2}P;$$

et tous les autres cas où $\mu > m$ sont compris entre ces deux limites.

168. Posons pour donner un exemple $\mu = \frac{4m+1}{3}$, pour avoir $3\mu - m + 2 = 3(m+1)$ et $3\mu - 2m + 1 = 2(m+1)$, et les déterminations de nos lunettes seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{9P}{4m+1}, \quad s = \frac{3P}{2m},$$

$$A = P, \quad B = \frac{3P}{4m+1}, \quad C = \frac{3(m+1)P}{2m(4m+1)}, \quad D = \frac{(m+1)P}{2m^2}.$$

Ainsi posant $m = 50$ ou $P = 150$ pouces, la lunette doit être construite en sorte:

$$p = 150, \quad q = 8{,}823, \quad r = 6{,}716, \quad s = 4{,}5,$$

$$A = 150, \quad B = 2{,}239, \quad C = 1{,}141, \quad D = 1{,}53;$$

et la longueur de la lunette est $= 153{,}38$ pouces, un peu plus grande que si l'on n'employait que deux verres. Mais l'avantage de ces lunettes s'évanouit toujours à l'égard des espèces précédentes, qui, étant au-delà de la moitié plus courtes, découvrent un aussi grand champ. Il ne reste donc qu'à examiner la huitième espèce.

## VIII. Cas des lunettes à quatre verres, *les trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant négatifs.*

169. Ces lunettes représentent les objets debout, et posant la multiplication $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, les déterminations, après avoir mis $-\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{B}$, $-\mathfrak{C}$, pour $+\mathfrak{A}$, $+\mathfrak{B}$, $+\mathfrak{C}$, seront:

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{et} \quad D = -\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2} = -\frac{\mathfrak{A}A - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}B - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C}{m^2}.$$

Cette distance étant donc nécessairement négative, il faut appliquer l'oeil immédiatement au dernier verre oculaire et avoir égard au limite qui répond à l'ouverture de la pupille et qui donne:

$$\frac{\omega}{\varphi} = \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}C,$$

les autres étant:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1 = \frac{\mathfrak{A}}{Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{\mathfrak{C}}{R} \cdot \frac{\omega}{\varphi},$$

$$\text{et} \quad p = P, \quad q = \frac{PQ}{P - \mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q - \mathfrak{B}R}, \quad s = -\frac{R}{\mathfrak{C}}.$$

Mais puisque le champ apparent devient fort petit je ne m'arrête pas à développer plus amplement ce cas.

## XXV.

# De amplificatione campi apparentis in telescopiis.

---

1. Duae res potissimum ad perfectionem telescopiorum, quae quidem objecta clare ac distincte repraesentent, requiruntur, quarum altera ad lentem, quam vocare solent objectivam, spectat, cujus perfectio in eo consistit, ut pro apertura quantumvis magna repraesentatio imaginis nulla confusione inquinetur, atque insuper ejus ope confusio a reliquis lentibus oriunda destrui possit: hoc quippe modo lente objectiva uti licebit, cujus distantia foci non est adeo magna, sicque tota telescopii longitudo maxime contrahitur, ex quo utique summum commodum in praxin promanat. Quemadmodum autem hujusmodi lentes objectivas ex duabus lentibus, altera convexa, altera concava, componi oporteat, alio loco fusius exposui, ubi simul ostendi hujusmodi lentes composita in combinatione cum quotcunque aliis instar simplicium considerari posse, et quia exiguum lentium illarum intervallum variationem quampiam admittit, hoc modo confusionem a cunctis lentibus oriundam ad nihilum redigere licet.

2. Altera autem res in amplitudine campi per telescopium conspicui sita est, quae quo fuerit major, eo perfectius merito telescopium existimatur, quin etiamsi haec instrumenta a nimia longitudine liberari non possent, insignis campi apparentis amplificatio hoc incommodum largiter compensare censeretur. In navigatione certe usus majorum telescopiorum non tam ob ingentem eorum longitudinem excluditur, quam ideo, quod nimis exiguum campum complectuntur, quo fit, ut vel levissima facta agitatione objecta subito dispareant, quod non eveniret, si campum satis magnum detegerent. Verum sine dubio summus perfectionis gradus attingetur, si cum insigni campo modica potius instrumenti longitudo fuerit conjuncta, ubi quidem telescopium ad datam multiplicationem producendam accomodatam intelligi debet.

3. In vulgaribus quidem telescopiis, quae duabus lentibus convexis sunt instructa, notum est campi conspicui amplitudinem ab apertura lentis ocularis pendere, quae cum certos limites per ejus figuram praescriptos transgredi nequeat, hinc terminus campo statuitur. Foci quidem distantia per

*

multiplicationem determinatur, et cum pro eodem foco innumerabiles lentes exhiberi queant, ea maxime aperturae est capax, quae utrinque est aequaliter convexa, unde hoc praeceptum haud exigui momenti derivatur, ut lentes oculares utrinque aequaliter convexae conficiantur. Tum vero aliae rationes exigunt, ut apertura nullos arcus 30 gradibus majores comprehendat, ex quo sequitur diametrum aperturae cujusque lentis ocularis semissem ejus distantiae foci superare non debere. Hinc autem si objecta in ratione $m:1$ secundum diametrum multiplicentur, sequitur diametrum campi apparentis fore $=\frac{1}{2(m+1)}$ in partibus radii, seu tot $\frac{1718}{m+1}$ minutorum primorum.

4. Quamdiu autem unica lente oculari utimur, campum apparentem ultra hunc terminum augere non licet. Jam pridem igitur lente oculari geminata uti coeperunt, dum duas lentes aequales, quarum utriusque distantia foci duplo esset major, junxerunt, hocque modo fere campum duplo majorem obtinuerunt. Quodsi distantia inter lentes revera pro nihilo haberi posset, binae lentes, quarum utrius distantia foci esset $=2p$, hoc modo junctae lenti simplici aequivalerent, cujus distantia foci foret $=p$, et quoniam duplo majorem aperturam admitterent, etiam campum duplo majorem essent exhibiturae. Simili modo etiam tres lentes aequales, distantia focali uniuscujusque existente $=3p$, sibi immediate junctae loco simplicis, cujus distantia focalis est $p$, substitui possent, sicque campum triplo latiorem largirentur, siquidem singulae utrinque conficerentur aequaliter convexae. Hocque modo ulterius progrediendo campum, quousque libuerit, amplificare liceret.

5. Verum plurimum abest, quominus distantia binarum lentium pro nihilo haberi queat; dum enim hae lentes aperturam admittere debent, cujus diameter semissi distantiae focalis aequetur, earum crassitiem partem decimam sextam distantiae focalis superare necesse est; quo fit ut, cum vera binarum lentium distantia ex intervallo earum quasi centrorum in medie crassitie sitorum aestimari debeat, nunquam ea tanquam nulla spectari possit. Neque ergo binae lentes junctae pro simplici haberi, neque exacte duplo majorem campum aperient, ac multo minus haec campi multiplicatio succedet pluribus lentibus inter se conjungendis, cum earum crassities spatium satis notabile esset completura. Interim tamen negari nequit, hac ratione duabus pluribusve lentibus conjungendis campum amplificari, verum lucrum propemodum obscuritate et confusione ex tot lentibus enata iterum deletur. Imprimis autem tali lentium multiplicatione colores iridis visioni se admiscere solent, quod incommodum distinctae repraesentationi maxime nocet; haecque sine dubio vera est causa, quod hoc artificium campum augendi vix ad usum adhibeatur.

6. Hic igitur ostendere constitui, quomodo multiplicatione lentium ocularium campus visionis non solum amplificari, sed etiam repraesentatio a coloribus illis vagis liberari queat. Ad hoc autem lentes non immediate inter se jungi convenit; experientia enim jam constat tubis astronomicis, qui duabus tantum lentibus constant, insigni cum utilitate tertiam lentem ultra focum ocularis inseri posse, qua non solum campus duplicetur, sed etiam colores illi vagi penitus deleantur. Imprimis autem in dissertatione mea de instrumentorum dioptricorum perfectione Vol. XIII Actorum Academiae Regiae inserta formulas exhibui generales tam pro campo amplificando, quam pro coloribus illis destruendis. Inde ergo subsidia necessaria depromam, unde numerum lentium ocularium augendo campus quoque sine ullo incommodo ampliari possit. Semper scilicet ejusmodi binas lentes oculares

definire licet, quibus diameter campi apparentis duplicetur; tum vero etiam ternis lentibus combinandis campi diameter triplicari, quaternis autem quadruplicari potest et ita porro: unde secundum ordinem progrediendo primo constructionem hujusmodi lentium ocularium duplicatarum, tum triplicatarum, deinde etiam quadruplicatarum docebo, quas investigationes quousque libuerit ulterius continuare licet.

### *De lentibus ocularibus duplicatis, quibus campus duplicatur.*

7. Sit $\alpha$ distantia focalis lentis objectivae in $A$, sive ea sit simplex, sive composita ad confusionem superandam, et $m:1$ denotet rationem, qua objecta secundum diametrum multiplicari debeant, unde statim apertura lentis objectivae definitur, ut sufficientem luminis copiam excipiat. Binae lentes oculares positae sint in $B$ et $C$, pro quibus sint litterae in dissertatione mea adhibitae:

$$B = \frac{-b}{1+b}, \quad \mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} = -b, \quad C = \infty \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = 1.$$

Porro autem cum sit campi apparentis semidiameter $\varphi = \frac{\pi - \pi^{I}}{m+1}$, ubi fractiones $\pi, \pi^{I}$ certum terminum, veluti $\frac{1}{4}$, pro quo autem hic generaliter scribam $\omega$, superare nequeunt, quare ut campus eddatur maximus, ponamus $\pi = \omega$ et $\pi^{I} = -\omega$, fietque $\varphi = \frac{2\omega}{m+1}$, seu posito brevitatis gratia $\frac{2}{m+1} = M$, erit $\varphi = M\omega$, hincque $\mathfrak{B}\pi - \varphi = -(b+M)\omega$ et $\mathfrak{C}\pi^{I} - \pi + \varphi = -(2-M)\omega$.

8. Ex his per formulas meas colligitur distantia focalis lentis in $B = \frac{bM}{b+M}\alpha = p^{I}$, et lentis postremae in $C = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{2-M}\alpha = p^{II}$; praeterea vero intervalla:

$$AB = \frac{b}{b+M}\alpha \quad \text{et} \quad BC = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M(2+b)}{(b+M)(2-M)}\alpha,$$

t pro loco oculi distantia $CO = \frac{1}{Mm}\cdot p^{II}$, at ob $Mm = 2 - M$, erit $CO = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{(2-M)^2}\cdot\alpha$. i unica lente oculari uteremur, pro eadem multiplicatione ejus distantia focalis esse deberet $= \frac{\alpha}{m}$, nde binae lentes $B$ et $C$, quas hic definiemus, aequivalebunt lenti simplici, cujus distantia focalis st $= \frac{\alpha}{m}$. Quae quo distinctius evolvamus, sit distantia focalis lentis $B = q$, lentis $C = r$ et lentis mplicis ipsis aequivalentis $= k$, habebimusque has determinationes:

$$k = \frac{\alpha}{m}, \quad q = \frac{bM}{b+M}\alpha, \quad r = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{2-M}\alpha,$$

distantias:

$$AB = \frac{b}{b+M}\alpha, \quad BC = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M(2+b)}{(b+M)(2-M)}\alpha, \quad CO = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{(2-M)^2}\alpha,$$

istente $M = \frac{2}{m+1}$. Unde colligimus fore:

$$BC = \frac{q(k-r)}{k} + r \quad \text{et} \quad m = \frac{q(2k-r)}{r(2k-q)},$$

ut haec convenientia simul a multiplicatione $m$ pendeat.

9. Verum quod hic praecipuum est, originem colorum vagorum destruamus, quod fit hac aequatione adimplenda:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\varphi}+\frac{\pi^I}{\mathfrak{C}\pi^I-\pi+\varphi}=0, \quad \text{seu} \quad \frac{-1}{b+M}+\frac{1}{2-M}=0,$$

unde conficitur $b=2-2M$ et $2+b=2(2-M)$. Hoc ergo valore substituto, has pro lente nostra oculari composita adipiscimur formulas:

$$k=\frac{\alpha}{m}, \quad q=\frac{2M(1-M)}{2-M}\alpha, \quad r=\frac{2-2M}{3-2M}\cdot\frac{M}{2-M}\alpha$$

et: $$AB=\frac{2(1-M)}{2-M}\alpha, \quad BC=\frac{4(1-M)M}{(3-2M)(2-M)}\alpha \quad \text{et} \quad CO=\frac{2-2M}{3-2M}\cdot\frac{M}{(2-M)^2}\alpha.$$

Quae pro $M$ restituto valore $\frac{2}{m+1}$, in sequentes abeunt formas:

$$k=\frac{\alpha}{m}, \quad q=\frac{2(m-1)}{m+1}\cdot\frac{\alpha}{m}, \quad r=\frac{2(m-1)}{3m-1}\cdot\frac{\alpha}{m}$$

et: $$AB=\frac{m-1}{m}\alpha, \quad BC=\frac{4(m-1)}{3m-1}\cdot\frac{\alpha}{m} \quad \text{et} \quad CO=\frac{m+1}{2m}r=\frac{mm-1}{m(3m-1)}\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

10. Determinatio ergo hujus lentis ocularis compositae non solum a distantia focali $k$ lentis simplicis, cui aequivalet, pendet, sed etiam a multiplicatione, cui producendae destinatur. Cum autem sit:

$$q=\frac{2(m-1)}{m+1}k, \quad r=\frac{2(m-1)}{3m-1}k, \quad BC=2r \quad \text{et} \quad CO=\frac{m+1}{2m}r,$$

patet pro majoribus multiplicationibus omne discrimen inter haec elementa evanescere, ita ut tum per solam distantiam focalem lentis simplicis aequivalentis $k$ determinentur. Patet autem distantiam binarum lentium $BC$ semper duplo esse majorem distantia focali lentis postremae $r$, quae triente fere minor est, quam distantia focalis lentis simplicis aequivalentis, $k$, at distantia focalis lentis prioris $q$ fere triplo major est quam $r$. Quo autem pateat quantillam variationem ratio multiplicationis $m$ in haec elementa inferat, ea his formulis vero proximis exprimamus:

$$q=2k-\frac{4}{m}k, \quad r=\frac{2}{3}k-\frac{4}{9m}k, \quad BC=\frac{4}{3}k-\frac{8}{9m}k, \quad CO=\frac{1}{3}k+\frac{1}{9m}k.$$

11. Proposita ergo lente objectiva, cujus distantia focalis sit $=\alpha$, quae idonea judicetur ad multiplicationem $m$ producendam, inde statim colligitur distantia focalis lentis ocularis simplici $k=\frac{\alpha}{m}$, ex qua porro constructio lentis ocularis duplicatae cognoscitur, quae duplo majorem campum aperiet, quam si lente simplici uteremur, si modo hae binae lentes $B$ et $C$ utrinque aequaliter convexae conficiantur, ut maximae aperturae, cujus diameter verbi gratia semissi distantiae focalis aequetur, fiant capaces, quod fit si posita ratione refractionis ex aëre in vitrum ut $\zeta$ ad $\eta$ et distantia focali $=p$, utriusque faciei radius statuatur $=\frac{2(\zeta-\eta)}{\eta}p$, unde si ratio refractionis fuerit ut 31 ad 20, hic radius erit $=\frac{11}{10}p$.

12. Plurimum autem quoque interest nosse partem confusionis, quae ab his duabus lentibus ad perturbandam repraesentationem nascitur, et quae pendet a numeris $\lambda^I$ et $\lambda^{II}$ ad has lentes relatis, quae cum sint utrinque aequaliter convexae, posita ratione refractionis ex aëre in vitrum ut 31 ad 20, erit $\lambda^I = 1 + 0{,}62979\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^2$ et $\lambda^{II} = 1{,}62979$; at ob $B = \frac{-b}{1+b}$ erit $\frac{B-1}{B+1} = -2b-1 = -(5-4M) = -\frac{(5m-3)}{m+1}$, ideoque $\lambda^I = 1 + 0{,}62979\left(\frac{5m-3}{m+1}\right)^2$. Cum igitur posito $\nu = 0{,}23269$ sit in genere pro quotcunque lentibus confusio ut haec expressio:

$$\lambda + \frac{(\lambda^I + \nu\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B}))}{\mathfrak{B}^4}\cdot\frac{q}{a} + \frac{\lambda^{II} + \nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})}{B^4\mathfrak{C}^4}\cdot\frac{r}{a} + \frac{\lambda^{III} + \nu\mathfrak{D}(1-\mathfrak{D})}{B^4C^4\mathfrak{D}^4}\cdot\frac{s}{a} + \text{ etc.}$$

ob:
$$\mathfrak{B} = -b, \text{ et } B = \frac{-b}{1+b};\ \mathfrak{C} = 1,\ \frac{q}{a} = \frac{bM}{b+M} \text{ et } \frac{r}{a} = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{2-M},$$

pro nostro casu ista expressio hanc induet formam:

$$\lambda + \frac{\lambda^I - \nu b(1+b)}{b^3}\cdot\frac{M}{b+M} + \frac{\lambda^{II}(1+b)^3}{b^3}\cdot\frac{M}{2-M},$$

quae ob $b = 2-2M$ abit in hanc:

$$\lambda + \frac{\lambda^I - 2\nu(1-M)(3-2M)}{8(1-M)^3}\cdot\frac{M}{2-M} + \frac{\lambda^{II}(3-2M)^3}{8(1-M)^3}\cdot\frac{M}{2-M},$$

et ob $M = \frac{2}{m+1}$ in hanc:

$$\lambda + \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda^I(m+1)^3 - 2\nu(m+1)(m-1)(3m-1)}{8(m-1)^3} + \frac{\lambda^{II}(3m-1)^3}{8(m-1)^3}\right),$$

quae denique ad istam formam reducitur:

$$\lambda + \frac{1}{8m(m-1)^3}((m+1)^3 + 0{,}62979(m+1)(5m-3)^2 - 0{,}46538(m+1)(m-1)(3m-1) + (3m-1)^3 + 0{,}62979(3m-1)^3),$$

cujus valor, si multiplicatio est maxima, fit $\lambda + \frac{7{,}41912}{m}$. Confusio ergo ex binis lentibus ocularibus ita fere quinquies major est censenda, quam si lente oculari simplici uteremur, cum haec foret $= \frac{1{,}62979}{m}$.

## *De lentibus ocularibus triplicatis, quibus campus triplicatur.*

13. Sit $a$ semper distantia focalis lentis objectivae $A$, et $m:1$ ratio multiplicationis, unde lentis ocularis simplicis distantia focalis foret $k = \frac{a}{m}$; ejus autem loco hic tres lentes $B, C, D$ introducamus, pro quarum aperturis sint indices $\pi, \pi^I, \pi^{II}$. Cum igitur sit campi semidiameter $\varphi = \frac{\pi - \pi^I + \pi^{II}}{m+1}$, ut is maximus reddatur, statuatur $\pi = \omega$, $\pi^I = -\omega$ et $\pi^{II} = \omega$, existente $\omega = \frac{1}{4}$, si lentes utrinque fuerint convexae et aperturam admittant, cujus semidiameter parti quartae distantiae focalis aequetur. Erit ergo $\varphi = \frac{3\omega}{m+1}$; ponamus autem $M = \frac{3}{m+1}$, ut sit $\varphi = M\omega$.

Tum vero pro his tribus lentibus ponamus $B=\frac{-b}{1+b}$, $\mathfrak{B}=-b$, $C=-1$, $\mathfrak{C}=\infty$, $D=\infty$ et $\mathfrak{D}=1$, unde nanciscimur:

$$\mathfrak{B}\pi-\varphi=-(b+M)\omega,\quad \mathfrak{C}\pi^{I}-\pi+\varphi=-\mathfrak{C}\omega \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}\pi^{II}-\pi^{I}+\pi-\varphi=(3-M)\omega,$$

et destructio colorum praebet hanc aequationem:

$$-\frac{1}{b+M}+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{3-M}=0 \quad \text{hincque} \quad b+M=3-M \quad \text{et} \quad b=3-2M.$$

14. Quodsi porro distantias focales trium lentium $B$, $C$, $D$ designemus litteris $q$, $r$, $s$, erit:

$$q=\frac{bM}{b+M}\alpha,\quad r=\frac{b}{1+b}\cdot M\alpha,\quad s=\frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{3-M}\alpha,$$

et lentium intervalla:

$$AB=\frac{b}{b+M}\alpha,\quad BC=\frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{b+M}\alpha,\quad CD=\frac{b}{1+b}\cdot\frac{M}{3-M}\alpha,$$

at pro loco oculi $O$ est distantia $DO=\frac{s}{3-M}$. Substituamus ergo loco $b$ valorem inventum $3-2M$, ac reperiemus has determinationes:

$$q=\frac{(3-2M)M}{3-M}\alpha,\quad r=\frac{(3-2M)M}{2(2-M)}\alpha,\quad s=\frac{(3-2M)M}{2(2-M)(3-M)}\alpha \quad \text{et}$$

$$AB=\frac{3-2M}{3-M}\alpha,\quad BC=\frac{(3-2M)M}{2(2-M)(3-M)}\alpha,\quad CD=\frac{(3-2M)M}{2(2-M)(3-M)}\alpha,$$

existente $k=\frac{\alpha}{m}$.

15. Cum nunc sit $M=\frac{3}{m+1}$, ideoque $3-M=Mm$, erit:

$$q=\frac{3(m-1)}{m+1}\cdot\frac{\alpha}{m},\quad r=\frac{9(m-1)}{2(m+1)(2m-1)}\alpha,\quad s=\frac{3(m-1)}{2(2m-1)}\cdot\frac{\alpha}{m},$$

$$AB=\frac{m-1}{m}\alpha,\quad BC=\frac{3(m-1)}{2(2m-1)}\cdot\frac{\alpha}{m},\quad CD=\frac{3(m-1)}{2(2m-1)}\cdot\frac{\alpha}{m},$$

et pro oculo $DO=\frac{(m+1)}{3m}s=\frac{mm-1}{2m(2m-1)}\cdot\frac{\alpha}{m}$. Ac si introducamus distantiam focalem $k$ lenti simplicis aequivalentis, habebimus:

$$q=\frac{3(m-1)}{m+1}k,\quad r=\frac{9m(m-1)}{2(m+1)(2m-1)}k,\quad s=\frac{3(m-1)}{2(2m-1)}k, \quad \text{ac} \quad BC=CD=s,$$

quae formulae, si multiplicatio $m$ sit satis magna, abeunt in:

$$q=3k-\frac{6}{m}k,\quad r=\frac{9}{4}k-\frac{27}{8m}k.\quad s=\frac{3}{4}k-\frac{3}{8m}k,$$

quas tres lentes ita jungi oportet, ut bina intervalla $BC$ et $CD$ sint distantiae focali lentis postremae $s$ aequalia.

16. Quod ad confusionem attinet ex his tribus lentibus ocularibus natam, ex formulis supra allatis ponendo $\mu = 0{,}62979$, uti est $\nu = 0{,}23269$, habemus:

$$\lambda^I = 1 + \mu\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^2 = 1 + \mu(2b+1)^2 = 1 + \mu\left(\frac{7m-5}{m+1}\right)^2, \quad \lambda^{II} = 1 + \mu\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2 = 1 + \mu(2\mathfrak{C}-1)^2.$$

Qui valor ob $\mathfrak{C} = \infty$ quidem est infinitus, sed quia hoc membrum per biquadratum $\mathfrak{C}^4$ dividitur totum evanescit. Pro ultima lente est $\lambda^{III} = 1 + \mu$. Cum igitur sit:

$$\frac{q}{a} = \frac{3(m-1)}{m(m+1)} \quad \text{et} \quad \frac{s}{a} = \frac{3(m-1)}{m(4m-2)},$$

xpressio confusionem exhibens reperitur:

$$\lambda + \frac{1}{27m(m-1)^3}\left((m+1)^3 + \mu(m+1)(7m-5)^2 - 6\nu(m+1)(m-1)(2m-1) + (4m-2)^3 + \mu(4m-2)^3\right),$$

uae si $m$ ut numerus infinitus spectetur, fit:

$$\lambda + \frac{1}{m}\cdot\frac{65 + 113\mu - 12\nu}{27} = \lambda + \frac{133{,}3740}{27m},$$

icque pars confusionis ex lentibus ocularibus nata est $\frac{4{,}939}{m}$, quae ergo multo minor est quam casu raecedente.

*De lentibus ocularibus quadruplicatis, quibus campus quadruplicatur.*

17. Positis aperturae indicibus pro his quatuor lentibus $B$, $C$, $D$ et $E$, $\pi$, $\pi^I$, $\pi^{II}$ et $\pi^{III}$, cum t semidiameter campi apparentis $\varphi = \frac{\pi - \pi^I + \pi^{II} - \pi^{III}}{m+1}$, ut is maximus evadat, statuamus $\pi = \omega$, $^I = -\omega$, $\pi^{II} = \omega$ et $\pi^{III} = -\omega$, eritque $\varphi = \frac{4\omega}{m+1}$, qui valor quadruplo major est, quam lente oculari simplici uteremur. Sit autem commoditatis gratia $M = \frac{4}{m+1}$, seu $\varphi = M\omega$, tum ro pro quatuor nostris lentibus ocularibus statuamus:

$$B = \frac{-b}{1+b}, \quad C = \frac{-c}{1+c}, \quad D = \frac{-d}{d-1}, \quad E = \infty,$$

$$\mathfrak{B} = -b, \quad \mathfrak{C} = -c, \quad \mathfrak{D} = d, \quad \mathfrak{E} = 1,$$

rum autem distantiae focales sint $q$, $r$, $s$ et $t$.

18. Cum jam hinc sit:

$$\mathfrak{B}\pi - \varphi = -(b+M)\omega,$$
$$\mathfrak{C}\pi^I - \pi + \varphi = (c - 1 + M)\omega,$$
$$\mathfrak{D}\pi^{II} - \pi^I + \pi - \varphi = (d + 2 - M)\omega,$$
$$\mathfrak{E}\pi^{III} - \pi^{II} + \pi^I - \pi + \varphi = -(4 - M)\omega,$$

tu distantiae focales lentium, quam earum intervalla ita exprimuntur:

$$q = \frac{bM}{b+M}\alpha, \qquad AB = \frac{b}{b+M}\alpha,$$

$$r = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{cM}{c-1+M}\alpha, \qquad BC = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{M(c-b-1)}{(b+M)(c-1+M)}\alpha,$$

$$s = \frac{bc}{(1+b)(1+c)}\cdot\frac{dM}{d+2-M}\alpha, \qquad CD = \frac{bc}{(1+b)(1+c)}\cdot\frac{M(c+d-1)}{(c-1+M)(d+2-M)}\alpha,$$

$$t = \frac{bcd}{(1+b)(1+c)(d-1)}\cdot\frac{M}{4-M}\alpha, \qquad DE = \frac{bcd}{(1+b)(1+c)(d-1)}\cdot\frac{M(d-2)}{(d+2-M)(4-M)}\alpha.$$

Pro loco oculi autem habemus $EO = \frac{t}{4-M}$. Hinc cum lentium intervalla necessario sint positiva, oportet esse $c > b+1$ et $d > 2$.

19. Consideremus nunc etiam formulam, qua apparitio colorum vagorum iridis tollitur, quae cum in genere sit:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\varphi} + \frac{\pi^I}{\mathfrak{C}\pi^I-\pi+\varphi} + \frac{\pi^{II}}{\mathfrak{D}\pi^{II}-\pi^I+\pi-\varphi} + \frac{\pi^{III}}{\mathfrak{E}\pi^{III}-\pi^{II}+\pi^I-\pi+\varphi} + \text{etc.} = 0,$$

pro nostro casu habemus:

$$-\frac{1}{b+M} - \frac{1}{c-1+M} + \frac{1}{d+2-M} + \frac{1}{4-M} = 0.$$

Quia nunc $c-1 > b$ et $d+2 > 4$, ponamus $c-1+M = \frac{b+M}{1-\zeta}$ et $d+2-M = \frac{4-M}{1-\eta}$, ubi $\zeta$ et $\eta$ denotant fractiones unitate minores, ac nostra aequatio induet hanc formam:

$$\frac{2-\zeta}{b+M} = \frac{2-\eta}{4-M}, \quad \text{ideoque} \quad b+M = \frac{2-\zeta}{2-\eta}(4-M),$$

unde litterarum $b$, $c$, $d$ hos eruimus valores:

$$b = \frac{4(2-\zeta)-(4-\zeta-\eta)M}{2-\eta},$$

$$c = \frac{10-6\zeta-\eta+\zeta\eta-(4-3\zeta-\eta+\zeta\eta)M}{(1-\zeta)(2-\eta)},$$

$$d = \frac{2+2\eta-\eta M}{1-\eta},$$

unde sequitur fore:

$$c-b-1 = \frac{\zeta(2-\zeta)(4-M)}{(1-\zeta)(2-\eta)}, \quad \text{et} \quad b+M = \frac{(2-\zeta)(4-M)}{2-\eta},$$

$$c+d+1 = \frac{(4-3\zeta-3\eta+2\zeta\eta)(4-M)}{(1-\zeta)(1-\eta)(2-\eta)}, \quad c-1+M = \frac{(2-\zeta)(4-M)}{(1-\zeta)(2-\eta)},$$

$$d-2 = \frac{\eta(4-M)}{1-\eta}, \quad d+2-M = \frac{4-M}{1-\eta}.$$

20. Quod si hic pro $M$ substituamus valorem $\frac{4}{m+1}$, erit primo $4 - M = \frac{4m}{m+1}$, tum vero:

$$b = \frac{4(2-\zeta)m}{(2-\eta)(m+1)} - \frac{4}{m+1}, \quad c = \frac{(10-6\zeta-\eta+\zeta\eta)m}{(1-\zeta)(2-\eta)(m+1)} - \frac{3}{m+1}, \quad d = \frac{2(1+\eta)m}{(1-\eta)(m+1)} + \frac{2}{m+1}.$$

Ponamus ad abbreviandum:

$$\frac{4(2-\zeta)}{2-\eta} = B, \quad \frac{10-6\zeta-\eta+\zeta\eta}{(1-\zeta)(2-\eta)} = C, \quad \text{seu} \quad C = 1 + \frac{4(2-\zeta)}{(1-\zeta)(2-\eta)}, \quad \frac{2(1+\eta)}{1-\eta} = D,$$

ut sit: $b = \frac{Bm-4}{m+1}$, $c = \frac{Cm-3}{m+1}$, et $d = \frac{Dm+2}{m+1}$, hinc

$$b+1 = \frac{(B+1)m-3}{m+1}, \quad c+1 = \frac{(C+1)m-2}{m+1}, \quad d-1 = \frac{(D-1)m+1}{m+1} \quad \text{atque}$$

$$b+M = \frac{Bm}{m+1}, \quad c-1+M = \frac{(C-1)m}{m+1}, \quad d+2-1 = \frac{(D+2)m}{m+1},$$

$$c-b-1 = \frac{(C-B-1)m}{m+1}, \quad c+d+1 = \frac{(C+D+1)m}{m+1}, \quad d-2 = \frac{(D-2)m}{m+1},$$

quibus valoribus substitutis consequimur:

$$= \frac{4(Bm-4)}{B(m+1)} \cdot \frac{a}{m}, \qquad AB = \frac{(Bm-4)}{B} \cdot \frac{a}{m},$$

$$= \frac{4(Bm-4)(Cm-3)}{(C-1)(m+1)[(B+1)m-3]} \cdot \frac{a}{m}, \qquad BC = \frac{4(Bm-4)(C-B-1)}{[(B+1)m-3]B(C-1)} \cdot \frac{a}{m},$$

$$= \frac{4(Bm-4)(Cm-3)(Dm+2)}{(D+2)[(B+1)m-3][(C+1)m-2](m+1)} \cdot \frac{a}{m}, \qquad CD = \frac{4(Bm-4)(Cm-3)(C+D+1)}{[(B+1)m-3][(C+1)m-2](C-1)(D+2)} \cdot \frac{a}{m},$$

$$= \frac{(Bm-4)(Cm-3)(Dm+2)}{[(B+1)m-3][(C+1)m-2][(D-1)m+1]} \cdot \frac{a}{m}, \qquad DE = \frac{(Bm-4)(Cm-3)(Dm+2)(D-2)}{[(B+1)m-3][(C+1)m-2][(D-1)m+1](D+2)} \cdot \frac{a}{m},$$

t pro loco oculi $EO = \frac{m+1}{4m} t$. Hicque $\frac{a}{m}$ denotat distantiam focalem lentis simplicis aequivalentis, uam posuimus $= k$. Notandum porro est litterae $B$, $C$, $D$ ita a se invicem pendere, ut sit:

$$BCD + 6BC - 5BD - 4CD - 14B - 8C + 4D + 8 = 0.$$

21. Fractiones ergo $\zeta$ et $\eta$ unitate minores arbitrio nostro relinquuntur, quas autem ita accipi portet, ut ne lentium intervalla nimis fiant exigua, quam ut ob crassitiem tam prope sibi invicem djungi queant. Hinc patet neque $\zeta$ neque $\eta$ evanescere posse, quia illo casu intervallum $BC$, hoc ero intervallum $DE$ in nihilum abiret: intervallum autem $CD$ non evanescit, nisi utraque fractio et $\eta$ unitati aequalis accipiatur, quod ergo probe est cavendum. Cum igitur neque utramque imis parvam, neque ambas simul unitati fere aequales accipere liceat, nonnullos casus, qui ad praxin lonei videntur, evolvamus:

22. Casus 1. Sit ergo primo $\zeta = \eta = \frac{1}{2}$, atque habebimus $B = 4$, $C = 9$ et $D = 6$, hincue pro constructione telescopii ponendo $\frac{a}{m} = k$, determinationes sequentes:

*

$$q = \frac{4(m-1)}{m+1}k, \qquad AB = \alpha - k,$$

$$r = \frac{6(m-1)(3m-1)}{(m+1)(5m-3)}k, \qquad BC = \frac{2(m-1)}{5m-3}k,$$

$$s = \frac{6(m-1)(3m-1)(3m+1)}{(m+1)(5m-3)(5m-1)}k, \qquad CD = \frac{6(m-1)(3m-1)}{(5m-3)(5m-1)}k,$$

$$t = \frac{12(m-1)(3m-1)(3m+1)}{(5m-3)(5m-1)(5m+1)}k, \qquad DE = \frac{6(m-1)(3m-1)(3m+1)}{(5m-3)(5m-1)(5m+1)}k.$$

Haec intervalla lentium satis sunt magna, ut earum contactus non sit metuendus, unde hic casus ad praxin eo aptior videtur, quo formulae inventae sunt simpliciores.

23. Casus 2. Casus etiam notari meretur, quo $\zeta = 1$, unde fit $B = \frac{4}{2-\eta}$, $C = \infty$ et $D = \frac{2(1+\eta)}{1-\eta}$, quos valores notasse sufficiat, ex quibus habebitur:

$$q = \frac{4(m-2+\eta)}{m+1}k, \qquad AB = \alpha - (2-\eta)k,$$

$$r = \frac{4m(Bm-4)}{(m+1)[(B+1)m-3]}k, \qquad BC = \frac{4(m-2+\eta)}{(B+1)m-3}k,$$

$$s = \frac{(1-\eta)(Bm-4)(Dm+2)}{(m+1)[(B+1)m-3]}k, \qquad CD = \frac{(1-\eta)(Bm-4)}{(B+1)m-3}k.$$

$$t = \frac{(Bm-4)(Dm+2)}{[(B+1)m-3][(D-1)m+1]}k, \qquad DE = \frac{\eta(Bm-4)(Dm+2)}{[(B+1)m-3][(D-1)m+1]}k.$$

Cum crassities cujusque lentis sit fere pars decima sexta distantiae focalis, patet nisi $\eta$ capiatur infra $\frac{1}{8}$ nihil esse metuendum; commode autem sumetur $\eta = \frac{1}{3}$, eritque $B = \frac{12}{5}$ et $D = 4$, unde fit:

$$q = \frac{4(3m-5)}{3(m+1)}k, \qquad AB = \alpha - \frac{5}{3}k,$$

$$r = \frac{16m(3m-5)}{(m+1)(17m-15)}k, \qquad BC = \frac{20(3m-5)}{3(17m-15)}k,$$

$$s = \frac{16(3m-5)(2m+1)}{3(m+1)(17m-15)}k, \qquad CD = \frac{8(3m-5)}{3(17m-15)}k,$$

$$t = \frac{8(3m-5)(2m+1)}{(17m-15)(3m+1)}k, \qquad DE = \frac{8(3m-5)(2m+1)}{3(17m-15)(3m+1)}k.$$

Pro loco oculi est semper $EO = \frac{m+1}{4m}t$.

*De lentibus ocularibus quintuplicatis, quibus campus quintuplicatur.*

24. Sint lentium $B$, $C$, $D$, $E$ et $F$ distantiae focales $q$, $r$, $s$, $t$ et $u$, indices autem aperturae $\pi$, $\pi^I$, $\pi^{II}$, $\pi^{III}$ et $\pi^{IV}$, ex quibus cum sit semidiameter campi $\varphi = \frac{\pi - \pi^I + \pi^{II} - \pi^{III} + \pi^{IV}}{m+1}$, quo is maximus evadat ponamus $\pi = \omega$, $\pi^I = -\omega$, $\pi^{II} = \omega$, $\pi^{III} = -\omega$ et $\pi^{IV} = \omega$ eritque $\varphi = \frac{5\omega}{m+1}$,

et posito $M = \frac{5}{m+1}$ fiet $\varphi = M\omega$; tum vero porro pro his lentibus statuatur:

$$B = -\frac{b}{1+b}, \quad C = -\frac{c}{1+c}, \quad D = -1, \quad E = -\frac{e}{e-1}, \quad F = \infty,$$

$$\mathfrak{B} = -b, \quad \mathfrak{C} = -c, \quad \mathfrak{D} = \infty, \quad \mathfrak{E} = e, \quad \mathfrak{F} = 1,$$

unde fiet:

$$\mathfrak{B}\pi - \varphi = -(b+M)\omega, \quad \mathfrak{C}\pi^{I} - \pi + \varphi = (c-1+M)\omega, \quad \mathfrak{D}\pi^{II} - \pi^{I} + \pi - \varphi = \mathfrak{D}\omega,$$

$$\mathfrak{E}\pi^{III} - \pi^{II} + \pi^{I} - \pi + \varphi = -(e+3-M)\omega, \quad \mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi^{III} + \pi^{II} - \pi^{I} + \pi - \varphi = (5-M)\omega.$$

25. His positis, tam distantiae focales lentium, quam earum intervalla ita determinantur ut sit:

$$q = \frac{bM}{b+M}\alpha, \qquad AB = \frac{b}{b+M}\alpha,$$

$$r = \frac{b}{1+b} \cdot \frac{cM}{c-1+M}\alpha, \qquad BC = \frac{b}{1+b} \cdot \frac{M(c-b-1)}{(b+M)(c-1+M)}\alpha,$$

$$s = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot M\alpha, \qquad CD = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{M}{c-1+M}\alpha,$$

$$t = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{eM}{e+3-M}\alpha, \qquad DE = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{M}{e+3-M}\alpha,$$

$$u = \frac{bce}{(1+b)(1+c)(e-1)} \cdot \frac{M}{5-M}\alpha, \qquad EF = \frac{bce}{(1+b)(1+c)(e-1)} \cdot \frac{M(e-2)}{(e+3-M)(5-M)}\alpha,$$

quo loco autem oculi erit $FO = \frac{m+1}{5m}u$. Patet ergo esse debere $c > b+1$ et $e > 2$.

26. Quo autem colores vagi iridis deleantur, satisfieri oportet huic aequationi:

$$-\frac{1}{b+M} - \frac{1}{c-1+M} + \frac{1}{e+3-M} + \frac{1}{5-M} = 0,$$

cui generaliter resolvendae non immoror, cum statim se offerat haec solutio particularis valde simplex: $b+M = 5-M$ et $c-1+M = e+3-M = 2(5-M)$ unde fit $b = 5-2M$, $c = 11-3M$ et $e = 7-M$, hincque $c-b-1 = 5-M$ et $e-2 = 5-M$, ita ut sit:

$$q = \frac{5-2M}{5-M}M\alpha, \qquad AB = \frac{5-2M}{5-M}\alpha,$$

$$r = \frac{b}{1+b} \cdot \frac{11-3M}{2(5-M)}M\alpha, \qquad BC = \frac{b}{1+b} \cdot \frac{M\alpha}{2(5-M)},$$

$$s = \frac{bc}{(1+b)(1+c)}M\alpha, \qquad CD = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{M\alpha}{2(5-M)},$$

$$t = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{7-M}{2(5-M)}M\alpha, \qquad DE = \frac{bc}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{M\alpha}{2(5-M)},$$

$$u = \frac{bce}{(1+b)(1+c)(e-1)} \cdot \frac{M}{5-M}\alpha, \qquad EF = \frac{bce}{(1+b)(1+c)(e-1)} \cdot \frac{M\alpha}{2(5-M)}.$$

27. Restituto autem valore $M = \frac{5}{m+1}$, unde fit $5 - M = \frac{5m}{m+1}$ et $\frac{M}{5-M} = \frac{1}{m}$, habebimus:

$$b = \frac{5(m-1)}{m+1}, \quad c = \frac{11m-4}{m+1}, \quad e = \frac{7m+2}{m+1},$$

sicque determinationes pro constructione telescopii erunt:

$$q = \frac{5(m-1)}{m+1}k, \qquad AB = \alpha - k,$$

$$r = \frac{5(m-1)}{2(3m-2)} \cdot \frac{11m-4}{2(m+1)}k, \qquad BC = \frac{5(m-1)}{4(3m-2)}k,$$

$$s = \frac{5(m-1)(11m-4)}{2(3m-2)(12m-3)} \cdot \frac{5m}{m+1}k, \qquad CD = \frac{5(m-1)(11m-4)}{4(3m-2)(12m-3)}k,$$

$$t = \frac{5(m-1)(11m-4)}{2(3m-2)(12m-3)} \cdot \frac{7m+2}{2(m+1)}k, \qquad DE = \frac{5(m-1)(11m-4)}{4(3m-2)(12m-3)}k,$$

$$u = \frac{5(m-1)(11m-4)(7m+2)}{2(3m-2)(12m-3)(6m+1)}k, \qquad EF = \frac{5(m-1)(11m-4)(7m+2)}{4(3m-2)(12m-3)(6m+1)}k,$$

et pro loco oculi $FO = \frac{m+1}{5m}u$.

28. Ad plures lentes has investigationes non profero, cum hae jam satis sibi sint propinquae, et plures radios intercipiendo, claritati non parum officere videntur, cui tamen malo aperturam lentis objectivae augendo remedium afferri poterit. Praeterea vero campus, cujus diameter quinquies major est, quam in telescopiis communibus astronomicis, jam spatium vicies et quinquies majus spectandum offert, quod adeo sub angulo 103 graduum cernetur, si quidem omnes hae lentes utrinque conficiantur aequaliter convexae, et unicuique apertura tribuatur, cujus diameter semissi distantiae focalis aequetur. Neque vero ob multitudinem harum lentium ocularium major confusio est pertimescenda, cum supra viderimus lentem triplicatam minorem confusionem parere, quam duplicatam. Verum hic imprimis est cavendum, ne hae lentes vitio irregularis confusionis inquinentur.

29. Si cum his lentibus ocularibus ejusmodi lentes objectivae conjungantur, quibus omnis confusio e medio tolli queat, nullum est dubium, quin haec telescopia repraesentationem objectorum inversam exhibentia ad summum perfectionis gradum evehantur. Quare haud abs re fore arbitror, si constructionem hujusmodi lentium objectivarum alio loco explicatam hic quoque docuero, ubi quidem solam refractionis rationem 1,54 : 1 utpote in plerisque vitri speciebus observatam assumam. Quodsi ergo distantia focalis lentis objectivae debeat esse $= p$ (quam hic posui $= \alpha$) multiplicationis ratio $= m : 1$, et ex lentibus ocularibus nascatur confusio $= M$, quae pro duplicatis supra erat $= \frac{7}{m}$, pro triplicatis vero $= \frac{4}{m}$, lens objectiva ex hujusmodi binis lentibus erit conficienda:

Pro lente priori:

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0{,}51467p, \\ \text{posterioris} = 4{,}05851p. \end{cases}$$

Pro lente posteriori:

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -0{,}73978p + 0{,}7319\,Mp, \\ \text{posterioris} = +1{,}01897p - 1{,}3885\,Mp, \end{cases}$$

quas ad tantum intervallum a se invicem disponi oportet, donec confusio evanescat, et quia hoc intervallum optime per experientiam definitur, non opus est, ut de vero valore litterae illius $M$ nimis simus solliciti.

*Evolutio telescopii objecta quinquagies aucta repraesentantis.*

30. Cum hic sit $m = 50$, pro lente objectiva semidiametrum aperturae ad minimum esse oportet $= \frac{3m}{200}$ seu $\frac{3}{4}$ dig., quoniam vero pluribus lentibus uti volumus, ne inde obscuritas nascatur, conveniet aperturae semidiametrum sumi unius digiti. Quod autem ad distantiam focalem lentis objectivae attinet, si ea fuerit simplex, cujusmodi vulgo in usum adhiberi solent, distantia focalis, quam hic littera $\alpha$ vel $p$ indico vix infra 10 pedes accipi posset, unde ob $\alpha = 120$ dig. prodiret lentis ocularis distantia focalis $k = \frac{120}{50} = 2,4$ dig. Sin autem lente objectiva duplicata uti velimus, qualem modo descripsi, ejus distantiam focalem $p$ vehementer imminuere liceret, neque tamen eam ulterius minuere consultum videtur, quam ut $k$ fierit $\frac{1}{2}$ dig. ac proinde $p = 25$ dig., quia alioquin distantia oculi ab ultima lente nimis fieret exigua. Expediet fortasse ipsi $p$ valorem duplo majorem tribui, quo $k$ fiat integri digiti, atque confusio multo minus sit metuenda.

31. Quo autem constructio hujusmodi lentis objectivae duplicatae facilius succedat, quicunque valor litterae $p$ tribuatur, quantitatem litterae $M$, qua portio confusionis a lentibus ocularibus oriunda denotatur, justo majorem accipi conveniet, etsi enim forma lentis posterioris concavae inde pendet, tamen recordandum est, ejus distantiam a priori convexa per experientiam definiri debere, quo fit, ut si valor ipsius $M$ nimis magnus fuerit assumtus, distantiam lentium aliquantillum augeri oportere, cum contra minui deberet, ac fortasse plus quam lentium crassities permitteret. Hanc ob rationem ponam $M = \frac{10}{m}$, nostroque casu $M = \frac{1}{5}$, sicque pro distantia focali $= p$ et ratione refractionis 1,54 : 1 constructio utriusque lentis ita se habebit:

Lentis prioris radius faciei ... $\begin{cases} \text{anterioris} & = 0,51467p, \\ \text{posterioris} & = 4,05851p, \end{cases}$

Lentis posterioris radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = -0,59340p, \\ \text{posterioris} & = +0,74127p. \end{cases}$

32. Quomodocunque autem lens objectiva fuerit constituta, ex ejus distantia focali $\alpha$ vel $p$ definitur lentis ocularis, siquidem simplex adhiberetur, distantia focalis $k = \frac{\alpha}{50}$, hacque utrinque aequaliter facta convexa, ut aperturam capiat, cujus diameter $= \frac{1}{2}k$, campus detegetur, cujus semidiameter sit $= \frac{1}{4(m+1)}$, ac propterea ob $m = 50$ ipse diameter campi apparentis $= \frac{1}{2.51}$ seu $\frac{3437}{102}$ min. seu $33\frac{2}{3}$ min., neque haec repraesentatio a contagio colorum prorsus erit immunis. Quodsi vero lentibus ocularibus multiplicatis supra descriptis utamur, non solum hi vagi colores evanescent, sed etiam diameter campi in eadem ratione augebitur, singulas igitur lentis ocularis species percurramus, ubi quidem monendum, omnes has lentes utrinque aequaliter convexas fieri et unicuique aperturam, cujus diameter semissi ipsius distantiae focalis aequetur, tribui debere.

33. *Si lens ocularis adhibeatur duplicata, ejus constructio ita erit comparata:*

Distantiae focales: $q = \frac{98}{51} k = 1,9215 k$, distantiae lentium: $AB = \alpha - k = 49 k$,

$r = \frac{98}{149} k = 0,6577 k$, $BC = \frac{196}{149} k = 1,3154 k$,

et pro loco oculi distantia $CO = \frac{51}{100} r = 0,3354 k$, sicque tota tubi longitudo $AO = 50,6508 k$ et campi apparentis diameter $1^0 7\frac{1}{3}'$.

34. *Si lens ocularis adhibeatur triplicata*, ejus constructio erit:

Distantiae foci: $q = \frac{147}{51} k = 2,8822 k$, intervalla lentium: $AB = \alpha - k = 49 k$,

$r = \frac{450.49}{102.99} k = 2,1836 k$, $BC = \frac{147}{198} k = 0,7424 k$,

$s = \frac{147}{198} k = 0,7424 k$, $CD = \frac{147}{198} k = 0,7424 k$,

pro oculo erit distantia $DO = \frac{51}{150} s = 0,2524 k$,

sicque longitudo tubi tota $AO = 50,7362 k$.

et campi apparentis diameter $= 1^0 41'$.

35. *Si lens ocularis adhibeatur quadruplicata*, eam ita confici oportebit secundum § 22:

Distantiae foci: $q = \frac{4.49}{51} k = 3,8431 k$, intervalla lentium: $AB = \alpha - k = 49 k$,

$r = \frac{6.49.149}{51.247} k = 3,4775 k$, $BC = \frac{2.49}{247} k = 0,3968 k$,

$s = \frac{6.49.149.151}{51.247.249} k = 2,1088 k$, $CD = \frac{6.49.149}{247.249} k = 0,7123 k$,

$t = \frac{12.49.149.151}{247.249.251} k = 0,8570 k$, $DE = \frac{6.49.149.151}{247.249.251} k = 0,4285 k$,

pro loco oculi distantia $EO = \frac{51}{200} t = 0,2185 k$,

unde oritur tota tubi longitudo $AO = 50,7561 k$,

et campi apparentis diameter erit $= 2^0 14\frac{2}{3}'$.

36. *Si lens ocularis adhibeatur quintuplicata*, ejus constructio secundum haec praecepta institui debet:

Dist. foci: $q = \frac{5.49}{51} k = 4,8039 k$, interv. lentium: $AB = \alpha - k = 49 k$,

$r = \frac{5.49.546}{2.148.102} k = 4,4307 k$, $BC = \frac{5.49}{4.148} k = 0,4139 k$,

$s = \frac{5.49.546.250}{2.148.597.51} k = 3,7108 k$, $CD = \frac{5.49.546}{4.148.597} k = 0,3785 k$,

$t = \frac{5.49.546.352}{2.148.597.102} k = 2,6124 k$, $DE = \frac{5.49.546}{4.148.597} k = 0,3785 k$,

$u = \frac{5.49.546.352}{2.148.597.301} k = 0,8853 k$, $EF = \frac{5.49.546.352}{4.148.597.301} k = 0,4426 k$,

pro loco oculi est distantia $FO = \frac{51}{250} u = 0,1806 k$,

hincque tota tubi longitudo $AO = 50,7941 k$,

campi autem apparentis diameter est $2^0 48\frac{1}{3}'$. Unde patet aucto campo apparente longitudinem tubi vix sensibile incrementum capere.

*Evolutio telescopii objecta centies aucta repraesentantis.*

37. Haec multiplicatio secundum diametros fieri est intelligenda, ut sit $m = 100$, quo casu diameter aperturae lentis objectivae ad minimum sumi debet 3 digitorum, ut in contemplandis objectis sufficiente lumine fruamur. At si lente oculari multiplicata uti velimus, sine dubio ipsi majorem aperturam, veluti $3\frac{1}{2}$ dig. tribui conveniet. Foci autem distantia hujus lentis, si simplex adhibeatur, per regulas vulgares 30 pedes superare debet, quanquam si omnis cura ad eam formandam afferatur, haud parum minor accipi posse videatur. Verum si lentem compositam in usum vocare velimus, qua omni confusioni occurri queat, ejus distantia focalis $p$ multo minor accipi poterit, neque tamen infra 50 dig. minuenda videtur, ne lentes oculares nimium fiant exiguae.

38. Ut igitur hujusmodi lentis objectivae compositae structuram exponam, quae ex lente convexa ac menisco componitur, intervallo per experientiam determinando, partem confusionis ex lentibus ocularibus natam, quam littera $M$ denotavi, iterum $= \frac{10}{m}$ statuam, ut sit pro casu praesente $M = \frac{1}{10}$, ex quo posita ratione refractionis ex aëre in vitrum ut 1,54 ad 1, utriusque lentis constructio ita se habebit, distantia focali compositae existente $= p$:

$$\text{lentis prioris radius faciei} \ldots \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}51467p, \\ \text{posterioris} & = 4{,}05851p, \end{cases}$$

$$\text{lentis posterioris radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}66658p, \\ \text{posterioris} & = +0{,}88012p, \end{cases}$$

ubi notandum est $p$ designare distantiam foci post lentem posteriorem, intervallo lentium vix notabili existente.

39. Lente autem objectiva constituta, cujus distantia foci jam sit $= \alpha$, lentis ocularis vel ipsius simplicis vel multiplicatis aequivalentis distantia focalis esse debet $= k$, ut sit $k = \frac{\alpha}{100}$, quae si fuerit simplex et aperturam habeat, cujus diameter est semissi distantiae foci aequalis, diameter campi apparentis erit $= \frac{1}{2(m+1)}$ seu $\frac{3437}{202}$ min. $= 17'$, quem autem lentibus ocularibus multiplicatis adhibendis simili ratione multiplicare licet, dummodo singulae utrinque aequaliter convexae formentur, ut cuilibet apertura, cujus diameter semissi distantiae focalis ejus aequetur, tribui possit, ex quo singulas lentis ocularis multiplicationes ut ante persequamur.

40. *Si lens ocularis adhibeatur duplicata*, eam ita confici oportet:

Distantiae focales: $q = \frac{2.99}{101} k = 1{,}9604\,k$, Intervalla lentium: $AB = \alpha - k = 99\,k$,

$r = \frac{2.99}{299} k = 0{,}6578\,k$, $BC = 2r = 1{,}3156\,k$,

pro loco oculi $CO = \frac{101}{200} r = 0{,}3322\,k$,

hinc tota tubi longitudo $AO = 100{,}6478\,k$;

campi autem apparentis diameter erit $34'$, ita ut hujusmodi telescopium totum solem complectatur. Ac si constructio lentis objectivae descriptae successu non careret, ut capi posset $\alpha = 50$ dig. et $k = \frac{1}{2}$ dig., hoc instrumentum foret $50\frac{1}{3}$ dig.

41. *Si lens ocularis adhibeatur triplicata*, haec praecepta in ejus constructione sequi conveniet:

Distantiae focales: $q = \frac{3.99}{101} k = 2,9405 k$, Intervalla lentium: $AB = \alpha - k = 99 k$,

$$r = \frac{9.100.99}{2\,101.199} k = 2,2165 k, \qquad BC = s = 0,7462 k,$$

$$s = \frac{3.99}{2.199} k = 0,7462 k, \qquad CD = s = 0,7462 k,$$

pro loco oculi distantia $DO = \frac{101}{300} s = 0,2512 k$,

hinc tota tubi longitudo $AO = 100,7436 k$,

campi autem apparentis diameter erit 51′.

42. *Si lens ocularis adhibeatur quadruplicata*, ejus constructio ita erit instituenda:

Distantiae focales: $q = \frac{4.99}{101} k = 3,9208 k$, Interv. lentium: $AB = \alpha - k = 99 k$,

$$r = \frac{6.99.299}{101.497} k = 3,5381 k, \qquad BC = \frac{2.99}{497} k = 0,3984 k,$$

$$s = \frac{6.99.299.301}{101.497.499} k = 2,1342 k, \qquad CD = \frac{6\,99.299}{497.499} k = 0,7162 k,$$

$$t = \frac{12.99.299.301}{497.499.501} k = 0,8605 k, \qquad DE = \frac{6.99.299.301}{497.499.501} k = 0,4302 k,$$

pro loco oculi distantia $EO = \frac{101}{400} t = 0,2172 k$,

hinc tota tubi longitudo $AO = 100,7620 k$,

campi autem apparentis diameter erit 1°8′.

43. *Si lens ocularis adhibeatur quintuplicata*, his mensuris ejus constructio continetur:

Dist. focales: $q = \frac{5.99}{101} k = 4,9010 k$, Interv. lentium: $AB = \alpha - k = 99 k$,

$$r = \frac{5.99.1096}{4.298.101} k = 4,5063 k, \qquad BC = \frac{5.99}{4.298} k = 0,4153 k,$$

$$s = \frac{5.99\,1096.1000}{4.298.1197.101} k = 3,7647 k, \qquad CD = \frac{.99.1096}{4.298.1197} k = 0,3802 k,$$

$$t = \frac{5.99.1096.702}{4.298.1197.101} k = 2,6428 k, \qquad DE = \frac{5.99.1096}{4.298.1197} k = 0,3802 k,$$

$$u = \frac{5.99.1096.702}{2.298.1197.601} k = 0,8882 k, \qquad EF = \frac{5.99.1096.702}{4.298.1197.601} k = 0,4441 k,$$

pro loco oculi distantia $FO = \frac{101}{500} u = 0,1794 k$.

et tota tubi longitudo seu distantia $AO = 100,7992 k$,

campi vero apparentis diameter erit 1°25′.



# XXVI.

## De la Construction des Microscopes.

---

1. Les Microscopes diffèrent uniquement des Télescopes par rapport à la distance des objets ue les uns et les autres présentent à la vue. Cette distance étant si grande qu'on la puisse regarder omme infinie, les instruments propres à nous les représenter sont nommés télescopes; mais les licroscopes sont employés à observer les objets peu eloignés. Cette différence rend aussi leur construction bien différente; cependant la construction des uns et des autres est fondée sur les mêmes rincipes, que j'ai développés dans mon Mémoire sur les lunettes.

2. Les bonnes qualités des microscopes doivent être les mêmes que celles des lunettes. D'abord faut que la représentation soit distincte; pour cet effet la dernière image formée par les verres, ui est l'objet immédiat de la vue, doit être nette elle même et délivrée de confusion autant qu'il st possible; et ensuite elle doit se trouver à une juste distance de l'oeil. Cette dernière condition st remplie aisément par l'arrangement des verres, s'il y en a plusieurs; or la première met des ornes à l'ouverture du verre objectif, tout comme dans les lunettes. C'est encore une condition ui s'entend d'elle même, que les verres doivent être travaillés et polis avec tous les soins.

3. La seconde qualité, qu'on a droit d'éxiger d'un bon microscope, est la clarté, qu'on obtient n faisant en sorte, que de chaque point de l'objet il entre dans l'oeil un assez gros trait de rayons: ce trait était si gros, qu'il remplissait toute l'ouverture de la prunelle, la clarté serait la plus rande possible; à moins qu'on ne veuille hausser la splendeur de l'objet même par quelque forte ımière. On est obligé à recourir à cet expédient dans la plupart des microscopes, puisque le ait des rayons qu'ils transmettent dans l'oeil est trop mince. Il est donc de la dernière importnce d'arranger les microscopes en sorte, qu'ils transmettent de chaque point de l'objet un assez ·os trait de rayons dans l'oeil; je nomme le demi-diamètre de l'épaisseur de ce trait $= \omega$.

4. En troisième lieu on exige aussi une grande multiplication qui se rapporte à une certaine stance, à laquelle on verrait l'objet d'oeil nu assez distinctement. Je poserai cette distance $= l$;

*

et on veut qu'un objet, qui serait vu à cette distance $l$ sous un angle $= \varphi$, serait vu par le microscope sous un angle beaucoup plus grand, savoir $m\varphi$. Ce nombre $m$ exprime alors la multiplication selon le diamètre, et le quarré $mm$ marquera la multiplication en surface, et le cube $m^3$ en grosseur. Pour la distance $l$ on la suppose communement de 8 pouces, et pour cette raison elle me marquera aussi la distance, à laquelle la dernière image doit être présentée à l'oeil.

5. La quatrième qualité, qui est aussi fort importante, exige que le microscope découvre à l'oeil une partie de l'objet aussi grande qu'il est possible. On peut regarder tout le champ apparent comme un cercle; dont, ce n'est que le milieu qui sera vu avec la clarté proposée, et le contour annulaire paraîtra plus obscur. Le champ apparent clair est donc ce cercle du milieu, dont la clarté est partout la même; qui étant moindre que le champ apparent tout entier, je considérerai outre cela le champ apparent moyen qui tient un milieu entre les deux autres.

6. J'ai déjà expliqué dans mon mémoire sur les lunettes, comment on puisse remplir ces quatre conditions, car les formules que j'y ai données, sont si générales, qu'elles renferment aussi tous les cas, où la distance de l'objet n'est pas infinie. Donc sans m'arrêter davantage aux principes, je passe à rechercher toutes les diverses espèces des microscopes, qui ne diffèrent entr'eux que par le nombre des verres dont ils sont composés; et partant je commencerai par ceux, qui ne contiennent qu'un verre, et qu'on nomme des microscopes simples.

## I. Des Microscopes à un verre.

7. Soit $MAN$ le verre, sa distance focale $= p$ et le demi-diamètre de son ouverture $AM = x$ (Fig. 268.). Que l'objet se trouve en $O$, à la distance du verre $AO = a$, et soit le demi-diamètre de sa partie visible $Oo = z$, qui serait vu d'oeil nu à la distance $= l$ sous un angle $= \frac{z}{l}$. On soit l'image représentée par le verre en $Pp$, à la distance $AP = \alpha$, de sorte que $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$, et on aura le demi-diamètre de l'image $Pp = \frac{\alpha z}{a}$. Il faut donc que l'oeil se trouve en $B$ à la distance $BP = l$ pour voir cette image distinctement, et l'angle vu par le verre sera $= \frac{Pp}{BP} = \frac{\alpha z}{al}$, de sorte que $\frac{\alpha}{a}$ marquera la multiplication.

8. Pour juger tant de la clarté que du champ apparent, il faut suivant les règles établies dans mon mémoire précédent avoir égard aux limités du cône lumineux auprès de l'oeil. Or, nommant ici la distance $BP = l$, qui est indiquée la par $b$, ces limites sont:

$$\frac{(\alpha+l)z}{\alpha} + \frac{lx}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{(\alpha+l)z}{\alpha} - \frac{lx}{\alpha}. \quad *)$$

Si l'une et l'autre de ces limites surpasse le demi-diamètre de la pupille, le point de l'objet $o$ sera invisible, mais si l'une et l'autre tombe dans l'ouverture de la prunelle, le point $o$ sera vu avec la pleine clarté. Or la clarté sera moindre, quand seulement la moindre limite tombe dans l'oeil, supposé que l'une et l'autre ait une valeur positive.

*) Conf. pag. 678 et les suivantes de cet ouvrage.

9. Soit la distance de l'oeil au verre $AB = k$, et on aura $\alpha + l = k$, ou $\alpha = k - l$; d'où nos limites seront:

$$\frac{kz}{\alpha} + \frac{lx}{l-k} \quad \text{et} \quad \frac{kz}{\alpha} - \frac{lx}{l-k},$$

supposant $l > k$ et partant $\alpha$ négatif. La multiplication sera donc $\frac{l-k}{a} = m$, d'où la multiplication étant donnée, on aura $a = \frac{l-k}{m}$; et partant $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{l-k}{m-1}$. De là est aussi déterminée l'ouverture du verre, dont le demi-diamètre sera $x = \sqrt{ip}$, prenant pour $i$ environ la cent cinquantième partie d'un pouce.

10. Pour découvrir le plus grand champ possible, il est d'abord évident, qu'il faut prendre la distance de l'oeil au verre $AB = k$ aussi petite qu'il est possible. Posons donc qu'on applique l'oeil immédiatement au verre pour avoir $k = o$, et nos limites seront: $+x$ et $-x$, et puisqu'ils ne dépendent plus de $z$, le champ apparent sera illimité, et on sera en état de découvrir une si grande partie de l'objet, que si on le regardait d'oeil nu. C'est en quoi consiste un grand avantage des microscopes simples, que le champ apparent n'y est pas borné pourvu qu'on applique l'oeil immédiatement au verre.

11. La distance de foyer du verre dans ce cas sera donc $p = \frac{l}{m-1}$, et partant le demi-diamètre de son ouverture $x = \sqrt{\frac{il}{m-1}}$; lequel, lorsqu'il est plus grand que celui de la pupille, toute l'ouverture de la pupille sera remplie de rayons, et la clarté ne souffrira aucune diminution. Pour voir en quels cas cela puisse avoir lieu, soit $v$ le demi-diamètre de la pupille, et ayant $\frac{il}{m-1} > vv$, ou $m - 1 < \frac{il}{vv}$, la multiplication ne saurait surpasser $\frac{il}{vv} + 1$. Or ayant $l = 8$ pouces, $i = \frac{1}{150}$ et $v = \frac{1}{10}$ pouces environs, la multiplication $m$ sera moindre que $6\frac{1}{3}$, et la distance focale du verre $p > \frac{3}{2}$ pouces.

12. Or de tels verres méritent à peine le nom de microscopes et on demande ordinairement une beaucoup plus grande multiplication. Mais alors il faut se contenter d'un moindre degré de clarté; si nous exprimons par l'unité la clarté pleine, lorsque $x$ est moindre que $v$, la clarté sera $= \frac{xx}{vv} = \frac{il}{(m-1)vv}$. Donc si nous posons $l = 8$, $i = \frac{1}{150}$ et $v = \frac{1}{10}$, la clarté sera $= \frac{16}{3(m-1)}$; et pour avoir une multiplication $m = 100$, qui demande un verre de foyer $p = \frac{8}{99}$ pouce, la clarté sera $= \frac{16}{297} = \frac{1}{18}$ à peu près.

13. La multiplication étant donc proposée $= m$, on a besoin d'une lentille, dont la distance de foyer $p = \frac{l}{m-1}$, qui souffrira une ouverture, dont le demi-diamètre $x = \sqrt{ip} = \sqrt{\frac{il}{m-1}}$; la distance de la lentille à l'objet doit être $OA = a = \frac{l}{m} = \frac{(m-1)p}{m}$, et la clarté de la représentation $= \frac{il}{(m-1)vv}$, dans la supposition, que l'oeil soit immédiatement appliqué au verre. Si nous posons en pouces, $l = 8$, $i = \frac{1}{150}$ et $v = \frac{1}{10}$, nous aurons pour le microscope ces déterminations:

$$p = \frac{8}{m-1}, \quad x = \sqrt{\frac{8}{150(m-1)}}; \quad a = \frac{8}{m} \text{ et la clarté } = \frac{16}{3(m-1)},$$

supposant $3(m-1) > 16$ ou $m > 6\frac{1}{3}$.

*Table des Microscopes à un verre.*

| Multiplication. | Distance du foyer du verre. | Demi-d. de son ouvert. | Distance de l'objet au verre. | Clarté apparente. |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,888 | 0,077 | 0,800 | 0,592 |
| 20 | 0,421 | 0,053 | 0,400 | 0,281 |
| 30 | 0,276 | 0,043 | 0,266 | 0,184 |
| 40 | 0,205 | 0,037 | 0,200 | 0,137 |
| 50 | 0,163 | 0,033 | 0,160 | 0,109 |
| 60 | 0,135 | 0,030 | 0,133 | 0,090 |
| 70 | 0,116 | 0,028 | 0,114 | 0,077 |
| 80 | 0,101 | 0,026 | 0,100 | 0,067 |
| 90 | 0,090 | 0,025 | 0,089 | 0,060 |
| 100 | 0,081 | 0,023 | 0,080 | 0,054 |
| 150 | 0,054 | 0,019 | 0,053 | 0,036 |
| 200 | 0,040 | 0,016 | 0,040 | 0,026 |
| 250 | 0,032 | 0,014 | 0,032 | 0,021 |
| 300 | 0,026 | 0,013 | 0,026 | 0,017 |
| 350 | 0,023 | 0,012 | 0,023 | 0,015 |
| 400 | 0,020 | 0,012 | 0,020 | 0,013 |
| 450 | 0,018 | 0,011 | 0,018 | 0,012 |
| 500 | 0,016 | 0,010 | 0,016 | 0,011 |
| 600 | 0,013 | 0,009 | 0,013 | 0,009 |
| 700 | 0,011 | 0,009 | 0,011 | 0,008 |
| 800 | 0,010 | 0,008 | 0,010 | 0,007 |
| 900 | 0,009 | 0,008 | 0,009 | 0,006 |
| 1000 | 0,008 | 0,007 | 0,008 | 0,005 |

14. Donc si l'on voulait construire un microscope simple qui augmentât en diamètre mille fois, il faudrait employer une lentille dont la distance de foyer ne fût que $\frac{8}{1000}$ ou $\frac{1}{125}$ pouce; et la clarté ne serait que $\frac{1}{200}$ de la clarté naturelle. Or la petitesse de la lentille rendrait un te microscope impraticable, et l'obscurité de la représentation tout à fait inutile. Si la multiplication devait être comme 100 a 1, il faudrait employer une lentille de $\frac{81}{1000}$ ou d'$\frac{1}{12}$ pouce et la clarté serait à la naturelle comme 54 à 1000 ou comme 1 à 18 à peu près.

15. Ayant supposé $l = 8$ pouces, il est bon de remarquer, que pour ceux, qui ont la vu courte, la valeur de $l$ doit être plus petite. Ainsi ceux, qui ont la vue courte, ont besoin d'un plus petite lentille pour obtenir la même multiplication; et la même lentille fournit une moindr multiplication à une vue courte, qu'à une vue bonne. Ensuite ceux qui ont la pupille fort grand verront plus obscurément par la même lentille, que ceux dont la pupille est plus petite. Et partan par rapport à la diversité qui règne tant dans la vue, que dans la grandeur de la prunelle, il fau drait dresser des tables particulières.

16. Mais la condition, que l'oeil soit appliqué immédiatement au verre, est impossible. L'épais seur du verre, qui est négligée dans le calcul, s'y oppose, et il y a toujours quelque petite distanc entre le verre et l'oeil. Donc nous ne saurions supposer $k = o$; soit donc $k = \frac{l}{m}$, et nous auror $p = \frac{l}{m}$; et $a = \frac{(m-1)l}{mm}$; d'où les limites seront:

$$\frac{mz}{m-1} + \frac{mx}{m-1} \quad \text{et} \quad \frac{mz}{m-1} - \frac{mx}{m-1},$$

où la valeur de $x$ est donnée, savoir $x = \sqrt{ip} = \sqrt{\frac{il}{m}}$. Maintenant ces limites mettront des bornes au champ apparent. Lorsque $\frac{mx}{m-1}$ est moindre que le demi-diamètre de la prunelle $v$, il y aura un champ apparent clair, dont le demi-diamètre sera $z = \frac{m-1}{m} v - x$; celui du champ apparent entier étant toujours $= \frac{m-1}{m} v + x$. Or la clarté du champ clair est à la clarté naturelle comme $\frac{mmxx}{(m-1)^2}$ à $vv$; on ne verra donc en tout qu'une portion circulaire du verre, dont le diamètre est à peu pres égal à la somme des diamètres de l'ouverture du verre et de celle de la pupille.

## II. Des Microscopes à deux verres.

17. Soit $MAN$ le verre objectif, sa distance de foyer $= p$, et le demi-diamètre de son ouverture $AM = x$ (Fig. 269); le second verre ou l'oculaire soit en $B$, sa distance de foyer $= q$, et le demi-diamètre de son ouverture $BM^I = nq$ ayant déjà remarqué, qu'on le peut supposer proportionel à la distance focale $q$, et qu'on peut prendre environ $n = \frac{1}{5}$. Posons de plus l'objet en $O$, sa distance à l'objectif $OA = a$, et celle de l'image formée $AP = \alpha$; puis $PB = b$, et pour la seconde image $Qq$ la distance $BQ = \beta$; et l'oeil sera en $C$, en sorte que $CQ = l$. Nous aurons donc $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$ et $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$, et posant $BC = k$, de sorte que $k = \beta + l$, il faut remarquer que les quantités $a$, $\alpha + b$ et $k$ sont nécessairement positives, et ne sauraient jamais devenir négatives.

18. Soit ensuite la partie visible de l'objet $Oo = z$, qui marque le demi-diamètre du champ apparent clair, moyen ou entier, selon que nous le trouverons à propos; et l'angle sous lequel il paraîtrait à l'oeil nu éloigné à la distance $l$ sera $= \frac{z}{l}$. Donc le demi-diamètre de l'image $Pp$ sera $= \frac{\alpha z}{a}$, et celui de la seconde image $Qq = \frac{\alpha\beta z}{ab}$, qui étant l'objet immédiat de la vue par le microscope, il paraîtra sous un angle $= \frac{\alpha\beta z}{abl}$, de sorte que la multiplication sera $= \frac{\alpha\beta}{ab}$.

19. En vertu des formules données les limites seront:

pour l'oculaire $B$: $\quad \frac{(\alpha+b)z}{a} \pm \frac{bx}{a}$,

pour l'oeil $C$: $\quad \frac{(\beta+l)\alpha z}{ab} + \frac{(\alpha+b)lz}{a\beta} \pm \frac{blx}{a\beta}$,

puisqu'il y a ici $l$, ce que j'avais nommé auparavant $c$. On ne saurait rendre le cas plus avantageux pour découvrir un grand champ apparent qu'en posant à cause de $\beta + l = k$:

$$\frac{k\alpha}{ab} + \frac{(\alpha+b)l}{a\beta} = o, \quad \text{ou} \quad k = -\frac{(\alpha+b)bl}{\alpha\beta};$$

il faut donc de toute nécessité que la quantité $\frac{b}{\alpha\beta}$, et partant aussi $\frac{\alpha\beta}{ab}$ ou la multiplication, soit négative, ce qui produira une représentation renversée.

20. Soit donc la multiplication $\frac{\alpha\beta}{ab} = -m$, et partant $\alpha\beta = -mab$, pour avoir $k = \frac{(\alpha+b)l}{ma}$; les limites pour l'oeil seront $\pm \frac{lx}{ma}$. Donc si $\frac{lx}{ma}$ est moindre que le demi-diamètre de la prunelle $v$,

tous les rayons entreront dans l'oeil, et y exciteront un degré de clarté qui repond à $\frac{lx}{ma}$. Que la clarté proposée, dont on veut se contenter, reponde au demi-diamètre $\omega$ moindre que $v$, et on aura $\frac{lx}{ma}=\omega$, d'où l'on tire $x=\frac{ma\omega}{l}$; et puisque $x=\sqrt{ip}$, on aura outre cela $p=\frac{mmaa\omega\omega}{ill}$. Si l'on prenait $\omega=v$, ou même $\omega>v$ on obtiendrait la plus grande clarté possible, que la prunelle puisse recevoir.

21. Pour la grandeur du champ apparent il faut considérer les limites du verre oculaire $B$; qui, à cause de $x=\frac{ma\omega}{l}$ et $\alpha\beta=-mab$, sont:

$$\frac{(\alpha+b)z}{a}+\frac{mab\omega}{al} \quad \text{et} \quad \frac{(\alpha+b)z}{a}-\frac{mab\omega}{al},$$

où bien:
$$\frac{(\alpha+b)z}{a}\pm\frac{\beta\omega}{l};$$

qu'il faut comparer avec le demi-diamètre de l'ouverture de l'oculaire, qui est $nq=\frac{nb\beta}{b+\beta}$. De là on aura le demi-diamètre:

$$\text{du champ apparent clair} = \frac{nab\beta}{(b+\beta)(\alpha+b)}-\frac{\alpha\beta\omega}{(\alpha+b)l},$$

$$\text{du champ apparent moyen} = \frac{nab\beta}{(b+\beta)(\alpha+b)},$$

$$\text{du champ apparent entier} = \frac{nab\beta}{(b+\beta)(\alpha+b)}+\frac{\alpha\beta\omega}{(\alpha+b)l}.$$

22. Regardons $a$, comme une quantité connue, et par là la valeur de $p$ sera aussi déterminée savoir $p=\frac{mmaa\omega\omega}{ill}$. Mais puisque $p=\frac{a\alpha}{a+\alpha}$, on aura aussi $\alpha=\frac{ap}{a-p}$. Introduisons de plus la distance des verres $AB$, qui soit $=h$, et à cause de $\alpha+b=h$, nous aurons $b=h-\frac{ap}{a-p}$. Enfin la multiplication en donne:

$$\beta=-\frac{mab}{\alpha}=-\frac{mh(a-p)+map}{p},$$

d'où nous tirons:
$$q=\frac{b\beta}{b+\beta}=\frac{mab}{m\alpha-\alpha}=\frac{m[h(a-p)-ap]}{m(a-p)-p},$$

et enfin:

$$\frac{naq}{h}=\frac{nab\beta}{(\alpha+b)(b+\beta)}=\frac{mna[h(a-p)-ap]}{h[m(a-p)-p]}, \quad \frac{\alpha\beta\omega}{(\alpha+b)l}=\frac{ma\omega[h(a-p)-ap]}{hlp} \quad \text{et} \quad k=\frac{hl}{ma}.$$

23. S'il était $\frac{\alpha\beta\omega}{(\alpha+b)l}$, égal ou plus grand que $\frac{nab\beta}{(\alpha+b)(b+\beta)}$, le champ clair s'évanouirait; il faut donc qu'elle soit plus petite, et plus elle sera petite, plus le champ apparent clair aura d'étendue. Posons donc:

$$\frac{\alpha\beta\omega}{(\alpha+b)l}=\frac{\lambda nab\beta}{(\alpha+b)(b+\beta)},$$

prenant pour $\lambda$ une fraction moindre que l'unité; et substituant les valeurs trouvées nous aurons:

$$\frac{\omega}{lp}=\frac{\lambda n}{m(a-p)-p}.$$

Soit pour abréger $\frac{\lambda n l}{\omega} = N$, pour avoir:

$$m(a-p) - p = Np \quad \text{ou} \quad p = \frac{ma}{N+m+1}.$$

Or nous avions $p = \frac{mmaa\omega\omega}{ill}$, d'où nous tirons:

$$a = \frac{ill}{(N+m+1)m\omega\omega} \quad \text{et} \quad p = \frac{ill}{(N+m+1)^2\omega\omega} \quad \text{et} \quad x = \frac{il}{(N+m+1)\omega}.$$

24. Mais la distance des verres $AB = h$, est déterminée par celle de $k$, ayant pris $k = \frac{hl}{ma}$. Or nous avions posé $k = \beta + l$, de sorte que:

$$\beta = \frac{hl}{ma} - l = -\frac{l(ma-h)}{ma} = -\frac{mab}{\alpha} = -\frac{mb(a-p)}{p};$$

à cause de $\alpha = \frac{ap}{a-p}$.

Mais: $\qquad b = \frac{h(a-p) - ap}{a-p}$; donc $\frac{l(ma-h)}{ma} = \frac{m[h(a-p)-ap]}{p}$,

d'où nous tirons: $\qquad h = \frac{map(ma+l)}{mma(a-p)+lp}$, et $b = \frac{alp[m(a-p)-p]}{(a-p)[mma(a-p)+lp]}$;

et de plus: $\qquad q = \frac{mb(a-p)}{m(a-p)-p} = \frac{malp}{mma(a-p)+lp}$.

Mais ayant trouvé $m(a-p) = (N+1)p$; nous obtiendrons:

$$h = \frac{ma(ma+l)}{m(N+1)a+l}, \qquad k = \frac{l(ma+l)}{m(N+1)a+l},$$

$$q = \frac{mal}{m(N+1)a+l}, \quad \text{et} \quad p = \frac{ma}{N+m+1},$$

et les valeurs sont toutes déterminées par celles de $N = \frac{\lambda n l}{\omega}$ prenant pour $\lambda$ une fraction petite, et de $a = \frac{ill}{(N+m+1)m\omega\omega}$.

25. Le demi-diamètre du champ apparent moyen étant $z = \frac{naq}{h}$ deviendra $z = \frac{nal}{ma+l}$; et delà celui du champ apparent clair sera $= (1-\lambda)z$, et celui du champ apparent entier $= (1+\lambda)z$. Or il faut remarquer ici que $\lambda$ peut être pris tant négatif que positif, de sorte que le nombre $N$ puisse être pris à volonté ou négatif ou positif; pourvu que $m(N+1)a+l$ ne devienne point négatif, parce que les valeurs $h$ et $k$ sont nécessairement positives. Cependant quoiqu'on prenne $\lambda$ négatif, le champ apparent clair est toujours plus petit, et l'entier plus grand que le champ apparent moyen.

26. Voilà déterminés tous les éléments, desquels dépend la construction des microscopes à deux verres; et où l'on a l'avantage de rendre la représentation aussi claire qu'on voudra pour toute multiplication donnée, de quoi on ne peut pas disposer dans les microscopes simples, où la clarté diminue nécessairement, à mesure qu'on augmente la multiplication. On pourra donc toujours

construire un microscope à deux verres, qui produise une multiplication prescrite sous un degré donné de clarté, et quoiqu'on ne puisse augmenter le champ apparent, on peut faire en sorte, que le champ entier ait un rapport donné au champ clair qui est comme $1+\lambda$ à $1-\lambda$.

27. Puisque le verre oculaire est toujours petit, on peut bien mettre $n=\frac{1}{4}$; soit aussi $\lambda=\pm\frac{1}{4}$, afin que le diamètre du champ apparent entier soit à celui du champ clair comme 5 à 3; et à cause de $l=8$ nous aurons $N=\pm\frac{1}{2\omega}$, et posant $i=\frac{1}{150}$, les autres déterminations seront pour la multiplication donnée $=m$:

$$a=\frac{64}{150m(N+m+1)\omega\omega},\quad p=\frac{64}{150(N+m+1)^2\omega\omega},\quad x=\frac{8}{150(N+m+1)\omega},$$

$$h=\frac{ma(ma+8)}{m(N+1)a+8},\quad q=\frac{8ma}{m(N+1)a+8},\quad \text{et}\quad k=\frac{8(ma+8)}{m(N+1)a+8};$$

et le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $z=\frac{2a}{ma+8}$, toutes ces mesures étant exprimées en pouces.

28. Parcourons quelques degrés de clarté, et posons premièrement $\omega=\frac{1}{10}$, d'où résulte à peu près la plus grande clarté possible; et ayant $N=\pm 5$, les déterminations pour le microscope à deux verres seront prenant $N=-5$, (puisque la valeur positive produit une moindre valeur de $a$ et partant aussi du champ apparent.):

$$a=\frac{640}{15m(m-4)},\quad p=\frac{640}{15(m-4)^2},\quad x=\frac{8}{15(m-4)},$$

$$h=\frac{ma(ma+8)}{8-4ma},\quad q=\frac{2ma}{2-ma},\quad k=\frac{2(ma+8)}{2-ma}\quad \text{et}\quad z=\frac{2a}{ma+8}.$$

Il faut donc pour que cette construction puisse avoir lieu, qu'il soit $ma<2$, ou $640<30(m-4)$ donc $m>25\frac{1}{3}$, puisque sans cette condition la distance $h$ deviendrait négative. Si l'on demandait une moindre multiplication, il faudrait donner à $\omega$ une valeur plus grande, quoique la clarté n'en reçut aucune augmentation, ou bien on prendra la valeur positive de $N=+5$, qui donne:

$$a=\frac{640}{15m(m+6)},\quad p=\frac{640}{15(m+6)^2},\quad x=\frac{8}{15(m+6)},$$

$$h=\frac{ma(ma+8)}{6ma+8},\quad q=\frac{8ma}{6ma+8},\quad k=\frac{8(ma+8)}{6ma+8}\quad \text{et}\quad z=\frac{2a}{ma+8}.$$

*Table des Microscopes à deux verres*,
qui représentent les objets avec la clarté totale.

| Multiplication. | Dist. de foyer de l'objectif. | Demi-d. de l'ouvert. | Distance de l'objet. | Distance des verres. | Dist. de foyer de l'oculaire. | Distance de l'oeil. | Demi-d. du champ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,166 | 0,033 | 0,266 | 1,185 | 0,888 | 3,555 | 0,050 |
| 20 | 0,063 | 0,021 | 0,082 | 0,881 | 0,735 | 4,323 | 0,017 |
| 30 | 0,063 | 0,021 | 0,055 | 11,373 | 9,428 | 55,140 | 0,011 |
| 40 | 0,033 | 0,015 | 0,030 | 9,185 | 2,909 | 21,818 | 0,006 |

29. Je ne continue pas cette table plus loin, puisque le verre objectif devient trop petit, pour qu'il puisse être exécuté. La raison de cet inconvenient est, que la clarté est prise égale à la naturelle; et si nous la supposons moindre, on pourra employer un plus grand verre objectif. Ici une multiplication de 40 demande déjà un objectif de 0,033 distance focale, avec lequel on pourrait obtenir une multiplication de 250, en faisant un microscope simple. Mais il faut considérer que ce défaut de multiplication est compensé par la clarté, qui est presque 50 fois plus grande, que si l'on en faisait un microscope simple.

30. Posons $\omega = \frac{1}{20}$, pour obtenir une clarté quatre fois plus petite que la naturelle, et ayant $N = \pm 10$, la valeur positive donne:

$$a = \frac{2560}{15m(m+11)}, \quad p = \frac{2560}{15(m+11)^2}, \quad x = \frac{16}{15(m+11)},$$

$$h = \frac{ma(ma+8)}{11ma+8} = \frac{512}{3(m+11)} \cdot \frac{3m+97}{3m+737},$$

$$q = \frac{8ma}{11ma+8} = \frac{512}{3m+737},$$

$$k = \frac{8(ma+8)}{11ma+8} = \frac{8(3m+97)}{3m+737},$$

$$z = \frac{2a}{ma+8} = \frac{128}{m(3m+97)}.$$

Or la valeur négative de $N$ donne:

$$a = \frac{512}{3m(m-9)}, \quad p = \frac{512}{3(m-9)^2}, \quad x = \frac{16}{15(m-9)},$$

$$h = \frac{ma(ma+8)}{8-9ma} = \frac{512}{3(m-9)} \cdot \frac{3m+37}{3m-603},$$

$$q = \frac{8ma}{8-9ma} = \frac{512}{3m-603},$$

$$k = \frac{8(ma+8)}{8-9ma} = \frac{8(3m+37)}{3m-603},$$

$$z = \frac{2a}{ma+8} = \frac{128}{m(3m+37)};$$

ces formules ne sauraient avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m > 201$; mais alors l'objectif devient trop petit. Les premières formules fournissent cette table:

| Multiplication $m$. | Distance de l'objet $a$. | Distance focale de l'objectif $p$. | Demi-d. de l'ouvert. $x$. | Distance des verres $h$. | Distance focale de l'ocul. $q$. | Distance de l'oeil $k$. | Demi-d. du champ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,813 | 0,387 | 0,051 | 1,346 | 0,667 | 1,325 | 0,101 |
| 20 | 0,275 | 0,186 | 0,034 | 1,084 | 0,642 | 1,575 | 0,041 |
| 30 | 0,137 | 0,105 | 0,025 | 0,941 | 0,619 | 1,809 | 0,023 |

*

31. Tous ces microscopes à deux verres sont moins parfaits que les simples, puisqu'ils demandent pour la même multiplication un moindre objectif, ce qui est une circonstance très importante dans les microscopes. Outre cela les microscopes simples fournissent une plus grande clarté, tandisque $m$ est au-dessous de 30; et s'il est au dessus, la distance focale de l'objectif devient si petite, que l'avantage de la clarté ne mérite plus aucune attention. Le même défaut des microscopes à deux verres a encore lieu, si $\omega = \frac{1}{30}$ et $\omega = \frac{1}{40}$ ou la clarté $= \frac{1}{9} = 0{,}111$ ou $\frac{1}{16} = 0{,}062\frac{1}{2}$. Mais si l'on admet une moindre clarté, il y a des cas, où le microscope à deux verres demande un plus grand objectif, que le simple, et qu'il est par conséquent préférable. Posons donc $\omega = \frac{1}{50}$, pour avoir $N = 25$, et la distance focale de l'objectif est $p = \frac{25.640}{15(m + 26)^2} = \frac{25.128}{3(m + 26)^2}$; et puisque la distance focale du microscope simple est $\frac{8}{m-1}$, voyons pour quelles valeurs de $m$, il y aura:

$$\frac{8}{m-1} > \frac{25.128}{3(m+26)^2} \quad \text{ou} \quad (m+26)^2 < \frac{400}{3}(m-1);$$

et nous trouvons que cela arrive, lorsque la multiplication $m$ est comprise entre ces limites:

$$\frac{122 - 20\sqrt{19}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{122 + 20\sqrt{19}}{3},$$

ou entre ceux-ci $11\frac{2}{3}$ et $69\frac{1}{3}$. Mais alors la clarté du microscope simple est plus grande, et cela très considérablement, de sorte que ni ces cas rendent aucun avantage aux microscopes composés de deux verres.

32. Mais nous avons d'abord fait une supposition, qu'on doit regarder comme la source de cette imperfection des microscopes à deux verres, ayant posé la distance de l'oeil $k = -\frac{(a+b)bl}{a\beta}$. Or quoique cette supposition semble favorable à l'augmentation du champ apparent, il reçoit pourtant de la part de l'oculaire une si grande restriction, que le premier avantage se réduit à rien. Il reste donc encore un autre cas à examiner, lorsqu'on suppose la distance de l'oeil $k = 0$, et partant $\beta = -l$; où l'oeil doit être immédiatement appliqué à l'oculaire.

33. Dans ce cas donc $k = 0$ et $\beta = -l$, la multiplication sera $= \frac{al}{ab}$, et la distance focale de l'oculaire $q = \frac{bl}{l-b}$. Or alors nos limites seront:

$$\text{pour l'oculaire: } \frac{(a+b)z}{a} \pm \frac{bx}{a},$$

$$\text{pour l'oeil: } \frac{(a+b)z}{a} \pm \frac{bx}{a}.$$

Donc si l'une et l'autre des limites tombe dans l'oeil, $\frac{bx}{a}$ sera le demi-diamètre du trait de rayons qui entre dans l'oeil, d'où dépend la clarté. Posons donc $\frac{bx}{a} = \omega$, pour avoir $x = \frac{a\omega}{b}$, et $\omega$ donnera la mesure de la clarté, qui sera à la naturelle comme $\omega\omega$ à $\nu\nu$, posant $\nu$ pour le demi-diamètre de la prunelle. Delà le demi-diamètre apparent du champ clair sera $z = \frac{a(\nu - \omega)}{a+b}$, et du champ entier $= \frac{a(\nu + \omega)}{a+b}$, et celui du champ moyen $= \frac{a\nu}{a+b}$.

34. Ces mesures seront justes, lorsque l'ouverture du verre oculaire est égale ou plus grande que la prunelle; mais si elle était plus petite, on devrait comparer les mêmes limites non avec l'ouverture de la pupille, mais avec celle du verre oculaire, d'où le champ apparent résulterait moindre; ou bien dans ces cas on devrait prendre pour $v$ le demi-diamètre de l'ouverture de l'oculaire, qui est $= nq = \frac{nbl}{l-b}$.

35. Cela remarqué soit la multiplication $\frac{al}{ab} = m$, et ayant $x = \frac{a}{b}\,\omega = \frac{ma}{l}\,\omega$, la distance focale de l'objectif sera $p = \frac{mmaa\omega\omega}{ill}$. Posons donc $nq$ ou $\frac{nbl}{l-b}$ plus grand que $v$, ou soit $\frac{nbl}{l-b} = \lambda v$, prenant pour $\lambda$ un nombre, qui ne soit pas plus petit que l'unité, et on aura:

$$b = \frac{\lambda lv}{nl + \lambda v}, \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{mab}{l} = \frac{\lambda mav}{nl + \lambda v}.$$

Or:

$$p = \frac{a\alpha}{a + \alpha} = \frac{\lambda mav}{nl + \lambda v + \lambda mv},$$

d'où l'on tire:

$$\frac{ma\omega\omega}{ill} = \frac{\lambda v}{nl + (m+1)\lambda v} \quad \text{et} \quad a = \frac{\lambda illv}{m\,[nl + (m+1)\lambda v]\,\omega\omega}, \quad \text{et} \quad p = \frac{\lambda\lambda illvv}{[nl + (m+1)\lambda v]^2\omega\omega}.$$

36. Ayant trouvé les valeurs de $a$ et $p$, on aura la distance des verres $\alpha + b = \frac{\lambda v\,(l + ma)}{nl + \lambda v}$, et à cause de $b = \frac{\lambda lv}{nl + \lambda v}$, la distance focale de l'oculaire $q = \frac{\lambda v}{n}$. De plus le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{a\,(nl + \lambda v)}{\lambda\,(l + ma)}$, dont le rapport à celui du champ clair est comme $v$ à $v - \omega$, et du champ entier comme $v$ à $v + \omega$.

Puisque $v = \frac{1}{10}$ pouce $n = \frac{1}{4}$ et $\lambda > 1$, on aura $q > \frac{4}{10}$ pouces; donc connaissant $q$, les autres déterminations seront:

$$a = \frac{illq}{m\,[l + (m+1)\,q]\,\omega\omega} \quad \text{et} \quad p = \frac{illqq}{[l + (m+1)\,q]^2\omega\omega}, \quad x = \frac{ilq}{[l + (m+1)\,q]\,\omega}, \quad \alpha + b = \frac{(l + ma)\,q}{l + q},$$

et le demi-diamètre du champ apparent moyen $z = \frac{av\,(l + q)}{q\,(l + ma)}$.

37. Ce cas diffère donc du premier en ce qu'au lieu de mettre $k = -\frac{(\alpha + b)\,bl}{\alpha\beta}$, nous posons $k = o$. Or il est à remarquer que si $-\frac{(\alpha + b)\,bl}{\alpha\beta}$ était une quantité positive, il serait incontestablement plus avantageux de faire $k = -\frac{(\alpha + b)\,bl}{\alpha\beta}$ que $k = o$, puisqu'on découvrirait alors un plus grand champ. Donc le cas présent $k = o$ ne saurait être employé avec raison, que lorsque $-\frac{(\alpha + b)\,bl}{\alpha\beta}$ est une quantité positive; c'est à dire à cause de $\beta = -l$, lorsque $-\frac{(\alpha + b)\,b}{\alpha}$, ou $-\frac{b}{\alpha}$ est une quantité positive. Or puisque $\frac{al}{\alpha b} = m$, on a $-\frac{b}{\alpha} = -\frac{l}{ma}$, et parce que $l$ et $a$ sont nécessairement positives, le présent cas exige la valeur de $m$ négative, d'où la représentation ne sera plus renversée mais droite.

38. Posons donc $m$ négatif, ou écrivons $-m$ au lieu de $m$, et nos déterminations pour le microscope seront:

$$a = \frac{ill q}{m\,[(m-1)\,q - l]\,\omega\omega}, \quad p = \frac{ill qq}{[(m-1)\,q-l]^2\,\omega\omega}, \quad x = \frac{ilq}{[(m-1)\,q-l]\,\omega},$$

$$\alpha + b = \frac{(l-ma)\,q}{l+q} \quad \text{et} \quad z = \frac{av\,(l+q)}{q\,(l-ma)};$$

où il faut remarquer que $q$ se peut prendre ou affirmativement ou négativement, c'est à dire l'oculaire pourra être ou convexe ou concave. De plus la valeur de $i = \frac{1}{150}$ pourrait aussi être prise négative, d'où l'objectif deviendrait concave. Mais ces changements doivent être tels, que les valeurs de $a$ et de $\alpha + b$ deviennent positives.

39. Mais si nous prenions $i$ négatif ou $i = -\frac{1}{150}$, à cause de $l = 8$ et $\omega < \frac{1}{10}$, en posant $\omega = \frac{1}{30}$, nous aurions $a = \frac{384 q}{m\,[8-(m-1)\,q]}$, d'où l'on voit que $q$ ne saurait être négatif, et qu'il faut $m - 1 < \frac{8}{q}$. Mais alors la valeur de $\alpha + b$ deviendrait $\left(8 - \frac{384 q}{8-(m-1)\,q}\right) q : (8+q)$, laquelle à cause de $q > \frac{4}{10}$, serait négative; d'où l'on voit, qu'un objectif concave ne saurait en aucune manière avoir lieu. Posons donc $i = +\frac{1}{150}$, et prenant $l = 8$ et $\omega = \frac{1}{30}$, nos déterminations seront

$$a = \frac{384 q}{m\,[(m-1)\,q-8]}, \quad p = \frac{384 qq}{[(m-1)\,q-8]^2}, \quad x = \frac{8q}{5\,[(m-1)\,q-8]},$$

$$\alpha + b = \frac{(8-ma)\,q}{8+q} = \frac{8q\,[(m-49)\,q-8]}{(8+q)\,[(m-1)\,q-8]} \quad \text{et} \quad z = \frac{av}{\alpha+b} = \frac{a}{10\,(\alpha+b)},$$

et la clarté sera à la naturelle comme 1 à 9.

40. Si l'on prenait $q$ négatif, ou la multiplication $m$ devrait être fort petite, ou $q$ plus grand que 8, et dans ce cas on ne gagnerait rien sur les microscopes simples. Soit donc $q$ positif, ou le verre oculaire convexe, et il est clair qu'on gagne d'autant plus sur l'objectif, plus on prend la valeur de $q$ petite. Mais puisque $q$ ne doit pas être moindre que $\frac{4}{10}$ pouces, posons $q = \frac{2}{5}$, et nos déterminations pour le degré de clarté $= \frac{1}{9}$ seront:

$$a = \frac{384}{m\,(m-21)}, \quad p = \frac{384}{(m-21)^2}, \quad x = \frac{8}{5\,(m-21)},$$

$$\alpha + b = \frac{8\,(m-69)}{21\,(m-21)} \quad \text{et} \quad z = \frac{a}{10\,(\alpha+b)} = \frac{100}{m\,(m-69)} \text{ à peu près.}$$

Cette disposition aura donc lieu pour les cas, ou la multiplication $m$ est ou moindre que 21, ou plus grande que 69.

41. Mais lorsque la multiplication $m$ est moindre que 21, le microscope simple fournit une plus grande clarté, et est par conséquent préférable. Ce seront donc les cas où $m > 69$, qui sont joints avec quelque avantage, vu que alors les microscopes simples donnent une moindre clarté. Or un trop petit excès de $m$ sur 69 donne une si petite distance des verres $\alpha + b$, qui à cause de

leur épaisseur ne saurait avoir lieu dans la pratique. Par cette raison il faut poser au moins $m = 80$, et pour ce cas on aura ces déterminations:

$$a = \frac{384}{80.59} = 0{,}081, \quad p = 0{,}109, \quad x = 0{,}027,$$

$$\alpha + b = 0{,}071, \quad q = 0{,}400 \quad \text{et} \quad z = 0{,}113.$$

42. Ce microscope sera sans doute bien préférable à un microscope simple, qui multiplie en même raison. Car premièrement il n'exige pas un si petit objectif, puisque la valeur de $p$ est ici 0,109, qui était pour le simple 0,101. Il est vrai que cet avantage est très peu considérable et qu'il s'évanouirait entièrement, si l'on donnait à $m$ une plus grande valeur; mais la clarté est d'une conséquence d'autant plus grande, qui est ici exprimée par $\frac{1}{9} = 0{,}111$, pendant que celle du microscope simple n'était que 0,067, de sorte que celle-là est à celle-ci comme 5 à 3. Mais il faut remarquer que l'oculaire doit être très mince, de même que l'objectif, afin qu'en se touchant la distance de leur centres soit moindre que 0,071 ou $\frac{1}{14}$ pouce.

43. Comme ce cas qui paraît utile dans la pratique résulte de la position $\omega = \frac{1}{30}$, ou de la clarté $= \frac{1}{9}$, d'autres degrés de clarté fourniront aussi des microscopes à deux verres, préférables aux simples. Pour les trouver, posons en général la clarté $= \pi$, et puisque $\pi = \frac{\omega\omega}{\nu\nu} = 100\,\omega\omega$, nous aurons $\frac{1}{\omega\omega} = \frac{100}{\pi}$. Soit de plus $i = \frac{1}{150}$, $l = 8$ et $q = \frac{2}{5}$, et nos déterminations pour le microscope seront:

$$a = \frac{128}{3m(m-21)\pi}, \quad p = \frac{128}{3(m-21)^2\pi}, \quad x = \frac{8}{15(m-21)\sqrt{\pi}},$$

$$\alpha + b = \frac{8(3\pi m - 63\pi - 16)}{63\pi(m-21)}, \quad q = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad z = \frac{168}{5m(3\pi m - 63\pi + 16)};$$

et elles seront avantageuses, lorsque $m > 21 + \frac{16}{3\pi}$; car alors la clarté sera toujours plus grande que dans les microscopes simples. Et posant $m = 21 + \frac{16}{3\pi} + \varrho$, tant que $\varrho$ est moindre que $\frac{\sqrt{(1+15\pi)} - 8}{3\pi}$, l'objectif du microscope composé est plus grand que du simple. Et alors on aura $\alpha + b = \frac{8\pi\varrho}{7(16 + 3\pi\varrho)}$.

44. Si l'on met $\pi = 1$, on aura bien la plus grande clarté, mais elle ne sera apperçue, qu'au centre même de l'objet, parce que dans ce cas le diamètre du champ clair s'évanouit; or celui du champ apparent entier sera le double du moyen, et partant $= \frac{672}{5m(3m-79)}$ pouces. On pourra employer ce cas lorsque $m > 26\frac{1}{3}$. Soit donc $m = 30$, et on aura ces déterminations:

$$a = 0{,}158, \quad p = 0{,}527, \quad x = 0{,}059, \quad \alpha + b = 0{,}155 \quad \text{et} \quad z = 0{,}101.$$

Un tel microscope est sans doute préférable au microscope simple, qui multiplie dans la même raison de 30 à 1, puisque la clarté est beaucoup plus grande, et on pourra augmenter la multiplication $m$, jusqu'à ce que l'objectif devienne trop petit pour être exécuté. Mais alors on n'a qu'à diminuer la clarté $\pi$ pour obtenir une plus grande multiplication.

45. Comme c'est donc la petitesse du verre objectif, qui met des bornes à la multiplicatio et à la clarté, de sorte que plus on aura de petits objectifs, plus on pourra augmenter la multipli cation et la clarté, nous ne saurions tirer de nos formules un plus grand avantage pour la pratiqu qu'en regardant comme donné le verre objectif ou sa distance focale $= p$. Car de là nous pou rons assigner la plus grande multiplication, qu'il est possible d'en tirer, avec la plus grande clart On obtiendra alors la plus grande multiplication en joignant les deux verres immédiatement ensembl et en appliquant l'oeil immédiatement à l'oculaire, ce qui est la disposition la plus avantageuse, pou procurer tant la plus grande clarté que le plus grand champ apparent pour la même multiplicatio

46. Soit donc donnée la distance focale de l'objectif $= p$, et le demi-diamètre de son ouve ture sera $x = \sqrt{ip} = \sqrt{\frac{p}{150}}$ pouces. Si ce verre est également convexe de part et d'autre, la moiti de son épaisseur sera tout au plus $= p(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}}) = \tfrac{2}{15}p$. Or la distance focale du verre oculai étant $= \tfrac{2}{5}$ pouce, et le demi-diamètre de son ouverture $= \tfrac{1}{10}$ pouce, la demi-épaisseur de ce ver pourra être moindre qu' $\tfrac{1}{50}$ pouce, et partant ces deux verres étant joints immédiatement ensembl la distance de leurs centres sera moindre que $\tfrac{2}{15}p + \tfrac{1}{50}$. Donc puisque l'objectif est ordinairemen moindre que l'oculaire, il sera toujours possible de les joindre en sorte, que leur distance ne sur passe point $\tfrac{1}{20}$ ou $\tfrac{1}{30}$ pouce.

47. Les deux verres étant donc donnés, on aura d'abord pour la multiplication $m$ la clar $\pi = \frac{128}{3p(m-21)^2}$. D'où l'on trouve la distance de l'objet devant l'objectif $AO = a = \frac{m-21}{m}p$, et distance des verres $AB = \alpha + b = \frac{8 + 21p - mp}{21}$, et le demi-diamètre du champ apparent moye $z = \frac{21p(m-21)}{10m(8 + 21p - mp)}$. Mais la distance des verres $\alpha + b$ ne pouvant être plus petite qu' $\tfrac{1}{20}$ ou $\tfrac{}{2}$ pouce, nous aurons $8 + 21p - mp > 1$, et partant $m < \frac{7 + 21p}{p}$, ou bien la plus grande multipl cation, qu'on puisse obtenir par l'objectif donné, sera $m = 21 + \frac{7}{p}$, et alors la clarté sera $\pi = \tfrac{128}{147}$ et le demi-diamètre du champ apparent moyen $z = \frac{21p}{10(3p+1)}$, la distance de l'objet étant $a = \frac{p}{3p+}$

48. Si donc la distance focale de l'objectif est $p = \tfrac{1}{10}$ pouce, on en pourra construire microscope, qui multiplie jusqu'à 91 fois en diamètre. Or quoiqu'on demandât une moindre mul plication, il serait avantageux d'employer plutôt ce petit objectif qu'un plus grand, puisqu'il four une plus grande clarté, ou bien: il est profitable de se servir toujours du plus petit objectif, qu' puisse avoir. Donc, supposant que ce plus petit objectif ait sa distance focale $p = \tfrac{1}{10}$ pouce, ce de l'oculaire étant $q = \tfrac{4}{10}$ pouces, on aura la multiplication $m < 91$, la clarté $\pi = \frac{1280}{3(m-21)^2}$, distance de l'objet $AO = a = \frac{m-21}{10m}$ pouce, la distance des verres $AB = \frac{101-m}{210}$ pouce, et demi-diamètre du champ apparent moyen $z = \frac{21(m-21)}{10m(101-m)}$.

*Table des microscopes à deux verres,*

la distance de foyer de l'objectif étant $\frac{1}{10}$ pouce et celle de l'oculaire $\frac{4}{10}$ pouce.

| Multiplication. | Distance de l'objet. | Distance des verres. | Clarté apparente. | Demi-d. du champ app. moyen. |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 0,0300 | 0,3381 | 1,000 | 0,0089 |
| 40 | 0,0475 | 0,2905 | 1,000 | 0,0163 |
| 50 | 0,0580 | 0,2429 | 0,507 | 0,0239 |
| 60 | 0,0650 | 0,1953 | 0,280 | 0,0333 |
| 70 | 0,0700 | 0,1477 | 0,178 | 0,0474 |
| 80 | 0,0738 | 0,1001 | 0,123 | 0,0737 |
| 90 | 0,0767 | 0,0525 | 0,090 | 0,1461 |

49. Les mêmes deux verres pourront donc servir à une infinité de microscopes dont la multiplication va depuis 21 jusqu'à 91; et on voit que pour augmenter la multiplication, il faut premièrement éloigner l'objet de l'objectif, et ensuite approcher les deux verres: on perd bien alors sur la clarté mais on gagne sur le champ apparent. Cependant la clarté est considérablement plus grande, que celle que fournirait un microscope simple de la même multiplication; et même ici pour les multiplications 30 et 40 la clarté est la plus grande possible. L'avantage de ces deux verres est pourtant le plus considérable dans les grandes multiplication, et pour les moindres il vaudra mieux employer un plus grand objectif pour gagner un plus grand champ.

50. Considérons donc aussi les microscopes qu'on peut composer d'un objectif de $\frac{2}{10}$ pouces de foyer avec l'oculaire de $\frac{4}{10}$. Or on aura:

la clarté: $\pi = \frac{640}{3(m-21)^2}$, $\quad a = \frac{m-21}{5m}$, $\quad \alpha + b = \frac{122-2m}{210} = \frac{61-m}{105}$ et $z = \frac{a}{10(\alpha+b)}$.

*Table des Microscopes à deux verres,*

la distance de foyer de l'objectif étant $\frac{2}{10}$ et celle de l'oculaire $\frac{4}{10}$ pouce.

| Multiplication. | Distance de l'objet. | Distance des verres. | Clarté apparente. | Demi-d du champ app. moyen. |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 0,0600 | 0,2950 | 1,000 | 0,0203 |
| 40 | 0,0950 | 0,2000 | 0,591 | 0,0475 |
| 50 | 0,1160 | 0,1048 | 0,254 | 0,1107 |
| 55 | 0,1236 | 0,0571 | 0,184 | 0,2165 |

es microscopes paraissent plus propres pour les multiplications 50 et 55 que les précédents à cause u plus grand champ apparent.

51. Or un objectif de $\frac{3}{10}$ pouce de foyer sera plus propre avec l'oculaire de $\frac{4}{10}$ de faire un iicroscope, qui multiplie en raison de 44 à 1; la distance de l'objet sera $a = 0{,}157$, la distance es verres $\alpha + b = 0{,}052$, la clarté apparente $\pi = 0{,}269$ et le demi-diamètre du champ apparent ioyen $z = 0{,}302$.

Enfin un objectif de $\frac{4}{10}$ pouce de foyer pourra être utilement employé avec l'oculaire aussi de

$\frac{4}{10}$ pouces à composer un microscope qui multiplie en raison de 36 à 1. Car alors la distance de l'objet sera $a = \frac{1}{6}$ pouce, la distance des verres $\alpha + b = \frac{2}{21}$ pouces, la clarté apparente $\pi = 0,474$ et le demi-diamètre du champ apparent moyen $z = \frac{7}{40}$ pouce.

52. C'est donc le second cas de deux verres, qui nous fournit des microscopes composés, qui sont préférables aux simples tant par rapport à la multiplication qu'à la clarté; pendant qu'aucun microscope du premier cas, où l'oeil était éloigné de l'oculaire, ne mérite la moindre attention. Voyons donc maintenant quels secours nous pourrons tirer de trois verres, et s'il est possible d'en tirer des microscopes qui seraient préférables non seulement aux simples, mais aussi à ceux de deux verres; car si cet avantage n'avait pas lieu, il serait fort mal à propos d'employer trois verres.

### III. Des Microscopes à trois verres.

53. Soient (Fig. 270.) les trois verres en $A, B, C$ et l'oeil en $D$, l'objet en $Oo$, la première image $Pp$, la seconde $Qq$ et la troisième $Rr$, qui est l'objet immédiat de la vue. Posons les distances:

$$OA = a, \quad AP = \alpha, \quad PB = b, \quad BQ = \beta, \quad QC = c, \quad CR = \gamma \quad \text{et} \quad RD = d,$$

et nommant les distances focales des trois verres $p, q, r$, nous aurons:

$$p = \frac{a\alpha}{\alpha + a}, \quad q = \frac{b\beta}{b + \beta}, \quad r = \frac{c\gamma}{c + \gamma}.$$

Ensuite la grandeur de l'objet étant posée $Oo = z$; celle des images sera:

$$Pp = \frac{\alpha z}{a}, \quad Qq = \frac{\alpha\beta z}{ab}, \quad Rr = \frac{\alpha\beta\gamma z}{abc};$$

donc la grandeur vue par les verres sera $= \frac{\alpha\beta\gamma z}{abcd}$, celle de l'objet vu d'oeil nu à la distance $= l$ étant $= \frac{z}{l}$, et partant la multiplication est $= \frac{\alpha\beta\gamma l}{abcd}$.

54. Posons les distances $AB = \alpha + b = f$, $BC = \beta + c = g$ et $CD = \gamma + d = k$, qui sont nécessairement positives, et les limites seront:

pour le verre $B$: $\quad \frac{fz}{a} \pm \frac{bx}{a}$,

pour le verre $C$: $\quad \frac{gaz}{ab} + \frac{fcz}{a\beta} \pm \frac{bcx}{a\beta}$,

pour l'oeil $D$: $\quad \frac{k\alpha\beta z}{abc} + \frac{gadz}{ab\gamma} + \frac{fcdz}{a\beta\gamma} \pm \frac{bcdx}{a\beta\gamma}$,

où $x$ marque le demi-diamètre de l'ouverture de l'objectif $AM = AN = x = \sqrt{ip}$, prenant pour environ $\frac{1}{150}$ pouce.

55. J'avais posé la distance de la dernière image $Rr$ à l'oeil $DR = l$; mais je la posera à présent infinie, pour ceux qui ont la vue bonne; puisqu'on sait qu'un petit changement suffi pour ajuster les microscopes à toutes sortes d'yeux. Ayant donc $d = \infty$, on aura $\gamma = k - d = -\infty$

et $\frac{\gamma}{d} = -1$, d'où la multiplication sera $= -\frac{\alpha\beta l}{abc}$ et $r = c$, et les limites:

pour $B$: $$\frac{fz}{a} \pm \frac{bx}{a},$$

pour C: $$\frac{g\alpha z}{ab} + \frac{fcz}{\alpha\beta} \pm \frac{bcx}{\alpha\beta},$$

pour D: $$\frac{k\alpha\beta z}{abc} - \frac{g\alpha z}{ab} - \frac{fcz}{\alpha\beta} \pm \frac{bcx}{\alpha\beta}.$$

56. Je remarque ici d'abord, que si $\frac{abc}{\alpha\beta}\left(\frac{g\alpha}{ab} + \frac{fc}{\alpha\beta}\right)$ est une quantité positive, on en aura la plus avantageuse valeur pour le lieu de l'oeil, savoir $k = \frac{abc}{\alpha\beta}\left(\frac{g\alpha}{ab} + \frac{fc}{\alpha\beta}\right)$. Or alors posant pour le demi-diamètre du trait lumineux qui tombe dans l'oeil $\omega$, qui servira de mesure de la clarté, on aura $\frac{bcx}{\alpha\beta} = \omega$, ou bien nommant la multiplication $\frac{\alpha\beta l}{abc} = m$, on aura $\frac{lx}{ma} = \omega$, donc $x = \frac{ma\omega}{l}$ et partant $p = \frac{mmaa\omega\omega}{ill} = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$; de sorte que considérant la distance $OA = a$ comme donnée, tant la distance focale $p$ que $\alpha$ seront aussi données, puisque $\alpha = \frac{ap}{a-p}$.

57. Soit $\frac{a}{b} = t$ et $\frac{\beta}{c} = u$, et puisque $\alpha + b = f$ et $\beta + c = g$, on aura:

$$b = \frac{f}{1+t}, \quad \alpha = \frac{ft}{1+t}, \quad c = \frac{g}{1+u} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{gu}{1+u} \quad \text{et} \quad m = \frac{tul}{a},$$

ensuite: $$\frac{1}{q} = \frac{1+t}{f} + \frac{1+u}{gu} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1+u}{g}.$$

De là les limites comparés aux ouvertures des verres fourniront ces équations:

$$\frac{fz}{a} \pm \frac{x}{t} = \pm nq \quad \text{et} \quad \frac{gtz}{a} + \frac{fz}{au} \pm \frac{x}{tu} = \pm nr,$$

où il faut considérer que $k = \frac{l}{m}\left(\frac{gt}{a} + \frac{f}{au}\right)$, et que cette quantité doit être positive, ou on a $k = \frac{mag + fl}{mau}$. Les signes ambigus $\pm$ dépendent de la nature des coëfficiens de $z$, selon qu'ils sont ou positifs ou négatifs.

58. Que $z$ marque le demi-diamètre du champ apparent moyen et on aura ces formules:

$$\frac{fz}{a} = \pm nq \quad \text{et} \quad \frac{gtz}{a} + \frac{fz}{au} = \pm nr,$$

qui se réduisent à celles-ci:

$$\frac{f}{a} \cdot \frac{1}{q} = \pm \frac{n}{z} \quad \text{et} \quad \left(\frac{gt}{a} + \frac{f}{au}\right)\frac{1}{r} = \pm \frac{n}{z},$$

ou bien à celles-ci en remettant pour $q$ et $r$ leurs valeurs:

$$\pm \frac{na}{z} = 1 + t + \frac{f(1+u)}{gu},$$

$$\pm \frac{na}{z} = t(1+u) + \frac{f(1+u)}{gu}.$$

De là, selon que les quantités $t$ et $u$ seront ou positives ou négatives, nous aurons à considérer les cas suivants:

*Premier Cas.*

$$\frac{\alpha}{b} = +t \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{c} = +u.$$

59. Dans ce cas le nombre $m$ sera positif, et partant la quantité:

$$k = \frac{l}{m}\left(\frac{gt}{a} + \frac{f}{au}\right) = \frac{l}{ma}\left(gt + \frac{f}{u}\right)$$

aussi positive; d'où nos équations seront:

$$\frac{na}{z} = 1 + t + \frac{f(1+u)}{gu} = t(1+u) + \frac{f(1+u)}{gu},$$

et de là nous aurons $1 = tu$, et $m = \frac{l}{a}$, ou $a = \frac{l}{m}$. Par conséquent la distance focale de l'objectif $p = \frac{\omega\omega}{i}$ et $x = \omega$, de plus $\alpha = \frac{l\omega\omega}{il - m\omega\omega} = \frac{ft}{1+t}$; de sorte que par la multiplication $m$ et la clarté $\omega$ les quantités $a, p, x$ et $\alpha$ sont déjà déterminées. Mais puisque $u = \frac{1}{t}$ nous aurons de plus:

$$\frac{na}{z} = \frac{nl}{mz} = 1 + t + \frac{f}{g}(1+t) = \frac{(f+g)}{g}(1+t), \qquad \text{donc} \qquad z = \frac{ngl}{m(f+g)(1+t)}.$$

60. Mais il est nécessaire que $il > m\omega\omega$, et partant $m < \frac{il}{\omega\omega}$, ou bien $m < \frac{l}{p}$; d'où l'on voit que de grandes multiplications exigent un très petit objectif, et que la clarté proportionnelle à $\omega\omega$ décroît dans la même raison. Donc une multiplication donnée éxige un aussi petit objectif qu'un microscope simple, et puisque le composé ne représente pas plus clairement, il n'y a aucune raison, pourquoi on veuille employer un composé de trois verres plutôt que le simple, surtout ayant déjà assigné des microscopes à deux verres, qui sont plus avantageux.

*Second Cas.*

$$\frac{\alpha}{b} = -t \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{c} = +u.$$

61. La valeur de $m$ devenant aussi négative, écrivons dans les formules trouvées $-m$ et $-t$ au lieu de $+m$ et $+t$, de sorte que $m = \frac{tul}{a}$, et nous aurons $k = \frac{mag - fl}{mau}$. On suppose donc que $fl < mag$, ou $f < gtu$, d'où nos formules seront:

$$\pm \frac{na}{z} = 1 - t + \frac{f(1+u)}{gu},$$

$$\pm \frac{na}{z} = -t(1+u) + \frac{f(1+u)}{gu} = \frac{1+u}{gu}(f - gtu);$$

cette dernière formule étant négative, il faudra prendre $-\frac{na}{z}$. Or pour la première supposons:

$$1 - t + \frac{f(1+u)}{gu} > o, \quad \text{ou} \quad t < 1 + \frac{f}{gu} + \frac{f}{g} \quad \text{et} \quad t > \frac{f}{gu},$$

et nous aurons:

$$\frac{na}{z} = 1 - t + \frac{f(1+u)}{gu}, \qquad \frac{na}{z} = t(1+u) - \frac{f(1+u)}{gu}.$$

62. En ajoutant ces formules nous avons:

$$\frac{2na}{z} = 1 + tu = 1 + \frac{ma}{l},$$

de sorte que:
$$z = \frac{2nal}{ma+l},$$

et ensuite:
$$1 + \frac{ma}{l} = 2 - 2t + \frac{2f(1+u)}{gu},$$

donc:
$$t = \tfrac{1}{2} - \frac{ma}{2l} + \frac{f(1+u)}{gu} = \frac{ma}{ul},$$

d'où l'on tire:
$$u = \frac{2mag - 2fl}{(2f+g)l - mag} \quad \text{et} \quad t = \frac{ma[(2f+g)l - mag]}{2(mag - fl)l}.$$

63. Mais ayant trouvé $\alpha = \frac{ap}{a-p}$, puisque $\alpha = \frac{ft}{t-1}$ en regardent $t$ comme donné, nous aurons $f = \frac{a(t-1)}{t}$, et $\alpha$ est donné par $a$. Donc puisque $u = \frac{ma}{lt}$, nous trouverons aussi $g$ par cette équation:

$$\frac{ma}{l} = 1 - 2t + \frac{2f(1+u)}{gu},$$

d'où l'on tire:
$$g = \frac{2fl(1+u)}{2ma + mau - lu} = \frac{2al(t-1)(ma+lt)}{mat(ma+2lt-l)},$$

à cause de:
$$f = \frac{a(t-l)}{t}.$$

Et ainsi nous venons de déterminer ces deux valeurs de $f$ et $g$ outre celle de $u = \frac{ma}{lt}$, et il ne reste plus qu'à déterminer les quantités $a$ et $t$, la multiplication $m$ et la clarté $\frac{\omega\omega}{vv} = 100\omega\omega$ étant données.

64. Mais il faut aussi considérer que dans les expressions de nos limites la quantité $\frac{x}{t} = \frac{ma\omega}{lt}$ doit être très petite par rapport au:

$$\frac{fz}{a} = \frac{2nfl}{ma+l}, \quad \text{et aussi} \quad \frac{x}{tu} = \frac{lx}{ma} = \omega,$$

très petite par rapport à:

$$-\frac{z}{a}\left(-gt + \frac{f}{u}\right) = -\frac{z}{au}(f - gtu) = \frac{ng}{1+u} = \frac{nglt}{ma+lt},$$

pour que le champ apparent clair ne soit pas réduit à rien. Donc, prenant $\lambda$ et $\mu$ pour des fractions petites, nous aurons:

$$\frac{ma\omega}{lt} = \frac{2\lambda nal(t-1)}{t(ma+l)} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2\lambda nall(t-1)}{ma(ma+l)} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\mu nall(t-1)}{ma(ma+2lt-l)},$$

donc:

$$\mu(ma+l)=\lambda(ma+2lt-l) \quad \text{et} \quad ma=\frac{\lambda l(2t-1)-\mu l}{\mu-\lambda} \quad \text{ou} \quad t=\frac{(\mu-\lambda)ma+(\lambda+\mu)l}{2\lambda l}.$$

Donc:

$$t-1=\frac{(\mu-\lambda)(ma+l)}{2\lambda l} \quad \text{et} \quad \omega=\frac{nal(\mu-\lambda)}{ma}.$$

65. Or:

$$\alpha=\frac{ap}{a-p}=\frac{mmaa\omega\omega}{ill-mmaa\omega\omega}=\frac{ma\omega}{(\mu-\lambda)nl},$$

d'où nous tirons:

$$(\mu-\lambda)\,nma\omega l=ill-mma\omega\omega,$$

et partant:

$$a=\frac{ill}{m\omega[(\mu-\lambda)nl+m\omega]} \quad \text{et} \quad p=\frac{ill}{[(\mu-\lambda)nl+m\omega]^2},$$

donc:

$$\alpha=\frac{il}{n(\mu-\lambda)[(\mu-\lambda)nl+m\omega]}.$$

Ensuite ayant trouvé $a$, $\alpha$ et $p$, on aura:

$$x=\frac{il}{(\mu-\lambda)nl+m\omega}, \quad t=1+\frac{(\mu-\lambda)(ma+l)}{2\lambda l}, \quad u=\frac{ma}{lt},$$

$$f=\frac{i(ma+l)}{2n\lambda t[(\mu-\lambda)nl+m\omega]}, \quad g=\frac{(\mu+\lambda)fl}{\mu ma}$$

et:

$$z=\frac{2nal}{ma+l}, \quad q=\frac{il}{n\lambda t[(\mu-\lambda)nl+m\omega]}, \quad r=\frac{g}{1+u}=\frac{\omega}{\mu n},$$

et enfin:

$$k=\frac{\lambda fl}{\mu mau} \quad \text{ou} \quad k=\frac{(ma+l)\omega}{2\mu nma}.$$

66. Les fractions $\lambda$ et $\mu$ dépendent donc de notre volonté, lesquelles devant être moindres que l'unité, la plus grande marque de combien le diamètre du champ apparent clair est plus petit que celui du moyen. Il serait donc bon de mettre l'une et l'autre aussi petite qu'il est possible. Or il est évident que si l'on posait $\mu=\lambda$ ou $\mu>\lambda$, le verre objectif deviendrait plus petit que celui du microscope à deux verres, de sorte que celui-ci serait préférable. Il ne reste donc que le cas $\lambda>\mu$, où le microscope à trois verres puisse être employé avec succès; dans ce cas la distance focale de l'objectif étant $p=\frac{64}{150[m\omega-2(\lambda-\mu)]^2}$, si nous posons $l=8$, $n=\frac{1}{4}$ et $i=\frac{1}{150}$ et celle de l'objectif de deux verres $=\frac{64}{150(m\omega-21\omega)^2}$, nous voyons que l'avantage du microscope à 3 verres ne saurait avoir lieu que lorsque $\omega<\frac{2}{21}(\lambda-\mu)$.

67. Il faudra donc mettre la fraction $\lambda$ aussi grande et $\mu$ aussi petite qu'on pourra, afin que la clarté du microscope à trois verres ne devienne trop petite. Posons donc d'abord $\lambda=1$, auquel cas le champ apparent clair s'évanouit, pendant que le champ apparent entier devient le plus grand et mettant $\mu=\frac{1}{10}$, l'avantage aura lieu pourvu qu'il soit $\omega<\frac{18}{210}$ ou $\omega<\frac{3}{35}$, soit donc $l=8$, $i=\frac{1}{150}$ et $n=\frac{1}{4}$, et les déterminations du microscope à trois verres seront:

$$a=\frac{32}{15m\omega(5m\omega-9)}, \quad p=\frac{32}{3(5m\omega-9)^2}, \quad x=\frac{4}{15(5m\omega-9)}, \quad t=\frac{88-9ma}{160}, \quad u=\frac{20ma}{88-9ma}$$

$$f=\frac{4(ma+8)}{3(88-9ma)(5m\omega-9)},\quad q=\frac{16f}{ma+8},\quad g=\frac{88f}{ma},\quad r=40\omega,$$

$$k=\frac{20\omega(ma+8)}{ma},\quad z=\frac{4a}{ma+8}.$$

68. Posons maintenant $\omega=\frac{1}{20}$, de sorte que la clarté au milieu du champ soit $=\frac{1}{4}$, au lelà duquel elle diminue successivement, et le microscope à trois verres est contenu dans les ormules suivantes:

$$a=\frac{512}{3m(m-36)},\quad p=\frac{512}{3(m-36)^2},\quad x=\frac{16}{15(m-36)},\quad f=\frac{16(3m-44)}{9(m-36)(11m-588)},$$

$$q=\frac{256}{3(11m-588)},\quad g=\frac{11(3m-44)}{12(11m-588)},\quad r=2,\quad k=\frac{3m-44}{64},\quad z=\frac{256}{m(3m-44)}.$$

l faut donc que $m>53\frac{5}{11}$, d'où résultent les microscopes suivants:

| $m$ | $a$ | $p$ | $f$ | $q$ | $g$ | $r$ | $k$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 0,1524 | 0,4267 | 0,3936 | 3,0476 | 4,0596 | 2 | 1,9375 | 0,0368 |
| 60 | 0,1185 | 0,2963 | 0,1399 | 1,1852 | 1,7314 | 2 | 2,1250 | 0,0314 |
| 72 | 0,0658 | 0,1316 | 0,0416 | 0,4183 | 0,7728 | 2 | 2,6875 | 0,0207 |

69. Ces microscopes pourront donc être employés, lorsqu'on ne peut pas avoir des objectifs i petits que ceux de deux verres et les simples exigent. Cependant il faut avouer, que le champ pparent devient ici extrêmement petit, et que pour la multiplication de 72, on ferait mieux de se ervir des deux verres décrits § 48, et pour la multiplication de 56 de ceux de § 50, puisque le hamp apparent y est beaucoup plus grand, quoique la clarté soit un peu plus petite, cet avantage tant détruit par le plus grand nombre des verres. Le même inconvénient arrivera lorsque nous oserons $\omega$ moindre que $\frac{1}{20}$.

70. Soit donc $\omega=\frac{1}{30}$, ou la clarté $=\frac{1}{9}$, et les déterminations du microscope seront:

$$a=\frac{192}{m(m-54)},\quad p=\frac{384}{(m-54)^2},\quad x=\frac{9}{5(m-54)},\quad f=\frac{8(m-30)}{(m-54)(11m-810)},\quad q=\frac{16}{11m-810},$$

$$g=\frac{11(m-30)}{3(11m-810)},\quad r=\frac{4}{3},\quad k=\frac{m-30}{36}\quad \text{et}\quad z=\frac{96}{m(m-30)};$$

onc $m$ doit être plus grand que $73\frac{7}{11}$.

Mais si nous posons $m=75$ ou $m=80$, nous obtiendrons bien un objectif assez grand, mais nt la clarté que le champ apparent deviennent moindres que si nous employions deux verres. Or si ous prenons $m=100$, nous ne perdons rien dans la clarté, mais le champ apparent est trop petit, voir $z=0,013$, pour qu'un tel microscope mérite quelque préférence devant ceux à deux verres.

71. Ce cas que je viens de développer, a encore cet inconvénient que la clarté supposée ne gne qu'au centre du champ apparent; pour y remédier on pourrait mettre $\lambda<1$, mais alors la istance focale de l'objectif devient d'abord trop petite pour les grandes multiplications, et le champ pparent n'en tire presque aucune augmentation. Voici les déterminations en supposant $\lambda=\frac{1}{2}$ et $\omega=\frac{1}{10}$:

$$a = \frac{32}{15m\omega(5m\omega - 4)}, \quad p = \frac{32}{3(5m\omega - 4)^2}, \quad x = \frac{4}{15(5m\omega - 4)}, \quad f = \frac{8(ma + 8)}{3(12 - ma)(5m\omega - 4)},$$

$$q = \frac{16f}{ma + 8}, \quad g = \frac{48f}{ma}, \quad r = 40\omega, \quad k = \frac{20(ma + 8)\omega}{ma} \quad \text{et} \quad z = \frac{4a}{ma + 8};$$

mais il n'y a aucun avantage sur les microscopes à deux verres.

*Troisième Cas.*

$$\frac{\alpha}{b} = + t \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{c} = - u.$$

72. Puisque la valeur de $m$ devient négative, nous aurons:

$$m = \frac{tul}{a} \quad \text{et} \quad k = \frac{l}{m}\left(\frac{f}{au} - \frac{gt}{a}\right) = \frac{l}{ma}\left(\frac{f}{u} - gt\right);$$

on suppose donc $f > gtu$, d'où nos formules seront:

$$\pm \frac{na}{z} = 1 + t + \frac{f(u-1)}{gu},$$

$$\pm \frac{na}{z} = t(1 - u) + \frac{f(u-1)}{gu} = \frac{u-1}{gu}(f - gtu)$$

et: $$\frac{1}{q} = \frac{1+t}{f} + \frac{u-1}{gu} \quad \text{et} \quad r = \frac{g}{1-u} = \frac{-g}{u-1}.$$

Posons $u < 1$, pour que $r$ soit positif, et nous aurons:

$$\frac{na}{z} = 1 + t - \frac{f(1-u)}{gu},$$

$$\frac{na}{z} = - t(1 - u) + \frac{f(1-u)}{gu},$$

d'où nous tirons: $$\frac{2na}{z} = 1 + tu = 1 + \frac{ma}{l} \quad \text{et} \quad z = \frac{2nal}{ma + l}.$$

73. Ensuite nous aurons:

$$1 + 2t - tu - \frac{2f(1-u)}{gu} = 0.$$

Or ayant: $\alpha = \frac{ap}{a-p} = \frac{ft}{1+t}$, d'où l'on a $f = \frac{\alpha(1+t)}{t}$ et $g = \frac{2f(1-u)}{u(1+2t-tu)}$,

nous connaissons les valeurs de $f$ et $g$ par celle de $t$, qui donne aussi $u = \frac{ma}{lt}$. Mais nous avons déjà trouvé:

$$p = \frac{mmaa\omega\omega}{tll} \quad \text{et} \quad x = \frac{ma\omega}{l}, \quad \text{et puisque} \quad \frac{1}{q} = \frac{1+t}{f} + \frac{u-1}{gu} = \frac{na}{fz};$$

nous en tirons: $$q = \frac{fz}{na} = \frac{2fl}{ma + l} \quad \text{et} \quad r = \frac{2f}{u(1+2t-tu)},$$

puis: $$k = \frac{l}{ma}\left(\frac{f}{u} - gt\right) = \frac{l}{ma} \cdot \frac{nag}{(1-u)z} = \frac{ngl}{m(1-u)z} \quad \text{ou} \quad k = \frac{f(ma + l)}{mau(1+2t-tu)}.$$

74. Mais prenant pour $\lambda$ et $\mu$ des fractions moindres que l'unité, il faut qu'il soit comme ci-dessus:

$$\omega = \frac{2\lambda nall(1+t)}{ma(ma+l)} = \frac{2\mu nall(1+t)}{ma(l+2lt-ma)},$$

donc:
$$\lambda(l+2lt-ma) = \mu(ma+l),$$

et partant:
$$t = \frac{(\lambda+\mu)ma+(\mu-\lambda)l}{2\lambda l} \quad \text{et} \quad t+1 = \frac{(\lambda+\mu)(ma+l)}{2\lambda l},$$

et de plus:
$$\omega = \frac{nal(\lambda+\mu)}{ma} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{ma\omega}{(\lambda+\mu)nl}.$$

Or ayant:
$$\alpha = \frac{ap}{a-p} = \frac{mmaa\omega\omega}{ill-mma\omega\omega},$$

on en tire:
$$a = \frac{ill}{m\omega[m\omega+(\lambda+\mu)nl]} \quad \text{et} \quad p = \frac{ill}{[m\omega+(\lambda+\mu)nl]^2}.$$

Cette valeur de $p$ étant donc plus petite que dans le cas précédent, il est clair que nous n'en saurions tirer aucun avantage plus important que ci-dessus.

### *Quatrième Cas.*

$$\frac{a}{b} = -t \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{c} = -u.$$

75. Nos limites seront:

pour $B$:
$$\frac{fz}{a} \pm \frac{x}{t},$$

pour $C$:
$$\frac{+gtz}{a} + \frac{fz}{au} \pm \frac{x}{tu},$$

pour D:
$$\frac{ktuz}{a} + \frac{gtz}{a} + \frac{fz}{au} \pm \frac{x}{tu};$$

et puisque cette dernière formule est nécessairement positive, il faut qu'il soit $k=o$, de sorte que les limites pour l'oeil soient:

$$\frac{gtz}{a} + \frac{fz}{au} \pm \frac{x}{tu},$$

et la multiplication $m = \frac{tul}{a}$.

76. Prenant donc $\omega$ pour l'indice de la clarté, nous aurons:

$$\frac{x}{tu} = \frac{lx}{ma} = \omega \quad \text{et} \quad x = \frac{ma\omega}{l}, \quad \text{donc} \quad p = \frac{mmaa\omega\omega}{ill} = \frac{a\alpha}{a+\alpha},$$

et:
$$\alpha = \frac{ap}{a-p} = \frac{mmaa\omega\omega}{ill-mma\omega\omega} = \frac{ft}{t-1}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{f} + \frac{u-1}{gu} \quad \text{et} \quad r = \frac{g}{1-u}.$$

Cela posé, prenant $v$ pour le demi-diamètre de la prunelle, le demi-diamètre du champ apparent clair

est $=\frac{(\nu-\omega)au}{f+gtu}$, et du champ apparent entier $=\frac{(\nu+\omega)au}{f+gtu}$; donc celui du champ apparent moyen sera $=\frac{\nu au}{f+gtu}=\frac{\nu alu}{fl+mag}$.

77. Donc si $z$ est pris pour marquer le demi-diamètre du champ apparent moyen, de sorte que $\frac{z}{a}=\frac{\nu lu}{fl+mag}$, les limites fournissent ces équations:

$$\frac{\nu flu}{fl+mag}=nq \quad \text{et} \quad \nu=\pm nr=\pm\frac{ng}{1-u},$$

selon que le verre oculaire $C$ est ou convexe ou concave. Posons dans ce terme $\nu$ au lieu de $n$, et soit $\nu$ une fraction $=\frac{1}{4}$ ou affirmative ou négative, pour avoir $r=\frac{\nu}{\nu}=\pm\frac{4}{10}$ à cause de $\nu=\frac{1}{10}$ et $g=\frac{1-u}{10\nu}$; et on obtiendra:

$$\frac{\nu flu}{10\nu fl+(1-u)ma}=nq \quad \text{ou} \quad \frac{10n}{u}+\frac{(1-u)nma}{\nu flu}=\frac{1-t}{f}-\frac{10\nu}{u},$$

et de-là:
$$f=\frac{\nu ul-ma[\nu+n(1-u)]}{10\nu(n+\nu)l}.$$

78. Mais il faut de plus que dans nos limites les termes $\frac{x}{t}$ et $\frac{x}{tu}$ soient moindres que ceux auxquels ils sont joints, d'où nous tirons ces déterminations:

$$u\omega=\frac{\lambda flu}{10(fl+mag)} \quad \text{et} \quad \omega=\frac{\mu}{10};$$

donc $(\lambda-\mu)fl=\mu mag$, et en substituant les valeurs trouvées de $f$ et $g$, nous aurons:

$$ma=\frac{(\lambda-\mu)\nu ul}{\lambda(n+\nu)-n(\lambda+\mu)u} \quad \text{ou} \quad u=\frac{\lambda(n+\nu)ma}{(\lambda-\mu)\nu l+(\lambda+\mu)nma} \quad \text{et} \quad 1-u=\frac{(\lambda-\mu)\nu l+(\mu n-\lambda\nu)ma}{(\lambda-\mu)\nu l+(\lambda+\mu)nma};$$

donc:
$$t=\frac{ma}{ul}=\frac{(\lambda-\mu)\nu l+(\lambda+\mu)nma}{\lambda(n+\nu)l} \quad \text{et} \quad t-1=\frac{(\lambda+\mu)nma-(\lambda n+\mu\nu)l}{\lambda(n+\nu)l}.$$

79. De-là nous obtiendrons:

$$r=\frac{1}{10\nu}, \quad g=\frac{1}{10\nu}\cdot\frac{(\lambda-\mu)\nu l+(\mu n-\lambda\nu)ma}{(\lambda-\mu)\nu l+(\lambda+\mu)nma}, \quad f=\frac{\mu ma}{10\nu(\lambda-\mu)l}\cdot\frac{(\lambda-\mu)\nu l+(\mu n-\lambda\nu)ma}{(\lambda-\mu)\nu l+(\lambda+\mu)nma},$$

$$nq=\frac{\mu u}{10\lambda} \quad \text{ou} \quad q=\frac{\mu}{10n}\cdot\frac{(n+\nu)ma}{(\lambda-\mu)\nu l+(\lambda+\mu)nma}.$$

Ensuite puisque $\omega=\frac{\mu}{10}$:

$$\frac{\mu\mu mmaa}{100ill-\mu\mu mma}=\frac{\mu ma}{10\nu(\lambda-\mu)l}\cdot\frac{(\lambda-\mu)\nu l+(\mu n-\lambda\nu)ma}{(\lambda+\mu)nma-(\lambda n+\mu\nu)l},$$

$$\text{et} \quad p=\frac{\mu\mu mmaa}{100ill}, \quad \text{et} \quad z=\frac{\nu(n+\nu)(\lambda-\mu)al}{(\lambda-\mu)\nu l+(\mu n-\lambda\nu)ma}.$$

80. Soit maintenant $\nu = n$; et nous aurons:

$$r = \frac{1}{10n}, \quad g = \frac{1}{10n} \cdot \frac{(\lambda - \mu)(l - ma)}{(\lambda - \mu) l + (\lambda + \mu) ma}, \quad f = \frac{\mu ma}{10nl} \cdot \frac{l - ma}{(\lambda - \mu) l + (\lambda + \mu) ma},$$

$$q = \frac{\mu}{5n} \cdot \frac{ma}{(\lambda - \mu) l + (\lambda + \mu) ma} \quad \text{et} \quad \frac{\mu ma}{100ill - \mu\mu mma} = \frac{1}{10nl} \cdot \frac{l - ma}{(\lambda + \mu) ma - (\lambda + \mu) l} = -\frac{1}{10(\lambda + \mu) nl},$$

d'où nous tirons: $$\mu ma = \frac{100ill}{\mu m - 10(\lambda + \mu) nl},$$

et partant: $$p = \frac{100ill}{[\mu m - 10(\lambda + \mu) nl]^2} \quad \text{et} \quad z = \frac{2nal}{l - ma}.$$

81. Puisque $l = 8$, $i = \frac{1}{150}$ et $n = \frac{1}{4}$, nous aurons:

$$\mu ma = \frac{128}{3[\mu m - 20(\lambda + \mu)]}, \quad p = \frac{128}{3[\mu m - 20(\lambda + \mu)]^2} \quad \text{et} \quad l - ma = 8 - \frac{128}{3\mu[\mu m - 20(\lambda + \mu)]};$$

donc il faut qu'il soit:

$$\mu > \frac{20(\lambda + \mu)}{\mu} \quad \text{et} \quad 3\mu\mu m - 60(\lambda + \mu)\mu > 16,$$

ou bien: $$m > \frac{16 + 60(\lambda + \mu)\mu}{3\mu\mu}.$$

Ensuite on aura:

$$f = \frac{\mu ma}{20} \cdot \frac{8 - ma}{8(\lambda - \mu) + (\lambda + \mu) ma}, \quad q = \frac{4\mu}{5} \cdot \frac{ma}{8(\lambda - \mu) + (\lambda + \mu) ma},$$

$$g = \frac{2}{5} \cdot \frac{(\lambda - \mu)(8 - ma)}{8(\lambda - \mu) + (\lambda + \mu) ma}, \quad r = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad z = \frac{4a}{8 - ma}.$$

82. Soit $\mu = \frac{1}{2}$ pour que la clarté devienne $= \frac{1}{4}$; et soit $\lambda = 1$, de sorte que cette clarté ne se trouve qu'au centre même du champ, et nous aurons:

$$ma = \frac{512}{3(m - 60)}, \quad \text{ou} \quad a = \frac{512}{3m(m - 60)} \quad \text{et} \quad p = \frac{512}{3(m - 60)^2},$$

$$f = \frac{128(3m - 244)}{45(m - 60)(m + 4)}, \quad q = \frac{256}{15(m + 4)}, \quad g = \frac{2(3m - 244)}{15(m + 4)}, \quad r = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad z = \frac{256}{m(3m - 244)};$$

et on ne saurait employer ce cas, que lorsque la multiplication $m$ est plus grande que $81\frac{1}{3}$.

83. Posons donc $m = 90$, et les déterminations pour le microscope à trois verres seront:

$$a = 0{,}0632, \qquad p = 0{,}1896,$$
$$f = 0{,}0262, \qquad q = 0{,}1816,$$
$$g = 0{,}0369, \qquad r = 0{,}4000$$
$$\text{et} \quad z = 0{,}1094.$$

Ici il est remarquable, qu'une si grande multiplication n'exige pas des verres si extrêmement petits, et que pourtant le champ apparent et la clarté sont encore assez considérables. Or les distances des verres sont si petites, qu'il ne s'en faut pas de beaucoup, quils ne se touchent.

84. Mais faisons en sorte, que le champ clair ne s'évanouisse pas entièrement, et poson $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{3}$, pour avoir le champ apparent clair $= \frac{1}{9}$, et les dèterminations pour le microscope à 3 verres seront:

$$ma = \frac{384}{m-50}, \quad a = \frac{384}{m(m-50)} \quad \text{et} \quad p = \frac{384}{(m-50)^2},$$

$$f = \frac{384(m-98)}{10(m-50)(m+190)}, \quad q = \frac{384}{5(m+190)}, \quad g = \frac{2(m-98)}{5(m+190)}, \quad r = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad z = \frac{192}{m(m-98)},$$

où il faut que $m$ soit plus grand que 98. Soit donc $m = 110$ et on aura pour le microscope:

$$a = 0{,}0582, \qquad p = 0{,}1066,$$
$$f = 0{,}0256, \qquad q = 0{,}2560,$$
$$g = 0{,}0160, \qquad r = 0{,}4000$$
$$\text{et} \quad z = 0{,}1454.$$

85. Ce sont donc les seuls microscopes à trois verres, qu'on puisse juger préférables à ceux, qui n'ont que deux ou un verre, et on voit même que si l'on demande une fort grande multiplication, qui surpasse 80 ou 90, il faut recourir à trois verres, attendu que deux verres exigeraient alors un trop petit objectif, ou représenteraient trop obscurément. De là on comprend combien sont défectueux les microscopes composés dont on se sert ordinairement, et que ceux qui les rejettent entièrement, n'ont que trop raison. Il en est des microscopes à peu près comme des télescopes, car comme en ceux-ci, pour produire une grande multiplication, il faut absolument employer un grand objectif, ainsi, pour construire un microscope qui multiplie beaucoup, il faut absolument de très petits verres objectifs. On voit aussi qu'un tel microscope, soit qu'il soit composé de deux ou trois verres, ou même de plusieurs, doit toujours être fort court, en sorte que les verres se touchent presque mutuellement; et les microscopes, qui ont quelque longueur considérable, sont toujours assujettis à des inconvénients, qui en rendent l'usage sans fruit.

# VARIA.

# XXVII.

# Réflexions sur la Détermination de la Déclinaison de la Boussole.

---

1. Quand je déterminai la déclinaison de l'aiguille aimantée, dans l'hypothèse que les deux pôles magnétiques de la terre n'étaient pas diamétralement opposés l'un à l'autre, je m'étais servi de ce principe: que l'aiguille prenait toujours une situation, qui fût avec l'axe magnétique ou la droite tirée d'un pôle magnétique à l'autre dans le même plan. Ce principe me parut d'abord incontestable, puisqu'il n'y aurait aucune raison, pourquoi l'aiguille devrait décliner du plan qui passe par les deux pôles magnétiques; et puisque le cas, où les pôles magnétiques sont diamétralement opposés, en était une suite nécessaire; auquel cas l'aiguille doit, sans contredit, partout être dirigée suivant le grand cercle tiré par les pôles magnétiques. De là j'avais déduit pour une situation quelconque des pôles magnétiques cette règle: que l'aiguille se dirigait toujours selon le petit cercle, tiré par l'endroit de l'aiguille et les deux pôles magnétiques de la terre.

2. Or pour examiner plus soigneusement ce principe, il faut distinguer deux positions de l'aiguille; l'une qu'elle prendrait, si elle n'avait aucun poids et qu'elle fût uniquement sollicitée par l'action magnétique; alors l'aiguille ne déclinerait pas seulement de la ligne méridienne, mais elle serait aussi inclinée à l'horizon, au moins pour la plupart des endroits Ce serait la position que l'aiguille doit prendre conformément à la déclinaison et à l'inclinaison à la fois; et puisqu'elle suivrait parfaitement la direction de l'action magnétique, ce sera la veritable direction magnétique qu'il faut bien distinguer de la situation horizontale de l'aiguille, d'où l'on détermine sa déclinaison; car cette situation est l'effet de l'action magnétique et de la gravité à la fois, en tant qu'on rend un bout de l'aiguille plus pesant, pour lui procurer une situation horizontale.

3. Maintenant il n'y a point de doute, que la veritable direction magnétique ne suive exactement le plan qui passe par les pôles magnétiques, et à cet égard le principe, que j'avais établi est parfaitement conforme à la verité. Mais il n'en suit pas, que l'autre situation horizontale, que les boussoles montrent, soit aussi dans le même plan, tiré par les pôles magnétiques de la terre; il est plutôt clair, que l'aiguille, en s'élevant de la direction naturelle magnétique, se meut dans un plan vertical, qui étant différent du plan qui passe par les pôles magnétiques, l'aiguille étant parvenue à la direction horizontale ne se trouvera plus dans ce dernier plan. D'où il s'ensuit, que le petit cercle tiré par les pôles magnétiques de la terre et le lieu de la boussole n'indique la direction, que lorsque le plan de ce petit cercle est vertical.

4. Pour mettre cela dans tout son jour, considérons une sphère (Fig. 271.), au centre de laquelle $c$ soit le pivot de la boussole. Que $hzon$ soit le méridien, $hd\delta o$ l'horizon, et le grand cercle $m\delta\mu$ représente le plan qui passe par le centre de l'aiguille et les pôles magnétiques de la terre. Soit maintenant $ci$ la véritable direction magnétique, laquelle l'aiguille prendrait si elle était uniquement soumise à l'action magnétique, sans que la gravité en puisse altérer l'effet; de sorte que cette situation naturelle à l'aiguille se trouve dans le plan $m\delta\mu$, qui passe par les pôles magnétiques de la terre. Maintenant si l'on charge l'autre bout de l'aiguille, pour la réduire à l'horizon, le bout $i$ montera par le cercle vertical $zdin$ tiré par le point $i$, et parviendra à la situation $cd$, qui est celle d'où l'on juge sa déclinaison.

5. De là il est clair que l'arc de l'horizon $hd$ exprime la déclinaison de l'aiguille aimantée; or l'arc du cercle vertical $di$ en exprimera l'inclinaison. Mais dans le calcul, que j'avais fait conformément au principe mentionné, l'arc ou l'angle $\delta$, qui devait exprimer la déclinaison de l'aiguille, ne marque pas l'arc $hd$, qui est la vraie déclinaison; car puisque $\delta$ indique l'angle que fait sur la surface de la terre le petit cercle tiré par les pôles magnétiques avec le méridien, cette même lettre $\delta$ exprimera dans notre figure l'arc $h\delta$, ou bien la déclinaison du point $\delta$, où le plan tiré par les pôles magnétique coupe l'horizon. D'où l'on voit que cette lettre $\delta$ ne convient avec la déclinaison magnétique, qu'en deux cas, l'un, où l'inclinaison $di$ s'évanouit et l'autre, où le grand cercle $m\delta\mu$ est vertical.

6. La valeur de $\delta$ peut donc être très différente de la déclinaison de l'aiguille aimantée, et on ne la saurait même connaître par les seules observations. Car quand même les instruments, dont on se sert dans ces observations, seraient les plus parfaits, ils ne montreraient que la déclinaison $hd$ et l'inclinaison $di$, d'où l'on n'est pas en état de déterminer le point $\delta$; il faudrait outre cela savoir la position du grand cercle $m\delta\mu$, par rapport ou à l'horizon ou au méridien. Car si l'on savait l'inclinaison de ce cercle à l'horizon ou l'angle $d\delta i$, on aurait $\sin d\delta = \frac{\operatorname{tang} di}{\operatorname{tang} d\delta i}$; mais si l'on savait son inclinaison au méridien ou l'angle $\delta\mu n$, ayant dans le triangle $\mu in$ le côté $in = 90^0 - di$, l'angle $\mu ni = hd$ et l'angle $n\mu i$, on trouverait le côté $\mu n = 90^0 - h\mu$, et delà $\operatorname{tang} h\delta = -\cos\mu n \operatorname{tang} n\mu i$.

7. Réciproquement quand même on connaîtrait la position du cercle $m\delta\mu$, on n'en pourrait conclure ni la déclinaison ni l'inclinaison de l'aiguille; mais l'une étant connue outre cela, on en déduirait aisément l'autre. Or pour connaître la position du cercle $m\delta\mu$, il faut savoir ces deux éléments: 1) son inclinaison à l'horizon ou l'angle $h\delta\mu$ et 2) son inclinaison au méridien ou l'angle $h\mu\delta$ ou $\delta mo$. Alors sachant dans le triangle $\delta mo$, les angles $m\delta o$, $\delta mo$ l'angle de $o$ étant droit, on en déduira:

$$\cos m\delta = \cot m\delta o \,.\, \cot \delta mo; \quad \cos o\delta = \frac{\cos \delta mo}{\sin m\delta o} \quad \text{et} \quad \cos mo = \sin zm = \frac{\cos m\delta o}{\sin \delta mo}.$$

Or ayant l'angle $h\delta i$ avec l'arc $h\delta$, dès qu'on a la déclinaison $hd$ et partant l'arc $d\delta$, on trouvera l'inclinaison $di$, puisque l'angle $\delta di$ est droit; et ayant l'inclinaison $di$, on en détermine l'arc $d\delta$, et partant aussi la déclinaison $hd$.

8. De là on comprend, que quand même la terre n'aurait que deux pôles magnétiques, et que leur position nous serait connue, cela ne suffirait pas pour déterminer la déclinaison de la boussole, et la question serait encore beaucoup plus difficile qu'on aurait pu penser d'abord. Je ne vois pas même que cette connaissance nous pourrait fournir des éclaircissements là dessus, à moins qu'on ne trouvât moyen de déterminer immédiatement la véritable direction magnétique par rapport aux pôles magnétiques de la terre. Cela pourrait donner occasion à des fort belles recherches physiques sur la direction d'une aiguille aimantée dans le voisinage d'un aimant très grand et très fort, pourvu que le magnétisme de la terre n'en troublât l'effet. On devrait

soigneusement observer quelle direction l'aiguille prendrait, en quelqu'endroit par rapport à l'aimant, qu'elle fût posée. Peut être qu'un grand nombre d'expériences de cette façon nous découvrirait une règle certaine, par laquelle on pourrait ensuite déterminer la direction magnétique pour tous les lieux de la terre.

9. Pour m'expliquer mieux, soient $A$ et $B$ (Fig. 272.) les deux pôles magnétiques de la terre, ou d'un aimant quelconque, et partant la droite $ACB$ l'axe magnétique. Que la planche représente un plan quelconque, qui passe par l'axe magnétique, où soit pris un point quelconque $L$, autour duquel une aiguille soit librement mobile. Cette aiguille prendra une certaine situation $Ll$ dans le même plan qui dependra de la position du lieu $L$ par rapport à l'axe magnétique, et il serait à souhaiter, qu'on sût pour chaque lieu $L$ déterminer la direction $Ll$. De là on connaîtrait dans le grand cercle $m\delta\mu$ le point $i$ (Fig. 271.): et la position de ce cercle étant supposée connue, on en pourrait déterminer tant la déclinaison $hd$ que l'inclinaison $di$ de l'aiguille aimantée. Donc pour parvenir à ce but, outre la position des deux pôles magnétiques de la terre, il faudrait connaître la loi, suivant laquelle une aiguille $Ll$ se dirige, de quelque manière qu'elle soit placée par rapport à l'axe $AB$ d'un aimant.

10 Or il semble que nous ne sommes pas si éloignés de cette connaissance, puisqu'il y a une infinité de cas, où la direction $Ll$ (Fig. 272.) peut être assignée. Car si le lieu $L$ se trouve dans l'axe magnétique même $AB$, il n'y a aucun doute que la direction $Ll$ ne convienne avec celle de l'axe magnétique. Ensuite il y aura entre les pôles $A$ et $B$ un centre $C$, d'où, si l'on tire la droite $CE$ perpendiculaire à l'axe $AB$, il est clair, qu'en quelque point $E$ de cette ligne on place l'aiguille, elle prendra certainement la position $Ee$ parallèle à l'axe $AB$. Donc si nous tirons d'un lieu quelconque $L$ au centre $C$ la droite $LC$, et que nous nommions les angles $ACL = \theta$ et $CLl = \varphi$, il y aura un tel rapport entre ces deux angles, que si $\theta = o$, l'angle $\varphi$ s'évanouira aussi, et si l'angle $\theta$ est droit, l'autre $\varphi$ sera aussi toujours droit. Or en général il semble que la distance $CL = z$ entre aussi dans le rapport entre les angles $\theta$ et $\varphi$, en sorte peut être que $\tang \varphi = Z \tang \theta$, de sorte que $Z$ marque une certaine fonction de $z$.

11. Supposons donc que cette loi nous soit connue, et peut être suffira-t-il qu'elle le soit à peu près; et si nous envisageons les pôles magnétiques de la terre aussi comme connus, nous serons en état de déterminer pour tous les lieux de la terre non seulement la déclinaison, mais aussi l'inclinaison de l'aiguille aimantée. Ce problème sera encore fort difficile et demandera des calculs assez embarrassés, mais il paraît bien digne qu'on y apporte toute l'attention, puisqu'il contient l'unique moyen de parvenir enfin à une parfaite connaissance tant de la déclinaison que de l'inclinaison magnétique. Et joignant ces deux phénomènes ensemble, il y a grande apparence, qu'on en pourra déduire un jour le plus sûr moyen de résoudre le grand problème des longitudes. Car si nous connaissions à *priori* pour chaque lieu de la terre tant la déclinaison que l'inclinaison de l'aiguille aimantée, et qu'on fût en état de les observer exactement, on ne saurait presque plus se tromper sur la détermination géographique du lieu où l'on se trouve.

12. Soient donc $A$ et $B$ (Fig. 273.) les deux pôles magnétiques sur la surface de la terre, que je regarde comme sphérique, sur la quelle soit proposé un lieu quelconque $L$, d'où je tire aux pôles magnétiques les arcs de grands cercles $LA$ et $LB$. Ayant aussi tiré l'arc de grand cercle $AB$, soit $C$ son milieu, et posons $AC = BC = c$, $AL = f$ et $BL = g$. Maintenant pour trouver le plan qui passe par le point $L$ et les deux pôles magnétiques $A$ et $B$, concevons un petit cercle tiré par ces trois points, dont le centre pris dans la surface de la sphère soit en $O$; et puisque le rayon de la sphère tiré au point $O$ est perpendiculaire au plan $LAB$, et le rayon tiré au point $L$ perpendiculaire à l'horizon de $L$, l'arc de grand cercle $LO$ qui mesure l'angle compris entre ces deux rayons, mesurera aussi l'inclinaison du plan $LAB$ à l'horizon du lieu $L$, et partant aussi l'angle $m\delta o$ de la figure 271.

13. Pour trouver ce point $O$ et l'arc $LO$, concevons baissées de $O$ sur les côtés $AL$ et $BL$ des perpendiculaires qui y tomberont au milieu, et de là en posant l'arc $LO = z$, on aura:

$$\cos ALO = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} f}{\operatorname{tang} z} \quad \text{et} \quad \cos BLO = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} g}{\operatorname{tang} z},$$

donc: $$\sin ALO = \frac{\sqrt{(\operatorname{tang}^2 z - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} f)}}{\operatorname{tang} z} \quad \text{et} \quad \sin BLO = \frac{\sqrt{(\operatorname{tang}^2 z - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} g)}}{\operatorname{tang} z}.$$

Or l'angle $ALB$ étant donné par les trois côtés $AB = 2c$, $AL = f$ et $BL = g$, soit $ALB = \lambda$, et nous aurons:

$$\cos \lambda \operatorname{tang}^2 z = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} f \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g - \sqrt{(\operatorname{tang}^2 z - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} f)(\operatorname{tang}^2 z - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} g)};$$

et ôtant l'irrationalité, cette équation sera divisible par $\operatorname{tang}^2 z$, d'où résulte:

$$\cos^2 \lambda \operatorname{tang}^2 z - 2 \cos \lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} f \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g = \operatorname{tang}^2 z - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} f - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} g,$$

et partant: $$\sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 z = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} f + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} g - 2 \cos \lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} f \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g,$$

de sorte que: $$\operatorname{tang} z = \frac{1}{\sin \lambda} \sqrt{(\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} f + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} g - 2 \cos \lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} f \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g)}.$$

14. Multiplions l'équation penultième par $\cos^2 \frac{1}{2} f \cos^2 \frac{1}{2} g$, pour avoir:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} f \cos^2 \tfrac{1}{2} g \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 z = \sin^2 \tfrac{1}{2} f \cos^2 \tfrac{1}{2} g + \cos^2 \tfrac{1}{2} f \sin^2 \tfrac{1}{2} g - 2 \cos \lambda \sin \tfrac{1}{2} f \cos \tfrac{1}{2} f \sin \tfrac{1}{2} g \cos \tfrac{1}{2} g.$$

Cette dernière partie à cause de:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} f = \frac{1 - \cos f}{2}, \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} g = \frac{1 + \cos g}{2}, \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} f = \frac{1 + \cos f}{2}, \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} g = \frac{1 - \cos g}{2},$$

et: $$\sin \tfrac{1}{2} f \cos \tfrac{1}{2} f = \tfrac{1}{2} \sin f, \quad \sin \tfrac{1}{2} g \cos \tfrac{1}{2} g = \tfrac{1}{2} \sin g,$$

se reduit à: $$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos f \cos g - \tfrac{1}{2} \cos \lambda \sin f \sin g.$$

Or en introduisant le troisième côté $AB = 2c$, à cause de $\cos \lambda = \dfrac{\cos 2c - \cos f \cos g}{\sin f \sin g}$, cette partie devient:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos f \cos g - \tfrac{1}{2} \cos 2c + \tfrac{1}{2} \cos f \cos g = \frac{1 - \cos 2c}{2} = \sin^2 c,$$

d'où nous tirons: $$\cos^2 \tfrac{1}{2} f \cos^2 \tfrac{1}{2} g \sin^2 \lambda \operatorname{tang}^2 z = \sin^2 c,$$

donc: $$\operatorname{tang} z = \frac{\sin c}{\cos \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \sin \lambda}.$$

Voilà une simple formule pour le rayon du cercle circonscrit à un triangle sphérique.

15. Ayant trouvé: $$\operatorname{tang} z = \operatorname{tang} LO = \frac{\sin c}{\cos \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \sin \lambda},$$

on trouvera pour la position de l'arc $LO$:

$$\cos ALO = \frac{\sin \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \sin \lambda}{\sin c}, \quad \cos BLO = \frac{\cos \frac{1}{2} f \sin \frac{1}{2} g \sin \lambda}{\sin c},$$

et moyennant la relation:

$$\cos 2c = \cos f \cos g + \cos \lambda \sin f \sin g,$$

les sinus de ces deux angles pourront être exprimés rationnellement en sorte:

$$\sin ALO = \frac{\cos \frac{1}{2} f \sin \frac{1}{2} g - \sin \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \cos \lambda}{\sin c}$$

et:

$$\sin BLO = \frac{\sin \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g - \cos \frac{1}{2} f \sin \frac{1}{2} g \cos \lambda}{\sin c},$$

d'où l'on pourrait tirer plusieurs beaux corollaires comme:

$$\cos ALO + \cos BLO = \frac{\sin \frac{1}{2}(f+g) \sin \lambda}{\sin c},$$

$$\sin ALO + \sin BLO = \frac{\sin \frac{1}{2}(f+g)(1-\cos \lambda)}{\sin c}$$

et:

$$\cos ALO - \cos BLO = \frac{\sin \frac{1}{2}(f-g) \sin \lambda}{\sin c},$$

$$\sin BLO - \sin ALO = \frac{\sin \frac{1}{2}(f-g)(1+\cos \lambda)}{\sin c}.$$

16. Cet arc $LO = z$, dont nous venons de trouver la tangente, mesure l'angle, dont le plan $LAB$ est incliné à l'horizon du lieu $L$, et si nous décrivons du centre $O$ avec le rayon $OL$ l'arc du petit cercle $L\delta$, l'intersection se fera selon la direction $L\delta$, laquelle étant dans l'horizon et perpendiculaire à l'arc $LO$, nous aurons pour l'angle $AL\delta$:

$$\sin AL\delta = \frac{\sin \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \sin \lambda}{\sin c}$$

et:

$$\cos AL\delta = \frac{\cos \frac{1}{2} f \sin \frac{1}{2} g - \sin \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \cos \lambda}{\sin c},$$

donc:

$$\operatorname{tang} AL\delta = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} f \sin \lambda}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} g - \operatorname{tang} \frac{1}{2} f \cos \lambda}.$$

Connaissant donc sur l'horizon la direction $L\delta$, le plan $LAB$ sera incliné à l'horizon de l'angle $z$, en sorte que:

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin c}{\cos \frac{1}{2} f \cos \frac{1}{2} g \sin \lambda}.$$

17. Pour ne laisser ici aucune ambiguité sur le sens de cette inclinaison, soient $P$ et $p$ les vrais pôles de la terre, et partant $PAp$ le méridien qui passe par le pôle boréal magnétique $A$, que je prendrai pour le premier méridien, duquel je conterai les longitudes vers l'occident; de sorte qu'ayant tiré par le lieu $L$ le méridien $PLp$, l'angle $APL = q$ marque la longitude du lieu $L$, comptée vers l'occident depuis le méridien $PAp$. De là posant l'arc $PL = p$, l'arc $AP$ étant supposé connu, on trouvera l'angle $PLA = l$, duquel en retranchant l'angle $AL\delta$, il restera l'angle $PL\delta = l - AL\delta = \delta$, qui étant positif, marquera l'arc $h\delta$ dans la figure 271 pris depuis le point $h$ vers l'est; et l'arc $z$ marquant l'inclinaison du plan $LAB$ à l'horizon, en se baissant vers l'est, donnera l'angle $o\delta\mu$. De là, puisqu'on a dans la figure 271 l'arc $h\delta = l - AL\delta$ et l'angle $o\delta\mu = z$, la position du grand cercle $m\delta\mu$ tiré par les pôles magnétiques de la terre sera connue.

18. Considérons à présent séparement le plan $LAB$ (Fig. 274), qui passe par les deux pôles magnétiques $A$ et $B$ et le lieu proposé $L$; et les côtés du triangle rectiligne $LAB$ étant les cordes du triangle sphérique précédent $LAB$, nous aurons:

$$AB = 2 \sin c, \qquad AL = 2 \sin \tfrac{1}{2} f, \qquad BL = 2 \sin \tfrac{1}{2} g.$$

Soit $O$ le centre du cercle circonscrit à ce triangle, et on aura $LO = \sin z$, et de là $\cos ALO = \frac{\sin \frac{1}{2} f}{\sin z}$; $\cos BLO = \frac{\sin \frac{1}{2} g}{\sin z}$. Si nous nommons l'angle $ALB = L$, nous trouverons $\sin z = \frac{\sin c}{\sin L}$; et partant:

$$\cos ALO = \frac{\sin \frac{1}{2} f \sin L}{\sin c} = \sin ABL.$$

Donc tirant à $LO$ la perpendicale $L\delta$, on aura l'angle $AL\delta = ABL$. Or cette ligne $L\delta$, étant la tangente du cercle circonscrit, sera dans l'horizon, et si $Li$ est la direction magnétique, l'angle $\delta Li$ donnera l'arc $\delta i$ dans la figure 271, d'où l'on déterminera enfin la déclinaison $hd$ et l'inclinaison $di$.

19. Avant que développer mieux ces formules, concevons un grand cercle de la terre, qui passe par les pôles magnétiques $A$ et $B$ (Fig. 275.), dans lequel soit $O$ le centre de la terre, et $AB$ l'axe magnétique; et voyons quelle sera la direction magnétique aux pôles magnétiques même $A$ et $B$. Or il est d'abord clair que dans ces endroits l'aiguille doit être dirigée selon l'axe même $AB$; et partant en $A$ la ligne $Aa$ exprime la direction magnétique; laquelle n'étant pas verticale, l'aiguille y montrera une déclinaison déterminée selon $AG$. Donc en tant que l'axe magnétique $AB$ ne passe pas par le centre de la terre, les pôles magnétiques n'ont pas la proprieté, que la déclinaison y est indéterminée, comme j'avais soutenu dans mon mémoire précédent, où en vertu de cette proprieté toutes les lignes Halleyennes se réunissent aussi bien dans les pôles magnétiques que dans les pôles naturels de la terre. Donc réciproquement les pôles magnétiques ne se trouvent pas là, où la direction magnétique est verticale et partant la déclinaison indéterminée.

20. Cependant il y aura pourtant tels lieux sur la terre où la direction magnétique est verticale, ou dirigée vers le centre de la terre. Pour trouver ces endroits, il est d'abord évident, qu'il faut les chercher dans le grand cercle tiré par les pôles magnétiques. Or je remarque que dans l'arc $AEB$, qui renferme le moindre segment du cercle, il doit y avoir un point $E$, où la direction magnétique $Ee$ est horizontale; de là, en avançant vers le pôle boreal $A$ l'aiguille *d'inclinaison* baissera sous l'horizon comme en $F$ selon $Ff$; et avant qu'on parvienne au pôle $A$, même, il y aura un endroit $G$, où la direction magnétique est précisément verticale. Il y aura un semblable point $H$ de l'autre côté vers le pôle $B$; mais dans l'arc $AIB$, qui forme le plus grand segment, il n'y aura point de tels points; car en $I$ la direction magnétique $Ii$ étant horizontale, elle sinclinera au-dessous de l'horizon en avançant vers $A$, toujours en même sens, de sorte que l'angle $OKk$ soit partout plus grand que l'angle $OAa$, et partant nulle part égal à zéro.

21. Donc quoique les pôles magnétiques de la terre n'ayent pas la proprieté que l'inclinaison magnétique y soit verticale, il y a deux autres points $G$ et $H$, auxquels cette proprieté convient: et qui seront d'autant plus remarquables, que la déclinaison magnétique y est indéterminée, et que de toute part autour d'eux l'aiguille y sera dirigée. Par cette raison toutes les lignes Halleyennes, qu'on tire par tous les endroits où la déclinaison est la même, passeront par ces deux points. Donc sur la carte que j'ai jointe à mon premier mémoire sur ce sujet, les deux points où toutes les lignes Halleyennes aboutissent, ne sont pas les pôles magnétiques de la terre, mais plustôt les points $G$ et $H$ que je viens d'indiquer ici; et en avertissant seulement, que les pôles magnétiques se trouvent hors de ces points de la carte, il y a grande apparence que les lignes Halleyennes, que j'y ai tracées, sont justes, et qu'elles n'ont pas besoin d'autre correction tirée des éclaircissements que j'expose ici. C'est par cette raison, que je n'ai pas jugée à propos de rejetter mes recherches précédentes, puisqu'elles peuvent avoir le même usage dans la pratique, et qu'il ne paraît pas encore comment on pourra mettre à profit cette nouvelle théorie

22. Il est clair que ces points $G$ et $H$ ne sauraient être fort éloignés des pôles magnétiques $A$ et $B$; et leur distance ne surpasse pas peut être un ou quelques degrés. Donc puisque sur la carte que j'ai eu l'hon-

neur de présenter, il était impossible de s'assurer à quelques degrés près sur la vraie position des pôles magnétiques, ou plutôt des points $G$ et $H$, on pourra bien regarder ces points comme les véritables pôles magnétiques; et cela d'autant plus, que les expériences semblent prouver, qu'il faudrait ces points, où les lignes Halleyennes aboutissent, plus éloigner des pôles du monde; or alors les pôles magnétiques, étant aussi éloignés des pôles, pourraient bien parvenir aux points où les lignes Halleyennes aboutissent à présent. Nous ne nous tromperons donc pas beaucoup, si nous envisageons ces points marqués sur la carte comme les vrais pôles magnétiques de la terre.

23. Connaissant donc à peu près les pôles magnétiques de la terre, appliquons les calculs généraux, que je viens d'exposer, à la ville de Berlin, où la déclinaison de l'aiguille est observée de 16° vers l'ouest et l'inclinaison de 72°. Or posant $L$ (Fig. 273.) pour Berlin, nous aurons $PL = p = 37^0\,30'$, et la longitude prise du méridien $PAp$ vers l'occident ou l'angle $APL = q = 230^0$; ensuite l'arc $PA = 15^0$, l'arc $PB = 145^0$ et l'angle $APB = 60^0$, a peu près. De là on trouve $AB = 2c = 135^0\,56'$ et partant $c = 67^0\,58'$. Ensuite $AL = f = 311^0\,41'$, $ALP = 164^0\,36' = l$, $BL = g = 173^0\,35'$ et $BLP = 63^0\,1'$, donc $\frac{1}{2}f = 155^0\,50\frac{1}{2}'$, $\frac{1}{2}g = 86^0\,47\frac{1}{2}'$ et $ALB = -101^0\,35' = 258^0$, $25^0 = \lambda$. Ensuite on trouve $AL\delta = 181^0\,23'$, et de là $PL\delta = \delta = -16^0\,47'$ et $z = 86^0\,55'$. Donc dans la figure 271 $h\delta = -16^0\,47'$, $o\delta\mu = 86^0\,55'$, et partant si l'on prend $di = 72^0$, on trouve $hd = -9^0\,33'$ et $\delta i = 72^0\,15'$. Donc la déclinaison ne serait que de $7^0\,14'$ vers l'ouest, et dans la figure 274 prenant $\delta Li = 72^0\,15'$, la ligne $Li$ serait dirigée vers un point de la ligne $AB$ entre $C$ et $B$.

24. Là-dessus nous pouvons faire les réflexions suivantes: 1) que l'angle négatif $PL\delta$ doit être plus grand que $16^0\,47'$, l'arc $z$ demeurant $= 86^0\,55'$; ou que cet arc doit plus approcher de 90°, si l'angle $PL\delta$ demeurait le même. 2) De là on peut conclure qu'il faut augmenter l'un et l'autre. Car représentant l'état de Berlin dans la figure 276, où l'arc $hd$ pris vers l'occident soit $= 16^0$, et l'inclinaison $di = 72^0$, si nous posons l'angle $d\delta i = z$, nous aurons $\sin d\delta = \frac{\operatorname{tang} 72^0}{\operatorname{tang} z}$, ou $\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{tang} 72^0}{\sin 0^0\,47'}$; de là nous voyons que:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| si $z = 86^0\,55'$ | il y aura | $d\delta = 9^0\,33'$ | et | $h\delta = \delta = 25^0\,33'$ |
| » 87 0 | » | » 9 17 | » | » 25 17 |
| » 87 30 | » | » 7 43 | » | » 23 43 |
| » 88 0 | » | » 6 10 | » | » 22 10 |
| » 88 30 | » | » 4 37 | » | » 20 37 |
| » 89 0 | » | » 3 5 | » | » 19 5 |

25. Supposons que $z$ doive être $= 88^0$, et puisque la grandeur de sa tangente dépend principalement du $\cos \frac{1}{2}g$, il faudra approcher l'angle $\frac{1}{2}g$ plus de 90°, soit donc $\frac{1}{2}g = 87^0\,30'$ et partant $BL = g = 175^0$. Ensuite, puisque $\delta = 22^0\,10' = AL\delta - l$, et que l'angle $AL\delta$ ne change pas sensiblement, il faut qu'il soit $l = ALP = 159^0\,13'$, et partant plus petit qu'auparavant; ce qu'on obtiendra en augmentant la distance $AP$, l'angle $APL$ n'y contribuant pas beaucoup; on pourra donc supposer $AP = 18^0$, ce qui produira à peu près la dite valeur de $l$; l'arc $AL$ n'en étant pas sensiblement alteré. Mais pour que l'arc $BL$ devienne plus grand, il faut diminuer l'angle $APB$ que nous avons supposé de 60°, et il suffira de le mettre $APB = 55^0$; alors l'arc $AB$ deviendra plus petit. Cependant après toutes ces corrections, on trouve que dans la figure 274 la direction $Li$ tend vers le milieu de la ligne $AB$, et encore au de-là du milieu $C$ vers l'autre pôle $B$.

# XXVIII.

## Recherches sur la découverte des courants de la mer *).

---

§ 1. Pour développer cette question, proposée par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année prochaine 1749, je remarque d'abord, que sans avoir égard ni au ciel, ni au continent ou autres parties de la terre, qui n'ont d'autre mouvement, que celui qui leur est commun avec la terre même, il est absolument impossible de s'apercevoir d'aucun mouvement, que puisse avoir la mer. Car quelque adresse que nous puissions employer pour connaître le mouvement du vaisseau où nous nous trouvons, nous n'en saurions déterminer que son mouvement relatif par rapport à l'eau; mais du mouvement de l'eau même, rien ne saurait être conclû de là.

§ 2. Il n'y a donc que deux voies pour s'apercevoir si la mer a quelque mouvement ou courant, ou non. La première nous est fournie par le ciel, car si nous sommes en état de déterminer par les observations célestes tant la latitude que la longitude du lieu où nous nous trouvons, et que nous puissions aussi exactement assigner la situation du même lieu, par l'estime du sillage que le vaisseau a fait, supposant que la mer soit en repos. Tant que ces deux conclusions ne seront pas d'accord entr'elles, la différence sera attribuée au mouvement de la mer, par lequel le vaisseau aura été transporté dans un autre endroit, que l'estime du chemin parcouru ne paraîtra indiquer. C'est de là que je tirerai le premier moyen de découvrir le mouvement ou le courant de la mer, quoique les conclusions qu'on en peu tirer, soient pour la plupart fort mal assurées.

§ 3. Le continent ou les terres, qu'on rencontre sur la route qu'on poursuit, fournissent le second moyen de reconnaître les courants de la mer; soit que la situation de ces terres soit connue ou non. Quand le courant de la mer s'étend jusqu'aux côtes de ces terres, ce sera le plus sûr et le plus aisé moyen de s'en apercevoir; mais si le courant ne se trouve qu'en pleine mer, la rencontre des terres tant connues qu'inconnues ne manquera pas de nous éclaircir sur ce sujet, ce que j'examinerai plus au long dans la seconde partie de ce discours.

§ 4. Dans les endroits où il est permis de pénétrer jusqu'au fond de la mer, on concevra aisément qu'il doit être possible d'en tirer sans beaucoup de peine la connaissance des courants s'il y en a, et que ce moyen sera encore le moins sujet à des inconvénients, qui se rencontrent dans les deux autres. Quoique cette méthode semble appartenir à la précédente, à cause que c'est à quelque partie immobile de la terre qu'on

---

*) Mémoire destiné au concours de l'Académie de Paris pour l'année 1749, mais resté inachevé et par là inédit.

rapporte l'état de la mer, neanmoins puisque cette méthode demande une exécution tout à fait différente, j'y destinerai la troisième partie de mes recherches, et qui me paraît renfermer les plus sûrs moyens de découvrir les courants.

§ 5. La raison nous assure, et l'expérience le confirme, que les courants pénètrent rarement jusqu'au fond de la mer. Le mouvement est pour la plupart le plus vite à la surface, de laquelle en descendant il décroit insensiblement, jusqu'à ce qu'il s'évanouisse tout à fait au fond même. Peut-être qu'il y a aussi des cas, où les courants ne s'étendent qu'à une profondeur assez médiocre, et alors il y aura des moyens de s'assurer des courants par des expériences faites dans l'eau dormante au-dessus du courant. Pour cet effet j'ajouterai la quatrième partie, qui, quand même on ne serait jamais assuré que ce cas ait lieu, servira toujours à connaître la différence du mouvement de la mer à la surface, et à quelque profondeur; et quoique cela ne regarde pas immédiatement la question proposée, il contribuera toujours considérablement à la connaissance des mouvements de la mer, à quoi le but de la question paraît s'étendre.

§ 6 Je conviens que plusieurs des méthodes, que je proposerai, seront très imparfaites, de sorte qu'on ne s'en pourra promettre beaucoup de succès. Mais comme la cause de cette imperfection se trouve dans l'imperfection des méthodes et des instruments, propres à faire les observations tant du ciel que du sillage, je ne crois pas que je les aurais dû omettre pour cette raison. Je suis plutôt assuré, que l'Academie Royale demande un parfait dénombrement de toutes les manières possibles pour arriver à ce but, soit qu'elles soient praticables dans l'état présent de la marine, ou non. En tout cas l'utilité de ces méthodes sera que, bien qu'on ne saurait rien conclure d'une seule, deux ou plusieurs ensemble, qui conduiront à la même conclusion, ne manqueront pas d'en augmenter la certitude.

---

## Première Partie.

### *Des moyens tirés des observations célestes pour découvrir les courants de la mer.*

§ 7. Je commencerai par considérer un vaisseau, qui n'ait aucun mouvement par rapport à l'eau, ou qui dans un calme paraisse être dans un parfait repos, de sorte qu'il demeure constamment environné des mêmes parties de l'eau. Il est vrai que ce cas est très rare et qu'il ne dure guère longtemps, néanmoins il est à propos de le considérer avant que d'envisager l'autre cas, où le vaisseau a un mouvement par rapport à la mer. Que le vaisseau donc tienne constamment le même lieu sur la mer; et il sera effectivement dans un repos parfait, si la mer sera destituée de tout courant. Dans ce cas il est clair, que les observations célestes marqueront toujours tant la même élévation du pôle, que la même longitude.

§ 8. Donc si nous supposons, qu'on soit en état de déterminer exactement par les observations du ciel, tant la latitude que la longitude du lieu où on se trouve, il s'ensuit réciproquement, que dans le cas proposé, où le vaisseau paraît demeurer toujours au même endroit, si l'on observe toujours la même élévation du pôle et la même longitude, que la mer n'aura aucun courant, mais qu'elle persévère dans un parfait repos aussi bien que le vaisseau, par rapport à la terre. Il est vrai qu'il s'en faut beaucoup qu'on ne soit en état de s'assurer par cette méthode de la tranquillité de la mer; mais je crois qu'il me sera permis de ne pas regarder ici à l'imperfection des manières d'observer, que j'envisagerai comme étant portées au plus haut degré de perfection. Cependant je ne laisserai pas de remarquer à chaque méthode tout ce qui la pourrait rendre impraticable.

§ 9. Dans la même supposition, que le vaisseau demeure en repos par rapport à la mer, si après quelque temps on remarque que la latitude, ou la longitude ou toutes les deux aient changé: on en concluera, qu'il y a quelque courant sur la mer, et il sera aisé d'en déterminer tant la vitesse que la direction. Car puisque le vaisseau se trouve en repos par rapport à l'eau, ce sera l'eau, qui aura été transportée pendant ce temps d'un endroit à l'autre par son courant. Pour cet effet on n'aura qu'à marquer sur la carte depuis le lieu où le vaisseau était au commencement, la différence de latitude et de longitude qui auront été trouvées par les observations, et on aura l'espace que la surface de la mer aura parcouru pendant le temps qui s'est passé entre les observations, et de là on déterminera aisément le courant.

§ 10. Cette détermination aura lieu, quand même le vaisseau sera porté d'un mouvement quelconque par rapport à la mer. Car après avoir déterminé le vrai lieu où le vaisseau s'est trouvé au commencement de cette recherche, on observera soigneusement le sillage pour en connaître, combien on s'est avancé tant en longitude qu'en latitude, et on marquera ce lieu sur la carte. Ensuite on cherchera aussi par les observations du ciel combien on aura fait de chemin tant en longitude qu'en latitude, pour marquer cette place aussi sur la carte. Alors la distance entre ces deux points marqués par ces deux manières différentes donnera d'abord l'espace que la surface de la mer aura parcouru pendant le temps écoulé entre les observations.

§ 11. Cette manière est si claire d'elle même, que je ne trouve pas nécessaire de m'y arrêter davantage; j'ajouterai seulement quelques remarques, qui pourraient servir à en faciliter la pratique, si elle était d'ailleurs applicable. La connaissance du sillage me paraît assez exacte pour en pouvoir déduire le mouvement relatif du vaisseau par rapport à l'eau pendant quelques jours de suite sans se tromper sensiblement, à moins que l'estime ne soit troublée par une forte tempête. Cependant il est à remarquer que quelque petite que soit l'erreur à laquelle on est assujetti, elle devient plus grande, plus longtemps qu'on continue cette estime sans la corriger par quelque observation du ciel. Mais dans le sujet présent les observations ne peuvent pas être employées à ce dessein, puisqu'elles doivent servir à connaître le courant. Par cette raison donc l'intervalle du temps qu'on met entre les observations, ne doit pas être trop grand, ou il ne doit pas excéder quelques jours.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# XXIX.

# Recensio Dissertationis de Ventis,

Quae ab Auctore (Cel. D'Alembert) sequente symbolo est insignita:

*«Haec ego de ventis: dum ventorum ocior alis*
*Palantes pellit populos Fridericus, et Orbi*
*Insignis lauro, ramum praetendit Olivae.»* *)

---

Auctor dissertationis, quae prae reliquis praemio digna est visa, quaestionem ab Academia propositam de ausa et ordine ventorum tam accurate tantoque studio pertractavit, ut si instituto non penitus satisfecerit, lurimos tamen nodos, quibus ista quaestio est complicata, feliciter resolvisse, atque viam ad veram ventorum heoriam complanavisse sit censendus. Quam ob causam etiam reliquis, qui suas de hoc argumento meditaiones cum Academia communicaverunt, palmam praeripiusse est visus, cum horum alii ne ipsam quidem uaestionem recte intellexerint, alii nimis negligenter tractaverint, alii denique intra limites nimis arctos sese ontinuerint, neque singulas causas, unde venti oriuntur, debita diligentia evolverint, neque effectus ad omnes lobi terrestris regiones transtulerint. Ita autem haec eximia de ventis commentatio abstrusissimis calculis ac rofundissimis sublimioris analyseos et mechanicae problematibus est referta, ut lectores non solum attentissiios, sed etiam in subtiliori Analysi probe versatos requirat; hancque ob rem praecipua capita hujus dissertaonis modumque, quo phaenomena ventorum explicare et determinare conatur, breviter et quantum potero lucide enarrabo.

Primum igitur, antequam ullum atmosphaerae motum examini subjicit, ejus statum aequilibrii definit, guramque determinat, ad quam sese, tam ob gravitatem quam ob vim centrifugam, componere deberet: quam venit sphaeroidicam ad polos aliquantum compressam. Hanc ergo figuram atmosphaera perpetuo esset conser itura, nisi aliae causae accederent, quae istum aequilibrii statum turbare valeant. In hoc autem primo proemate copiosius versatur, et dum rem generaliter prosequitur inquirit, quid evenire deberet, si forte copia ateriae atmosphaerae nimis esset parva, quam ut exuberantiae illi sub aequatore formandae sufficeret, quo co ad considerationes non parum curiosas digreditur. Deinde statu aequilibrii definito, perpendit quomodo

---

*) Réflexions sur la cause générale des vents. Pièce qui a remporté le prix proposé par l'Académie R. des sc. et belles-tres de Prusse pour l'an 1746; par M. D'Alambert. Berlin 1747 petit in-4to.

atmosphaera primum in eum pervenerit, seu quo motu etiamnum, si a causa quacunque figura immutaretur, ea in statum aequilibrii reverti debeat. Ostendit autem hoc casu totam atmosphaeram motum quendam reciprocum seu oscillatorium instar penduli esse recepturam, quo demum amisso ad quietis statum sit perventura. Hunc igitur motum oscillatorium, quo in mechanica sublimiori vix quicquam solutu difficilius excogitari potest, admirabili sollertia determinat. Ad hoc methodo plane nova utitur, quae in aliis quaestionibus cum mechanicis tum hydrodynamicis maximum usum habere potest. Hactenus autem vim gravitatis ubique ad centrum terrae directam, ac certam distantiarum rationem tenentem assumserat; nunc igitur idem argumentum accuratius aggreditur, atque gravitatem tanquam vim ex singulis attractionum viribus, quibus partes materiae in se invicem agere concipiuntur, resultantem contemplatur, ita ut nunc tam directio quam quantitas ab ipsa figura terrae plurimum pendeat. Non solum autem particulis terrae hujusmodi vim attractricem tribuit, sed etiam particulis, ex quibus ipsa atmosphaera est composita. Nemo autem non videt hoc modo tam quaestionem de statu aequilibrii, quam de motu illo oscillatorio, quo atmosphaera statum aequilibrii sit assecutura, multo fieri difficiliorem: nihilo tamen minus Auctor noster et has difficultates superavit. Calculum hunc ubique generaliter instituit, ut ex eo etiam figura cujusvis corporis, puta planetae definiri possit, si materia liquida nucleum solidum ambiat; observat autem fieri posse, ut etiamsi nucleus sphaericus assumeretur, hujusmodi corpori tamen a motu vertiginis figura sphaeroidica allongata induceretur: hoc scilicet pendet a certa tam densitatum quam quantitatum materiae fluidae et solidae ratione. Hujusmodi autem meditationes hoc praesertim tempore, quo tam eximia opera de figura terrae extant edita, maxima attentione utique dignae sunt habendae, etiamsi ad praesens institutum minus pertinerent, verum Auctor eas cum tota tractatione tam arcte colligavit, ut superfluae videri nequeant. Si enim peregrina causa accedat, quae in aërem agendo statum aequilibrii turbet, tum statim motus ille oscillatorius concitabitur, qui dum a causa continuo urgente compescitur, in motum perennem, cujusmodi est ventus, abibit. Inducit autem Auctor primum solem ac lunam respectu centri terrae quiescentes eidemque regioni constantes imminentes, ex eorumque vi attractiva, quam in aërem exercent, motum aëris hinc oriundum determinat. Praeterea vero globum terrae solidum ac sphaericum, seu saltem proxime talem assumit, aëremque elateris adhuc expertam contemplatur, ut ab his viribus motum fere similem aestui maris recipere debeat. Has scilicet hypotheses a veritate abhorrentes ideo fingit, ut ventorum determinatio ex praemissis fiat facilior, indeque transitus ad ipsam veritatem commodius suscipi queat. Primum igitur, quod ad motum terrae vertiginis attinet, quo atmosphaera sub aequatore altior redditur quam sub polis, si motus hujus initio figura atmosphaerae fuisset sphaerica, statim aër a polis ad aequatorem fluere inceperit necesse est, et quia ob motum conceptum major copia qua par est, ad aequatorem deferetur, iterum inde ad polos defluet, sicque motu reciproco venti boreales et australes se alternatim excipere debebunt. Tempus hujusmodi reciprocationis seu oscillationis aëris fere unius diei ope calculi ante traditi determinat. Sol deinde vel luna si accedat, quia in loco, cui imminet, huicque opposito aërem intumescere facit, similem motum reciprocum aëri inducet, cujus directio semper erit in plano verticali, quod in quovis terrae loco per locum sive solis sive lunae ducitur, hujusque motus tam tempus unius reciprocationis, quam celeritatem quovis momento determinat. Et si autem hoc motus, qui a motu terrae diurno et a viribus attractricibus solis et lunae seorsim pendent, definivit, tamen exinde non difficulter motum aëris ab his causis conjunctim agentibus oriundum colligit; ei autem, quia a veritate adhuc ob nimis liberam hypothesium fictionem vehementer abludit, fusius non inhaeret; sed hoc loco momenta quaedam in physica maxime notatu digna attingit. Ostendit nimirum hanc solis et lunae actionem in altitudine barometri nullam sensibilem mutationem efficere valere, etiamsi aër elasticitate careret. In quo a Celeb. Daniele Bernoulli dissentit, qui in tractatu de aestu maris satis ingentem mutationem in pressione aëris ab actione solis et lunae oriri debere statuit, si quidem elater abesset: ob aëris autem elasticitatem fieri demum existimat ut talis mutatio imperceptibilis reddatur. Argumenta igitur Bernoullii Auctor noster omni studio evolvit, atque

ostendit theoriam suam inde nullum detrimentum pati. In his autem, quae hactenus sunt proposita, Auctor primam tractationis suae partem constituit, quae fundamenti loco duabus sequentibus partibus inserviat. Hic scilicet aërem elateris expertem atque luminaria eidem constanter terrae loco imminentia assumsit, qua hypothesi tantum primo initio atmosphaera motum oscillatorium induere debuit, qui autem mox cessare et in statum aequilibrii desinere debuisset.

Nunc igitur in parte secunda tam soli quam lunae verum motum tribuit, quo fit, ut aër nunquam ad statum aequilibrii pervenire possit. Motum vero terrae vertiginis non amplius inter causas ventorum numerat, quoniam est uniformis, aërque jamdudum ab eo in statum quemdam permanentem redigi debuit, quo saltem in infima regione nullus ventus sentiri posset. Neque etiam aberrationis figurae terrae a sphaerica rationem habet, quoniam est valde parva, nullumque sensibile discrimen tam in directione quam celeritate venti producere valet. Primum igitur animadvertit, quoniam vires, quibus singulae atmosphaerae particulae urgentur, sunt inaequales, motum iis induci non posse, quin altitudo atmosphaerae fiat minor, ubi celeritas major deprehendatur, major autem, ubi aëris motus sit tardior. Ob hanc autem causam determinatio motus ex actione vis sive solis sive lunae oriunda fit longe difficillima, unde quo facilius scopum attingere possit, singulas primo aëris particulas tanquam a se invicem solutas, ut aliae aliarum motus turbare nequeant, considerat atque earum motus investigat. Ostendit vero hoc casu aërem sub aequatore constanter ab ortu in occasum moveri debere; in locis autem ab aequatore remotioribus motum fore compositum ex motu orientali et alio, cujus directio in planum meridiei incidat. Celeritatem autem hinc adhuc longe minorem invenit, quam revera sub aequatore deprehenditur. Observat autem multum interesse, sive superficies ipsius terrae sit dura, sive fluida: in hoc enim casu, quo terra mari circumdata ponitur, aqua quoque viribus sollicitantibus cedit, sicque spatium, quod ab atmosphaera occupatur, modo augendo, modo diminuendo ipse aëris motus hinc non exiguam mutationem subibit. Ad hoc discrimen accuratius definiendum, totamque tractationem propius ad veritatem revocandam, nunc globum terrae solidum, aërem autem unum continuum fluidum terram ambiens assumit, ejusque motum ab actione solis vel lunae oriundum indagat, quem iterum sub aequatore ab ortu in obitum directum invenit. Notat autem si altitudo atmosphaerae ejusque densitas alia esset, atque revera est, fieri potuisse, ut ventus contrarius oriretur, atque ut atmosphaera non sub astro sed in regionibus 90 ab eo gradibus remotis intumesceret, quod insigne paradoxum uberius exponit causamque in inertia aëris tum sitam fore declarat. In statu autem aëris naturali atmosphaera semper figuram sphaeroidicam allongatam habebit, cujus major axis per solem vel lunam transeat, et cum differentia valde esset exigua, si sol vel luna quiesceret, ita ut hinc actio attractiva solis vel lunae ulli vento producendo impar sit visa: Auctor docet ob motum solis vel lunae elongationem atmosphaerae notabiliter augeri, ejusque tumorem sub luminaribus longe fieri majorem, ita ut hinc modicus ventus, qualem experientia exhibet, oriri queat. Hactenus vero, quoniam Auctor potissimum motum aëris sub aequatore spectaverat, ad calculum facilius expediendum, assumserat motum ubique fieri secundum directionem in plano verticali per astrum ducto positam: nunc igitur problema difficillimum aggreditur, ista relicta hypothesi veram motus aëris directionem pro singulis regionibus investigaturus. Quanquam autem pluribus adhibitis artificiis totum negotium ad resolutionem aequationum reduxit, tamen ad formulas tantopere implicatas pervenit, ut vera venti directio tantum proxime ex iis colligi possit: quantum autem inde concludere licet, experientiae satis est consentaneum, ut de veritate theoriae non dubitandum videatur. Animadvertit tamen circumstantiam notatu dignissimam, problema scilicet hoc non penitus esse determinatum, quia motus aëris non solum a viribus jugiter sollicitantibus pendeat, sed etiam a motu ipsi primo impresso: qui cum sit incognitus, calculus non aliter nisi per experientiam ad veritatem accomodari potest Cum autem hactenus superficiem terrae duram et immobilem considerasset, nunc terram undequaque oceano opertam contemplatur; densitatem autem aëris pro variis altitudinibus utcunque variabilem assumit, unde ad resolutionem plurium aequationum valde intricatarum

*

deducitur. Hic occasionem arripit de integratione aequationum differentialinm altiorum ordinum agendi, ubi nonnulla elegantia et utilia artificia patefacit, quae ad analysin promovendam non parum conferre videntur: tum vero etiam praeclaras quasdam notationes circa quantitates imaginarias, earumque, quando formulas integrales afficiunt, reductione ad arcus circulares tradit. In hoc autem problemate, cujus solutionem in aliquot aequationibus complexus est Auctor, contineri putat universam de ventis quaestionem, ideoque varias evolvit hypotheses densitatis aëris, quae ad statum naturalem proxime accedere videantur, indeque complicatissimarum aequationum integrationes perficit, et quantum rei difficultas permittit ad veram venti directionem et celeritatem ubique locorum definiendam accomodat. Progreditur deinceps ad motum aëris non liberum determinantium (?), casumque primo examinat, quo sub aequatore duae series altissimorum montium sibi parallelae existant, intra quos aër alium motum praeter orientalem vel occidentalem recipere nequeat. Deinde has series montium ab aequatore ad quemvis parallelum transfert, ita ut semper ab ortu in occasum extendantur, et ad quodvis tempus venti celeritatem determinat, cum directio per se sit cognita. Tum has montium series secundum duos meridianos sibi proximos extensas contemplatur, et difficillimo calculo celeritatem venti assignat, quae omnia ita sunt comparata, ut si debito studio evolvantur, in omni terrae statu, quo motus aëris a montibus coërcetur, inde ventus definiri posse videatur. Multo magis autem arduum fit problema, quando binae illae montium series inter se non sunt parallelae, interim tamen tanta sagacitate Auctor pollet, ut etiam has novas difficultates maximam partem superare potuerit. Concludit denique hanc satis amplam tractationem problemate generali, quo methodum exponit in hypothesi, quod terra profundo oceano undique tecta sit, pro quovis loco et tempore verum aëris motum, hoc est directionem ac celeritatem venti determinandi, quod ope praecedentium problematum fieri posse luculenter ostendit.

Quoniam vero hactenus causas ventorum in solis viribus attrahentibus solis et lunae quaesivit, nunc demum in effectum caloris solis, cui sine dubio primariae partes in productione ventorum sunt tribuendae, inquirit. Causam autem et effectum caloris ita comparatum judicat, ut ad calculum accurate revocari nequeat: proxime autem scopum attingere arbitratur, si rarefactionem aëris perpetuo a quadrato sinus distantiae solis a zenith pendere, seu esse proportionalem quadrato sinus elevationis solis super horizonte, quemadmodum ergo hic effectus in formulas ante exhibitas introduci debeat, ostendit. Quia vero calor ac proinde aëris rarefactio non solum ab altitudine solis, sed etiam a tempore, quo idem locus actioni solis jam erat expositus, pendet, ita ut pro eadem solis altitudine calor post meridiem major sit quam ante meridiem; ab hac diversitate alium effectum non proficisci statuit, nisi constantem atmosphaerae motum ab oriente in occasum, qui cum omnibus aliis ventis a causis ante perpensis oriundis conjungi debeat, hocque modo non solum ventos orientales intra tropicos spirantes, eorumque a vero oriente deflexiones statis temporibus observatas satis dilucide explicat, sed etiam quales venti in reliquis terrae zonis regnare deberent, nisi perturbatio a terris orta accederet, non obscure indicat. Quas ob causas hic Auctor quaestioni propositae multo accuratius satisfecisse est visus, quam ab aliis factum esse deprehendimus. Postquam autem haec dissertatio huc esset allata, ejus Auctor misit additamentum, in quo nonnulla loca clarius explicat, et levem quendam errorem, qui in calculum § 89 ingresserat, emendat: imprimis autem in hoc additamento tam celeritatem quam directionem venti sub quovis parallelo commodius exprimit, dum sol vel luna non in aequatore sed circulo quocunque parallelo circa terram revolvitur. Motum venti ubique resolvit secundum directiones paralleli et meridiani; quarum illa praebet plagam orientis, haec vero continuum affluxum aëris a polis ad aequatorem arguit: qui tamen effectus, cum tandem omnis aëris massa ad aequatorem accumularetur, admitti non potest. Interim tamen hoc incommodum ita conciliat, ut motum affluxus aequatorem versus continuo imminui dicat; calculus enim declarabat celeritatem secundum directionem meridiani non solum sub aequatore evanescere, sed etiam sub polis, et in zonis tantum temperatis esse notabilem. Fortasse etiam in regionibus atmosphaerae supremis aëris portio quaedam ab aequatore

versus polos defluit, sicque aequabilem aëris statum conservat. Verum utcunque fiat haec restitutio, quae proprie ad quaestionem propositam non pertinet, consensus experientiae ad theoriam confirmandam sufficit; ea enim constat, prope tropicos, ubi venti adhuc constantes deprehenduntur, ventos orientales in hemisphaerio quidem boreali boream versus, in altero autem austrum versus aliquantum declinare: ita ut dubium sit nullum, quin haec declinatio in locis ab aequatore magis remotis adhuc major esset futura, nisi totus ventorum ordo a vicinitate continentis interrumperetur. Notatu autem maxime dignum est, quod Auctor invenit, istam declinationem ab aequatore tantum usque ad certum latitudinis gradum crescere, ultraque eum iterum decrescere, atque sub ipsis polis aeque ac sub aequatore denuo evanescere. Secundum hanc ergo Auctoris theoriam ventus pro quovis loco ac tempore proposito ita definiri debebit. Quaeratur primo ventus ex calore solis oriundus, habita simul ratione ejus venti constantis, qui ob gradum caloris pomeridianum majorem antemeridiano locum habet. Deinde seorsim determinetur ventus, quem vis attractiva cum solis tum lunae producit, cognitisque his singulis ventis tam ratione directionis quam ratione celeritatis non erit difficile secundum regulas compositionis notus ventum ex iis ortum proxime saltem assignare.

# XXX.

# Meditatio de formatione vocum.

Saepe et multum id mecum cogitaveram, quae sit ratio tam diversorum eorumque fere innumerabilium sonorum, quos homines edere valent, ad animae suae cogitata aliis patefacienda. Ejusmodi enim est vox humana, ut nullo instrumento eam imitari ejusque diversas inflexiones exprimere artifices hucusque potuerint. Quae organis pneumaticis inseruntur instrumenta humanam vocem mentientia, ea non quidem ipsam vocem, sed cantum hominum, sonum quendam simplicem repraesentant. Neque iisdem instrumentis varios exhibent vocales, de consonantibus nihil dixerim, quanquam facile sit percipere alios sonos ad alium inclinare vocalem. Ut, quae acutiores edunt sonos, praecipue ad *ae* lat. vel *αι* graec. inclinant; graviores vero ad *o* vel potius *u* obtusum. Haec mihi observanti in mentem venit, an ista instrumenta non ita parari possent, ut unumquemque vocalem edere queant? Id quod observavi a figura tubi dependere, eodem modo, quo varia conformatio oris una est causa variorum vocalium. Quae conformatio si cognita sit, poterit inde figura tubi, ut datum edat vocalem, determinari. Observemus ergo, quos motus faciamus, quae sit figura oris, quae forma labiorum, qui situs linguae et quae conditio faucium, quando diversos efferimus vocales.

In hanc rem intenti deprehendimus duas vocalium classes, unam crassiorum, alteram graciliorum, quas inter quidem infinitae intermediae, seu gradus ex hac ad alteram existunt. Hae duae autem sunt quasi extremae. Discrimen essentiale inter has classes est conformatio oris ad fauces, seu forma faucium. Graciles prodeunt soni, si fauces contrahuntur, et ita cavitas oris versus fauces convergens redditur. Sin autem ibi os dilatatur remittuntur, vocales oriuntur crassiores. Utraque classis infinitis modis distinctos sonos suppeditabit pro alia atque oris anterioris conformatione. Praecipue tamen quaevis tres continet vocales primarios, pro anterioris oris maxima dilatatione, maxima restrictione et statu medio. Ad primam, quam graciliorum ponam classem quod attinet, si ibi anterior oris cavitas dilatatur, orietur vocalis *ae*, qui vulgo pessime pro diphtongo habetur. Quomodo autem res se habeat cum diphtongis, ex sequentibus intelligitur. Germanis iste vocalis in maximo est usu sub signo *e*, in terminationibus verborum praecipue ut *werden*, *leben*, et hoc modo litera *e* plerumque effertur, vocaturque *e femininum.* Si anterior oris cavitas ope linguae, quantum fieri potest, contrahitur, sonus hinc ortus erit *i*, vocalis isque acutus, quemadmodum enunciatur in germanicis verbis *ich*, *Mathis.* Si cavitas oris in statum intermedium constituatur, habebitur vocalis *e masculinum*, ut in germanicis *stehen*, *gehen* etc Sunt ergo tres principales primae classis vocales hi: 1) *e* femininum, 2) *e* masculinum et 3) *i* acutum.

Hos inter dantur quidem plurimi intermedii. Inter 1 et 2 tamen nullus est in usu; inter 2) *e* masculinum, et 3) *i* acutum maxime in usu est medius, nempe *i* obtusum, ut in Germanicis *dich*, *richten* etc. Eodem modo prodeunt tres vocales primarii classis secundae, sonorum crassiorum. Si cavitas oris anterior quantum fieri potest extendatur, oritur vocalis *a*, planum apertum, Hebraeis אַ patach, *Blatt*, *matt* Germanis. Si eadem anterior oris pars maxime contrahitur et labia protenduntur, audietur vocalis *u* acutum, ut in Germano *Uhr*. Si eadem cavitas anterior in statù medio collocetur, percipietur vocalis *o*. Sunt ergo tres primarii secundae classis sonorum crassiorum hi: 1) *a* apertum; 2) *o* et 3) *u* acutum. Horum inter 1 et 2 vocalis medius usurpatur *a* obtusum ut in germano *Grad* et fere omne *a*, prout a Suevis et Bavaris pronunciatur. Hebraeis est *a* longum Kamets אָ. Inter *o* et *u* usu venit medius vocalis *u* obtusum ut in Germanis *Bruch*, *Stuck* etc. Dantur jam etiam soni intermedii inter vocales utriusque classis, cum scilicet pars oris posterior medium tenet inter maximam extensionem et contractionem. Et ita inter utriusque primos *e* femininum et *a* apud Gallos in usu est medius quidam crassior quam *e* tamen gracilior quam *a*, ut in verbis *infaillible*, *paille*, nec non in *Roi* etc. Inter utriusque classis secundos vocales *e* mas. et *o* datur medius *oe*, apud Germanos usitatus in vocibus *König*, *Göttlich* etc. Inter tertios *i* et *u* acutos in usu est medius *ü* acutum. Sub hoc sono enuntiant Helvetii *eu* ut in *heulen* ubi legunt *hülen*. Inter utriusque classis intermedios *i* obtusum et *u* obtusum habemus denuo intermedium *ü* obtusum in vocibus Germ. *Übel*, *verkündigen* etc. Quomodo Vocales formentur et qua in re posita sit eorum differentia expositum est. Pervenitur ergo ad consonantes qui sunt modificationes certae vocalium, quibus initium vel finis eorum afficitur. Variis modis vocales sono inchoare possumus, variis item eos finire, unde fit ut varii sint consonantes. Organa quibus vel initia vel fines vocalium afficiuntur sunt 1) halitus per os, 2) halitus per nares, 3) labia, 4) lingua et 5) fauces. Si halitus per os sonum praecedit oritur littera *h*, Graecorum spiritus asper. Si sonum sequitur, itidem signo *h* indicatur. Si lingua ita collocetur ut aër exiens in eam eundem edat effectum ac in lingulam in instrumentis lingulis instructis, si nempe lingua motu tremulo nunc aëri transitum praebeat nunc occludat, hoc si sonum comitetur, oritur consonans *r*. Hoc modo alius posset formari consonans, ejusmodi motum tremulum labiis infligendo, ut alternatim aërem emitant et cohibeant, ista autem modificatio in loquela nulla, quantum scio, in usu est. Reliqui consonantes ortum ducant a varia labiorum, linguae et faucium cum apertione tum conclusione. Si labia subito aperiuntur vel clauduntur neque accedente halitu oris neque narium, oritur litera *b*. Si simul aspiratio *h* accedit, litera *p*. Si idem fiat cum lingua, ut sono exitum, subito eam a palato removendo, praebeat vel prohibeat eam palato admovendo, habebitur litera *d* et accedente aspiratione litera *t*. Apertis subito ad soni initium faucibus seu clausis ad finem nullo accedente halitu, oritur litera *g* si eadem aspirata efferatur, litera *k*. Si eodem modo labia aperiantur vel claudantur accedente autem halitu per nares oritur litera *m*. Eidem operationi linguae si accedat halitus per nares, orietur litera *n*, et tandem faucium aperitionem et conclusionem si comitetur halitus per nares effertur litera Haebraeorum ע si recte pronunciatur per *gn* Si labia non penitus clauduntur ut halitus libere fieri queat oritur litera *w*. Si lingua palato admoveatur quidem, sed tamen halitu liberum exitum non deneget, audietur litera *l*. Idem si observetur in faucibus, habebitur litera *j* consonans ut in Germanis *ja*, *jagen*. Si tandem, labia, lingua et fauces aliquantum magis claudantur, aër vero vi expellatur, labia formabunt literam *f*, lingua literam *s* et fauces literam ch graec. *χ* Haebraeorum ש. Potest ergo formare homo sequentes simplices consonantes: 1) *h*, 2) *r*, 3) ille qui ex vibrationibus labiorum oritur, 4) *b*, 5) *d*, 6) *g*, 7) *m*, 8) *n*, 9) ע, 10) *w*, 11) *l*, 12) *j*, 13) *f*, 14) *s*, 15) *χ*. Hisce tres *p*, *t* et *k* non adnumero tanquam compositas ex *b*, *d*, *g* et *h*. Existimo hanc esse consonantium perfectam enumerationem, neque ullum alium formari posse qui nec hic habeatur, nec ex hisce componatur.

# XXXI.

## Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta.

---

Circa motum globorum Duo in computum veniunt, motus globi in tormento et motus extra tormentum, de quorum motuum quolibet seorsim agendum est, primum autem excutiendus est motus extra tormentum, qui determinari poterit ex tempore quo globus in aëre commoratus est, diametro globi et ratione gravitatum specificarum globi et aëris. Ex hisce datis innotescit altitudo ad quam globus pervenit et velocitas initialis qua e tormento erumpit, tempus quoque ascensus et descensus seorsim. Quibus definitis progredi poterimus ad contemplandum motum globi intra tormentum et ex velocitate, qua globus egreditur, cognita, innotescet vis pulveris pyrii multaque alia maximi usus in Pyrotechnia. Suppono autem hic directionem tormenti esse verticalem, ut corpus lineam rectam ascensu et descensu describat, motus enim obliquus in linea curva altioris est indaginis.

Designet, $c$, diametrum globi in scrup. Pedis Rhenani, $m:n$, rationem gravitatis specificae globi ad gravitatem specificam aëris seu medii in quo globus movetur, sit $t$, tempus durationis globi in aëre, in minutis secundis sit porro altitudo quaesita ad quam corpus ascendit $x$. Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas, $e$, qui est 2,7182817... cujus logarithmus secundum Vlacq. est 0,4342944. Indicat porro $N$ numerum graduum arcus, cujus tangens est:

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}$$

existente sinu toto $=1$. Altitudo quesita $x$, ex hac aequatione erui debet:

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447650\sqrt{3n(m-n)}}\left(125N-7162\log.\left(\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}}-\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}\right)\right).$$

Vocemus ut calculus facilior evadat: $\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}=y$, erit $N$ numerus graduum arcus cujus tangens est $y$, erit:

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447650\sqrt{3n(m-n)}}\left(125N-7162\log.(\sqrt{yy+1}-y)\right).$$

Ut logarithmis Vlacqui uti liceat, multiplicari debet logarithmus per 2,7182817. Scribatur $A$ loco:

$$\frac{447650\sqrt{3n(m-n)}}{m\sqrt{c}},$$

erit: $At = 125N - 19468 \log. (\sqrt{yy+1} - y)$,

erit ergo: $N = \frac{At + 19468 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{125} = \frac{8At + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}$.

Ex qua aequatione tentando $y$ erui debebit, tamdiu alios atque alios substituendo valores loco $y$ donec resultet aequalitas.

## Experimentum I.

*Factum d. 21. Aug. Anno 1727.*

Globus ferreus diametri 225 scrup. explodebatur verticaliter, tempus durationis in aëre erat 45 secund. minut.

Est ergo: $c = 225$, $t = 45$, $m = 7000$ et $n = 1$.

Erit ergo: $A = 618$, ergo $At = 27816$ et $8At = 222530$.

Erit ergo: $N = \frac{222530 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}$

Ponatur $y = 2{,}70$, erit $\sqrt{yy+1} = 2{,}879$, ergo $\sqrt{yy+1} - y = 0{,}179$, consequenter $\log. (\sqrt{yy+1} - y) = -0{,}7471$ et $N = 69\frac{41}{60} = \frac{69683}{1000}$, sed ex aequatione invenitur $N = \frac{106173}{1000}$. Ergo $y$ major assumi debet, sit $y = 3{,}00$, erit $\sqrt{yy+1} = 3{,}162$. Ergo $\sqrt{yy+1} - y = 0{,}162$, unde log. ejus est $-0{,}790$, unde prodit $N = 99^0$, sit $y = 4{,}00$, erit $\sqrt{yy+1} = 4{,}123$ et $\sqrt{yy+1} - y = 0{,}123$, cujus log. est $-0{,}9100$. Est ergo $N = 80{,}802$, sed debebat esse $N = 75^0\, 58'$, sit $y = 4{,}10$, erit $\sqrt{yy+1} - y = 0{,}12$, cuj. log. $= -0{,}9208$. Est ergo $N = 79^0\, 12'$, sed debebat esse $N = 76^0\, 18'$.

Hoc continuando reperitur $y = 4{,}31$, hoc in casu exacte admodum obtinetur aequatio, ut ne in centesimis erretur. Et erit $N = 76^0\, 56'$ ut inveniatur altitudo ad quam corpus pertigit, erit:

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1} = y, \quad \text{adeoque } e^{\frac{3nx}{4mc}} = 19{,}5761, \quad \text{ergo } \frac{3nx}{4mc}\, 0{,}4342944 = 1{,}2915908,$$

ergo: $$x = \frac{2100000.1{,}2915908}{0{,}4342944} = 6245 \text{ ped. Rhen.}$$

Hinc innotescit velocitas initialis, seu altitudo ad quam eodem impetu in vacuo pervenisset, est enim:

$$e^{\frac{3nx}{4mc}} = \frac{4c(m-n) + 3nK}{4c(m-n)},$$

notante, $K$, altitudine in vacuo describenda, erit ergo:

$$K = 20997.1857{,}61 \text{ scrup.} = 39004 \text{ ped. Rhenan.}$$

Tempus quod globus in ascensu consumit est aequale, $= \frac{mN\sqrt{c}}{3581\sqrt{3n(m-n)}}$ min. secund. id est (ob $N = 76.93$ et $\sqrt{c} = 15$) $= 15\frac{1}{2}$ minut. secund. Tempus ergo descensus est $29\frac{1}{2}$ minut. secund. ut adeo differentia inter tempus ascensus et descensus sit 14 minut. secund.

## Experimentum II.

*Eodem die institutum.*

Ex eodem tormento idem globus explodebatur, dimidia pulveris quantitate, mansit ille in aëre 34 min. secund.

Est ergo: $c = 225$, $t = 34$, $m = 7000$, $n = 1$ et $A = 618$,

erit: $At = 21012$ et $8At = 168096$.

Est ergo: $$N = \frac{168096 + 155746 \log. \sqrt{yy+1} - y}{1000},$$

ponatur $y = 2{,}00$, erit $\sqrt{yy+1} - y = 0{,}236$, cujus log. est $= -0{,}6270$, hinc invenitur $N = 70{,}91$ et deberet esse $63^0\, 26'$, hoc modo tentando invenitur tandem sumi debere loco $y$, $2{,}185$, erit $N = 65^0\, 25'$, erit ergo:

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1} = 2{,}185 \quad \text{et} \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 5{,}7742.$$

Ergo: $$\frac{3nx}{4mc} = \frac{\log. 5{,}77422}{0{,}43429} = \frac{0{,}76147}{0{,}43429}, \quad \text{unde } x = \frac{2100000 . 0{,}76147}{0{,}43429} \text{ scrup.} = 3682 \text{ ped. Rhen.}$$

Dein altitudo adquam in vacuo pervenisset est 10025,862 ped. Rhenanis. Tempus ascensus est 13,19 minut. secund. Ergo tempus descensus est 20,81 minut. secund.

## Experimentum III.

*Factum d. 23. Aug. Anno 1727.*

Idem globus diametri 225 scrup. explodebatur verticaliter, et tempus erat 2 minut. secund. quantitas pulveris 1 Loth seu $\frac{1}{8}$ pars praecedentis.

Est ergo ut supra: $c = 225$, $m = 7000$, $n = 1$, sed $t = 2$.

Ergo ob: $A = 618$, est $At = 1236$, ergo $8At = 9888$.

Consequenter erit: $$N = \frac{9888 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Tentando quid loco $y$ substituendum sit reperietur esse $y = 0{,}075$, unde est $N = 4^0\, 19'$. Est ergo:

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}} - 1} = 0{,}075 \quad \text{et} \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1{,}005625.$$

Ergo: $$\frac{3nx}{4mc} = \frac{0{,}002300}{0{,}4343} \quad \text{et} \quad x = \frac{2100000 . 0{,}0023}{0{,}4343} = 11122 \text{ scrup.}$$

pervenit ergo globus ad altitudinem 11 pedum.

Dein est $0{,}005625 = \frac{3nK}{4c(m-n)}$. Ergo $K = 2099700 . 0{,}005625 = 11800$ scrup. Differentia ergo altitudinum in vacuo et aëre est 678 scrup. Tempus autem ascensus est $\frac{7000 . 4{,}32 . 15}{3581 . 144} = 0{,}88$ minut. secund., ergo tempus descensus est 1,12 minut. secund.

In his experimentis erat longitudo tormenti 7260 scrupula. In sequentibus autem idem tormentum adhibitum est sed abbreviatum ut ejus longitudo erat saltem 5808 scrupula. In primo experimento erat quantitas pulveris 16 Loth, in secundo 8 Loth, in tertio 1 Loth.

## Experimentum IV.

*Factum d 2. Sept. Anno 1727.*

Idem globus diam. 225 scrup. explodebatur verticaliter, pulvere 1 Loth et cecidit demum post 8 minut. secund.

Est iterum: $c = 225,\quad m = 7000,\quad n = 1,$ sed $t = 8.$

Unde erit: $N = \dfrac{39552 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$

Unde reperitur: $y = 0{,}33.$ Erit ergo $N = 18^0\, 25'.$

Est ergo: $e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1{,}1089$ et $x = \dfrac{2100000\ 0{,}04458}{0{,}4343}.$

Est ergo altitudo ad quam globus ascendit, 215 ped., 1 dig., 7 lin., altitudo autem ad quam in vacuo pervehisset, est $K = 2099700 . 0{,}1089 = 228$ ped., 5 dig., 8 lin. Tempus autem ascensus est $= \dfrac{7000 . 18{,}41 . 15}{3581\ 144} = 3{,}7$ secund.

Ergo tempus descensus erat $= 4{,}3$ secund.

## Experimentum V.

*Eodem die factum.*

Idem globus ex eodem tormento, pulvere 4 Loth onerato, explodebatur, et tempus quo in aëre mansit fuit 20 minut secund.

Est ergo: $c = 225,\quad m = 7000,\quad n = 1,\quad t = 20.$

Est ergo: $N = \dfrac{98880 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}$

Est ergo: $y = 0{,}93,$ ergo $N = 42^0\, 56',\quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1{,}8649.$

Ergo: $x = \dfrac{2100000 . 0{,}27044}{0{,}43429} = 1307{,}707$ ped.

Dein $K = 2099700 . 0{,}8649 = 1816{,}025$ ped. Tempus autem ascensus est:

$$= \frac{7000 . 42{,}93 . 15}{3581 . 144} = \frac{210 . 4293}{103849} = 8{,}6 \text{ secund.}$$

Ergo tempus descensus erat $= 11{,}4$ minut secund.

## Experimentum VI.

*Eodem die factum.*

Idem globus ex eodem tormento, pulvere 8 Loth onerato, explodebatur, et tempus quo in aëre mansit fuit 28 secund. minut.

Est ergo: $c = 225,\quad m = 7000,\quad n = 1,\quad t = 28.$

Ergo: $$N = \frac{138432 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Hinc reperitur: $y = 1{,}52$ et $N = 56^0\,39'$, $e^{\frac{3nx}{4mc}} = 3{,}3104$,

unde: $$x = \frac{2100000 . 0{,}519828}{0{,}43429} = 2513{,}621 \text{ ped. Rhen.}$$

At $K = 20997 . 31{,}04 = 4851{,}150$ ped. Rhen. Tempus autem ascensus est $= \frac{7000\ 56{,}66 . 15}{3581 . 144} = 11{,}45$ secund. Tempus ergo descensus est $= 16{,}55$ secund.

## Experimentum VII.

*Dicto die institutum.*

Ex eodem tormento, sed 12 Loth onerato, ejaculabatur globus idem et tempus donec cecidit erat 32 minut. secund.

Ob $c = 225$, $m = 7000$, $n = 1$, $t = 32$,

Erit: $$N = \frac{158202 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Unde consequitur esse: $y = 1{,}93$. Ergo $N = 62^0\,37'$. Erit $e^{\frac{3nx}{4mc}} = 4{,}7249$.

Ergo: $$x = \frac{2100000 . 0{,}6733099}{0{,}43429} = 3255{,}776 \text{ ped. Rhen. seu } 3255776 \text{ scrup.}$$

Sed erit: $$K = 20997 . 372{,}49 = 7821{,}172 \text{ ped.}$$

Tempus autem ascensus est $= \frac{210 . 6261}{103849} = 12{,}67$ minut. secund. et tempus descensus erit $= 19{,}33$.

# XXXII.

## Différentes pièces sur les Monades.

J'ai lu les pièces suivantes sur les monades:

1. Pièce latine pour les monades. L'Auteur se rapporte partout à un prodrome de philosophie, qu'il a publié; il établit fort légèrement l'existence des monades. Il dit que le monde est composé ou de riens ou de monades; mais comme le premier est absurde, il s'ensuit que l'autre soit vrai. Il fait si grand cas de son prodrome et en particulier des définitions qu'il y a données, qu'il promet une médaille d'or de 10 Écus à celui, qui montrera une meilleure définition tirée des écrits avant le sien. L'Auteur vante aussi ses progrès en Géométrie, disant qu'il a trouvé des constructions géométriques pour la trisection et multisection des angles. Tout cela montre suffisamment, que cet Auteur a fort mal répondu à la question.

2. Pièce latine: L'Auteur commence par quelques passages de l'Ecclésiaste, d'où il conclue que notre savoir est fort imparfait; il allègue une poésie latine, qu'il a composée, où il avait prouvé la folie de ceux qui croient la terre mobile et les planètes habités, et à la Chiromantie. Au reste il ne se trouve rien dans cette pièce qui se rapporte proprement à la question proposée.

3. Pièce latine: L'Auteur avance d'abord que les corps ne sauraient être divisibles à l'infini, puisque leur force doit absolument être fondée dans quelques substances finies; ce qui ne paraît pas trop d'accord avec son dessein de renverser le système des monades. Ces premières substances il les nomme les éléments des corps, qui doivent être destituées de parties réelles, quoiqu'on y puisse peut être concevoir des parties idéales. Il attaque les monades Leibniziennes premièrement du côté de l'inutilité, vu qu'elles ne seraient d'aucun usage dans la Physique, et que tous les sujets des autres sciences ne seraient que des chimères. Ensuite il combat les monades par ces raisonnements:

I. Les monades, manquant de côtés, ne sont pas susceptibles d'aucun mouvement; et cela non seulement considérées à part, mais aussi étant jointes ensemble. De là les monades, n'ayant pas de force motrice, seront rien, si elles ne sont pas douées d'une force représentative, que Mr. Wolf nie pourtant. Or même Mr. Leibniz ne gagne rien et ne peut pas donner une idée absolue de l'état des monades; car disant que la monade *A* représente la monade *B*, et celle-ci réciproquement la monade *A*, il commet un cercle, et ne parvient à aucune détermination absolue; cet argument est très fort, et poussé fort bien dans le § XI.

II. Il dit que les monades qui entrent dans la compositions des corps, doivent absolument être dans un lieu, ce qui est contraire à leur nature, selon les monadistes; il attaque très vigoureusement la réplique ordinaire de ces gens: qu'on doit absolument abandonner le jugement des sens et de l'imagination, et consulter uniquement l'entendement pur.

III. Il fait voir l'absurdité manifeste, qui se rencontre si l'on dit, que le nombre des monades, qui constituent un corps étendu, est fini.

IV. Le mouvement des corps serait impossible, vu que chaque monade n'est pas susceptible de mouvement. L'Auteur niant donc tant les monades que la divisibilité à l'infini, est obligé d'embrasser le sentiment des atomistes: que les atomes, malgré leur grandeur, ne sont pas pourtant divisibles. Il dit que ces atomes sont d'un grand usage dans la Physique; mais cette idée des êtres simples et indivisibles, qui ayent pourtant une grandeur, est fort mal établie, puisqu'on ne voit pas ce qui pourrait empêcher la divisibilité. Il s'égare encore plus de la précision, quand il dit que des éléments sont élastiques et susceptibles d'une compression; ceux-ci composent immédiatement l'éther, qui presse de toutes-parts vers les planètes, et que leurs atmosphères empêchent l'effet de cette pression; il en déduit la cause de la pesanteur, qui mérite quelque attention; mais quand il veut expliquer la chute des corps, il commet une faute énorme, croyant sans aucune raison, que l'expérience fut contraire à la théorie: Il parle depuis très pitoyablement du mouvement des corps célestes; et vers la fin il soutient que les esprits finis remplissent quelqu'espace. Malgré ces dernièrs inconvenients, je crois que cet Auteur a fort solidement réfuté les monades tant de Leibniz que de Wolf; et que cette pièce mérite d'être publiée moyennant un avertissement sur les articles, qui ne se peuvent soutenir.

4. Pièce allemande dont l'Auteur veut prouver les monades: I. par l'histoire de la Création de Moïse et II. par le mouvement des corps tant solides que fluides. Il soutient d'abord que le monde est composé de deux éléments, des ténèbres et de la lumière. Nonobstant ces rèveries l'Auteur n'est pas ignorant dans l'Astronomie et la Mécanique; il donne une règle, par laquelle on puisse déterminer la hauteur d'un jet d'eau, la hauteur de la chute étant connue, qui peut être est fort souvent d'accord avec l'expérience, si le conduit de l'eau, auquel il ne réfléchit pas, n'est pas trop long. Il parle aussi des jets des bombes, en tant qu'elles se détournent de la parabole, où il remarque les jets suivant pour chaque élévation: $\frac{1}{4}^0$..$111\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}^0$..$158\frac{1}{3}$, $1^0$..223, $5^0$..488, $10^0$..692, $20^0$..917, $30^0$..1022, $35^0$..1040, $40^0$..1028, $45^0$..1000, $50^0$..945, $60^0$..779, $70^0$..557, $80^0$..293, $85^0$..151, $89^0$..30 ped.; mais comme ces réflexions n'ont aucun rapport à la question des monades, cette pièce ne sera d'aucune conséquence.

5. Pièce allemande contre les monades. L'Auteur n'a pas assez bien compris le système Leibnizien des monades, et partant sa réfutation n'est pas suffisante. Au lieu des monades il veut établir quelques matières homogènes en qualité des éléments des corps, dont les dernières particules ne soient pas destituées de grandeur, mais pourtant indivisibles. L'Auteur nie absolument les forces des corps, et n'admet que l'inertie, et quoiqu'il me paraît avoir raison en cela, il soutient cette pensée fort mal, et la mêle de quantité de chimères.

6. Pièce latine pour les monades. L'Auteur rapporte la différence qui se doit trouver entre une étendue mathématique et physique, accordant que celle-la est divisible à l'infini, mais non pas celle-ci. Il dit que les corps ne sont que des phénomènes, dont nous n'avons que des idées confuses. Il avoue que pour former un corps, il faut un nombre infini de monades, non pas dans le sens des mathématiciens, mais comme on dit que pour former une montagne il faut un nombre infini de grains de sable; pensée qui paraît renverser tout son système. Ensuite il donne aux monades des forces, et il dit: quand notre esprit se représente plusieurs monades l'une hors de l'autre, l'idée confuse qui en résulte est celle de l'étendue de l'espace et de l'impénétra-

bilité. Il soutient aussi que dans le choc de deux corps, l'un n'opère pas le changement dans l'autre, mais que chacun le produit en soi par ses propres forces. Ce qui suffit pour faire voir la faiblesse de cette pièce.

7. Pièce latine. L'Auteur veut prouver, que l'étendue n'est qu'un phénomène, puisque l'ame dans chaque étendue apperçoit une unité et une multitude en même temps; or cela étant contradictoire, il s'ensuit, que l'étendue n'est qu'un être de l'imagination. De même le mouvement ne représentant à l'esprit que des changements externes, et que la Méthaphysique nous assure, qu'il n'y a que des changements internes, cette contradiction donne à connaître à l'Auteur, que le mouvement n'est qu'un phénomène. Il dit que le repos est impossible, et que les loix de la Méchanique sont fausses; mais ses raisonnements sont pitoyables et ne méritent conséquemment aucune attention.

8. Pièce latine en forme de Dialogue. L'Auteur ne dit rien absolument, qu'on puisse regarder comme quelque chose de positif, et il semble plutôt se moquer de toute la question.

9. Pièce allemande contre le système des monades: l'Auteur ne paraît pas avoir bien compris cette doctrine; puisqu'il croit, que les monades agissent les unes sur les autres, ce qui étant absolument contraire aux sentiments de Mr. Leibniz, les arguments, dont il combat ce système, ne sont d'aucun poids. Ensuite il donne en peu de mots une nouvelle idée de l'ame, suivant laquelle l'ame est un être simple renfermé dans une petite boule creuse et vide, dont elle occupe le centre. Il soutient ensuite, que les phénomènes du monde ne dépendent aucunement des êtres simples, qui le composent; mais cela par des raisons fort faibles et mal développées. L'Auteur a ajouté à cette pièce un supplément, où il attaque le sentiment de Leibniz sur la contingence et la perfection du monde; mais les arguments sont tels, que les Leibniziens s'en moqueront avec raison.

10. Pièce latine, dont l'Auteur paraît avoir poussé le système des monades au plus haut degré. Selon lui, non seulement l'étendue, mais aussi les corps mêmes et le mouvement ne sont que des phénomènes, ou des idées abstraites de l'imagination. Le monde n'est autre chose qu'un très grand nombre d'êtres simples ou de monades, qui se représentent mutuellement dans un certain degré de clarté ou d'obscurité; et tous les changements qui nous semblent arriver au monde, ne consistent que dans la variation des degrés de clarté, dont les monades se représentent les unes les autres. Les monades elles mêmes ne se rapportent à aucun lieu: elles ne sont ni proches ni éloignées entr'elles, et ne sont susceptibles d'aucun mouvement, toutes ces choses n'étant que des idées abstraites de l'imagination. Car notre ame ayant une connaissance du degré de clarté dont les monades se représentent mutuellement, juge celles plus proches entre elles, qui se représentent plus clairement, et celles plus éloignées dont la représentation est plus obscure. Donc ce que nous nommons distance ou intervalle, n'est autre chose que la perception d'un certain degré de clarté, dont diverses monades se représentent mutuellement; de là nous formons l'idée de l'étendue, et quand les représentations changent de degré de clarté, nous en tirons l'idée du mouvement. Il soutient ensuite que les monades sont douées d'un appétit après des représentations plus claires; lequel nous paraît tendre à diminuer la distance, et c'est en quoi l'Auteur met la source de l'attraction: de sorte que le système de l'attraction des Anglais n'est qu'une suite nécessaire du système des monades de Leibniz, quoique ce grand homme ne s'en soit pas apperçu. Il faut avouer que cet Auteur se soutient partout admirablement bien, et qu'il ne laisse aucune prise aux arguments ordinaires contre le système des monades; et il semble même, que le système des monades n'est soutenable que sur ce pied là; de sorte qu'on peut conclure assez hardiment, que si ce système n'est pas conforme à la verité, le système entier des monades doit absolument être abandonné. Mais il s'en faut de beaucoup, que cet Auteur ait prouvé solidement ce qu'il n'a fait qu'avancer, après avoir remarqué en général, que les choses sont souvent fort différentes des idées que nous nous en formons. Cependant je crois que cette pièce mérite toujours d'être

imprimée, pour faire voir aux partisans des monades, de quelle manière ils sont obligés de s'y prendre, s'ils veulent se soutenir, et que ce système, tout paradoxe qu'il paraît, est l'unique moyen de défendre les monades contre toutes les objections. (*Koenig.*)

11. Pièce latine. Cet Auteur raisonne dans le premier chapitre admirablement bien, et on devrait croire, qu'il ne serait pas porté pour les monades. Mais dans le chapitre second, la force du raisonnement se perd subitement, quand il entreprend de nous donner une idée des monades, auxquelles il attribue une force perceptive, sans qu'elles soient attachées à aucun lieu, ni même à un point; les raisonnements sont pourtant fort subtils et méritent beaucoup d'attention. Dans le troisième chapitre il apporte des arguments solides et nouveaux pour réfuter la réalité de l'espace et du temps absolu; mais il soutient que les monades agissent les unes sur les autres, si la monade *A* agit sur *B* et celle-ci réagit sur *A*, cela donne l'idée de l'espace, mais si *A* agit sur *B* sans que *B* réagisse sur *A*, de là il nous naît l'idée de succession. Dans le IV Chapitre l'Auteur entreprend l'explication des phénomènes, et premièrement de l'étendue, où après avoir fait voir, qu'elle ne peut pas naître des points, il soutient que l'étendue n'est autre chose qu'une perception obscure de plusieurs monades, qui se représentent mutuellement; il tâche de prouver cela assez ingénieusement; et le mouvement n'est autre chose que la perception d'un changement, qui se fait dans les représentations des monades. Mais partout il se trouve quantité d'hypothèses arbitraires, d'où l'on pourrait tirer des conclusions tout à fait contraires; de sorte que toute la Physique deviendrait une science tout à fait vague et destituée de tout fondement. Néanmoins cette pièce, comme elle contient quantité de raisonnements nouveaux, me paraît digne d'être imprimée, pour faire voir de quel côté qu'on se tourne, le système des monades ne peut se soutenir, sans tomber en contradiction et plusieurs absurdités. Dans le Chap. V., il rapporte plusieurs difficultés contre son système et aussi en général contre l'étendue et le mouvement, auxquelles il repond assez bien, en supposant que l'étendue et le mouvement ne sont que des phénomènes; mais c'est couper le noeud et non pas le resoudre. (*Pluckel.*)

12. Pièce latine pour les monades. L'Auteur se sert des preuves vulgaires pour établir les monades, en concluant que pour former les corps, il faut absolument des êtres simples, dont il met l'essence dans une force unique; or, dit il, cette force ne peut être que représentative; de sorte que chaque monade ait des représentations obscures, qui changent continuellement; ou chaque monade a une force de se représenter les objets obscurement, et de là naissent tous les changements. C'est le contenu du 1er Chapitre, qu'on doit avouer être fort mal fondé. Dans le 2nd Chap., il veut répondre aux arguments qu'on allègue contre les monades, mais il n'en rapporte que deux fort légers, et il y répond encore plus légèrement. Il s'attache principalement à faire voir, comment par son idée sur la nature des monades se peuvent expliquer les principaux phénomènes du monde; ce qui est le sujet du 3me Chapitre. Ici il soutient que les monades, en vertu de leur limitation sont liées ensemble et forment un composé; que cette limitation est la source de l'adhésion. La matière, selon lui, n'est donc autre chose qu'une multitude de monades, dont chacune est limitée par les autres, et la limitation consiste dans la détermination de la représentation. De là il tire la conclusion, que tous les composés doivent varier presque à l'infini vu que les représentations de chaque monade doivent différer de celles de toutes les autres. Ensuite il veut expliquer le ressort, l'inertie, la cohésion, l'attraction, la vertu magnétique, la végétation des plantes, l'accroissement des corps des animaux, et l'effet de l'imagination; tout cela doit s'ensuivre des représentations des monades; mais je crois que je ne me trompe, quand je dis, que cette pièce ne mérite la moindre attention.

13. Pièce latine pour le système des monades. L'Auteur prouve dans le 1er Chapitre la possibilité des êtres simples, que presque personne ne nie, puisqu'il s'agit seulement de prouver, si les corps peuvent être composés de tels êtres simples; il réfute la divisibilité de la matière à l'infini par des arguments communs,

qui ne prouvent rien du tout. L'essence d'une monade il met dans l'identité de toutes les réalités qui s'y trouvent; il soutient donc que l'essence d'une monade consiste dans une puissance qui est capable de produire des actes, et après plusieurs détours il soutient que cette puissance ne peut être qu'une force d'appercevoir, vu qu'elle doit être semblable à la puissance de Dieu, dont elle ne diffère que par la limitation de ce qui en Dieu est illimité; et puisqu'il établit trois degrés de la perception: le premier des idées distinctes, le second des idées seulement claires, et le troisième des idées obscures, il donne ce dernier degré aux monades qui constituent les corps; tous ces raisonnements sont les plus communs et ne méritent aucune attention. Mais non content de cette force, il attribue à chaque monade une curiosité et un appétit vers des perceptions plus claires; et de là il déduit fort témérairement, que de cette curiosité naît une force de changer continuellement de place parmi les autres; pourtant ces forces ne tendent qu'à augmenter la perfection de la monade. Il rend ensuite les monades mobiles, susceptibles en quelque lieu d'une action mutuelle. Dans le 2[d] Chapitre il tâche d'expliquer les phénomènes des corps par les monades et par leurs forces conspirantes; mais comme tout cela est absurde, il soutient une autre fausseté: qu'un corps pesant, étant tombé même dans le vide pendant 20″, ne reçoit plus de nouvelles accélérations. Au reste cette pièce à mon avis ne mérite aucune attention, vu qu'en soutenant les monades, elle leur donne de telles qualités, qui ne sauraient subsister avec leur nature. (*Wolf.*)

14. Pièce allemande dont l'Auteur renverse les monades pendant qu'il les veut établir. Il avance que le corps est divisible, non en tant qu'il est étendu, mais en tant qu'il est composé des substances simples ou de monades, auxquelles il attribue une grandeur, une figure et des côtés, par lesquels elles se touchent, quoiqu'elles ne soient pas divisibles; l'espace selon lui n'est autre chose qu'une privation ou absence de ce qui pourrait empêcher d'y placer quelque chose; dans ce sens il dit, qu'une monade doit occuper une place et servir de mesure pour les corps. Il croit pourtant que rien au monde ne se puisse expliquer par les monades, si ce n'était qu'on dit en général, que les événements au monde viennent des forces des monades. Dans le supplément il soutient même que les monades puissent varier entr'elles en grandeur sans pourtant être livisibles; et il dit qu'il n'est pas trop sûr, que les monades soient absolument impénétrables. Toutes ces réflexions sont trop légères, pour qu'elles méritent la moindre attention.

15. Pièce française contre le système des monades, autant qu'elles n'ont aucune étendue. Car l'Auteur accorde ux moindres particules de la matière un dessus, un dessous et des cotés, sans qu'elles soient divisibles. Il iomme ces éléments, qu'il distingue tout à fait des monades, atomes, qui, ayant de la grandeur et étant même isibles, ne laissent pas d'être indivisibles; idée certes fort étrange, et qui semble aussi peu soutenable que les nonades. Mais les arguments qu'il apporte contre les monades de Leibniz, autant qu'elles n'ont aucune tendue, sont plus valables, quoiqu'ils soient pour la plupart fort communs et non pas assez développés; il en a même qui ne prouvent rien, p. e. que Dieu aurait pu créer d'abord des atomes non composés; il attaque nsuite bien vivement les monades de Leibniz, à l'égard de leurs forces représentatives, qu'il prouve tout à it inutiles pour contribuer en quelque chose à la formation d'une étendue. Il réduit le système Leibnizien à dix ropositions, qu'il réfute ensuite aussi solidement, qu'il les rend ridicules, quoique la plupart de ses arguments e soient pas assez développés, et qu'ils ne mettent pas la verité à l'abri des chicanes des Leibniziens; l'Auteur ommunique à la fin un échantillon d'une nouvelle théorie sur la génération des corps, qui est très faible ne signifie rien. Il faut dire, que tant que cet Auteur attaque, il le fait avec assez de vigueur, mais pournt sans beaucoup de succès; or dès qu'il veut établir lui même quelque chose, il tombe en contradiction.

16. Pièce latine. L'Auteur, après avoir remarqué qu'on parvient souvent à des notions contraires, dont ne saurait juger laquelle est la véritable, dit qu'en considérant le corps, on y trouve aussi bien la diviilité à l'infini, que la composition des êtres simples; deux idées tout à fait contraires, et dont l'une ou

l'autre doit être trompeuse. Il allègue les arguments, pourquoi la première pourrait être une illusion, aussi bien que l'autre. Il avoue qu'il ne peut comprendre, ni comment un corps puisse être formé par des êtres simples non étendus, ni l'impossibilité de cela. Ensuite, sans rien décider, il passe à l'explication des proprietés des corps, parmi lesquelles il conte l'adhésion, la gravité, aussi bien que l'étendue et le mouvement; pour cet effet il attribue aux particules des corps presque une infinité de forces, qui étant tantôt en équilibre tantôt non, produisent tous les changements. Mais ces réflexions marquent une trop défectueuse connaissance de la Mécanique et de la Physique.

17. Pièce allemande. L'Auteur, pour prouver les monades, développe tellement l'idée d'une substance et d'un accident, qu'il dit, qu'un composé n'est qu'un accident, que les êtres simples sont les seules substances; et de là il tire cette conséquentes que les êtres, dont les corps sont composés, doivent être simples pour être substances; or l'insuffisance de cette preuve saute d'abord aux yeux. Ces êtres simples sont les monades, qui ne sont ni atomes, ni points mathématiques; ceux là étant composés, or ceux-ci de pures abstractions. C'est le contenu de la première partie. Dans la seconde il veut répondre aux objections contre les monades, où il avance, que tous les hommes ne peuvent être portés à la croyance des monades que par un miracle, et qu'il était même impossible de répondre à toutes les objections; il attaque principalement les poëtes, les mathématiciens, les physiciens et les médecins, comme des gens qui s'opposent aux monades et qui sont tout à fait incapables de comprendre la Métaphysique. Il n'apporte que quelques légères objections contre les monades, auxquelles il répond encore plus légèrement. La troisième section établit les forces des monades sur ce fondement, que chaque substance doit avoir quelque force; cette force tend à changer continuellement de place, et chaque monade produit par sa propre force tous les changements qui y arrivent; tout ce qu'il dit ici n'est qu'un galimatias. Dans la 4^me^ section il veut expliquer les propriétés des corps, mais tout est rempli d'absurdités et de contradictions.

18. Pièce latine qui ne contient rien au sujet proposé. L'Auteur commence par les étymologies des mots *philosophie* et *monades*; il cherche les noms en hebreux, et produit quantité de passages de l'Écriture sainte, pour prouver je ne sais quoi.

19. Pièce latine. L'Auteur donne une histoire des atomes, dont le premier inventeur ait été Moschus Phoenicien, de qui Pytagoras et Democritus les ont adoptés. Au reste cette pièce est presque semblable à la précédente, car elle s'attache plutôt aux noms qu'aux choses mêmes. L'Auteur est pourtant contre les monades, qu'il croit contraires à la sainte Bible; mais il ne s'y trouve aucun argument passable, ni pour ni contre les monades.

20. Pièce française: L'Auteur après avoir expliqué l'idée de Leibniz sur les monades, prouve leur réalité par ce qu'on ne saurait nier l'existence des êtres simples, tels que sont les esprits; et comme les monades appartiennent dans la même classe que les esprits, il faut qu'elles aient une force semblable, qui sera la représentation de l'univers. Sans d'autre preuve, il veut rendre raison de tous les changements dans le monde il suppose premièrement toutes les monades également parfaites, et ensuite inégalement: dans l'un et l'autre cas il tâche de montrer que, par rapport au seul point de vue où chaque monade se trouve, il doit arriver au monde des changements continuels, qu'il représente par des séries formées à la manière des mathématiciens. Il est fort court en réfutant les objections contre son système, et il n'en touche que les plus légeres: comme cet Auteur n'a rien prouvé, et que toutes ses représentations ne sont qu'un jeu d'esprit, je crois qu'on n'a aucune raison d'y faire réflexion. (*Wattel.*)

21. Pièce latine: L'Auteur, après avoir donné une idée des philosophes anciens sur les éléments de corps, prononce qu'on est redevable à Leibniz de la découverte des vrais éléments. De ce qu'un corps est

un composé, il conclut qu'il doit être composé d'êtres simples et indivisibles, (or c'est justement ici que gît, à mon avis, le paralogisme), car de quelque manière qu'on prouve cette proposition, sa renversée, que plusieurs êtres simples ou monades peuvent constituer un corps, demeure toujours contraire à la raison et à la verité; dans l'idée de composé on confond la magnitude avec la multitude, et il me semble y voir une grande différence; et on hésiterait avec bien de raison, si une multitude d'esprits pouvait mériter le nom de composé. Or de là il s'ensuit réciproquement, qu'un composé tel que nous nous figurons les corps, ne saurait être une multitude d'êtres simples. L'argument que l'Auteur apporte contre la divisibilite des corps à l'infini, se fond sur cette proposition: qu'un tel composé n'existe, qu'autant que ses parties existent; ou il suppose que Dieu n'aurait pu créer des êtres composés, sans avoir auparavant crée les parties. A mon avis ce n'est que par rapport à notre imagination, que les parties nous paraissent prieures que le composé, et partant il s'en faut de beaucoup que cet Auteur ait demontré la nécessité des êtres simples pour former les corps.

La preuve ordinaire qu'on allègue contre la divisibilité à l'infini, dont l'Auteur se sert aussi: qu'on ne pourrait assigner une raison suffisante de l'existence des corps, ne me paraît pas plus valable, puisqu'il n'est pas encore prouvé, que la raison de l'existence est nécessairement fondée sur l'existence des parties; et outre cela les corps cesseraient-ils d'exister si nous ne nous en savions imaginer une raison suffisante. Encore cette question sur la raison de l'existence est ambigue, puisqu'on ne définit pas si l'on entend le commencement de l'existence ou la continuation. De plus, les absurdités qu'on veut déduire de la divisibilité à l'infini se fondent nécessairement sur l'idée de l'infini, laquelle étant très imparfaite, on peut dire que les doutes qu'on apporte contre cette divisibilite ne sont fondés que sur des idées extrêmement imparfaites, (parmi lesquelles je pourrais aussi compter l'idée du composé telle qu'on applique ici); au lieu que les doutes et les absurdités, dont on combat le système des monades, se fondent sur des idées beaucoup plus parfaites. Et si on dit que la matière est divisible à l'infini, et qu'on demande la raison suffisante, ne suffira-t-il pas de répondre que Dieu ait crée des choses, qui en vertu de leur nature sont divisibles à l'infini; et il est absurde de vouloir subsister enfin dans la division d'une chose, si sa nature ne le permettait pas; ce qui n'est pas encore démontré, et pourtant les partisans des monades le supposent toujours. L'Auteur veut aussi directement combattre la divisibilité à l'infini en disant, que si un corps contenait une infinité de parties, il devrait remplir tout le monde; mais comme le même corps ne devient pas plus grand, soit qu'il soit divisible en 10000 parties, ou seulement en 1000, la divisibilité plus petite ou plus grande, quand même elle irait à l'infini, n'aggrandira jamais le corps. Pourtant l'Auteur proteste hautement, qu'il n'est pas en état de résoudre les objections contre son système; il dit que puisqu'il avait démontré l'existence des monades invinciblement, toutes les objections n'étaient pas capables d'en ébranler sa solidité; c'est en quoi il a raison, pourvu que sa supposition fût vraie; mais tant que le moindre doute contre sa prétendue démonstration reste, chaque absurdité bien claire doit renverser tout le système. Et après je n'ai encore jamais remarqué, que la vérité soit assujettie à tant d'objections si bien fondées; et il me semble que dèsqu'on trouve des arguments si forts contre quelque système, il doit être fort suspect. Ensuite l'Auteur passe à l'explication des propriétés de ses monades, où il n'est pas trop d'accord avec Leibniz; mais il me semble qu'il importe peu quelles propriétés on veut attribuer à des êtres chimériques. Cependant l'Auteur est obligé de recourir à de grandes contradictions, quand il veut établir les forces de ses monades, lesquelles consistent à s'opposer à d'autres monades qui voudraient occuper le même lieu; mais comment une monade, qui n'a aucune étendue, peut être en peine qu'une autre également sans étendue, la déplace! Ici il parle, comme si l'espace et le lieu étaient quelque chose de réél, mais quand il veut répondre aux objections, il ne cesse de s'écrier, que l'espace et le lieu ne sont que des abstractions. Mais en cela il suit l'exemple de Leibnitz et de tous ceux qui ont soutenu les monades, qui savent fort bien profiter de la réalité de l'espace et du lieu, si cela est favorable à leur système; mais dèsqu'un adversaire y fonde tant soit peu

son objection, ce ne sont que des imaginations. C'est dont fort ridicule qu'une monade ait une force de s'opposer à la *pénétration*, dont d'autres la pourraient menacer? Il croit qu'il soit impossible qu'un corps communique à l'autre quelque mouvement, mais que chacun produit ses changements par sa propre force, et de même deux monades ne sauraient agir l'une sur l'autre; ce qui est directement contraire à la force *nitente*, par laquelle chaque monade résiste à son déplacement; mais je ne m'amuserai pas à rassembler toutes les contradictions qui se trouvent dans ce système; l'Auteur se soutient fort mal, et il ne paraît pas avoir prevû à quelles idées faut il se livrer, si l'on veut soutenir les monades. Il n'y a que l'Auteur de la pièce No. 10 qui se soit mis en état de soutenir le système, tant qu'il est possible. Il dit aussi que dans la collision, chaque corps change de mouvement par sa propre force, et que la collision ne fait que lever les obstacles qui s'opposaient auparavant à ses forces; mais comme ni les monades ni les corps n'agissent les uns dans les autres, comment est il possible, qu'un corps puisse rencontrer aucun obstacle de la part des autres.

22. Pièce latine contre les monades: D'abord l'Auteur nie la divisibilité de la matière à l'infini; mais il soutient que les dernières particules ne sont pas tout à fait destituées de grandeur, quoiqu'elles soient simples; elles auront donc nonobstant la simplicité, quelque grandeur, dans laquelle on pourra concevoir plusieurs points mathématiques; il nie donc avec raison, que les corps puissent être composés des éléments, qui n'ont aucune étendue; mais je ne vois pas comment la divisibilité saurait être impossible là, où l'on peut concevoir plusieurs points. Cela remarqué, l'Auteur promet six arguments contre le système des monades; dans le premier il prouve que chaque substance qui doit entrer dans la composition d'un corps, doit au moins exister dans un point mathématique; donc elle contiendra ou un seul point ou plusieurs; l'un et l'autre est contraire au système des monades. Je voudrais tourner cet argument de cette façon: il est sûr que je puis concevoir un point mathématique dans un corps, c.-à.-d. dans un amas de plusieurs monades; donc je pourrai aussi en concevoir un dans une monade ou non! Dans le premier cas je demande, si j'y pourrai concevoir plus qu'un ou non! et qu'on dise l'un ou l'autre, on renversera le système des monades; dans l'autre cas, si on ne peut pas concevoir un point dans une monade, et pourtant dans plusieurs ensemble, il faudrait que ce point fût partagé par toutes, ce qui serait également absurde. Or l'Auteur remarque qu'une substance qui ne contient qu'un point, comme ses limites ne diffèrent point ni entr'elles ni d'elle même, ne saurait exister; après cela il ne faut pas oublier que la pluspart des *prémisses*, sur lequelles cet argument et aussi les suivants sont fondés, se trouvent établies par Mr. Wolf même, et les autres sont assez claires d'elles mêmes.

Le II argument est tiré de l'impénétrabilité des corps, d'où l'Auteur conclut que chaque monade doit être impénétrable; mais deux monades venant à s'unir, doivent tout à fait tomber l'une sur l'autre, idée tout à fait contraire à l'impénétrabilité.

Le III argument se fonde sur le rapport qui doit toujours régner entre le tout et ses parties, et chaque monade doit tenir une certaine raison au tout; or les monades manquant de grandeur, rendent l'absurdité d'abord manifeste.

Le IV argument roule sur l'étendue et sa continuité, où l'Auteur prouve que, pour que toute l'étendue soit remplie, il faut absolument que toutes les parties, même les dernières ou les monades, ayent une étendue; car comme toutes les monades ensemble remplissent l'espace que le corps occupe, il faut que chacune en remplisse une partie.

Dans le V argument il prouve que le nombre des parties simples, qui constituent un corps, doit être fini: cet argument, quoique ceux qui sont pour la divisibilité à l'infini, y puissent trouver à s'opposer, est pourtant très fort contre les monadistes, qui accordent le nombre fini des parties; or de là il fait voir que chacune doit avoir une grandeur.

Le VI argument regarde l'idéalisme, qui est une suite nécessaire du système des monades, comme l'Auteur le prouve fort bien. Car en effet, si notre ame forme toutes ses perceptions, toutes ses connaissances de son propre fond, sans que les objets y contribuent la moindre chose, il s'ensuit que notre ame pourrait avoir les mêmes idées, quand même tous les objets seraient anéantis, et dans ce sens la monadologie revient à l'idéalisme.

Je crois donc que cette pièce a fort bien étalé plusieurs absurdités de ce système, et même très solidement demontré la fausseté. Il s'agira donc de choisir parmi les pièces, qui sont contre les monades, celle qui sera la meilleure; et dans cette vue je dois convenir, que celle-ci l'emporte encore loin sur les précédentes.

23. Pièce latine pour les monades. L'Auteur soutient, que tous les composés ne sont que des accidents, des substances, qui sont toutes simples, qu'il appelle monades; il a pourtant une idée bien singulière des monades, puisque selon lui une peut être ou plus grande ou plus petite que l'autre. Chaque monade à une force, qui tend au changement de son état, et c'est sur ce chapitre qu'il s'étend fort, en employant quantité de nouveaux termes, qui signifient peu de chose; la force est presque une substance. Il veut aussi répondre aux objections faites contre les monades, où il dit, que les monades ont bien une grandeur, mais non pas une grandeur *quantitative*, mot où il croit voir un grand mystère; d'où l'on voit clairement, que cet Auteur établit fort mal tant l'existence des monades, que leur nature. C'est le contenu du premier Chapitre, dans le second il parle du monde et des phénomènes, mais d'une manière si confuse, que ce serait pedre le temps si l'on voulait s'y arrêter. (*Un Ecolier de Mr. Baumgarten.*)

24. Pièce latine. L'Auteur représente la philosophie sous l'emblème d'Ulisses, qui après un exil de 20 ans est retourné chez lui; ainsi la philosophie étant depuis 2000 ans exilée, s'est enfin retrouvée en Allemagne, y ayant été introduite par Leibniz, comme à la Cour de *Alcinous*, qui est celle de Berlin. Il fait un si grand cas de cette représentation emblématique, qu'il proteste, qu'il ne l'aurait pas publiée, même à un prix de 10000 ecus. Il promet de s'attacher à 3 points: le 1) si les arguments contre les monades valent quelque chose ou non; le 2) qui est en état de démontrer les monades; et 3) d'en expliquer les phénomènes de la nature. Ici il continue ses comparaisons fabuleuses tirées du retour d'Ulisses, et je n'y trouve que des rêveries phantastiques. Dans le 2° Chapitre il rapporte un phénomène extraordinaire, qu'il a vu, quand il commença d'écrire son mémoire, savoir: la lune a été couverte d'épaisses ténèbres, qui signifient que la mémoire de ceux, qui sont contre les monades, deviendrait fort obscure à la postérité; or cette pièce me paraît partout si ténébreuse, qu'il est presque impossible de deviner ce que l'Auteur veut dire.

25. Pièce allemande dont l'Auteur entreprend de montrer que tous les êtres simples ayent une force représentative. L'Auteur s'attache à l'idée du composé, de laquelle il tire la conséquence, qu'il y a des êtres simples, dont chacun a une force qui aboutit à un certain but; et c'est cette force ou vertu qui distingue les monades des points mathématiques. Mais pourtant dans la contemplation des corps nous ne saurions parvenir à l'aide de nos sens jusqu'aux monades dont ils sont composé; donc il faut passer par un autre chemin pour parvenir à la connaissance des monades. Il conclut donc du mouvement des corps, que les éléments ou les monades sont mobiles, et la mobilité des monades vient de leur tendence vers un certain endroit, et cette tendence suppose nécessairement une représentation des choses vers lesquelles elle est dirigée; voila donc la représentation de monades établie. Pour qu'une monade acquierre un certain degré de vitesse, il prouve par un raisonnement ridicule, que la force requise doit être proportionelle au quarré de cette vitesse, ce qui suffit pour donner à connaître l'ignorance et la stupidité de cet Auteur, dans la matière qu'il a entrepris d'éclaircir.

# XXXIII.

# Principia pro motu sanguinis per arterias determinando.

(Exhib. 1775 Dec. 21.)

---

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

§ 15. Quoniam igitur relatio inter $p$ et $s$ constat, conveniet inde valorem formulae $\left(\frac{dp}{dz}\right)$ elicere, qui cum sola $z$ variabilis hic occurrat reperietur:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{c}{(\Sigma - s)^2}\left(\Sigma\left(\frac{ds}{dz}\right) - \frac{sd\Sigma}{dz}\right),$$

hic valor succinctius ita exhiberi potest:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{c\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2}\cdot\left(\frac{d.(s:\Sigma)}{dz}\right).$$

Sicque posterior aequatio induet hanc formam:

$$\frac{2gc\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2}\cdot\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0,$$

ita ut nunc duae tantum supersint functiones $s$ et $v$, per ambas variabiles principales $z$ et $t$ determinandae.

§ 16. Quo has duas aequationes magis evolvamus, eas ita repraesentemus:

$$\text{I.}\quad v\left(\frac{ds}{dz}\right) + s\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{ds}{dt}\right) = 0 \quad\text{et}\quad \text{II.}\quad \left(\frac{dv}{dt}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + \frac{2gc\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right) = 0.$$

Jam a posteriore in $s$ ducta auferamus priorem in $v$ ductam et obtinebimus hanc aequationem:

$$s\left(\frac{dv}{dt}\right) - vv\left(\frac{ds}{dz}\right) - v\left(\frac{ds}{dt}\right) + \frac{2gcs\Sigma^2}{(\Sigma - s)^2}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right) = 0,$$

quam loco posterioris uti conducet.

§ 17. Quod si loco hypothesis qua posuimus $s=\frac{\Sigma p}{c+p}$, uti velimus ista: $s=\Sigma(1-e^{-\frac{p}{c}})$, unde prope modum eadem phaenomena produci debent, hinc prodiret:

$$p=c\log\frac{\Sigma}{\Sigma-s},\quad \text{hincque porro}\quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=\frac{c\Sigma}{\Sigma-s}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right),$$

qui valor aliquanto simplicior est quam ille qui supra prodierat:

$$\frac{c\Sigma^2}{(\Sigma-s)^2}\left(\frac{d(s:\Sigma)}{dz}\right),$$

ideoque ejus loco tuto adhiberi poterit.

## Evolutio casus

*quo tubus rigidus statuitur.*

§ 18. Quoniam nulla via patet, quomodo resolutio harum aequationum sit suscipienda, a casu jam satis cognito incipi conveniet, quo tubus per quem fluidum propellitur rigidus statuitur, ita ut ejus amplitudo $s$ perpetuo sit aequalis amplitudini maximae $\Sigma$, ideoque functio unicae variabilis $z$ tantum, quam ob rem pro hoc casu habebimus $\left(\frac{ds}{dt}\right)=0$, unde binae aequationes motum determinantes erunt:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{d.vs}{dz}\right)=0.\qquad \text{II.}\quad 2g\left(\frac{dp}{dz}\right)=-\left(\frac{dv}{dt}\right)-v\left(\frac{dv}{dz}\right).$$

§ 19. Harum aequationum prima, quia in formula $\left(\frac{d.vs}{dz}\right)$, sola littera $z$ variabilis ponitur, dum tempus $t$ manet constans, ejus integrale erit $vs=T$, denotante $T$ functionem quampiam ipsius $t$, quae cum pro omnibus tubi locis debeat esse eadem, si in loco ubi embolus fluidum propellit amplitudo tubi ponatur $=b$ et celeritas qua embolus agit $=V$ manifestum est, si punctum indefinitum $Z$ in hunc locum transferatur, tum amplitudinem $s$ abire in $b$ celeritatem vero $v$ in $V$, ubi $V$ a solo tempore $t$ pendebit, sicque functio illa $T$ erit $=bV$, ita ut prima aequatio integrata nobis praebeat $sv=bV$, ideoque $v=\frac{bV}{s}$; in singulis scilicet tubi locis $Z$ celeritas fluidi erit reciproce proportionalis amplitudini tubi $s$, prorsus uti theoria motus fluidorum per tubos postulat.

§ 20. Cum igitur ex prima aequatione nacti simus $v=\frac{bV}{s}$, ubi $V$ est functio solius temporis $t$, $s$ vero functio solius quantitatis $z$; substituamus hunc valorem in altera aequatione atquae ob:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{b}{s}\cdot\frac{dV}{dt}\quad\text{et}\quad\left(\frac{dv}{dz}\right)=-bV\cdot\frac{ds}{ssdz},$$

ea hanc induet formam:

$$2g\left(\frac{dp}{dz}\right)=-\frac{b}{s}\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{bbVVds}{s^3dz},$$

ex qua pressionem $p$ definiri oportet, cujus differentiale $dp$, quia ad solam variabilem $z$ refertur, tempus $t$ in hac aequatione pro constanti habeatur, hincque etiam quantitates a solo tempore pendentes, quae sunt $V$ et $\frac{dV}{dt}$, unde facta multiplicatione per $dz$, aequatio ista ita se habebit:

$$2gdp=-\frac{bdV}{dt}\cdot\frac{dz}{s}+bbVV\cdot\frac{ds}{s^3},$$

quae ergo integrata dabit:

$$2gp = -\frac{bdV}{dt}\int\frac{dz}{s} - \tfrac{1}{2}bbVV \cdot \frac{1}{ss} + T,$$

ubi $T$ talem functionem temporis designat, quae indoli quaestionis conveniet, ad quam determinandam transferamus punctum $Z$ in locum ubi embolus nunc agit; et quia hic est $s = b$, sumatur etiam integrale $\int\frac{dz}{s}$ ita ut in hoc loco evanescat; tum autem pressio $p$ aequalis fieri debet pressioni qua embolus agit in fluidum, quae ergo vis si ponatur $= P$, tota aequatio pro loco emboli erit $2gP = -\tfrac{1}{2}VV + T$, unde colligitur functio illa $T = 2gP + \tfrac{1}{2}VV$, quo ergo valore substituto, nostra altera aequatio erit:

$$2gp = -\frac{bdV}{dt}\int\frac{dz}{s} - \tfrac{1}{2}bbVV \cdot \frac{1}{ss} + 2gP + \tfrac{1}{2}VV,$$

sive:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{bdV}{dt}\int\frac{dz}{s}.$$

§ 21. (Fig. 277.) Referat nunc figura $ABCD$ antliam quae initio fuerit fluido repleta, dum tubus annexus $CDNM$ totus fuerat vacuus, amplitudo vero antliae ubique statuatur $= b$. Dehinc vero elapso tempore $= t$, actione emboli fluidum jam sit protrusum eo usque ut nunc spatium occupet $XPMN$, ita ut massa fluidi, quae in initio occupaverat spatium $ABPX$, impleat tubum $CDMN$. Ponamus igitur spatium $AX = X$, ut spatium $ABPX$ sit $bX$. Nunc vero embolus qui agit in sectione $PX$ exerceat pressionem altitudini $P$ debitam, ita ut tota ejus vis aequetur ponderi massae fluidi cujus volumen $= bP$. Hoc enim modo denotabit littera $P$ ipsam pressionem, quam fluidum in $XP$ sustinet, uti jam ante assumsimus. Cum igitur $V$ denotet celeritatem fluidi in $PX$, qua tempusculo $dt$ promovetur per spatiolum $dX$, erit $dX = Vdt$ ideoque $X = \int Vdt$. Evidens autem est has quantitates $V$, $P$ et $X$ spectari debere tanquam functiones solius temporis $t$. His positis, volumen $CDMN$, quod nunc fluidum in tubo occupat fore $= bX = b\int Vdt$, sumendo scilicet integrale $\int Vdt$, ita ut evanescat posito $t = 0$. Statuatur porro tota antliae longitudo $AC = a$, cui cum ubique eadem tribuatur amplitudo $b$, erit tota massa fluidi, in quam embolus agit $= ab$, ubi notetur, $b$ esse quantitatem duarum dimensionum.

§ 22. Quo nunc facilius aequationem inventam ad istum statum accommodemus, initium tubi antliae annexi statuamus in $CD$ et vocemus intervallum $CZ = z$, tum vero in $Z$ sit amplitudo $ZV = s$ et pressio $= p$, existente celeritate uti jam invenimus $v = \frac{bV}{s}$. Sit nunc $Z$ valor integralis $\int\frac{bdz}{s}$, evanescens posito $z = 0$. Ante autem hoc integrale ita sumsimus ut evanescat translato puncto $Z$ in $X$, unde patet fore:

$$\int\frac{bdz}{s} = Z + a - X = Z + a - \int Vdt.$$

Statuatur igitur iste valor loco $\int\frac{bdz}{s}$ et nostra aequatio erit:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{dV}{dt}\left(Z + a - \int Vdt\right),$$

quae aequatio ut ad totam fluidi massam in tubo contentam accommodetur, punctum indefinitum $Z$ a puncto $C$ usque ad $M$ promoveri debebit, ita ut volumen $CDMN$ quod est $\int sdz$ sumto $z = CM$ aequale evadat volumini $bX = b\int Vdt$, ex qua aequatione totum hoc intervallum $CM$ investigari oportet, quod igitur in genere praestari nequit, nisi amplitudinis $s$ relatio ad $z$ fuerit cognita.

§ 23. Sit igitur intervallum $CM = \omega$, amplitudo in hoc loco $MN = \sigma$ et pressio $= \pi$; tum vero valor integralis $\int \frac{bdz}{s} = Z$, posito $z = \omega$, abeat in $\Omega$, sicque pro casu quem tractamus integrale $\int s dz$, a $z = 0$ usque ad $z = \omega$ sumtum, fieri debet $= ab$. Interim tamen iste posteriores denominationes etiam locum habere possunt, quando fluidum jam initio tubum impleverit et in orificio $MN$ effluat, quo casu quantitates $\omega$, $\sigma$ et $\Omega$ erunt constantes. Hic autem eas tanquam functiones temporis $t$ spectabimus; pressio autem $\pi$ in hoc loco sive fluidum hic terminetur sive effluat, semper tanquam cognita spectari potest atque haec ipsa circumstantia inservit motui fluidi determinando, dum alias quaestio esset indeterminata.

§ 24. Quo igitur motum fluidi penitus determinemus, promoveamus punctum indefinitum $Z$ usque in $M$, ponendo $z = \omega$, $Z = \Omega$, $s = \sigma$ et $p = \pi$, atque hinc nanciscemur hanc aequationem:

$$2g\pi = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{dV}{dt}\left(\Omega + a - \int V dt\right),$$

ubi jam omnes quantitates sunt functiones soluis temporis $t$, inter quas sola celeritas $V$ tanquam incognita est spectanda cujus ergo valorem per reliquas definiri oportet, id quod vix praestari posse videtur ob formulam integralem $\int V dt$. Hanc ob rem necesse est, ut hanc aequationem in aliam formam transfundamus, quae facilius tractari queat, id quod commodissime obtinebitur, si loco temporis $t$ ipsum intervallum $AX = X$ introducamus, quando quidem etiam $X$ est functio solius temporis $t$; tum autem, ob $\int V dt = X$ erit $dt = \frac{dX}{V}$. Hinc igitur sequentem nanciscemur aequationem:

$$2g\pi = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{VdV}{dX}(\Omega + a - X),$$

quae si ponamus $VV = 2y$, accipit istam formam:

$$2g\pi = 2gP + y\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{dy}{dX}(\Omega + a - X),$$

cujus resolutio nulla amplius laborat difficultate, quam ob rem nunc celeritatem $V$, tanquam functionem cognitam quantitatis $X$ spectare poterimus.

§ 25. Resoluta autem hac postrema aequatione, facile iterum tempus $t$ in calculum introduci poterit, et quoniam nunc celeritas $V$ pro functione cognita temporis haberi potest, in singulis tubi locis satis commode pressio fluidi assignari poterit. Cum enim ex postrema aequatione sit:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2g(P - \pi) + \frac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right)}{\Omega + a - X};$$

qui valor in aequatione pro pressione $p$ substitutus, suppeditabit sequentem formam:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{2g(P - \pi) + \frac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right)}{\Omega + a - X}(Z + a - X),$$

vel calculus evadet concinnior sequenti modo. Cum habeamus has duas aequationes:

$$2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{dV}{dt}(Z + a - X),$$

$$2g\pi = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{\sigma\sigma}\right) - \frac{dV}{dt}(\Omega + a - X),$$

differentia harum aequationum nobis praebet:

$$2g(p-\pi)=\tfrac{1}{2}bbVV\left(\frac{1}{\sigma\sigma}-\frac{1}{ss}\right)-\frac{dV}{dt}(Z-\Omega),$$

ex qua jam facile ad quodvis tempus pro quovis tubi loco $Z$ pressio fluidi $p$ definiri potest; sicque omnia quae ad motum spectant hac ratione innotescent.

## Applicatio

### *ad tubum ubique aequaliter amplum.*

§ 26. Sit amplitudo tubi $CM$ ubique eadem $=c$, ita ut sit $s=c$, ideoque $\int sdz=cz$, unde facto $z=\omega$ fiet $c\omega=bX$ ergo $\omega=\frac{bX}{c}$; ac posito $c=nb$, erit $\omega=\frac{X}{n}$. Tum vero erit etiam $\sigma=c=nb$; porro autem habebitur:

$$Z=\int\frac{bdz}{c}=\frac{z}{n},\ \text{hincque}\ \Omega=\frac{\omega}{n}=\frac{X}{nn}.$$

Quoniam vero in loco $M$ ubi fluidum terminatur pressio est nulla, erit $\pi=0$, unde aequatio nostra ad hunc locum translata erit:

$$0=2gP+\tfrac{1}{2}VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)-\frac{VdV}{dX}\left(a+\frac{X}{nn}-X\right).$$

Deinde vero pro loco quovis indefinito $Z$ aequatio prodit ista:

$$2gp=2gP+\tfrac{1}{2}VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)-\frac{VdV}{dX}\left(a+\frac{z}{n}-X\right).$$

§ 27. Harum aequationum prior ad terminum $M$ accommodata, quae ad solam variabilem $X$ refertur, multiplicetur per $2dX$ ut habeatur:

$$0=4gPdX+VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)dX-2VdV\left(a+\frac{X}{nn}-X\right),$$

cujus integrale manifesto est:

$$C=4g\int PdX-aVV+VV\left(1-\frac{1}{nn}\right)X,$$

unde colligimus:

$$VV=\frac{C-4g\int PdX}{\left(1-\frac{1}{nn}\right)X-a},$$

quare si vis emboli $P$ sumatur constans $=B$, et initio motus uti erat $X=0$, fuerit etiam celeritas $V=0$, ob $\int PdX=BX$ erit constans $C=0$, hincque fiet:

$$VV=\frac{4gBX}{a-\left(1-\frac{1}{nn}\right)X},$$

unde cum embolus per totam antliam seu spatium $AC=a$ fuerit promotus, ita ut fiat $X=a$, tum erit $VV=4n^2gB$; tum autem erit $CM=\frac{a}{n}$, ista autem celeritate fluidum deinceps per tubum uniformiter progredietur, nisi nova emboli actio cum fluido affluente succedat.

§ 28. Durante autem actione emboli cujus vim constantem assumsimus, pressio $p$ in quovis tubi loco $Z$ ea posteriori aequatione § 26 facile determinari poterit. Si enim ab ea praecedens auferatur, relinquetur ista aequatio:

$$2gp = \frac{VdV}{dX}\left(\frac{X}{nn} - \frac{z}{n}\right).$$

Cum igitur sit:
$$VV = \frac{4gBX}{a - \left(1 - \frac{1}{nn}\right)X},$$

erit differentiando:
$$\frac{VdV}{dX} = \frac{2agB}{\left(a - \left(1 - \frac{1}{nn}\right)X\right)^2},$$

hoc ergo valore substituto reperietur pressio:

$$p = \frac{aB}{\left(a - \left(1 - \frac{1}{nn}\right)X\right)^2}\left(\frac{X}{nn} - \frac{z}{n}\right).$$

Hae igitur expressiones simpliciores reddentur, ponendo $\frac{1}{n} = \lambda$ ut sit $b = \lambda c$, ubi numerus $\lambda$ semper unitate major considerari potest, tum enim habebimus:

$$VV = \frac{4gBX}{a + (\lambda\lambda - 1)X} \quad \text{et} \quad p = \frac{aB}{[a + (\lambda\lambda - 1)X]^2}(\lambda\lambda X - \lambda z).$$

Cum igitur sit celeritas in loco indefinito $Z$ scilicet $v = \lambda V$, unde fiet:

$$vv = \lambda\lambda VV = \frac{4\lambda\lambda gBX}{a + (\lambda\lambda - 1)X}.$$

§ 29. Quod si jam processum omnium harum operationum attentius perpendamus, reperiemus ad successum plurimum contulisse, expulsionem elementi temporis $dt$ cujus loco scripsimus $\frac{dX}{V}$, postquam scilicet celeritatem $v$ ex calculo eliminavimus, ita ut totum negotium eo sit perductum, ut celeritas emboli $V$ per variabilem $X$ definiri debuerit. Tum vero pressio $p$ evasit functio binarum variabilium $X$ et $z$. Ceterum hic omni attentione dignum reperitur, quod ex unica aequatione posteriore non solum celeritas $V$ sed etiam pressio $p$ definiri potuerit, id quod indoli functionum duas variabiles involventium est tribuendum. Ex quo intelligitur, etiam investigationem motus per tubos elasticos simili modo suscipi debere.

§ 30. Quod si autem hanc tractationem simili modo suscipere vellemus, in calculos fere inextricabiles incideremus; neque enim integratio binarum formularum principalium tam facile esset successura. Verum hic paradoxon non parum mirandum se offert, in eo consistens quod, dum pro casu tuborum rigidorum binas aequationes totam solutionem continentes scilicet: 1) $vs = bV$ et

$$2)\quad 2gp = 2gP + \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right) - \frac{VdV}{dX}(Z + a - X)$$

per integrationem ex principalibus elicuimus, easdem aliam viam ingrediendo per differentiationem obtinere liceat, quam analysin utique opera pretium erit hic accuratius evolvere, quippe quae deinceps etiam ad tubos elasticos felici successu adhiberi poterit.

## Alia methodus
### *motum per tubos rigidos determinandi.*

§ 31. Manentibus omnibus denominationibus ut hactenus, consideretur portio fluidi indefinita in spatio $XP$ et $ZV$ contenta, cujus volumen erit $b(a - X) + \int s dz$, dum scilicet integrale $\int s dz$ a termino $z = 0$ capitur. Jam ista portio promoveatur elemento temporis in situm $xpzv$, existente spatiolo $Xx = dX$ et $Zz = dz$, quae spatiola cum celeritatibus $V$ et $v$ percurrantur, erit $dX : dz = V : v$ ideoque $dz = \frac{v dX}{V}$; quam ob rem cum massa hujus portionis eadem manere debeat, differentiale formulae $b(a - X) + \int s dz$, sumendo tam $X$ quam $z$ variabile, nihilo aequari debet, si modo loco $dz$ scribatur $\frac{v dX}{V}$, quoniam igitur $s$ est functio solius $z$ ideoque etiam ipsa formula $\int s dz$, haec differentiatio dabit $- b dX + \frac{v s dX}{V} = 0$ ideoque $vs - bV = 0$ sive $vs = bV$.

§ 32. Pro altera aequatione eruenda consideremus vim vivam ejusdem fluidi portionis $XPZV$, quae reperitur dum singula ejus elementa per quadratum celeritatis qua moventur multiplicetur, unde ista vis viva erit $= b(a - X)VV + \int vvs dz$, quae loco $v$ posito valore modo invento abibit in hanc:

$$b(a - X)VV + bb\int \frac{VV dz}{s},$$

quae expressio, quia $V$ non a $z$ pendet, ita repraesentari potest:

$$b(a - X)VV + bbVV\int \frac{dz}{s}.$$

Quod si jam ista massa in statum sequentem promoveatur, ita ut sit ut ante $dz = \frac{v dX}{V}$ sive $dz = \frac{b dX}{s}$, incrementum vis vivae interea ortum erit:

$$2bVdV\left(a - X + \int \frac{bdz}{s}\right) + bVV\left(- dX + \frac{bb dX}{ss}\right) = 2bVdV(a - X + Z) + bVVdX\left(- 1 + \frac{bb}{ss}\right).$$

§ 33. Statuatur hoc incrementum vis vivae brevitatis gratia $WdX$ ut sit:

$$W = \frac{2bVdV}{dX}(a - X + Z) - bVV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right),$$

altera vero aequatio quam supra per integrationem sumus nacti ita repraesentetur:

$$2gP - 2gp = \frac{VdV}{dX}(a - X + Z) - \tfrac{1}{2}VV\left(1 - \frac{bb}{ss}\right),$$

quae aequatio introducendo incrementum vis vivae $WdX$ induet hanc formam $2g(P - p) = \frac{W}{2b}$, ita ut sit ipsum incrementum vis vivae $WdX = 4gb(P - p)dX$, id quod egregie convenit cum principiis motus ad generationem vis vivae applicatis, cum $P$ exhibeat vim fluidum propellentem, et $p$ vim retro pellentem.

§ 34. Quod quo clarius ob oculos ponatur, consideremus in genere massam $M$ celeritate motam $V$, et a vi motrice $\Pi$ in eadem directione sollicitatam, ac primum principium motus praebet $MdV = 2g\Pi dt$, unde si spatiolum percursum ponatur $= dX$ ut sit $dt = \frac{dX}{V}$, haec aequatio fiet $MVdV = 2g\Pi dX$ sive $2MVdV = 4g\Pi dX$. ubi $2MVdV$ manifesto est incrementum vis vivae $MVV$, quod ergo semper aequatur formulae $4g\Pi dX$. Nostro

autem casu, duas habemus vires alteram propellentem, quae est $= bP$, quae revera per spatiolum $dX$ promovetur, unde ab ea vis viva generatur $= 4gbPdX$, ab altera autem vi contraria, quae est $= ps$ et per spatiolum $dz$ movetur, oritur vis viva $4gspdz$, quae ob $dz = \frac{bdX}{s}$ erit $4gbpdX$, qui effectus ab illo subtractus relinquit verum incrementum vis vivae $4gbdX(P - p)$, quod ergo utique aequale esse debet ipsi $WdX$, prorsus uti supra invenimus. Sicque nunc eandem aequationem quam supra per integrationem elicuimus, nunc per differentiationem sumus consecuti. Hoc igitur modo etiam casum pro tubis elasticis evolvi conveniet.

## Investigatio formularum

### *pro motu fluidi per tubos elasticos.*

§ 35. Hic igitur ratiocinium eodem prorsus modo instituatur ut ante, hoc sole discrimine observato, quod amplitudo $s$ hic sit functio ambarum variabilium $X$ et $z$, ita ut ejus differentiale sit:

$$ds = dX\left(\frac{ds}{dX}\right) + dz\left(\frac{ds}{dz}\right);$$

primo igitur consideretur quantitas fluidi in spatio indefinitio $XPZV$ contenti, quae ut ante est $b(a - X) + \int sdz$, cujus ergo incrementum ex variabilitate utriusque $X$ et $z$ ortum est $- bdX + sdz + dX\int dz\left(\frac{ds}{dX}\right)$, quod igitur exprimit excessum voluminis in spatio $xpzv$ contenti supra volumen $XPZV$.

§ 36. Cum igitur celeritas in $XP$ sit $= V$, in $ZV$ vero $= v$, dum stratum $ZV$ per spatiolum $Xx$ progreditur alterum stratum $ZV$ per tantum spatiolum $Zz = dz$ proferetur, ut sit $dX : dz = V : v$, ideoque $dz = \frac{vdX}{V}$, quare si in superiori expressione loco $dz$ scribamus istum valorem $\frac{vdX}{V}$, ea nihilo aequalis fieri debet, unde oritur haec aequatio $- b + \frac{sv}{V} + \int dz\left(\frac{ds}{dX}\right)$, ex qua aequatione colligitur celeritas $v$, quae ergo erit:

$$\frac{bV}{s} - \frac{V}{s}\int dz\left(\frac{ds}{dX}\right).$$

Ponatur hic brevitatis gratia formula $\int dz\left(\frac{ds}{dX}\right) = S$, ut habeatur $v = \frac{V(b-S)}{s}$, hincque fiet spatiolum:

$$Zz = \frac{(b-S)\,dX}{s}.$$

§ 37. Contemplemur nunc quoque vim vivam fluidi in spatio $XPZV$ contenti, quae ut ante erit $bVV(a - X) + \int vvsdz$, quae loco $vv$ valore substituto quoniam $V$ tantum est functio ipsius $X$, transibit in hanc formam:

$$VV\left(b(a - X) + \int\frac{(b-S)^2\,dz}{s}\right);$$

scribamus brevitatis gratia $\frac{(b-S)^2}{s} = \Phi$ ut ista vis viva sit $VV(b(a - X) + \int\Phi dz)$, cujus differentiale ex utraque variabilitate oriundum erit:

$$2VdV(b(a - X) + \int\Phi dz) - bVVdX + VV\Phi dz + VVdX\int dz\left(\frac{d\Phi}{dX}\right),$$

erit autem:
$$\left(\frac{d\Phi}{dX}\right) = -\frac{2(b-S)}{s}\left(\frac{dS}{dX}\right) - \frac{(b-S)^2}{ss}\left(\frac{ds}{dX}\right),$$

ubi cum sit: $S = \int dz \left(\frac{ds}{dX}\right)$ erit $\frac{dS}{dX} = \int dz \left(\frac{dds}{dX^2}\right)$.

His igitur valoribus substitutis erit incrementum vis vivae ponendo $dz = \frac{(b-S)\,dX}{s}$:

$$2VdV\,(b\,(a-X) + \int \Phi dz) - bVVdX + VV\frac{(b-S)^3}{ss}\,dX$$

$$+ 2VVdX \int dz \frac{(b-S)}{s} \int dz \left(\frac{dds}{dX^2}\right) - VVdX \int dz \frac{(b-S)^2}{ss}\left(\frac{ds}{dX}\right).$$

Vel quoniam functio $\Phi$ ut cognita spectari potest, istud incrementum succinctius ita exprimi potest:

$$2VdV\,(b\,(a-X) + \int \Phi dz) - bVVdX + \frac{VV(b-S)^3}{ss}\,dX + VVdX \int dz \left(\frac{d\Phi}{dX}\right).$$

§ 38. Hoc autem incrementum vis vivae oritur primo ab actione vis $P$, quae cum in basin $= b$ agat, ejus quantitas erit $= bP$ et per spatiolum $dX$ agit unde ejus actio uti supra vidimus aestimari debet formula $4gbPdX$. Deinde quia eadem fluidi massa retro urgetur, pressione $p$, in basin $= s$ agente, ejus quantitas erit $ps$ et quoniam per spatiolum $dz = \frac{(b-S)\,dX}{s}$ agit, ejus actio erit $4gp\,(b-S)\,dX$. Hanc igitur expressionem a praecedente subtrahi oportet, ut obtineatur formula incremento vis vivae aequalis, quae ergo erit $4gdX(b(P-p)+pS)$, unde aequatio sequens resultat:

$$4g\,(b(P-p)+pS) = \frac{2VdV}{dX}\,(b\,(a-X) + \int \Phi dz) - bVV + VV\frac{(b-S)^3}{ss} + VV\int dz \left(\frac{d\Phi}{dX}\right),$$

ubi meminisse oportet esse:

$$S = \int dz \left(\frac{ds}{dX}\right) \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{(b-S)^2}{s}.$$

§ 39. Inventa autem hac aequatione recordandum est, certam dari relationem, inter pressionem $p$ et amplitudinem $s$, pro qua supra assumsimus hanc formulam $\frac{cs}{\Sigma - s}$ vel etiam $p = c \log \frac{\Sigma}{\Sigma - s}$, ubi $\Sigma$ denotat maximam ampitudinem ad quam tubus in $Z$ expandi potest, ita ut $\Sigma$ sit tantum functio ipsius $z$ a variabili $X$ neutiquam pendens. Quod si ergo in nostra aequatione loco $p$ talem valorem scribamus, nostra aequatio ita binas variabiles $X$ et $z$ involvet, ut primo quantitates $P$ et $V$ sint functiones solius $X$, litterae autem $s$ $S$ et $\Phi$ denotent functiones utriusque variabilis $X$ et $z$ simul, sola vero littera $\Sigma$ sit functio ipsius $z$ tantum.

§ 40. Hanc igitur ob causam aequatio nostra inventa plus una determinatione involvit. Primo enim ex ea deduci debet talis relatio inter $V$ et $X$ quae perpetuo maneat eadem, quomodocunque altera variabilis $z$ et quantitates inde pendentes interea varientur. Deinde vero ista relatione stabilita et loco $V$ suo valore per $X$ substituto, ex hac eadem aequatione elici debet natura functionis $s$, prouti ea per utramque variabilem $X$ et $s$ determinatur.

§ 41. Ad relationem autem inter $V$ et $X$ eliciendam necesse est, ut in certo tubi loco veluti ad $MN$ pressio fluidi tanquam cognita spectari possit, qualem statum in extremitate arteriarum, ubi vel in glandulas vel in venas desinunt, concipere licet. Referat igitur in nostro tubo sectio $MN$ istum terminum ac ponamus totum intervallum $CM = f$, ubi pressio perpetuo maneat constans $= k$, hinc ergo etiam erit amplitudo in isto loco constans, quae sit $= h$. Nunc igitur posito $z = f$, fiet $s = h$ et $p = k$, ex hocque casu quo in nostra aequatione tantum functiones ipsius $X$ inerunt determinari debebit celeritas $V$, qui in generali aequatione substitutus

novam praebebit aequationem, ex qua naturam functionis $s$ scrutari conveniet, qualis scilicet futura sit functio ambarum variabilium $X$ et $z$.

§ 42. Cum autem nulla prorsus via pateat talem resolutionem perficiendi, haecque investigatio vires humanas transcendere sit censenda, hic utique isti labori finem imponere cogimur. Interim tamen fortasse non parum juvabit ad eam circumstantiam attendere, quod quavis nova cordis actione status sanguinis per omnes arterias idem recurrat, cui conditioni satisfiet, quando finita actione nostri emboli, hoc est posito $X = h$ omnes quantitates nostram aequationem ingredientes eosdem prorsus valores iterum recuperant, quos habebant initio, ubi erat $X = 0$, sicque omnes functiones quae hic occurrunt ita oportebit esse comparatas, ut sive ponatur $X = 0$ sive $X = a$, eosdem plane valores nanciscantur.

§ 43. In motu igitur sanguinis explicando easdem offendimus insuperabiles difficultates, quae nos impediunt omnia plane opera C r e a t o r i s accuratius perscrutari; ubi perpetuo multo magis summam sapientiam cum omnipotentia conjunctam admirari ac venerari debemus, cum ne summum quidem ingenium humanum vel levissimae vibrillae veram structuram percipere atque explicare valeat.

# XXXIV.

# Fragmentum ex Adversariis mathematicis depromtum.

## Mechanica.

### III.

(N. Fuss.)

Problema. (Fig. 278.). Si corpus super curva ascendat in medio resistente, fueritque $AP = a$ et $AM = s$, celeritas vero in $M = u$, et resistentiae formula $= \Delta + bu + cuu$, ita ut sit $udu + dx + (\Delta + bu + cuu)\, ds = 0$, invenire aequationem inter $x$ et $s$, ut ista aequatio resolutionem admittat.

Solutio. Primo quidem patet hanc aequationem resolubilem fieri casu $dx = \alpha ds$; tum enim statim habetur $ds = \frac{-udu}{\alpha + \Delta + bu + cuu}$. Praeter hunc vero casum difficile est alios invenire; unde sequens solutio eo magis est notatu digna. Ponatur $ds = \frac{dq}{f - cq}$, ac statuatur $dx = \frac{aqdq - \Delta dq}{f - cq}$; tum enim aequatio induet hanc formam: $(f - cq)\, udu + aqdq + budq + cuudq = 0$. Hic ponatur $u = qv$, ac prodibit

$$\frac{dq}{q\,(f - cq)} = \frac{-vdv}{a + bv + fvv},$$

sicque quantitas $q$ per $v$ definiri poterit; tum vero etiam $u = qv$ per $v$ definitur, at vero $x$ et $s$ dantur per $q$. Hinc jam porro tempus assignari poterit ex formula $dt = \frac{ds}{u} = \frac{dq}{(f - cq)\, qv}$, unde si loco $\frac{dq}{q\,(f - cq)}$ ejus valor substituatur, erit $dt = \frac{-dv}{a + bv + fvv}$. Sic tempus $t$ etiam functioni ipsius $v$ aequabitur $= \Gamma : \frac{q}{u}$, scilicet $t$ aequabitur functioni nullius dimensionis binarum $q$ et $u$. Unde patet totum tempus ascensus fore constans. Incipit enim ubi $s = 0$, at $s$ ita definiri potest per $q$, ut posito $s = 0$, fiat $q = 0$; ergo in determinatione temporis integrale ita sumi debet, ut evanescat sumto $q = 0$. Ascensus vero terminatur, ubi celeritas $u$ evanescit, unde totum tempus ascensus reperitur ex integrali invento ponendo $u = 0$, quod propterea erit quantitas constans quaecunque fuerit celeritas initialis in $a$. Evidens igitur est curvam hoc modo inventam simul esse *tautochronam* in hoc medio resistente.

Problema. Proposita aequatione differentiali $udu + dx + ds\,(a + bu + cuu) = 0$, quaeritur qualis functio ipsius $s$ loco $x$ assumi debeat, ut ista aequatio resolutionem admittat.

Solutio. Ponatur $dx + ads = Sds$, ut habeatur haec aequatio:

$$udu + ds\,(S + bu + cuu) = 0.$$

Haec aequatio fingatur integrabilis reddi, si dividatur per hanc formulam $Aqq + Bqu + Cuu$, ubi $q$ designet certam functionem ipsius $s$. Quare cum in genere formula $Pdu + Qds$ integrationem admittat, si fuerit

$$\left(\frac{dP}{ds}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right),$$

pro nostro casu erit:

$$P = \frac{u}{Aqq + Bqu + Cuu} \quad \text{et} \quad Q = \frac{S + bu + cuu}{Aqq + Bqu + Cuu}.$$

Jam quia $q$ supponitur functio ipsius $s$, ponatur $dq = rds$, ac reperietur:

$$\left(\frac{dP}{ds}\right) = \frac{-2Aqru - Bruu}{(Aqq + Bqu + Cuu)^2}, \quad \text{deinde} \quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \frac{Abqq + 2Acqqu - BSq + Bcquu - 2CSu - Cbuu}{(Aqq + Bqu + Cuu)^2}.$$

Hinc igitur orietur ista aequatio:

$$Abqq - BSq + 2Aqu\,(r + cq) - 2CSu + Bcquu + Bruu - Cbuu = 0,$$

quorum trium membrorum singula ad nihilum redigi debent. Ex primo fit:

$$Abqq - BSq = 0, \quad \text{unde} \quad S = \frac{Abq}{B}.$$

Secundum membrum dat $2Aqur + 2Acqqu - 2CSu = 0$, quae loco $S$ substituto valore abit in:

$$2Aqr + 2Acqq - \frac{2ACbq}{B} = 0, \quad \text{unde} \quad r = \frac{Cb - Bcq}{B}.$$

Denique tertium membrum praebet $Bcq + Br - Cb = 0$, unde iterum prodit $r = \frac{Cb - Bcq}{B}$, qui ambo valores ipsius $r$ cum sint inter se aequales, nihil amplius determinandum restat, quare cum $r = \frac{dq}{ds}$, habebitur $\frac{dq}{ds} = \frac{Cb - Bcq}{B}$ hincque $ds = \frac{Bdq}{Cb - Bcq}$. Hincque jam fiet $cs = \int \frac{Bcdq}{Cb - Bcq} = l\,\frac{\varDelta}{Cb - Bcq}$.

Quodsi jam velimus, ut sumto $s = 0$ etiam $q$ evanescat, esse debet $\varDelta = Cb$, sicque habebitur:

$$cs = l\,\frac{Cb}{Cb - Bcq}, \quad \text{ideoque} \quad e^{cs} = \frac{Cb}{Cb - Bcq}, \quad \text{unde fit} \quad q = \frac{Cb\,(e^{cs} - 1)}{Bce^{cs}} = \frac{Cb}{Bc}\,(1 - e^{-cs}).$$

Valore autem ipsius $q$ invento, erit $S = \frac{ACbb}{cBB}\,(1 - e^{-cs})$; quare cum sit:

$$dx + ads = Sds, \quad \text{erit} \quad x = \int Sds - as = \frac{ACbb}{cBB}\left(s + \frac{1}{c}\,e^{-cs}\right) - as + \text{Const.}$$

Unde ut sumto $s = 0$ fiat $x = 0$, fiet:

$$\text{Const.} = \frac{ACbb}{ccBB}, \quad \text{consequenter} \quad x = \frac{ACbb}{ccBB} - as + \frac{ACbb}{cBB}\left(s + \frac{1}{c}\,e^{-cs}\right).$$

Hic ergo litterae $A$, $B$, $C$ penitus arbitrio nostro relinquuntur; interim tamen patet, statui non posse $B = 0$; tum vero fieri debet $Cb > Bcq$, donec $q$ certum valorem obtinuerit, in quo terminus scil. $q$ maximum habet valorem. Invento autem divisore $Aqq + Bqu + Cuu$ integratio, aequationis nulla amplius laborat difficultate, scil per logarithmos et arcus circulares.

Problema. Proposita aequatione $udu + dx + (a + bu + cuu)\, ds = 0$, ubi $x$ sit certa functio ipsius $s$, invenire valorem formulae integralis $t = \int \frac{ds}{u}$.

Solutio. Ponatur brevitatis gratia $udu + dx + (a + bu + cuu)\, ds = dW$, ut sit $dW = 0$. Jam semper certus multiplicator $M$ dabitur, ut formula $\frac{ds}{u} + MdW$ integrationem admittat. Cum igitur sit $dW = 0$, erit $dt = \frac{ds}{u} + MdW$; quae formula cum sit integrabilis, inde definietur ipsum tempus $t$. Sumatur

$$M = \frac{p}{u\,(\alpha qq + \beta qu + \gamma uu)},$$

ubi $p$ et $q$ sint certae functiones ipsius $s$, eritque:

$$dt = \frac{ds}{u} + \frac{pudu + pdx + pads + pbuds + cpuuds}{u\,(\alpha qq + \beta qu + \gamma uu)}.$$

hinc ergo numerator erit $\alpha qqds + \beta quds + \gamma uuds + pudu + pdx + apds + bpuds + cpuuds$, denominatore existente $u\,(\alpha qq + \beta qu + \gamma uu)$. Nunc autem fiat $dt = \frac{qdu - udq}{\alpha qq + \beta qu + \gamma uu}$, quippe quae formula semper potest integrari; ponatur enim $u = qv$, eritque $dt = \frac{dv}{\alpha + \beta v + \gamma vv}$. Facta autem hac aequalitate:

$$\alpha qqds + \beta quds + \gamma uuds + pudu + pdx + apds + bpuds + cpuuds = qdu - udq,$$

fieri debet:

$$\alpha qqds + pdx + apds = 0, \quad p = q, \quad \beta quds + bpuds = 0, \quad \gamma uuds + cpuuds = -\, udq;$$

unde $ds = \frac{dq}{\gamma + cp}$ et $dx = -\frac{(ap + \alpha qq)\, ds}{p} = -\,(a + \alpha p)\, ds$. Ubi notetur, cum posito $u = qv$ sit $dt = \frac{dv}{\alpha + \beta v + \gamma vv}$ ideoque $t = f : v = f : \frac{u}{q}$, ideoque $t$ aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum $q$ et $u$ : quare totum tempus exprimetur numero absoluto, ideoque curva erit *tautochrona*.

A. m. T. II. p. 164 — 166.

FINIS.

Fig. 1. p. 3.
A P

Fig. 2. p. 3.
B A P

Fig. 3. p. 4.
C A D

Fig. 4. p. 5.
C A B P

Fig. 5. p. 5.
D A B C

Fig. 6. p. 5.
B A C

Fig. 7. p. 5.
A C B D E F

Fig. 8. p. 5.
C B A D

Fig. 9. p. 5.
F C E B A g a h D G

Fig. 10. p. 6.
C B A Q P D R

Fig. 11. p. 6.
D B A F C E

Fig. 12. p. 6.
D B A F C

Fig. 13. p. 6.
D G A H B F C

Fig. 14. p. 6.
B G A F C E D P

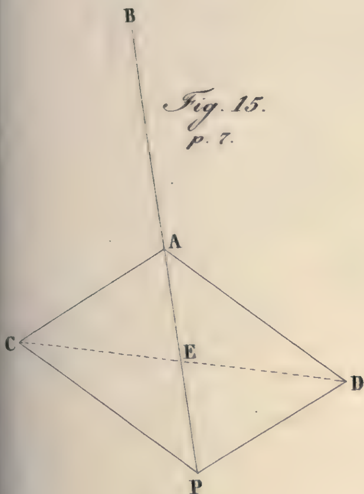


Fig. 15. p. 7.

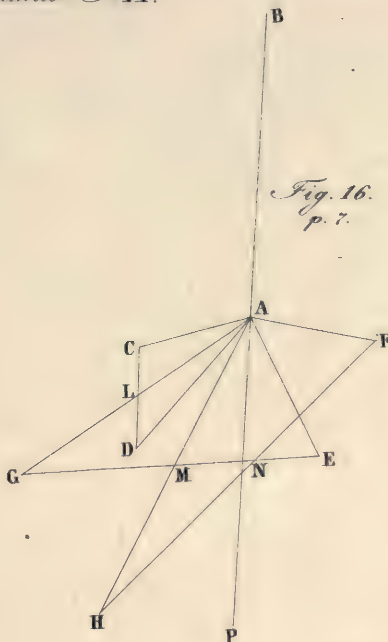


Fig. 16. p. 7.

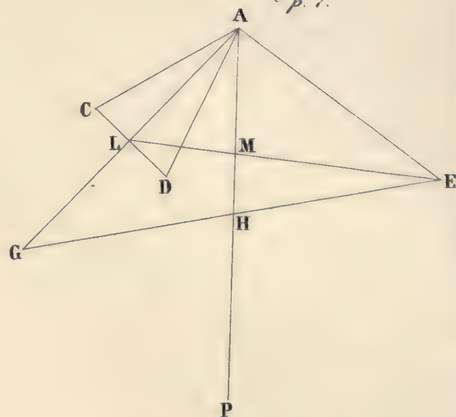


Fig. 17. p. 7.

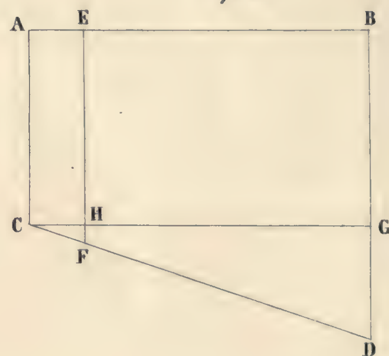


Fig. 20. p. 9.

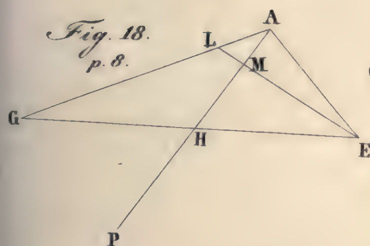


Fig. 18. p. 8.

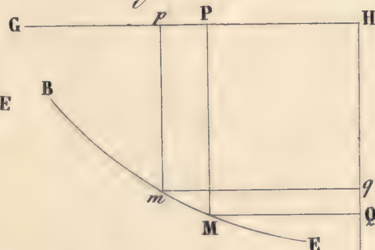


Fig. 23. p. 10.

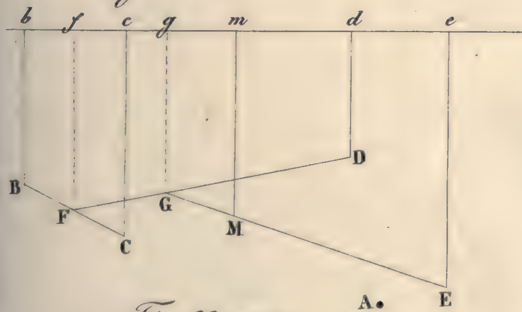


Fig. 21. p. 9.

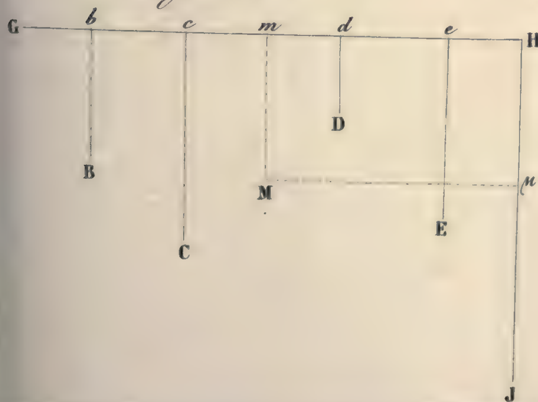


Fig. 22. p. 10.

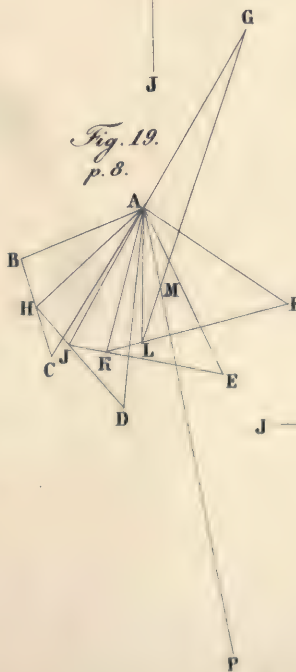


Fig. 19. p. 8.

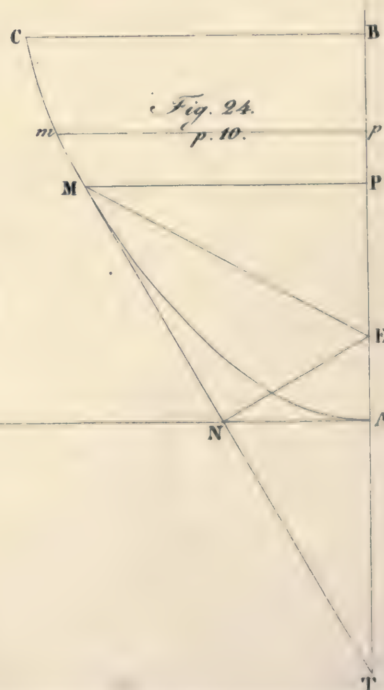
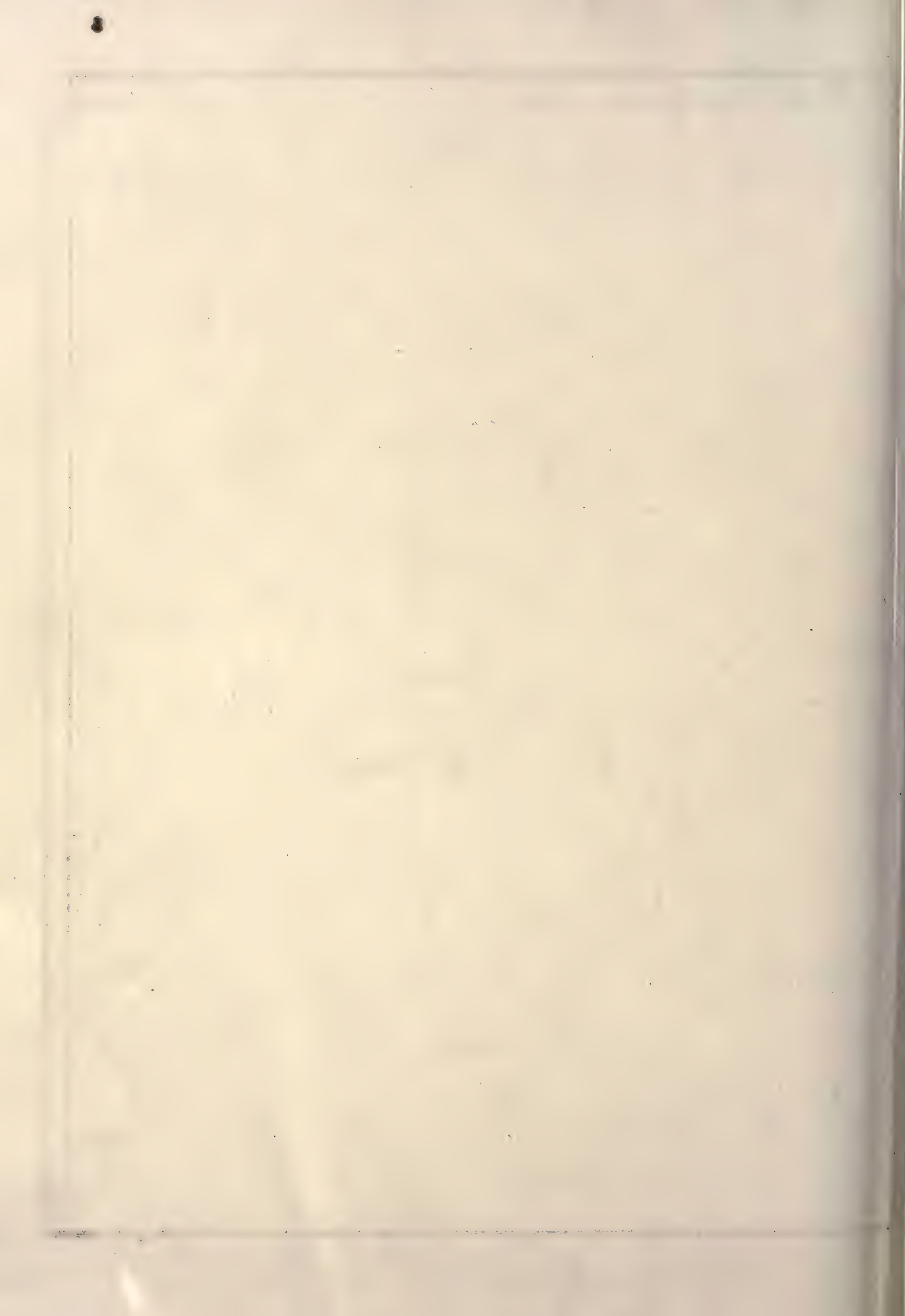


Fig. 24. p. 10.



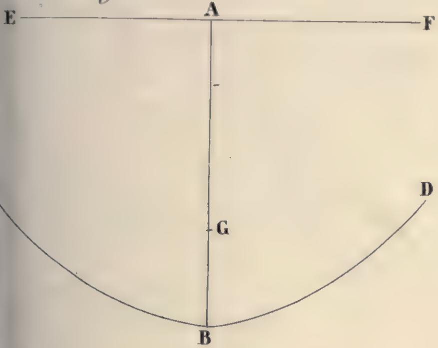


Fig. 25. p. 11.

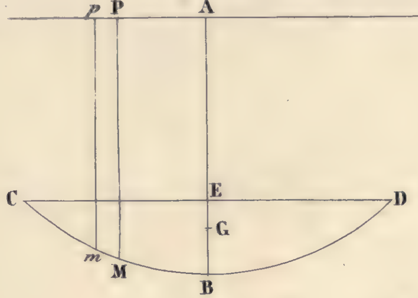


Fig. 26. p. 11.

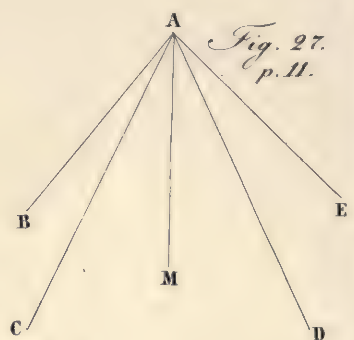


Fig. 27. p. 11.



Fig. 35. p. 13.

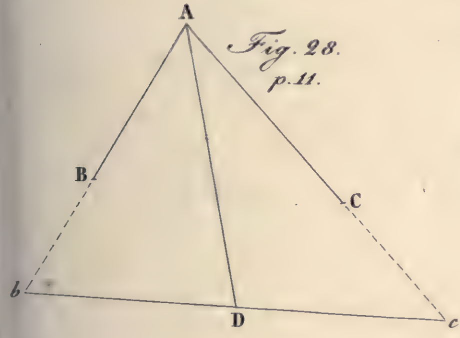


Fig. 28. p. 11.

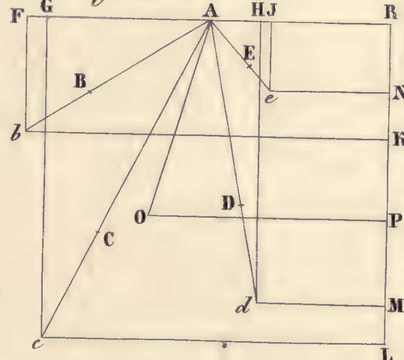


Fig. 30. p. 12.

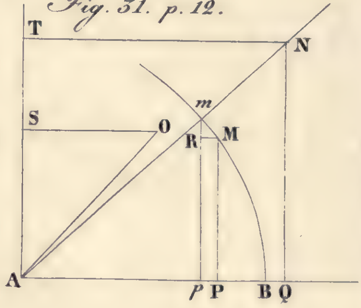


Fig. 31. p. 12.

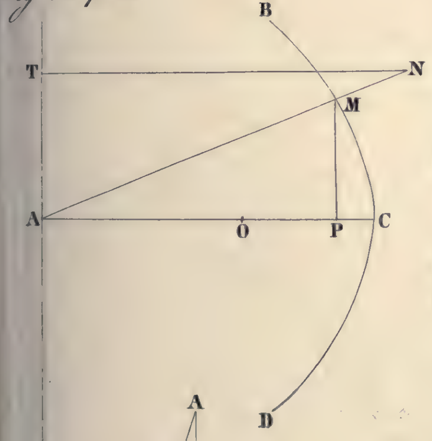


Fig. 32. p. 13.

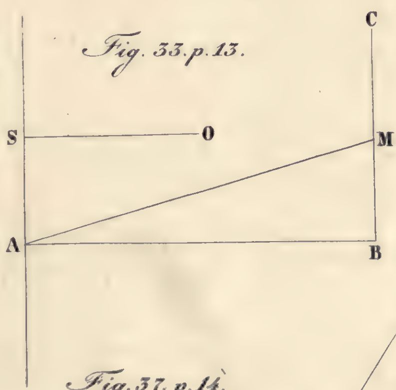


Fig. 33. p. 13.

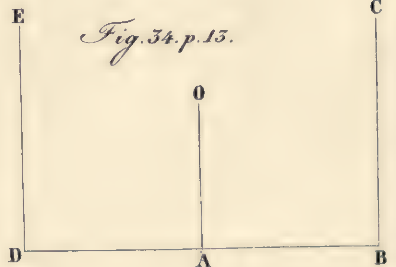


Fig. 34. p. 13.

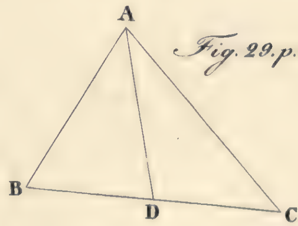


Fig. 29. p. 11.

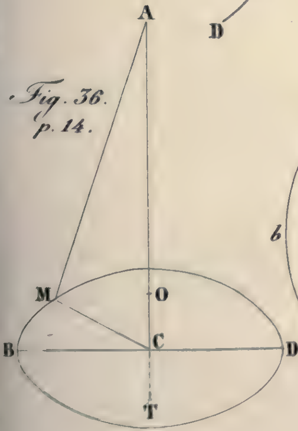


Fig. 36. p. 14.

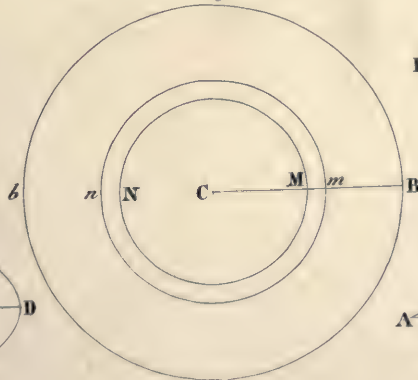


Fig. 37. p. 14.

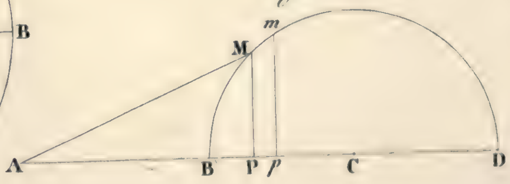


Fig. 38. p. 14.



Fig. 39. p. 16.




Fig. 40. p. 16.




Fig. 41. p. 17.




Fig. 42. p. 17.

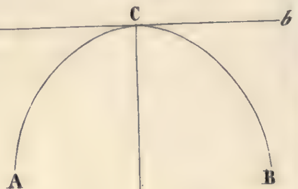



Fig. 43. p. 17.

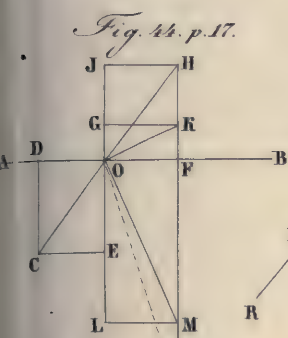



Fig. 44. p. 17.

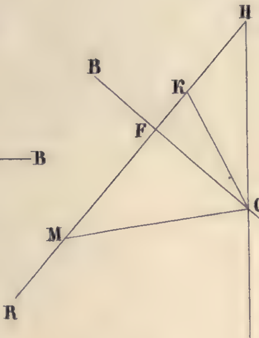



Fig. 45. p. 18.

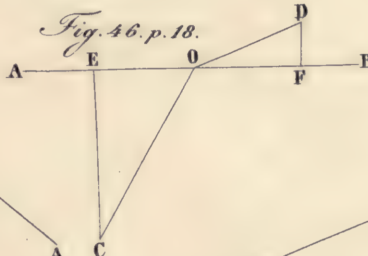



Fig. 46. p. 18.

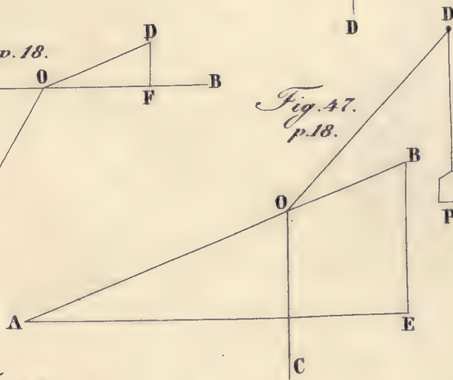



Fig. 47. p. 18.

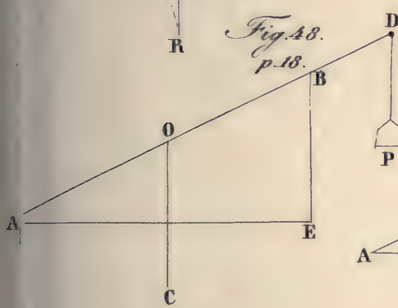



Fig. 48. p. 18.

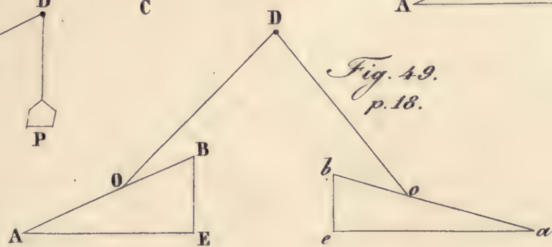



Fig. 49. p. 18.

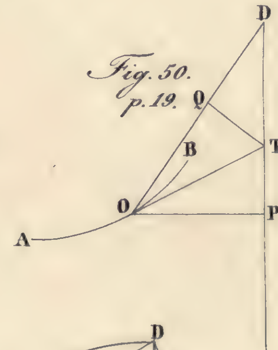



Fig. 50. p. 19.

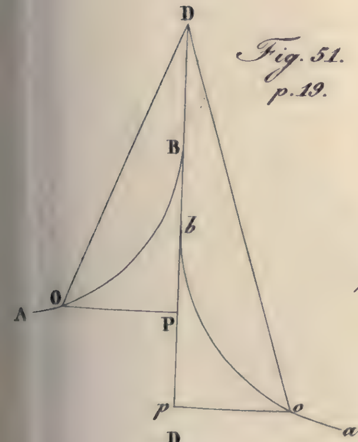



Fig. 51. p. 19.

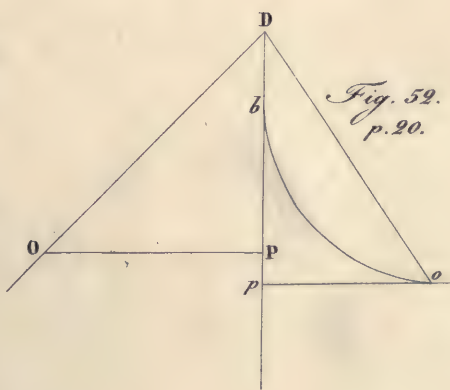



Fig. 52. p. 20.

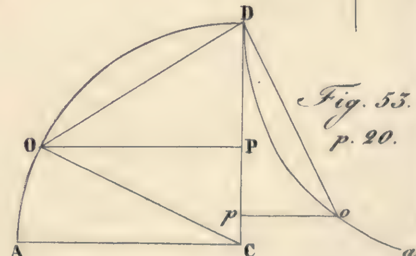



Fig. 53. p. 20.

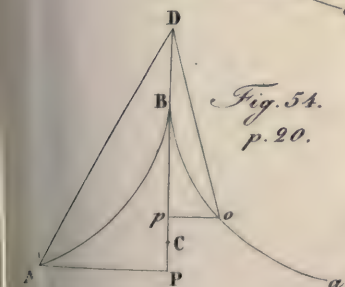



Fig. 54. p. 20.

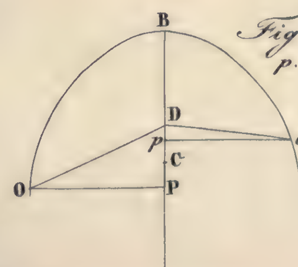



Fig. 55. p. 21.

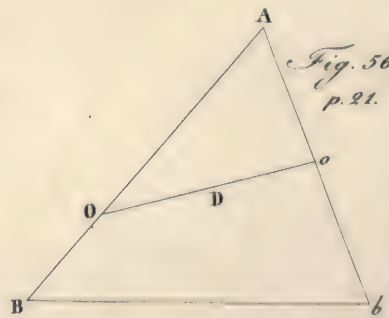
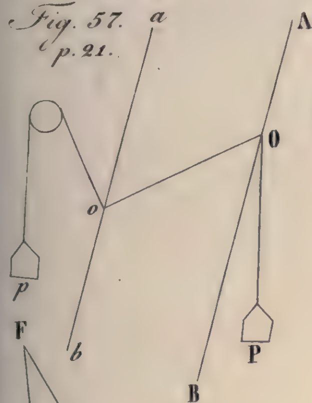
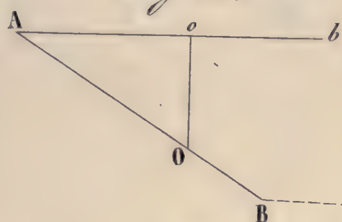
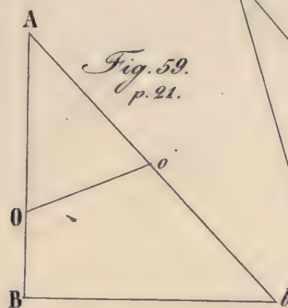
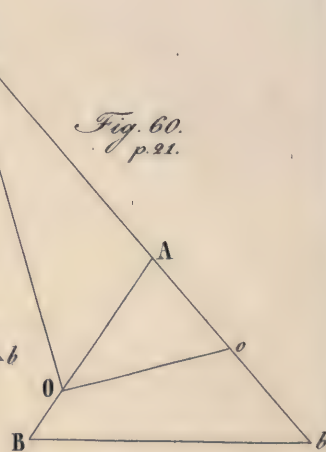


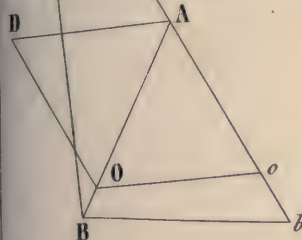

Fig. 56. p. 21.

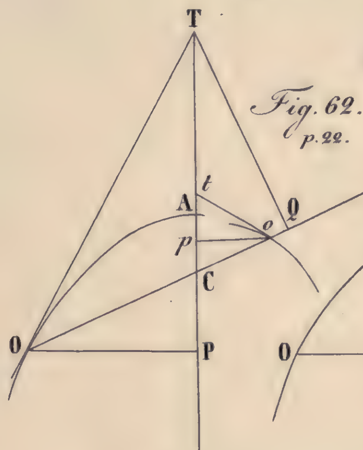

Fig. 57.
p. 21.
a
A
O
o
p
b
P
B

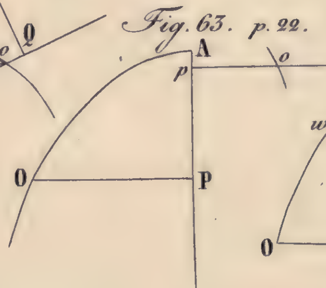

Fig. 58. p. 21.
A
o
b
O
B

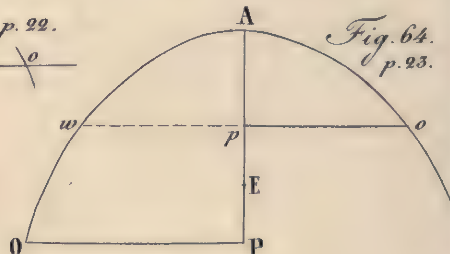

A
Fig. 59.
p. 21.
o
O
B
b

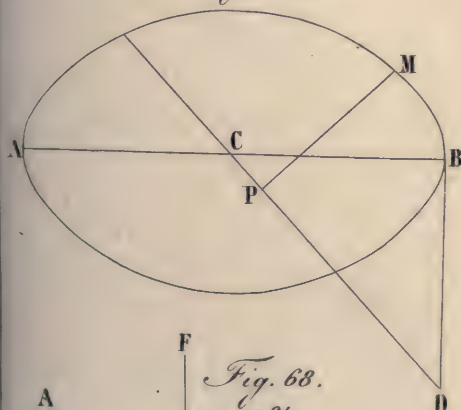

E
Fig. 60.
p. 21.
A
o
O
B
b

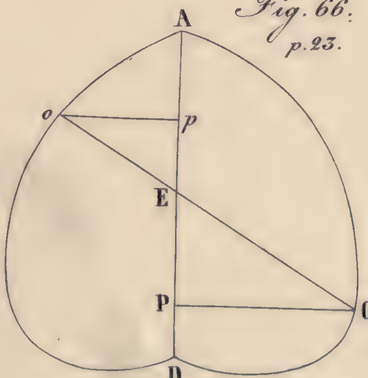

F
Fig. 61.
p. 22.
D
A
O
o
B
b

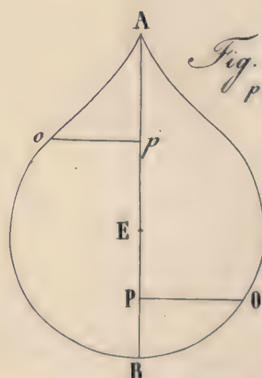

T
Fig. 62.
p. 22.
t
A
Q
p
o
C
O
P

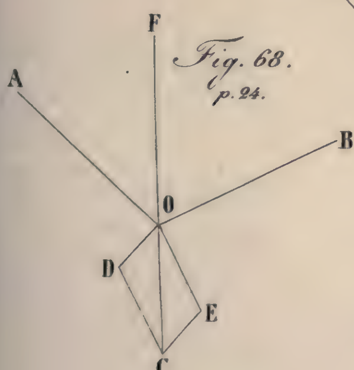

Fig. 63. p. 22.
A
p
o
O
P

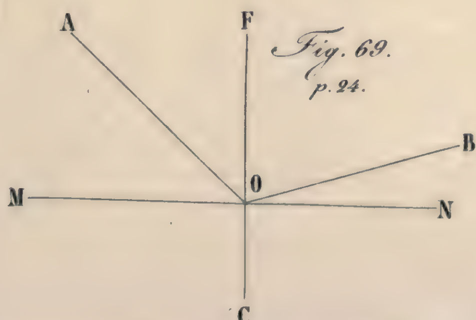

A
Fig. 64.
p. 23.
w
p
o
E
O
P

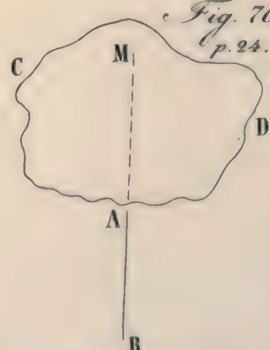

Fig. 65. p. 23.
M
A
C
B
P
D


A
Fig. 66.
p. 23.
o
p
E
P
O
D


A
Fig. 67.
p. 24.
o
p
E
P
O
B


F
Fig. 68.
p. 24.
A
B
O
D
E
C


A
F
Fig. 69.
p. 24.
B
O
M
N
C


Fig. 70.
p. 24.
C
M
D
A
B

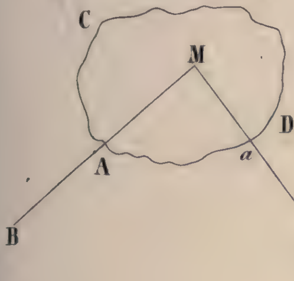


Fig. 71. p. 24.

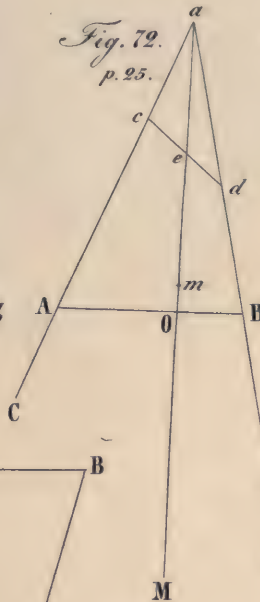


Fig. 72. p. 25.

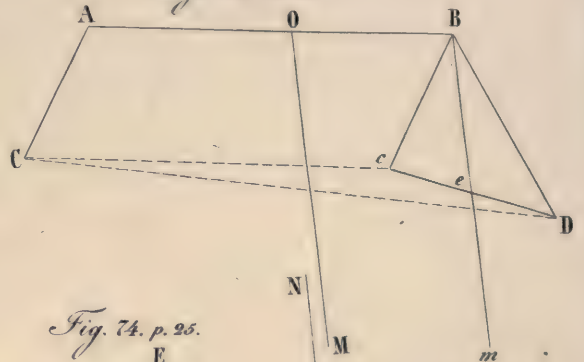


Fig. 73. p. 25.

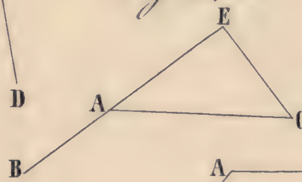


Fig. 74. p. 25.

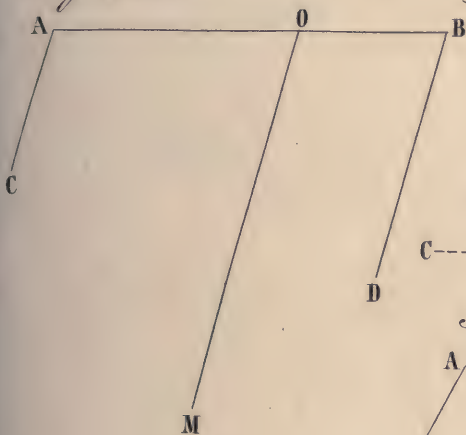


Fig. 75. p. 25.

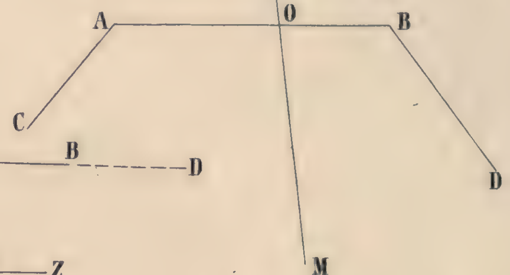


Fig. 76. p. 26.



Fig. 77. p. 26.

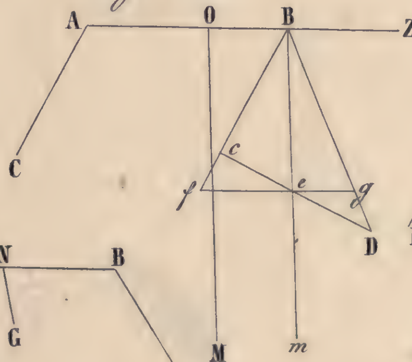


Fig. 79. p. 26.

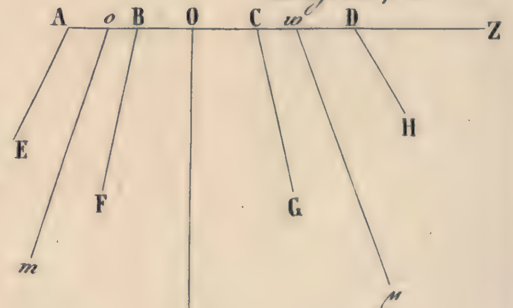


Fig. 80. p. 27.



Fig. 78. p. 26.



Fig. 81. p. 27.

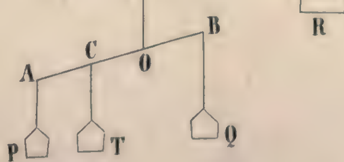


Fig. 82. p. 28.

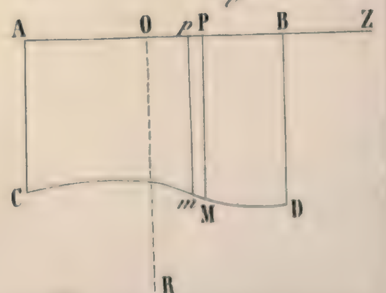
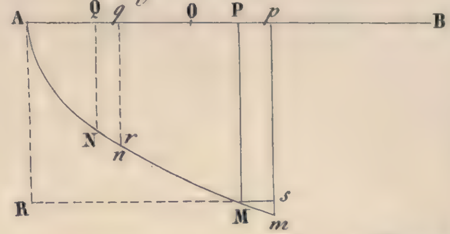
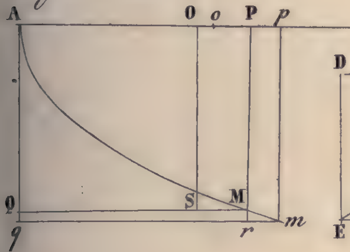


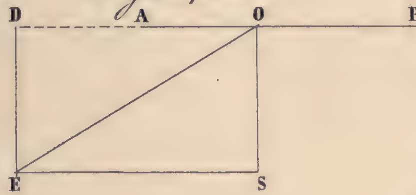
Fig. 83. p. 28.

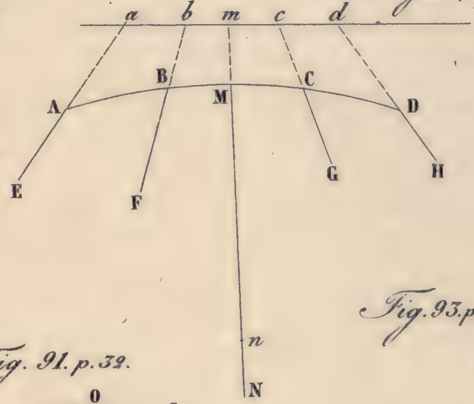

Fig. 84. p. 29.
A
O
B
C
D
M

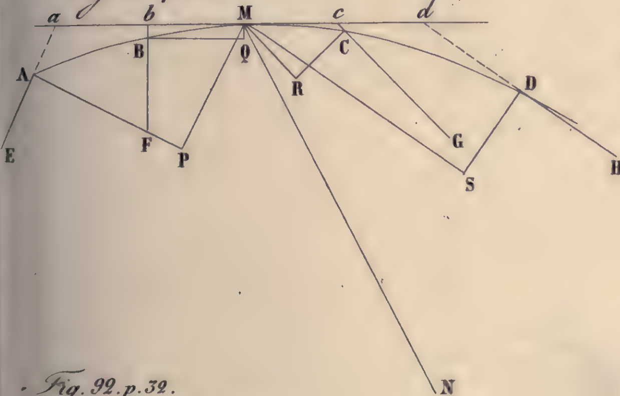

Fig. 85. p. 29.
A
O
P
B
M
D
R

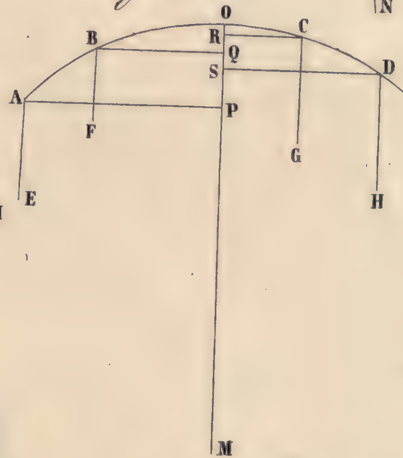

Fig. 86. p. 29.
A
Q
q
O
P
p
B
N
r
n
R
M
s
m

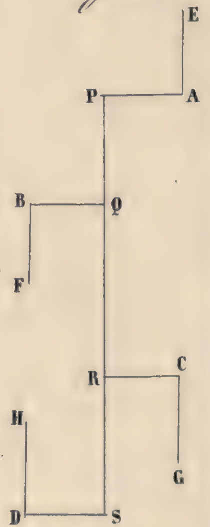

Fig. 87. p. 30.
A
O
o
P
p
Q
S
M
q
r
m

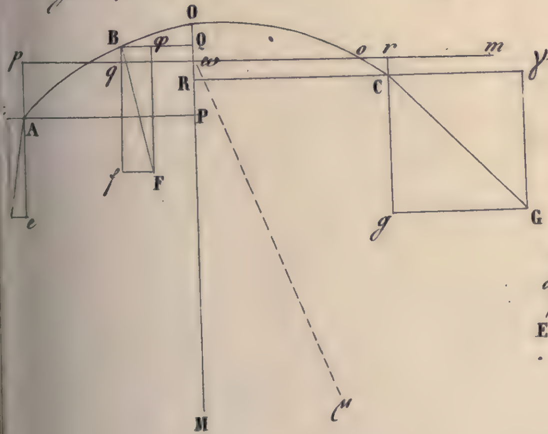

Fig. 88. p. 30.
D
A
O
P
E
S

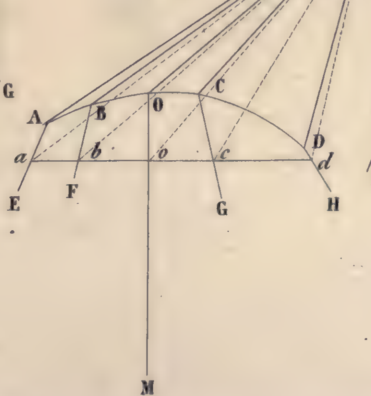

Fig. 89. p. 31.
a
b
m
c
d
B
C
A
M
D
E
F
G
H
n
N

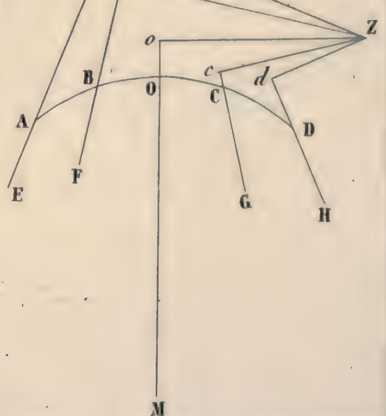

Fig. 90. p. 31.
a
b
M
c
d
B
C
A
Q
R
D
E
F
P
G
S
H
N


Fig. 91. p. 32.
O
B
R
C
Q
S
D
A
P
F
G
E
H
M


Fig. 93. p. 32.
E
P
A
B
Q
F
R
C
H
G
D
S


Fig. 92. p. 32.
O
B
φ
Q
o
r
m
p
q
R
ω
C
γ
A
P
f
F
e
g
G
M
μ


Z
Fig. 94.
p. 32.
A
B
O
C
a
b
o
c
D
d
E
F
G
H
M


a
Fig. 95.
p. 32.
b
Z
o
B
O
c
d
C
A
D
F
E
G
H
M



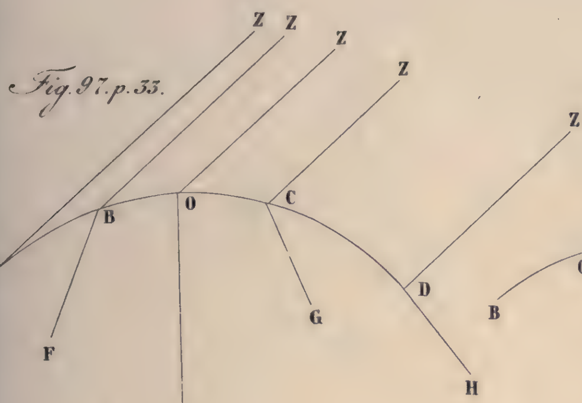


Fig. 97. p. 33.

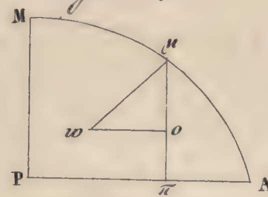


Fig. 102. p. 34.

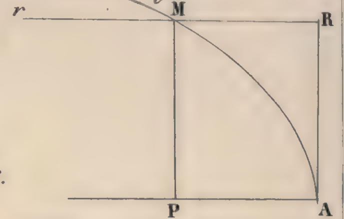


Fig. 101. p. 34.

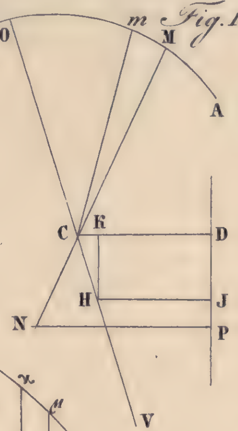


Fig. 107. p. 36.

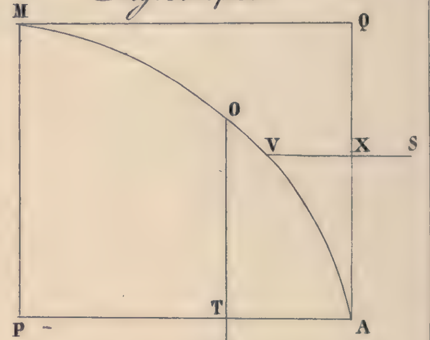
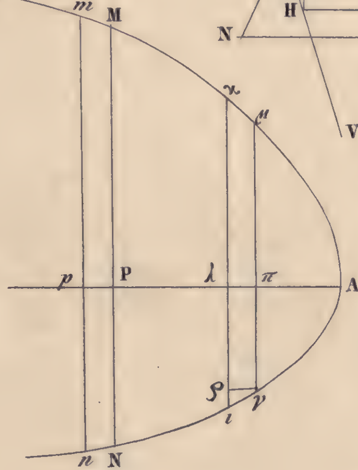


Fig. 105. p. 35.

Fig. 99. p. 33.



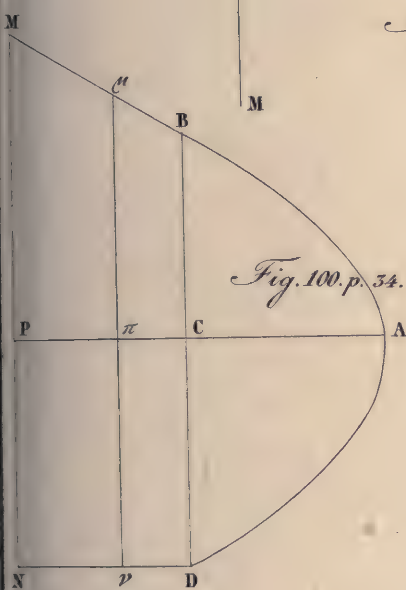



Fig. 100. p. 34.

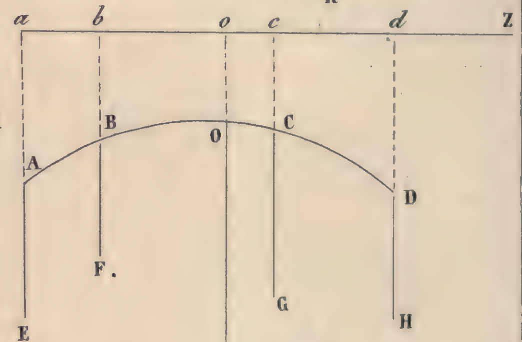



Fig. 96. p. 33.

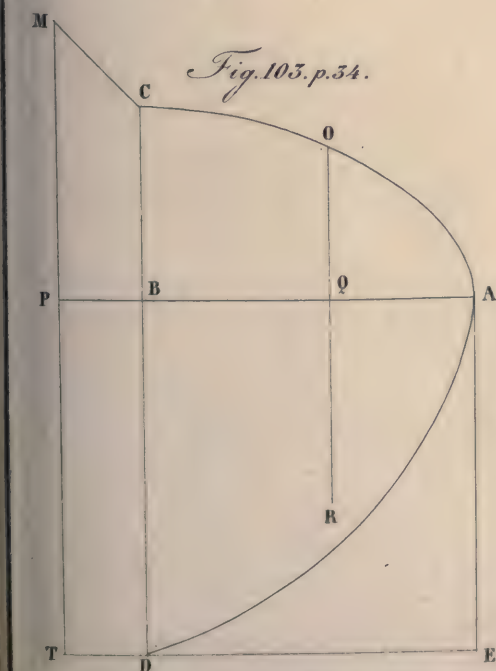


Fig. 103. p. 34.

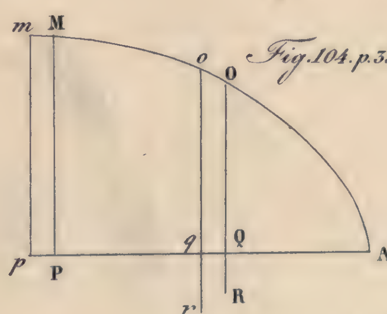


Fig. 104. p. 35.

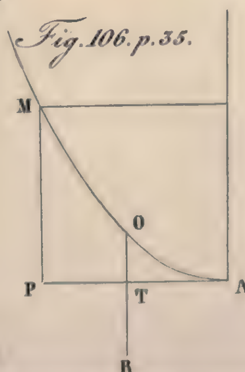


Fig. 106. p. 35.

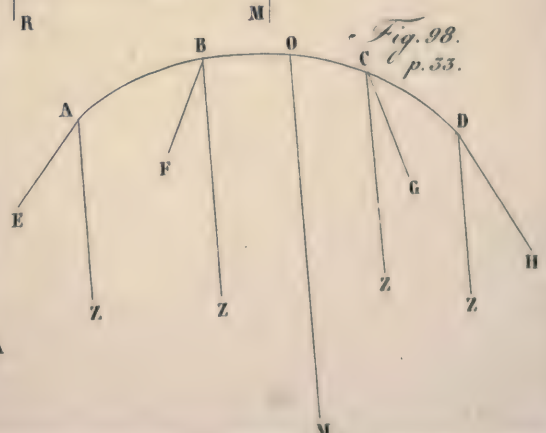


Fig. 98. p. 33.

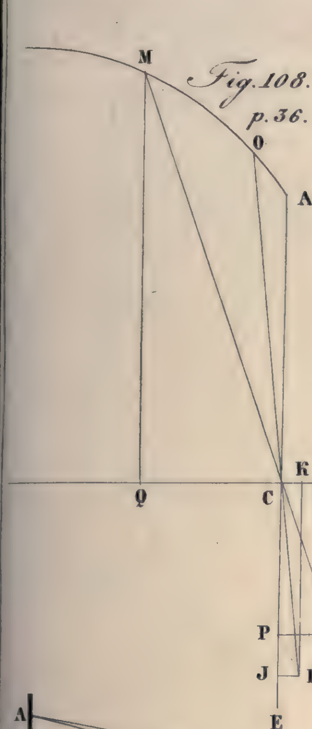



Fig. 108. p. 36.




Fig. 109. p. 37.

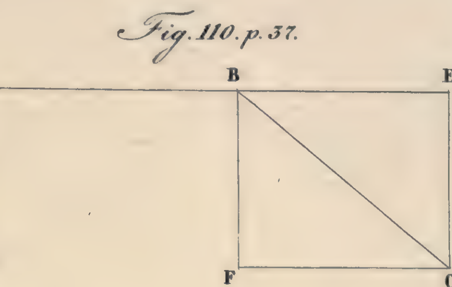



Fig. 110. p. 37.

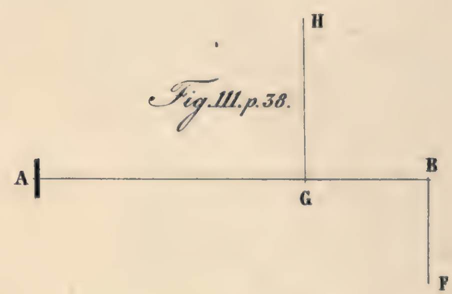



Fig. 111. p. 38.

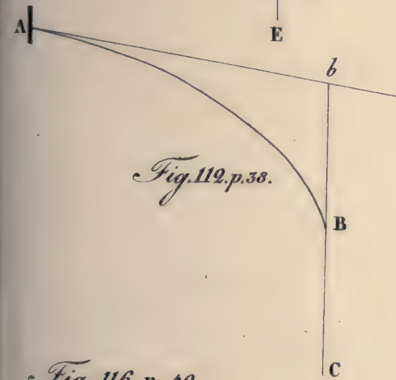



Fig. 112. p. 38.

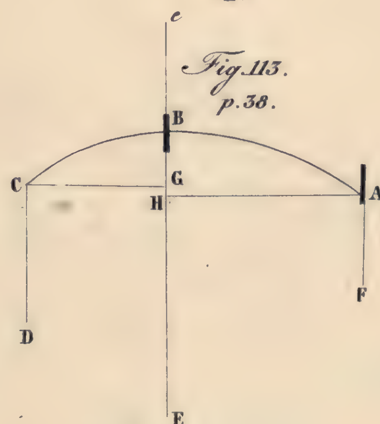



Fig. 113. p. 38.

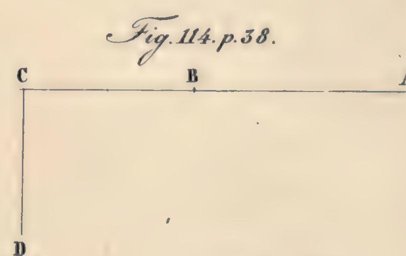



Fig. 114. p. 38.

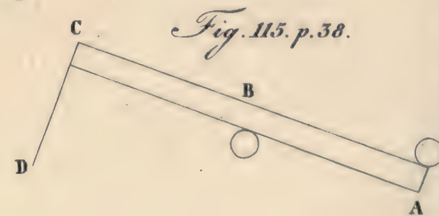



Fig. 115. p. 38.

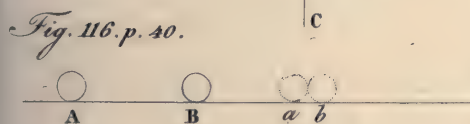



Fig. 116. p. 40.

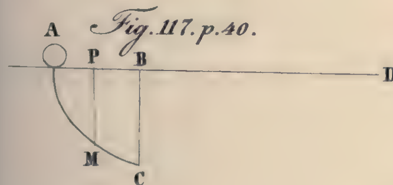



Fig. 117. p. 40.

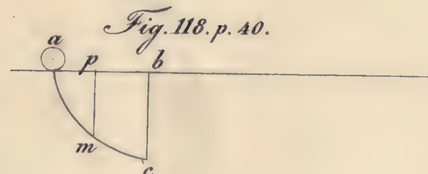



Fig. 118. p. 40.

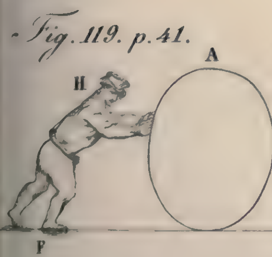



Fig. 119. p. 41.

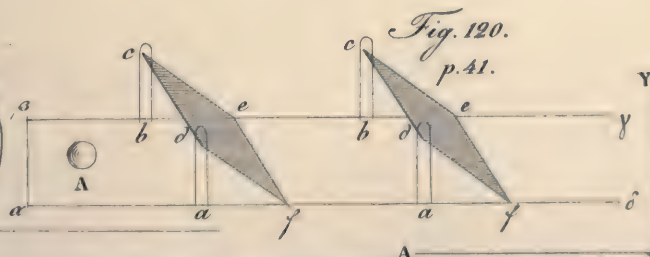



Fig. 120. p. 41.

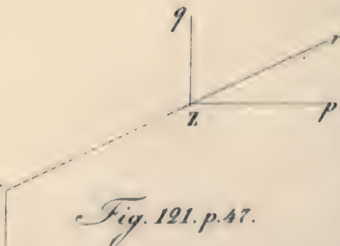
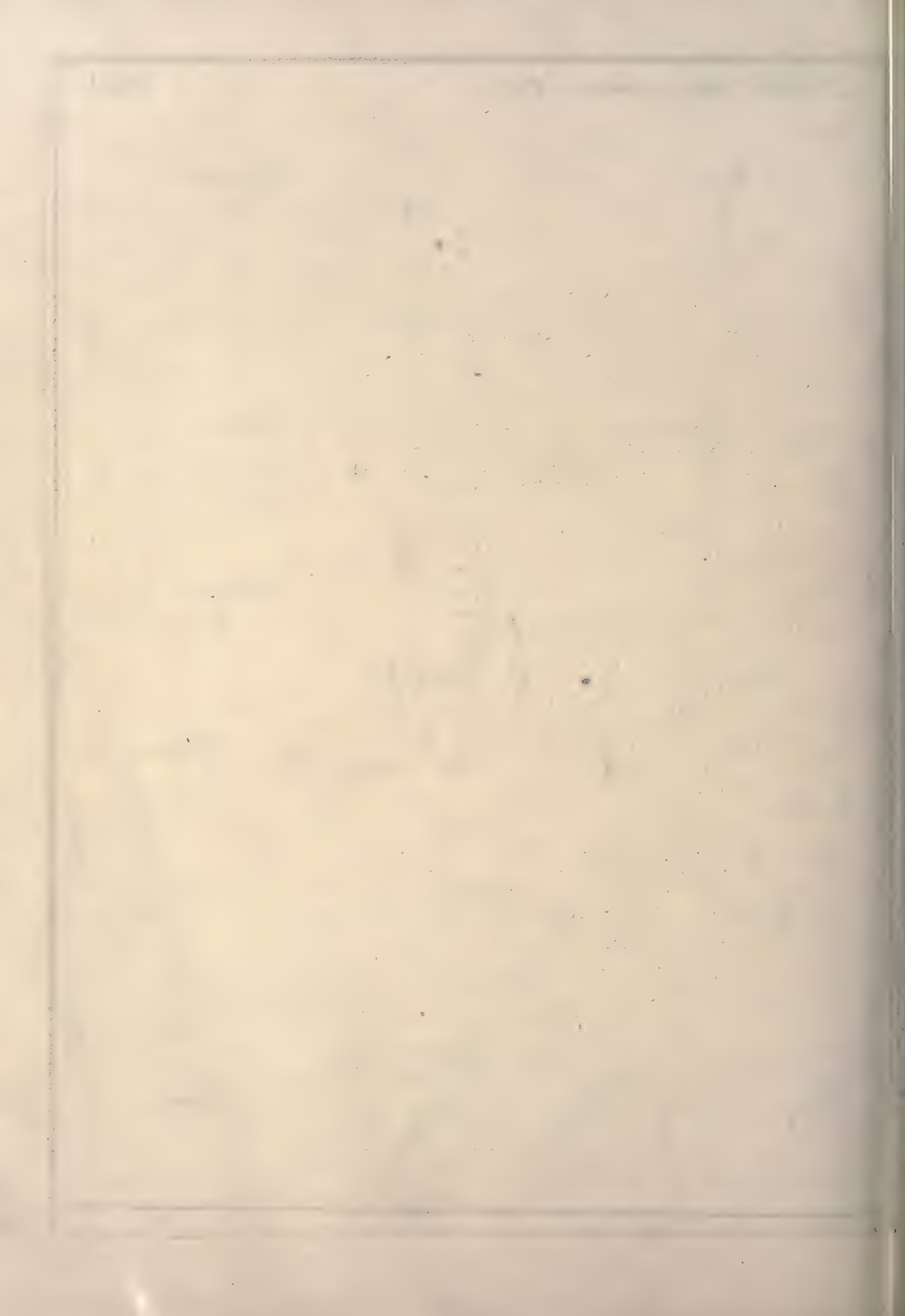



Fig. 121. p. 47.



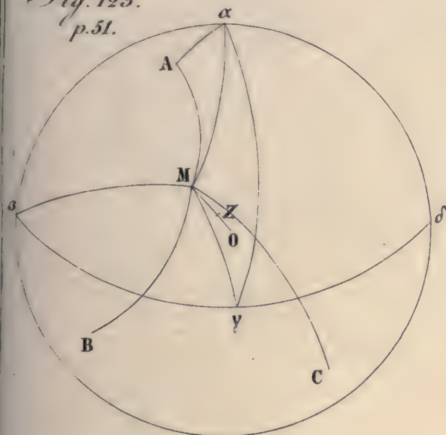


Fig. 123. p. 51.

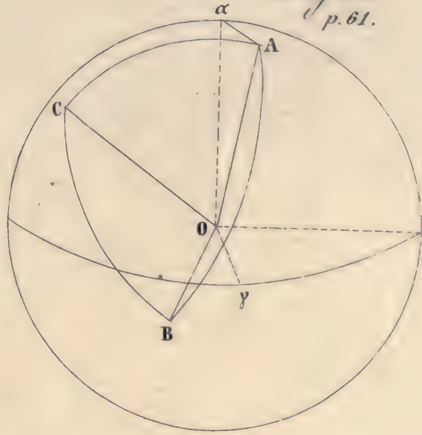


Fig. 125. p. 61.

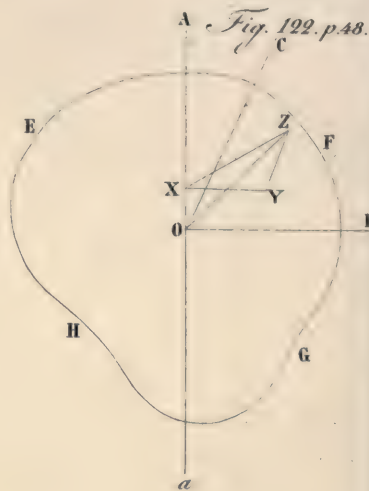


Fig. 122. p. 48.

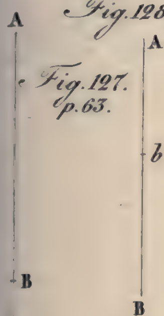


Fig. 127. p. 63.

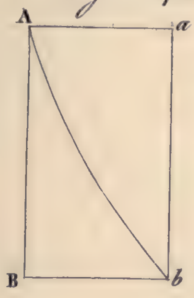


Fig. 128. p. 64.

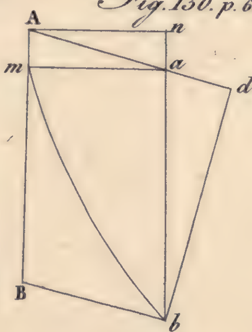


Fig. 129. p. 64.

Fig. 130. p. 65.

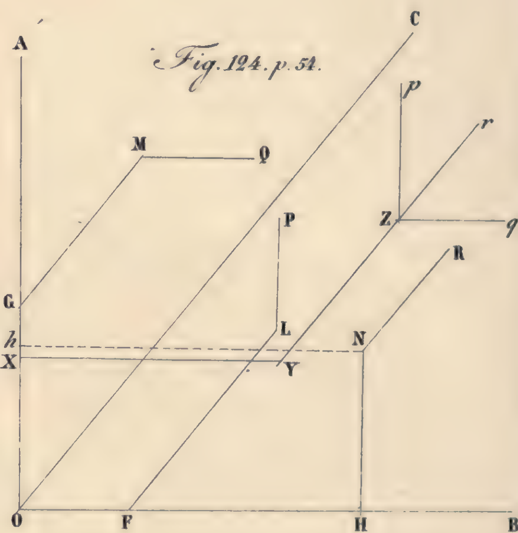


Fig. 124. p. 54.

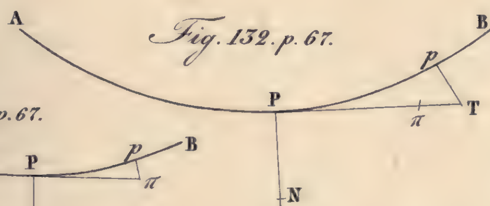


Fig. 132. p. 67.



Fig. 131. p. 67.

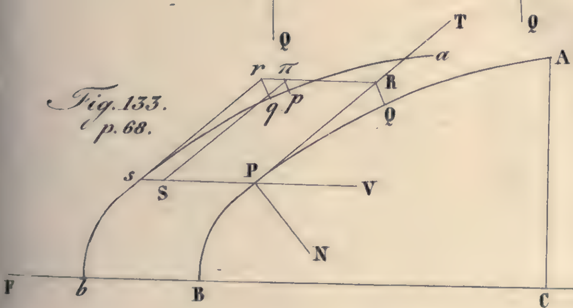


Fig. 133. p. 68.



Fig. 126. p. 63.

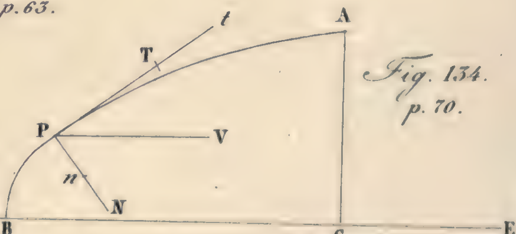


Fig. 134. p. 70.

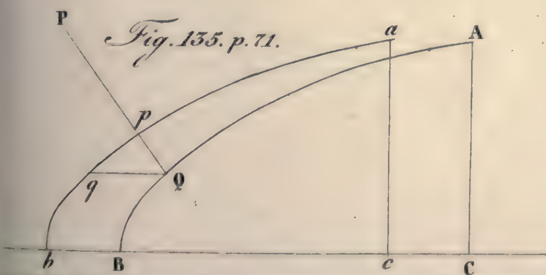


Fig. 135. p. 71.

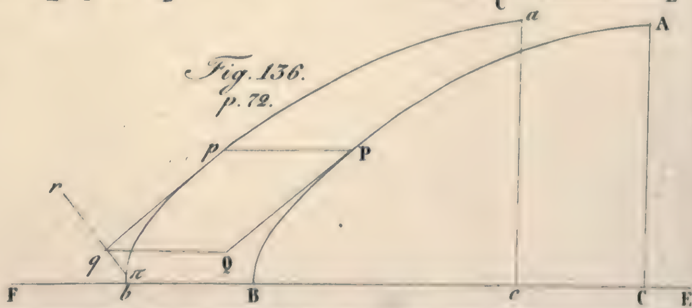
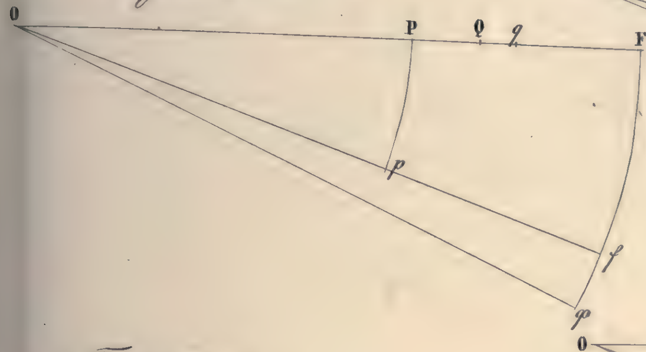
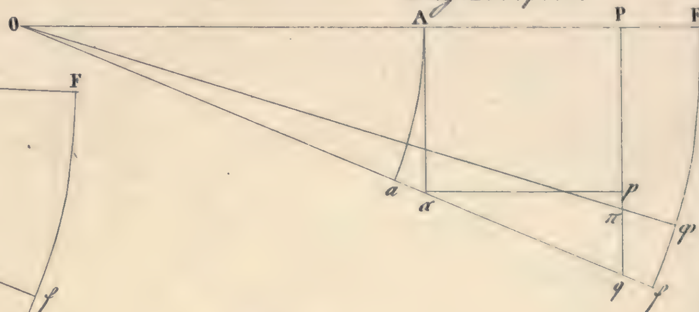
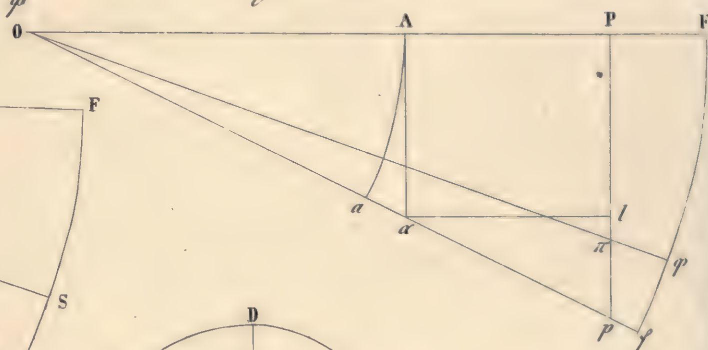
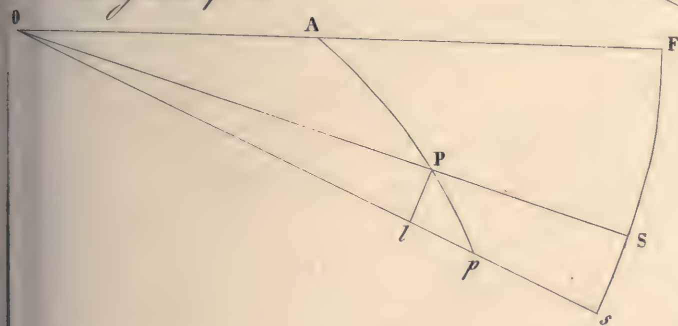


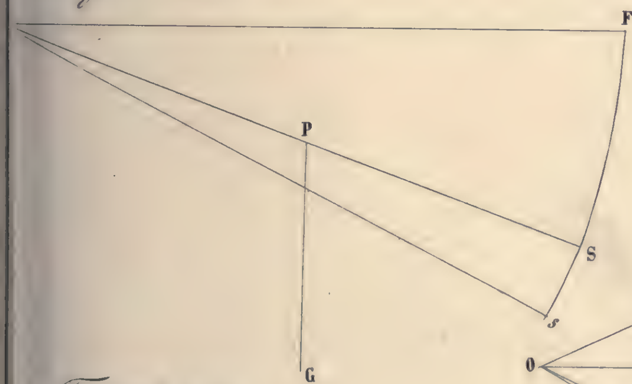
Fig. 136. p. 72.

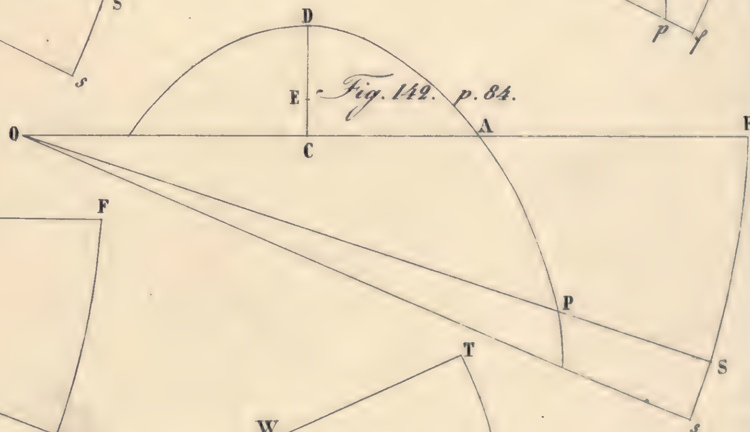

Fig. 137. p. 74.
O
P
Q
q
F
p
f
φ

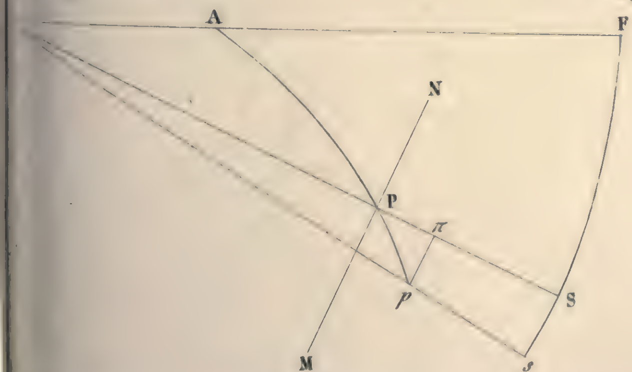

Fig. 138. p. 75.
O
A
P
F
a
α
p
π
φ
q
f

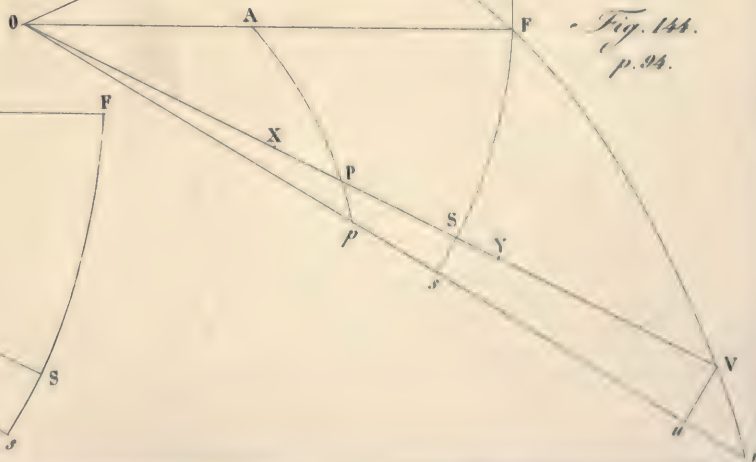

Fig. 140. p. 80.
O
A
P
F
a
α
l
π
φ
p
f

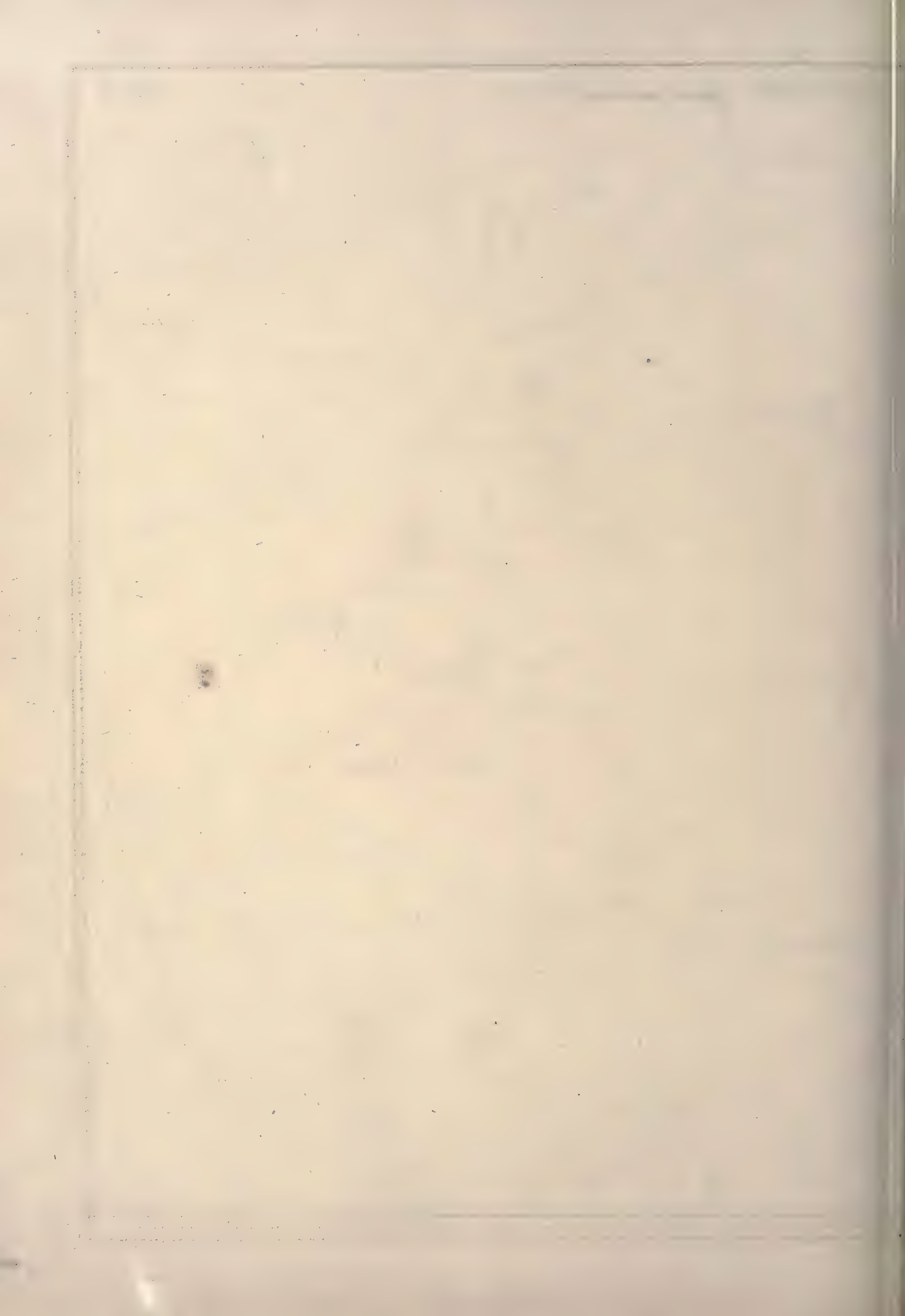

Fig. 139. p. 78.
O
A
F
P
l
p
S
s

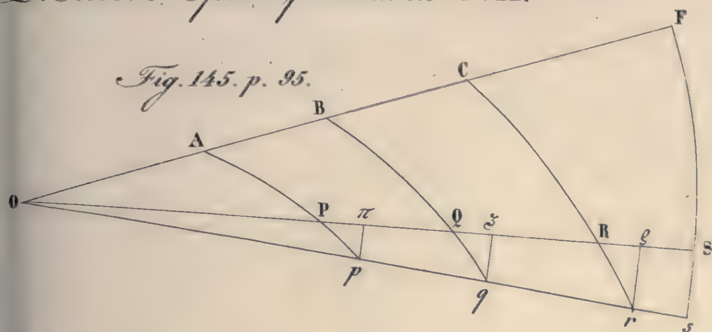

Fig. 141. p. 82.
F
P
S
s
G

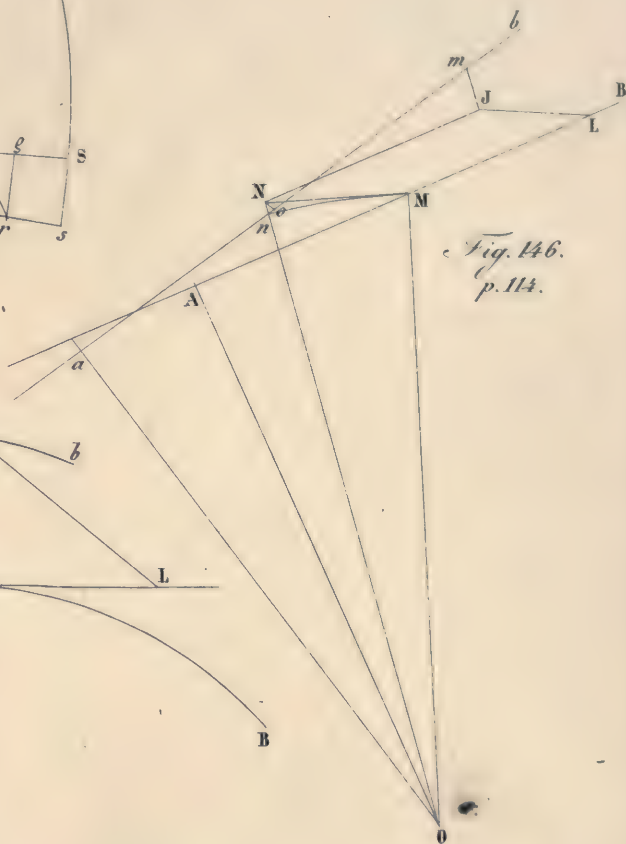

D
E
Fig. 142. p. 84.
O
C
A
F
P
S
s

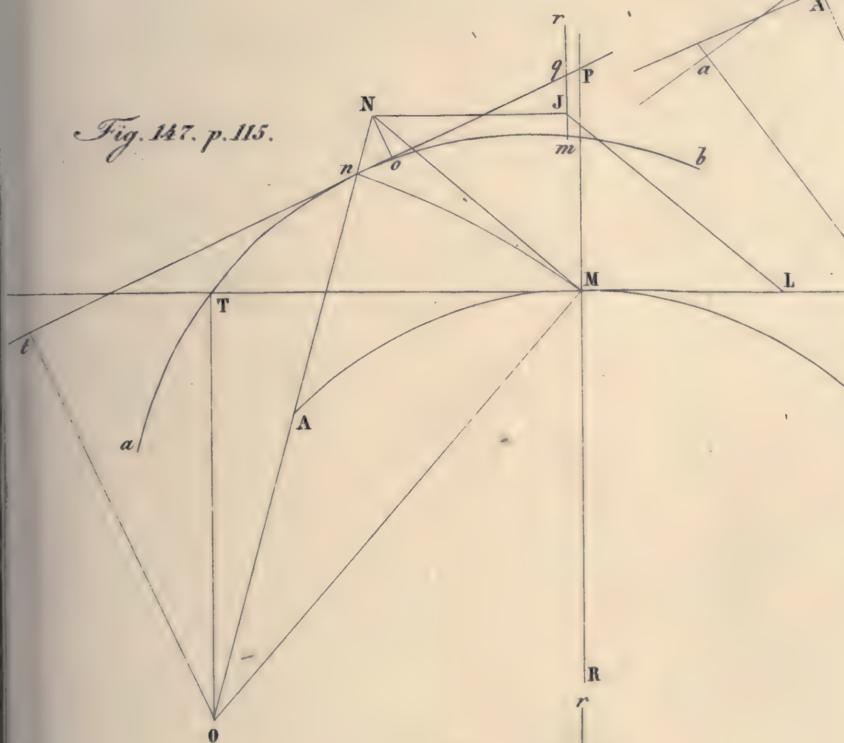

Fig. 143. p. 87.
A
F
N
P
π
p
S
M
s

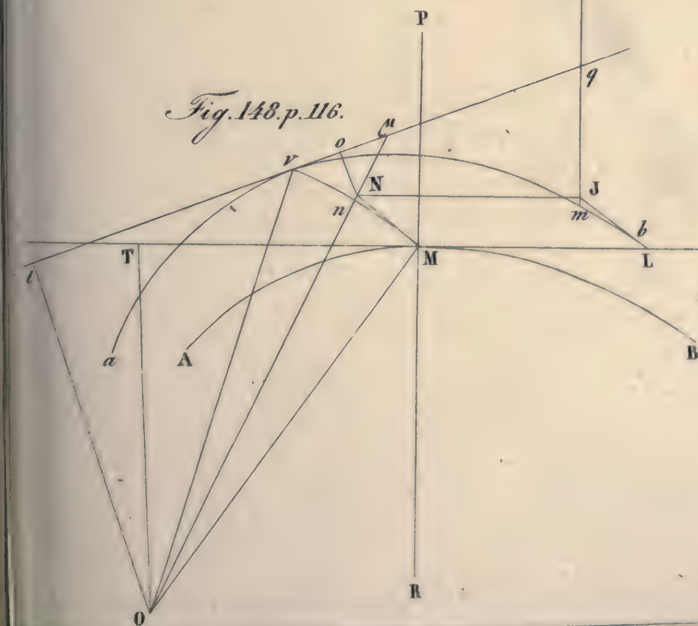

T
W
O
A
F
Fig. 144. p. 94.
X
P
p
S
Y
s
V
u
v

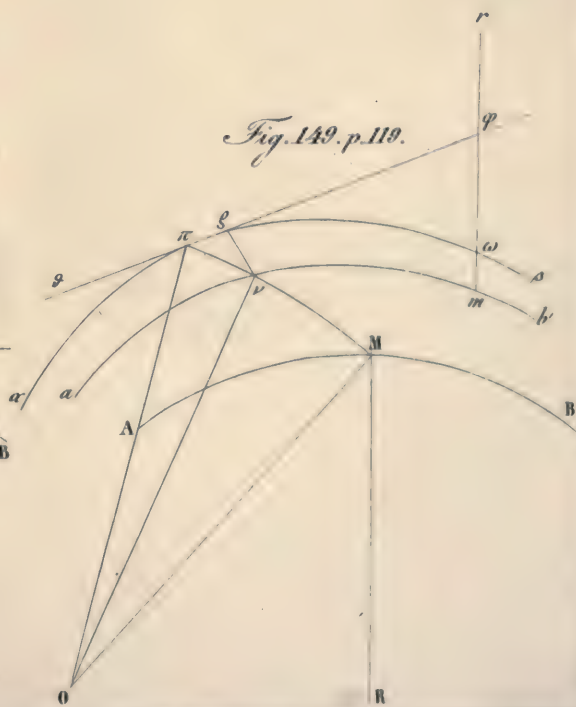



Fig. 145. p. 95.
F
C
B
A
O
P
π
Q
ζ
R
ϱ
S
p
q
r
s


b
m
J
B
L
N
M
o
n
Fig. 146.
p. 114.
A
a
O


r
q
P
N
J
Fig. 147. p. 115.
m
b
n
o
M
L
T
t
a
A
B
R
O


r
P
q
Fig. 148. p. 116.
μ
o
ν
N
n
J
m
b
T
M
L
t
a
A
B
O
R


r
φ
Fig. 149. p. 119.
π
ϱ
ω
ϑ
ν
m
b
α
a
M
A
B
O
R

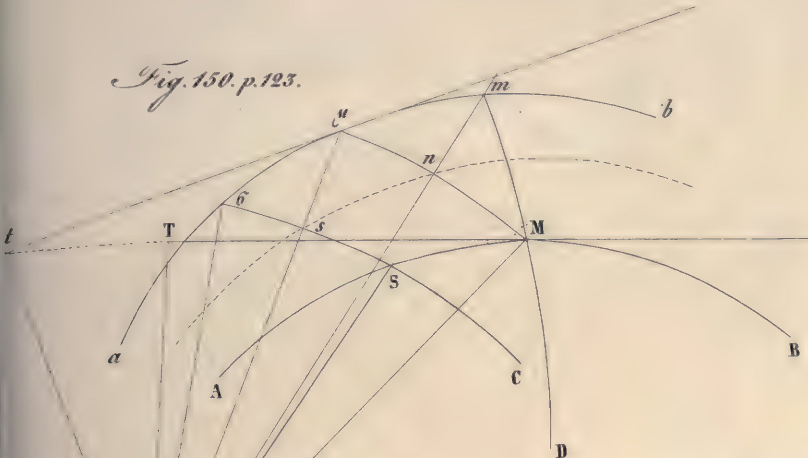


Fig. 150. p. 123.



Fig. 152. p. 125.

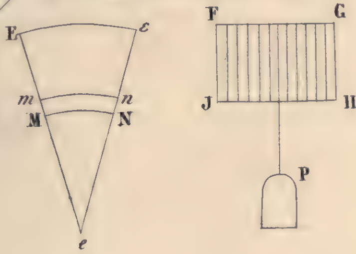


Fig. 157. p. 130.

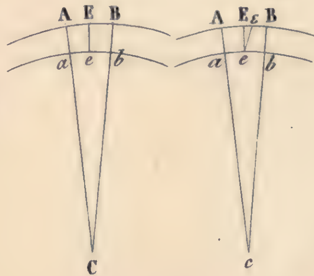


Fig. 156. p. 129.

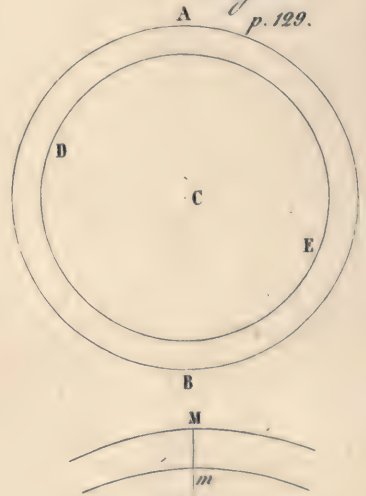


Fig. 154. p. 129.

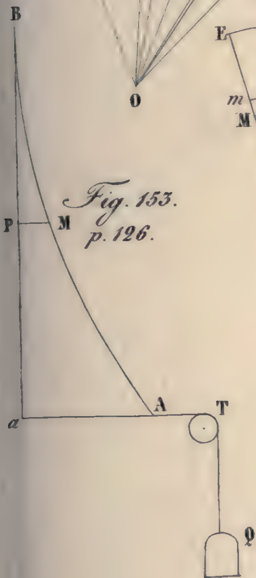


Fig. 153. p. 126.

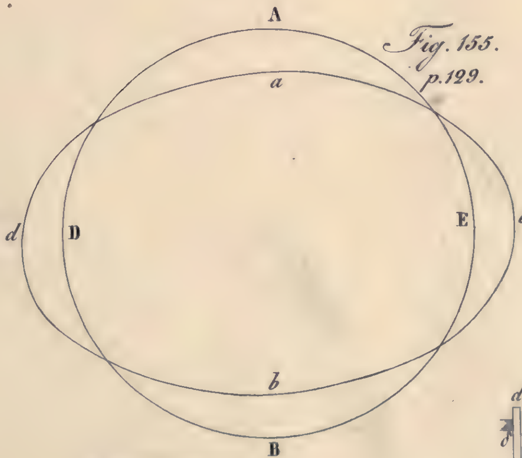


Fig. 155. p. 129.

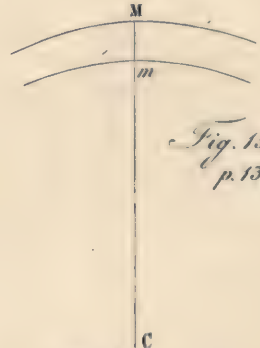


Fig. 158. p. 130.



Fig. 159. p. 131.

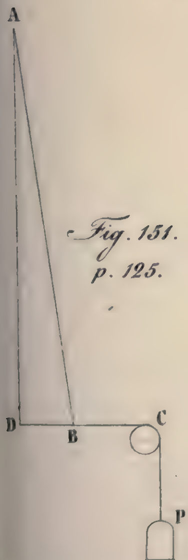


Fig. 151. p. 125.

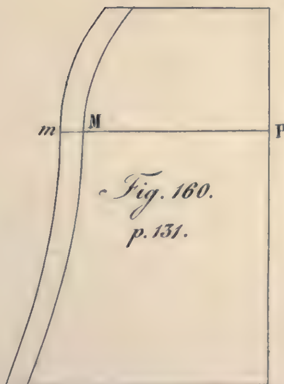


Fig. 160. p. 131.

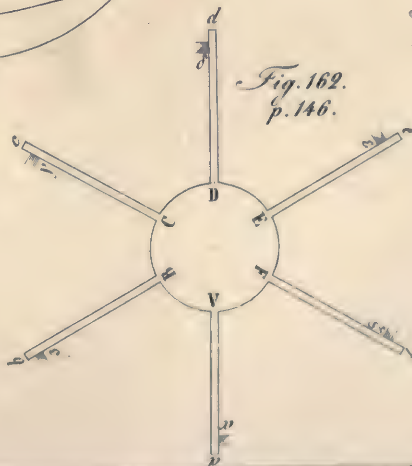
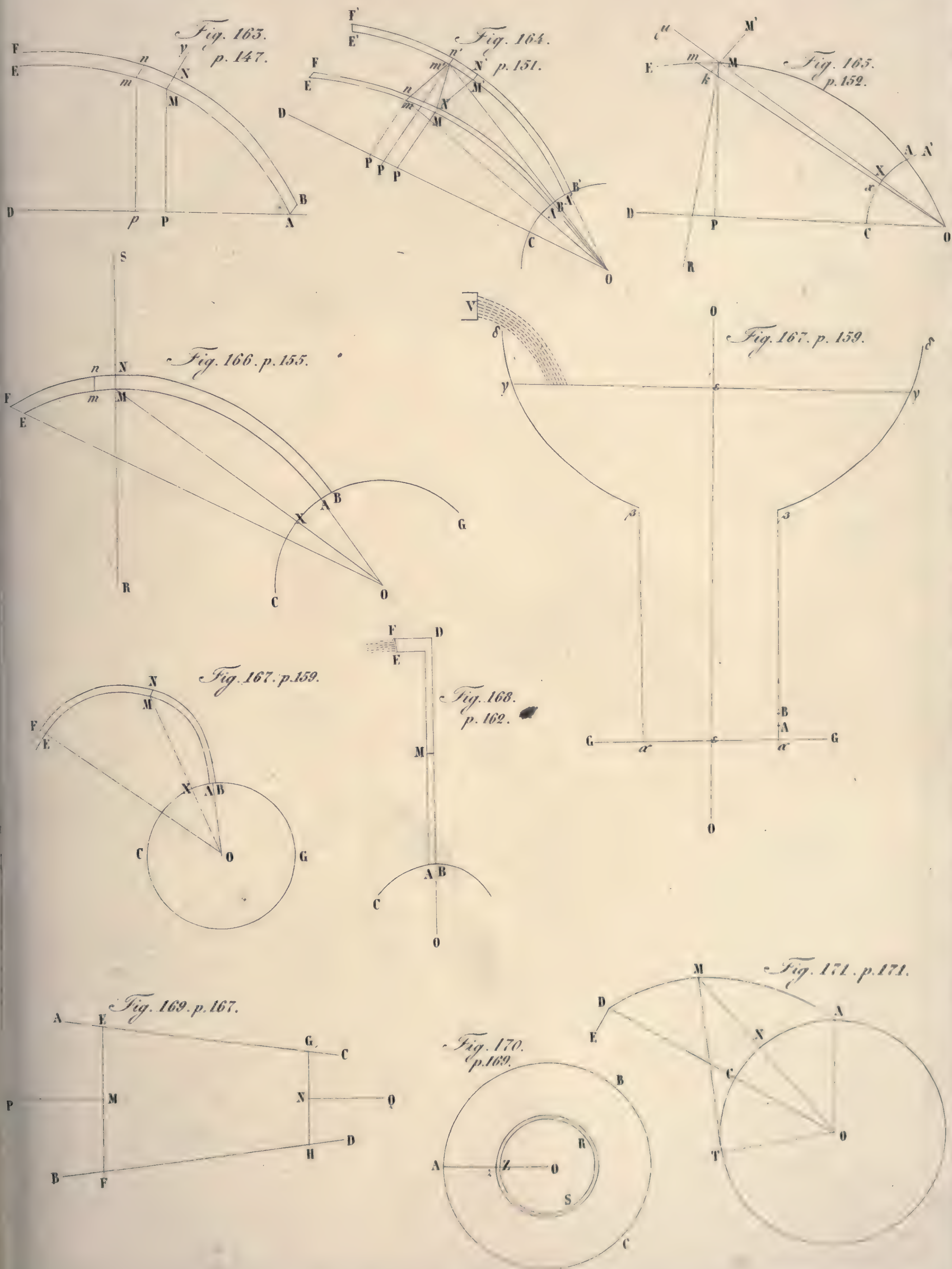


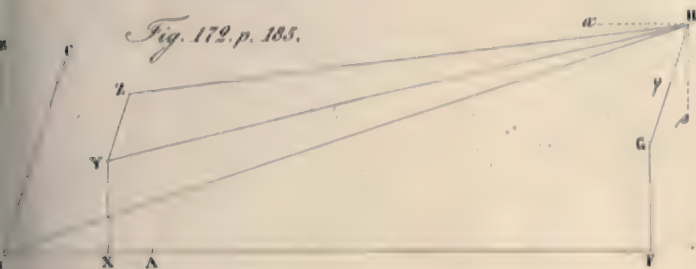
Fig. 162. p. 146.



Fig. 161. p. 133.


Fig. 163. p. 147.
F E n m y N M D p P A B
Fig. 164. p. 151.
F' E' F E n' m' N' M' n m N M D P P P C A B A' B' O
Fig. 165. p. 152.
u M' E m M k A A' X x D P C O R
Fig. 166. p. 155.
S n N F m M E X A B G R C O
Fig. 167. p. 159.
V δ γ ε γ δ O β β G α ε α G B A O
Fig. 167. p. 159.
N M F E X A B C O G
Fig. 168. p. 162.
F D E M A B C O
Fig. 169. p. 167.
A E G C P M N Q B F H D
Fig. 170. p. 169.
B R A Z O S C
Fig. 171. p. 171.
M D E A X C O T




Fig. 172. p. 183.

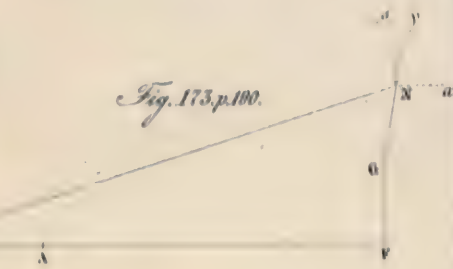
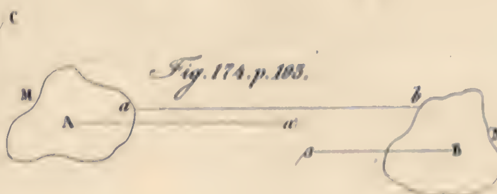

Fig. 173. p. 180.


Fig. 175. p. 194.


Fig. 174. p. 193.

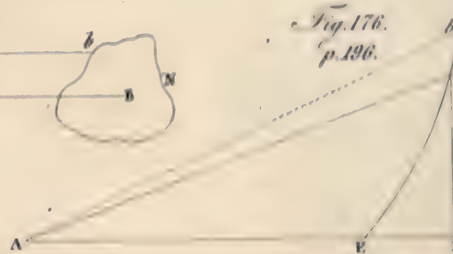
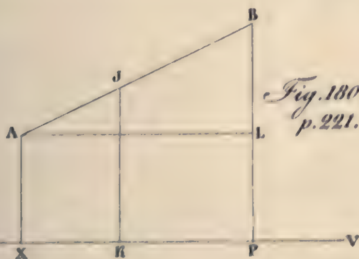

Fig. 176. p. 196.


Fig. 179. p. 217.


Fig. 177. p. 203.


Fig. 178. p. 206.


Fig. 180. p. 221.

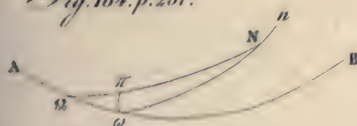
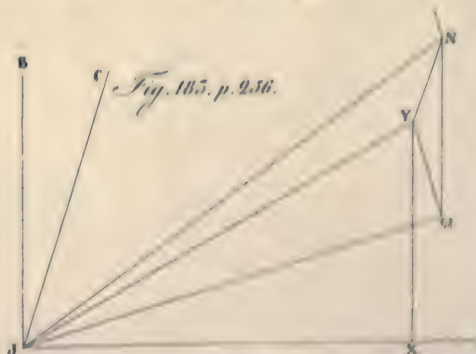

Fig. 184. p. 257.


Fig. 182. p. 231.


Fig. 181. p. 223.


Fig. 183. p. 256.

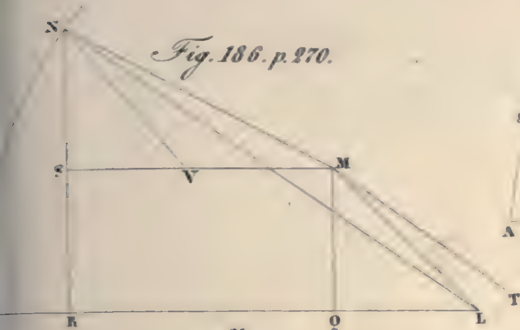


Fig. 186. p. 270.

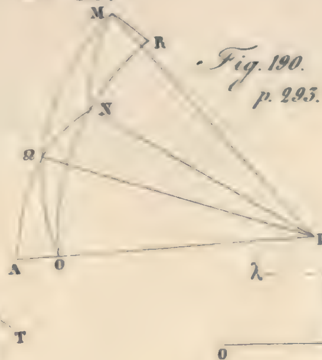


Fig. 190. p. 293.

Fig. 185. p. 265.

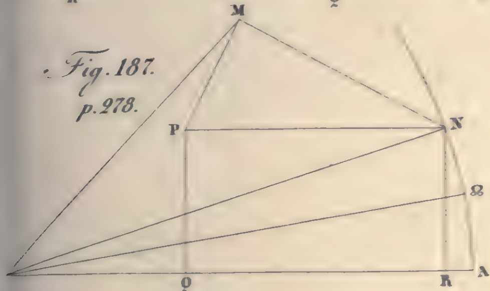


Fig. 187. p. 278.

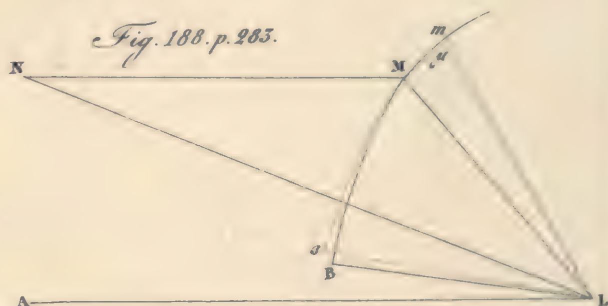


Fig. 188. p. 283.

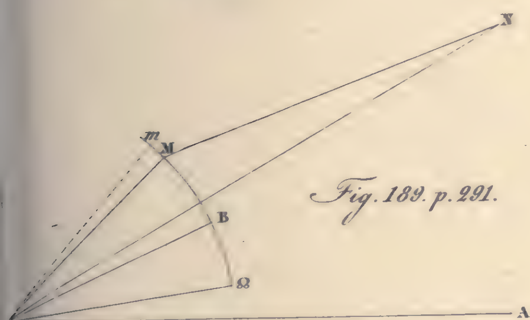


Fig. 189. p. 291.

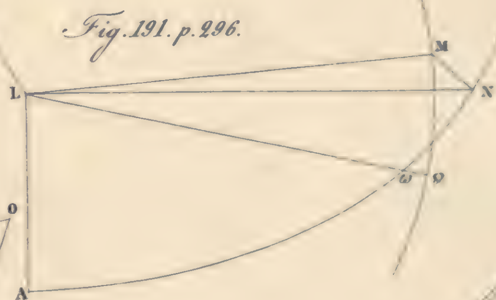


Fig. 191. p. 296.

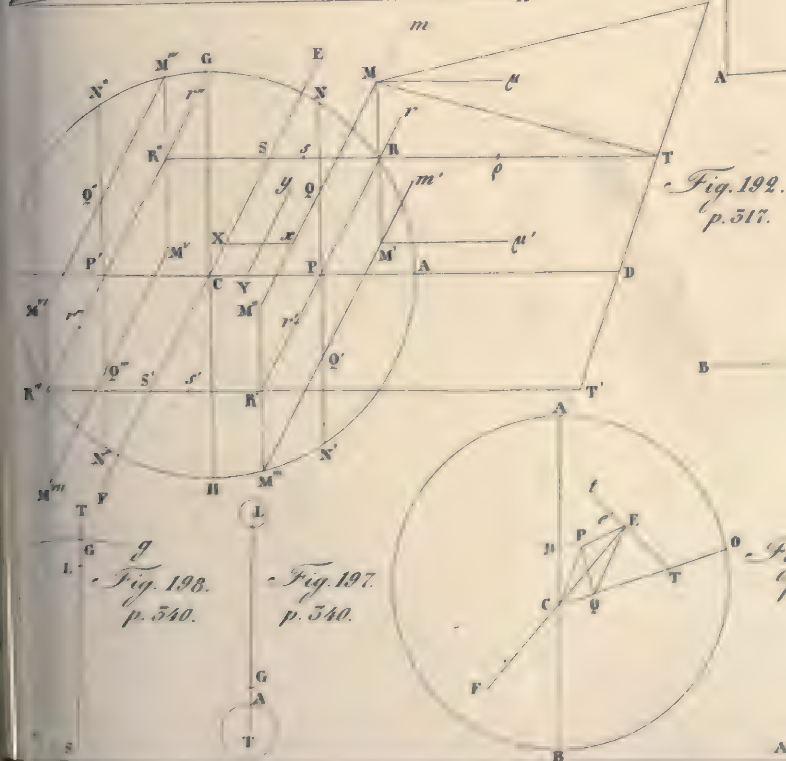


Fig. 192. p. 317.

Fig. 194. p. 322.

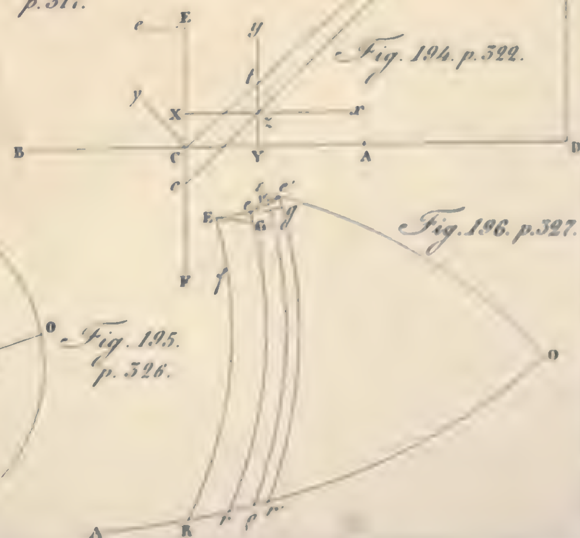
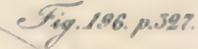
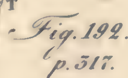


Fig. 196. p. 327.





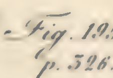


Fig. 195. p. 326.

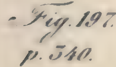


Fig. 198. p. 340.


Fig. 197. p. 340.

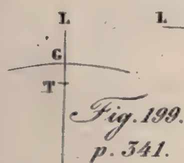


Fig. 199. p. 341.

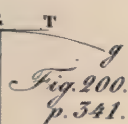


Fig. 200. p. 341.

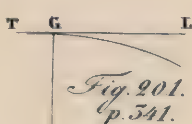


Fig. 201. p. 341.

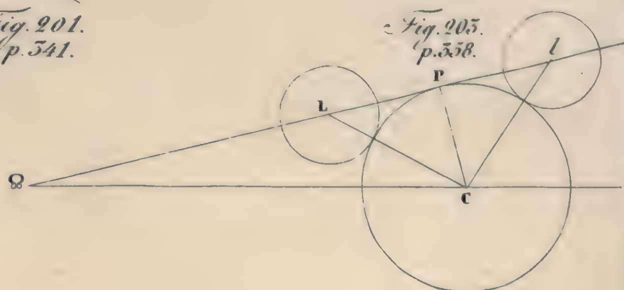


Fig. 203. p. 358.

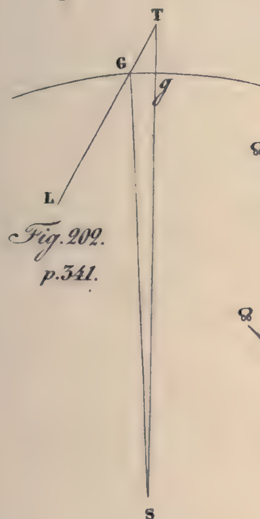


Fig. 202. p. 341.



Fig. 204. p. 358.

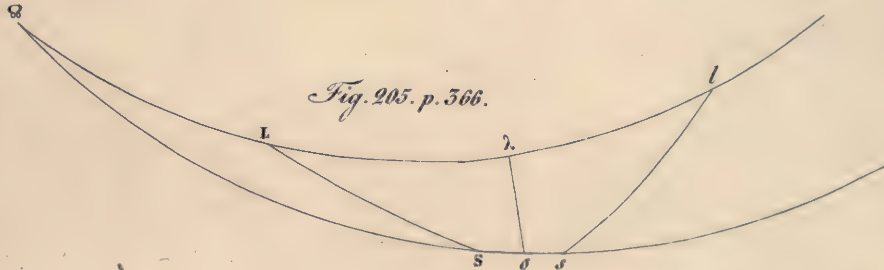


Fig. 205. p. 366.

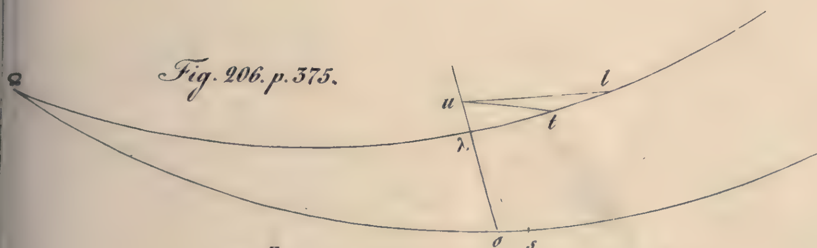


Fig. 206. p. 375.

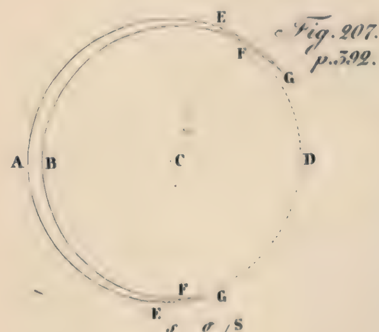


Fig. 207. p. 392.

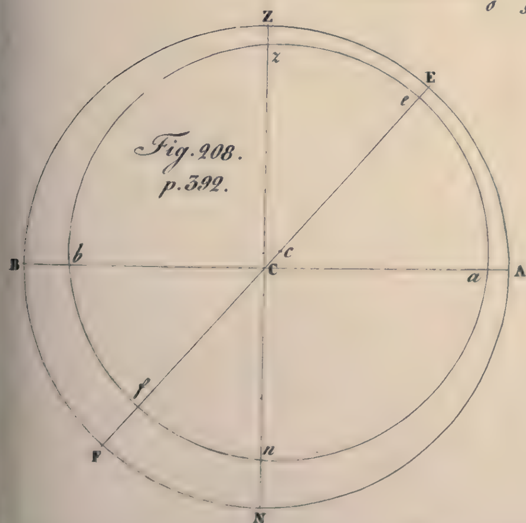


Fig. 208. p. 392.

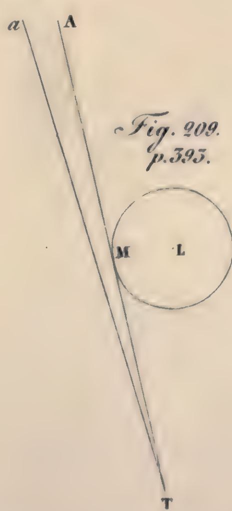


Fig. 209. p. 393.

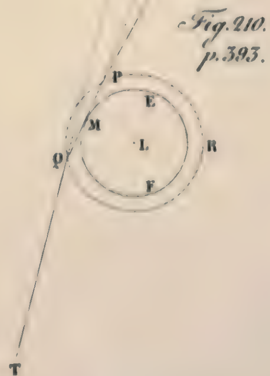


Fig. 210. p. 393.

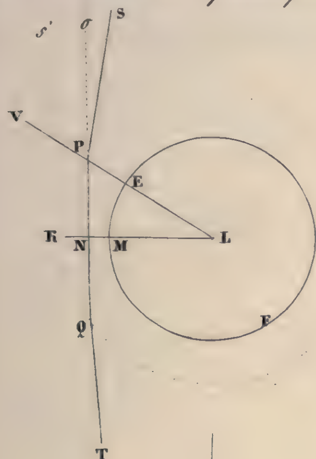



Fig. 211. p. 394.

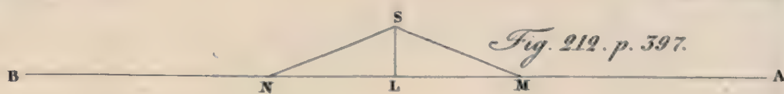



Fig. 212. p. 397.

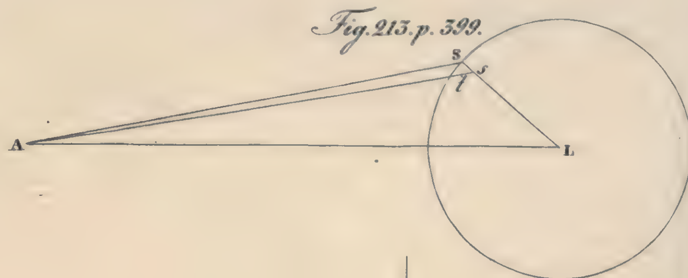



Fig. 213. p. 399.

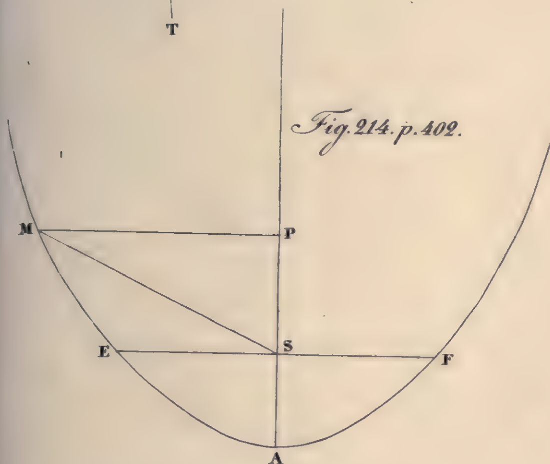



Fig. 214. p. 402.

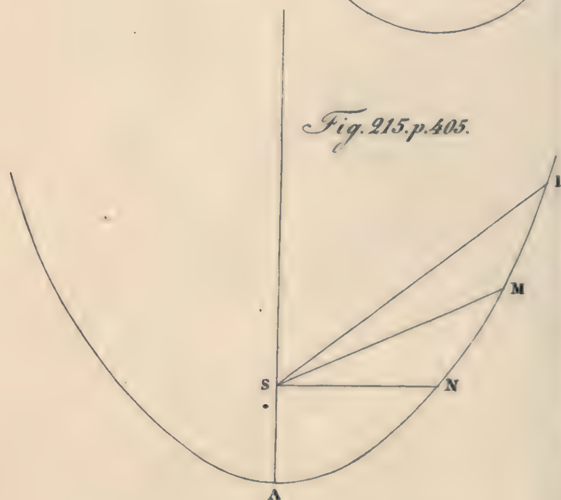



Fig. 215. p. 405.

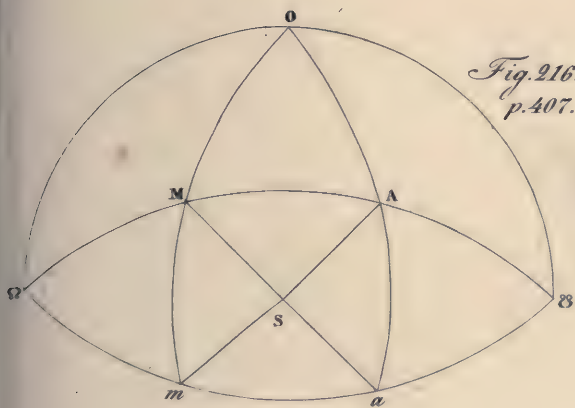



Fig. 216. p. 407.

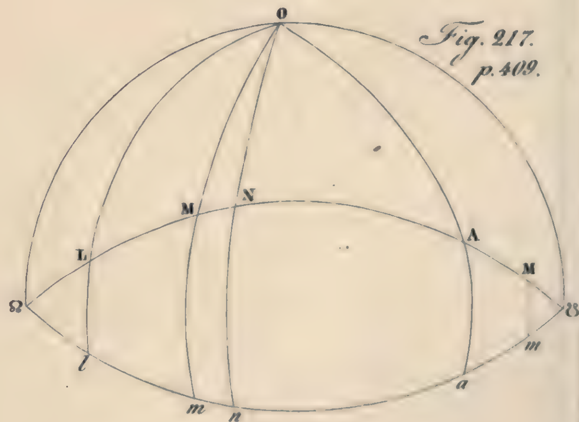



Fig. 217. p. 409.

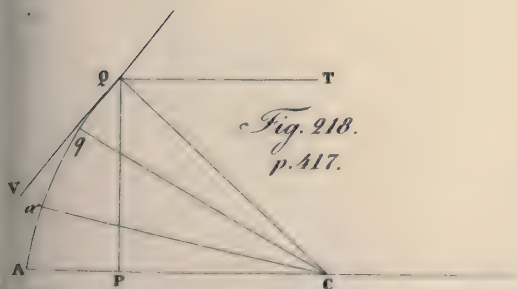



Fig. 218. p. 417.

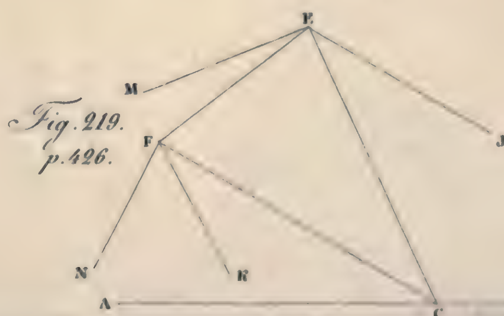
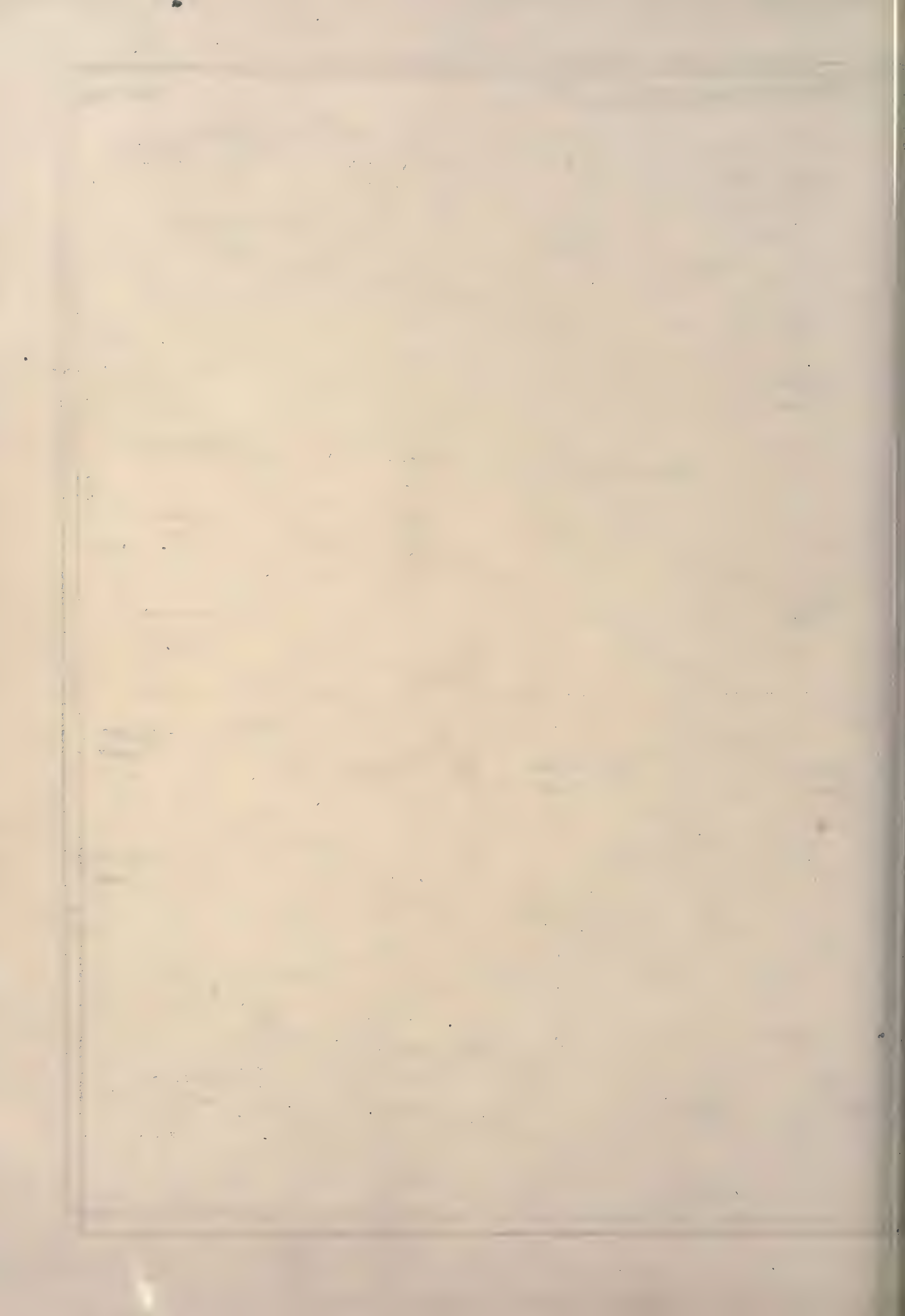



Fig. 219. p. 426.



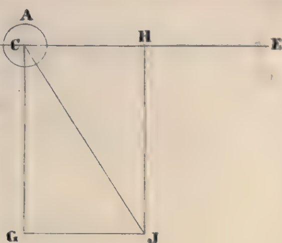


Fig. 220. p. 475.

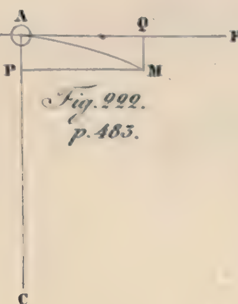


Fig. 222. p. 483.

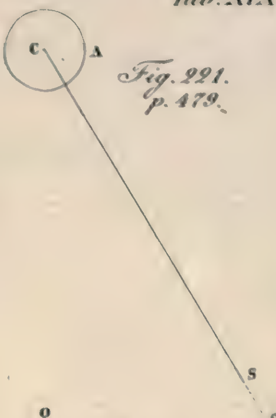


Fig. 221. p. 479.

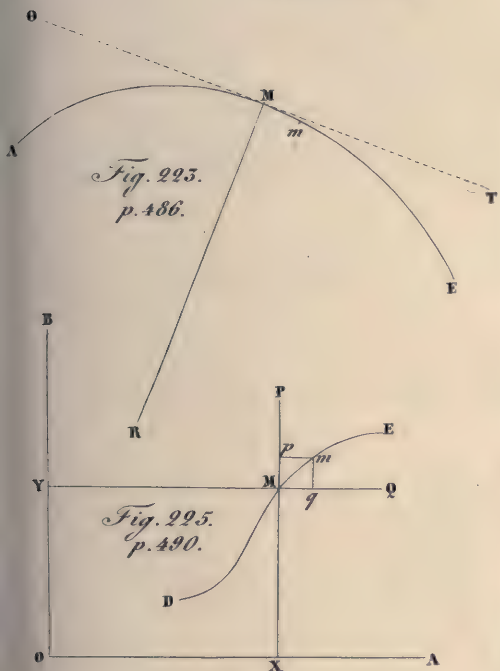


Fig. 223. p. 486.

Fig. 225. p. 490.

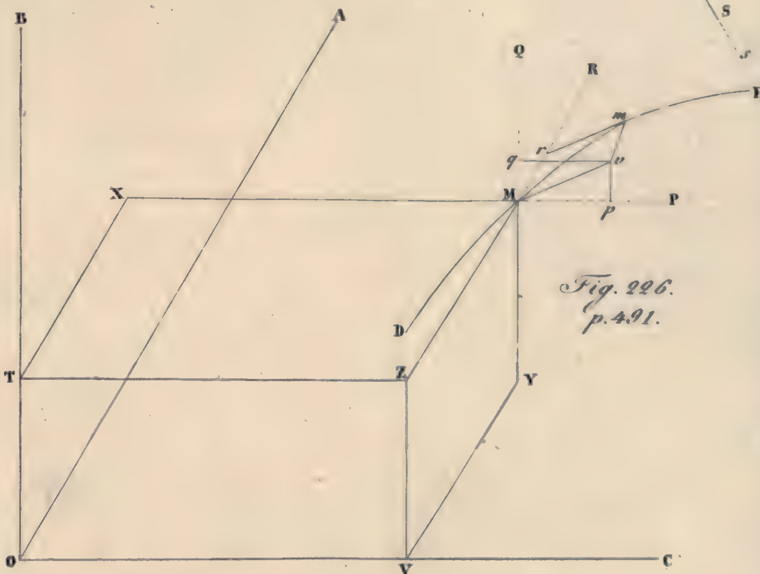


Fig. 226. p. 491.

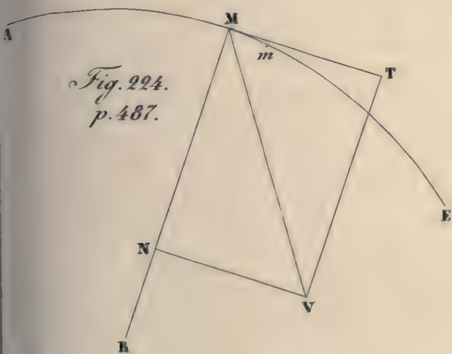


Fig. 224. p. 487.

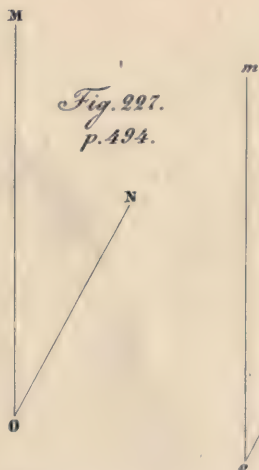


Fig. 227. p. 494.

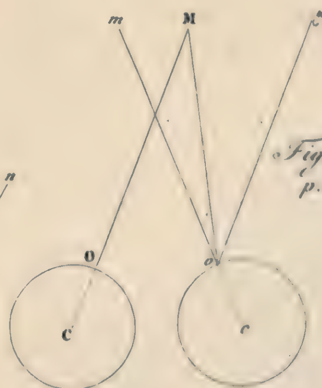


Fig. 228. p. 496.

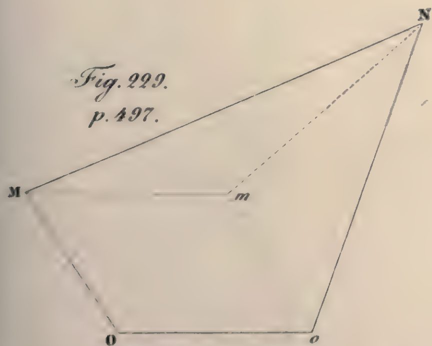


Fig. 229. p. 497.



Fig. 230. p. 503.

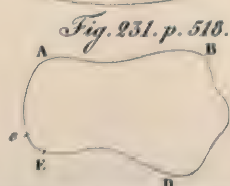


Fig. 231. p. 518.

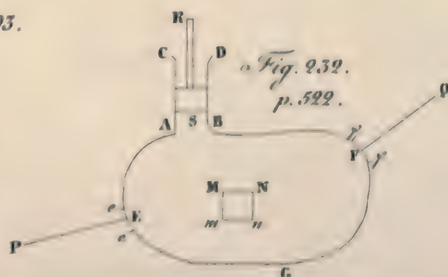


Fig. 232. p. 522.

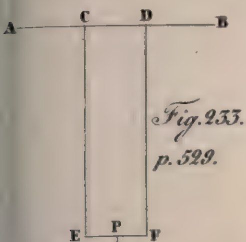



Fig. 233. p. 529.

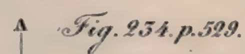



Fig. 234. p. 529.

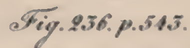






Fig. 236. p. 543.

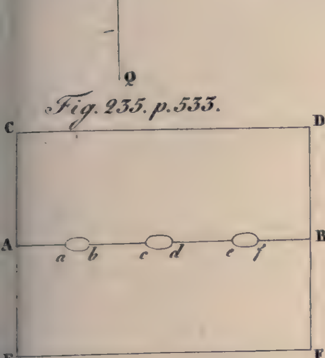



Fig. 235. p. 533.

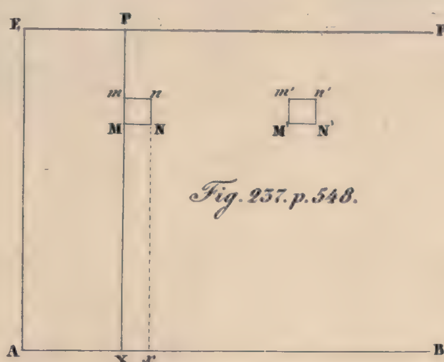



Fig. 237. p. 548.

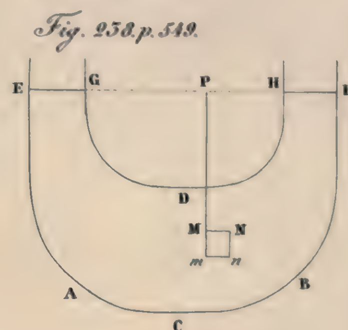



Fig. 238. p. 549.

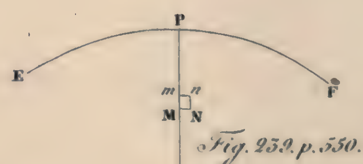



Fig. 239. p. 550.

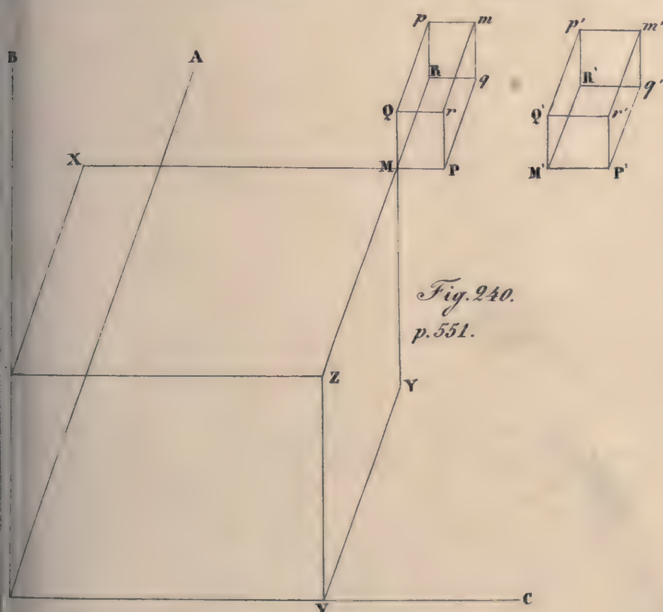



Fig. 240. p. 551.

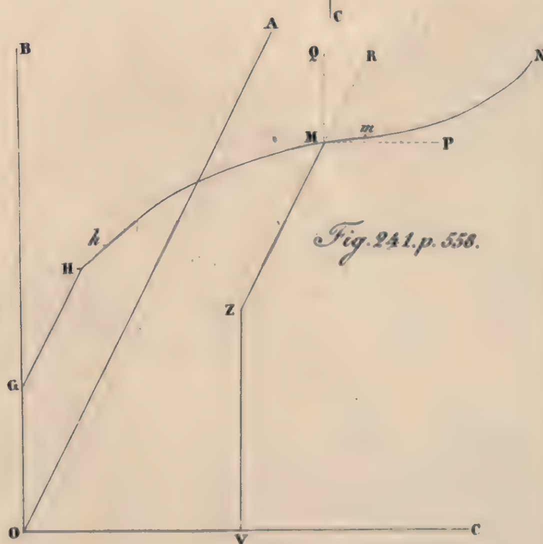



Fig. 241. p. 558.

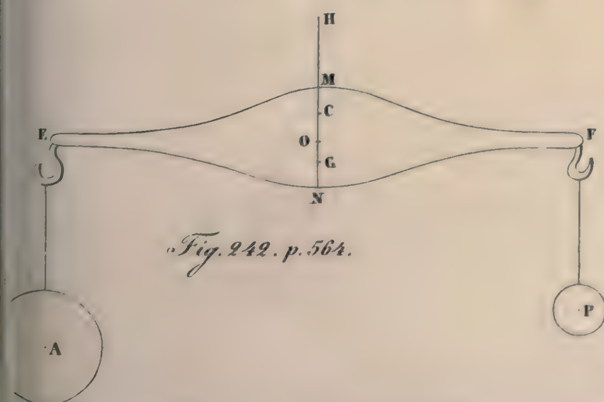



Fig. 242. p. 564.

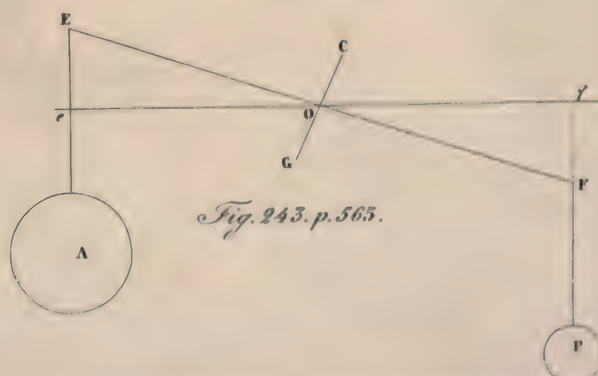



Fig. 243. p. 565.




Fig. 244. p. 568.

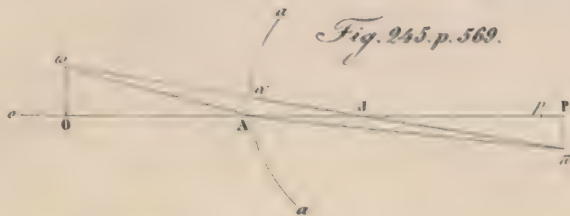
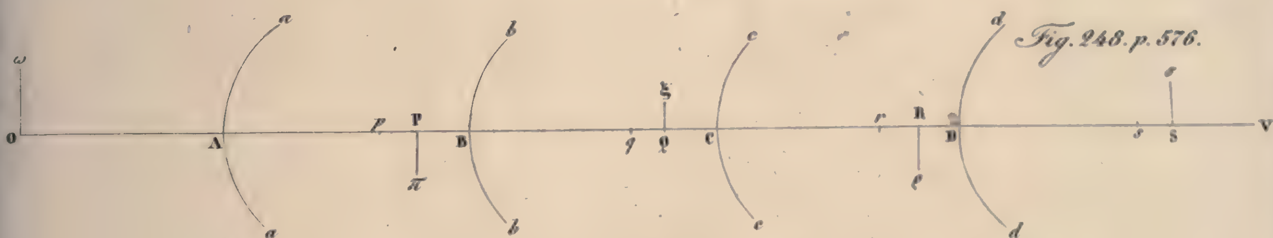
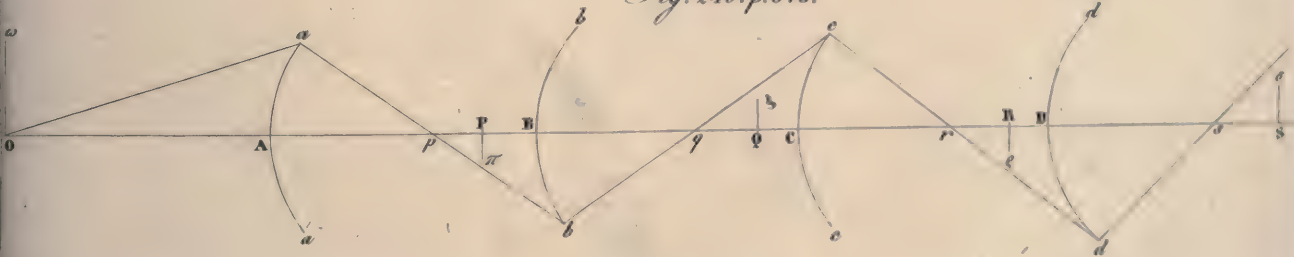

Fig. 245. p. 569.


Fig. 246. p. 570.


Fig. 247. p. 573.


Fig. 248. p. 576.


Fig. 249. p. 578.

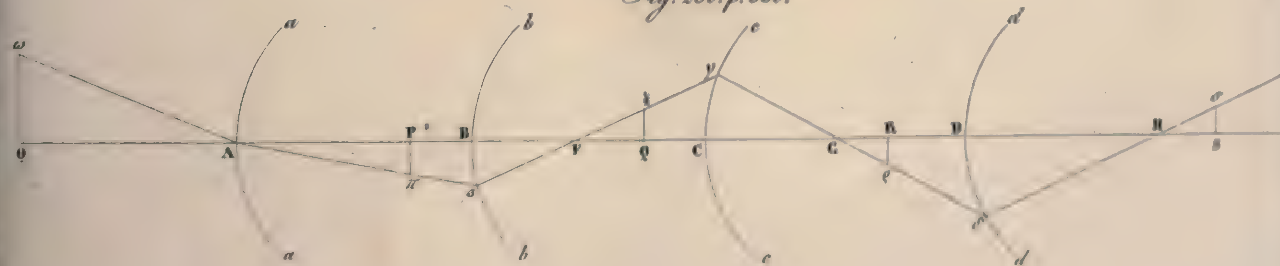

Fig. 250. p. 580.



Fig. 251. p. 585.

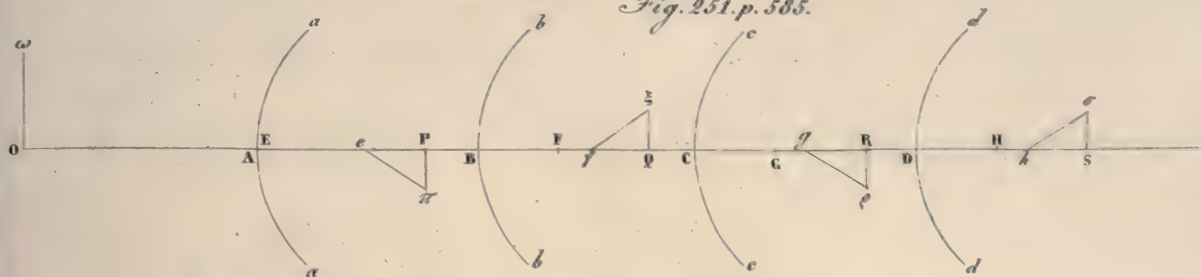


Fig. 252. p. 597.

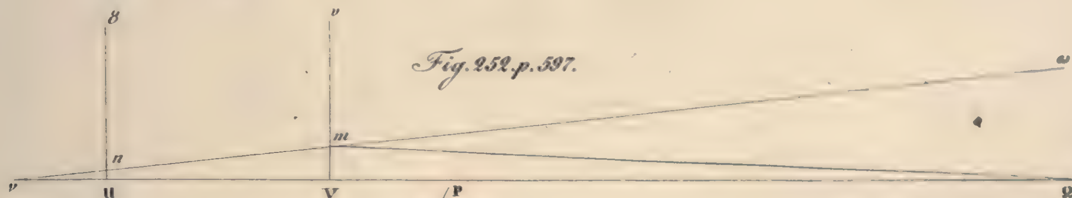


Fig. 253. p. 606.

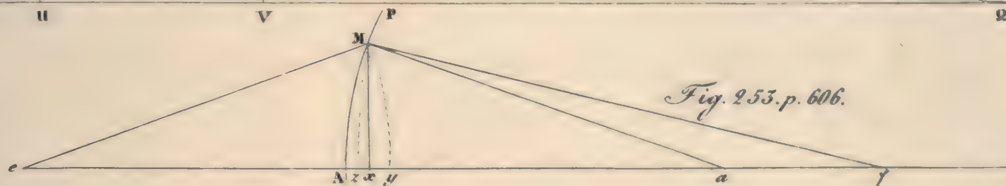


Fig. 254. p. 608.

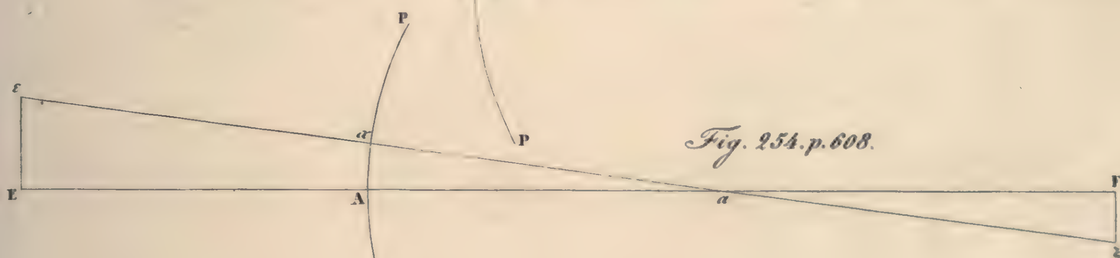


Fig. 255. p. 611.

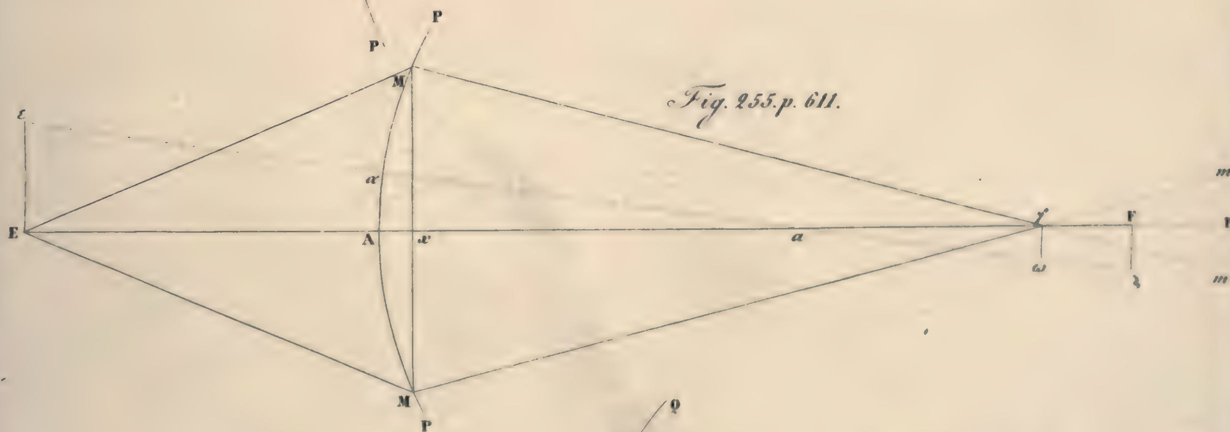
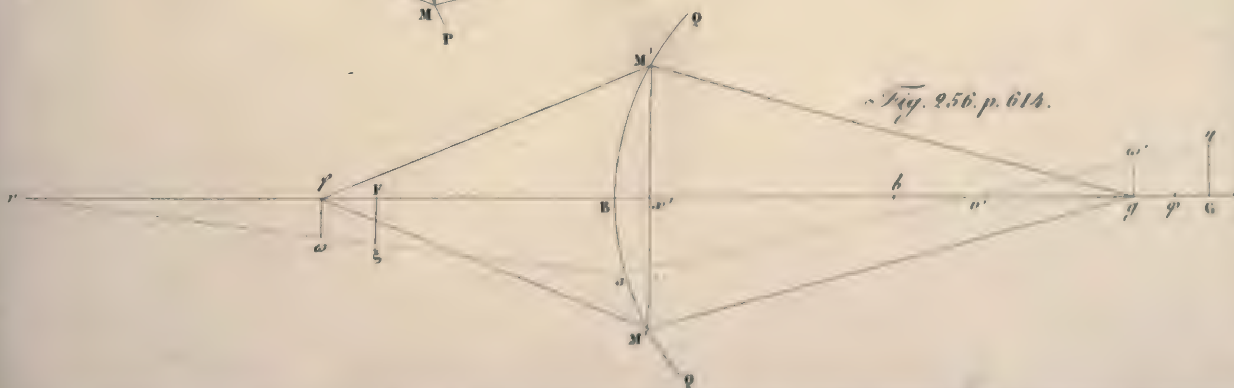
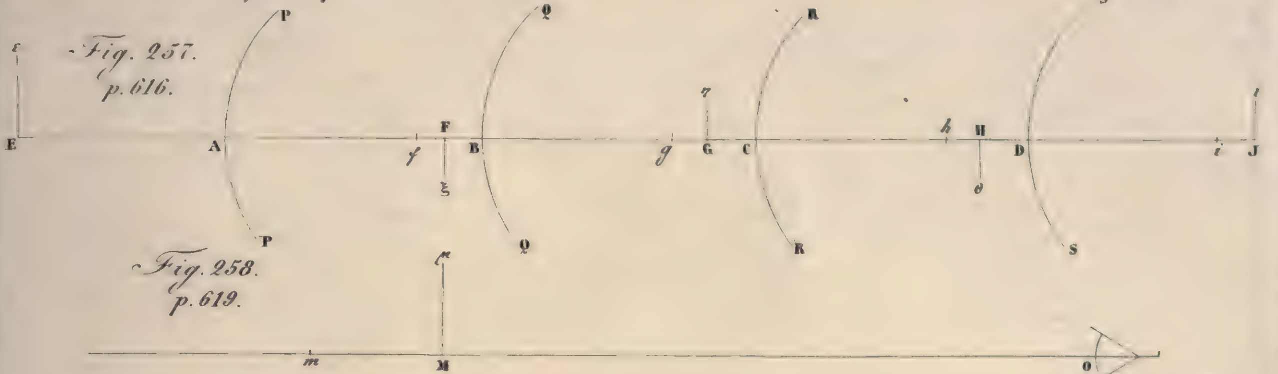
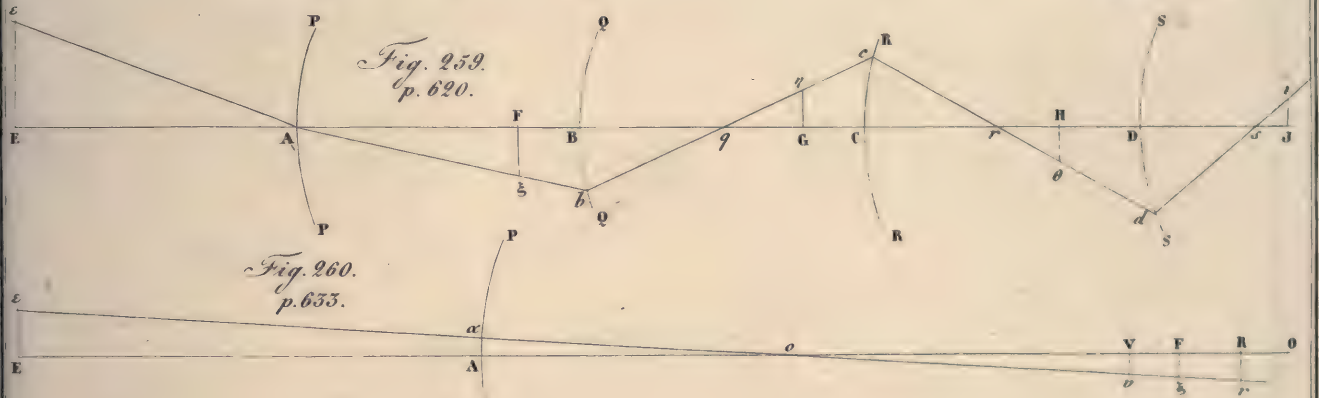


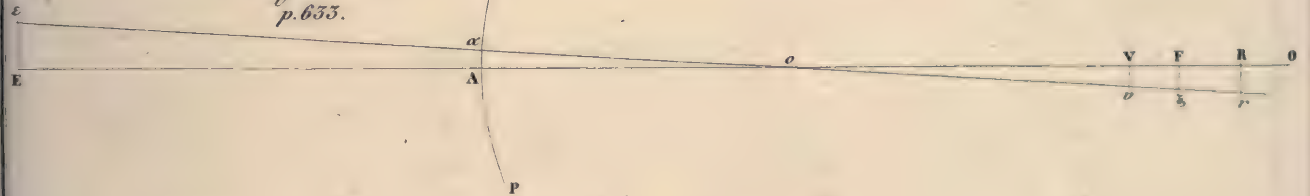
Fig. 256. p. 614.

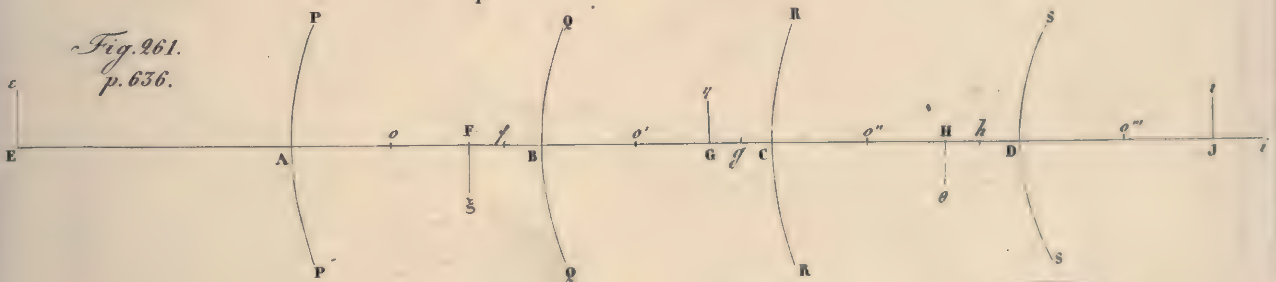





Fig. 257.
p. 616.


Fig. 258.
p. 619.
Fig. 259.
p. 620.


Fig. 260.
p. 633.


Fig. 261.
p. 636.

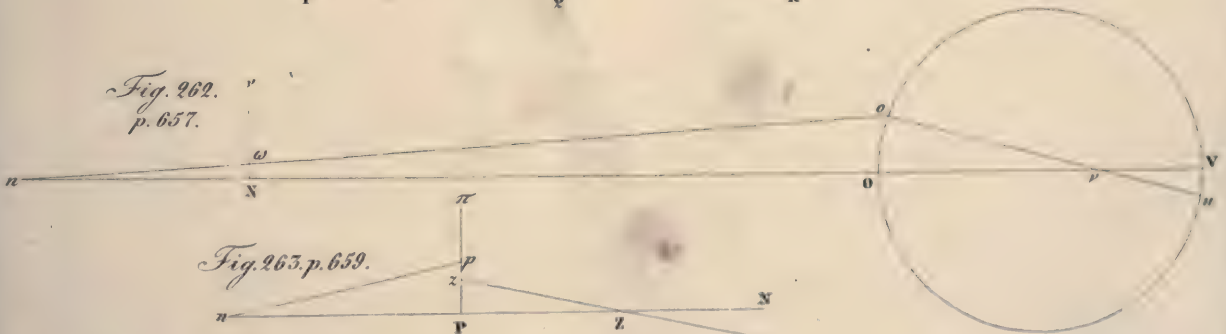
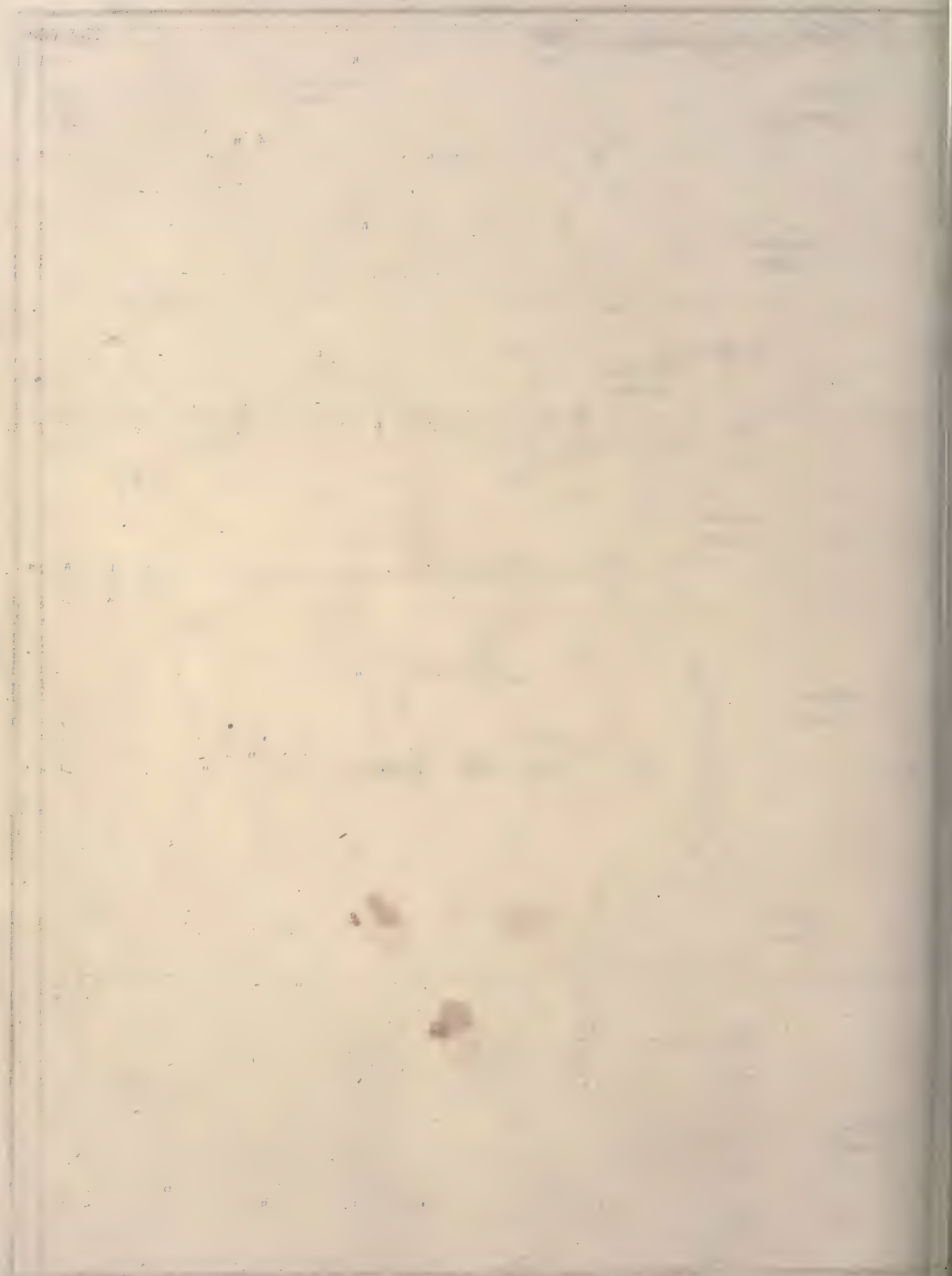

Fig. 262.
p. 657.
Fig. 263. p. 659.


Fig. 264.
p. 661.



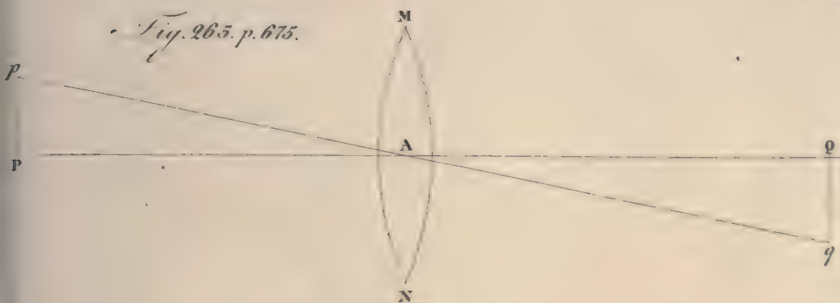
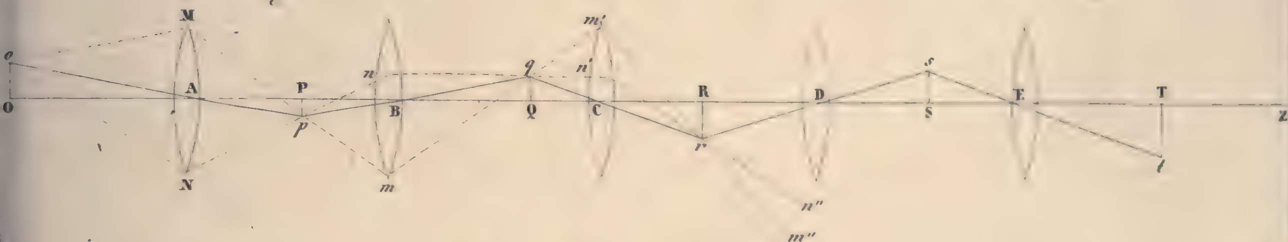
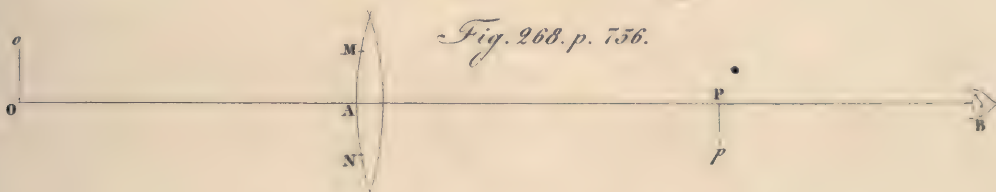
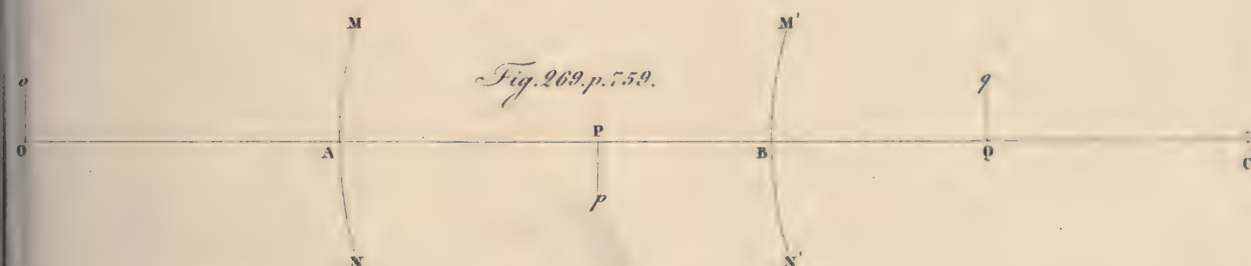
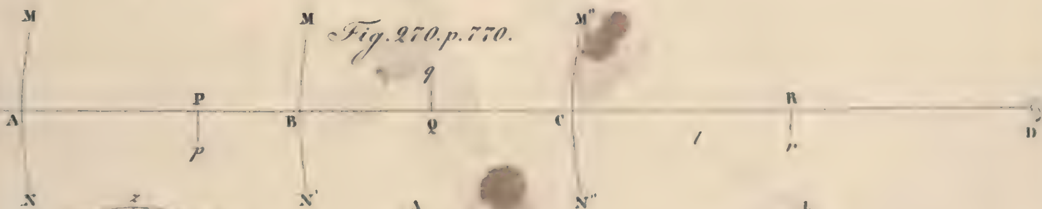

Fig. 265. p. 675.
M
p
A
P
Q
q
N

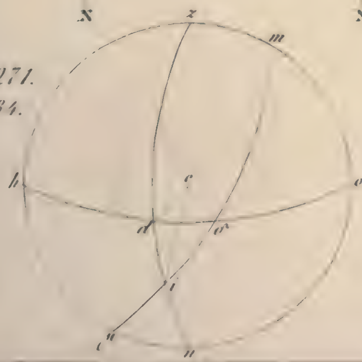

Fig. 267.
p. 680.
Z
Y
X
O


Fig. 266. p. 676.
M
o
A
P
p
n
B
m
q
Q
m'
n'
C
R
r
D
s
S
E
T
t
Z
N
n''
m''


Fig. 268. p. 756.
o
O
M
A
N
P
p
B


Fig. 269. p. 759.
M
o
O
A
N
P
p
M'
B
N'
q
Q
C


Fig. 270. p. 770.
M
A
N
P
p
M
B
N'
q
Q
M''
C
N''
R
r
D


Fig. 271.
p. 784.
z
m
h
c
o
d
i
n


A
L
C
B
Fig. 272
p. 785.



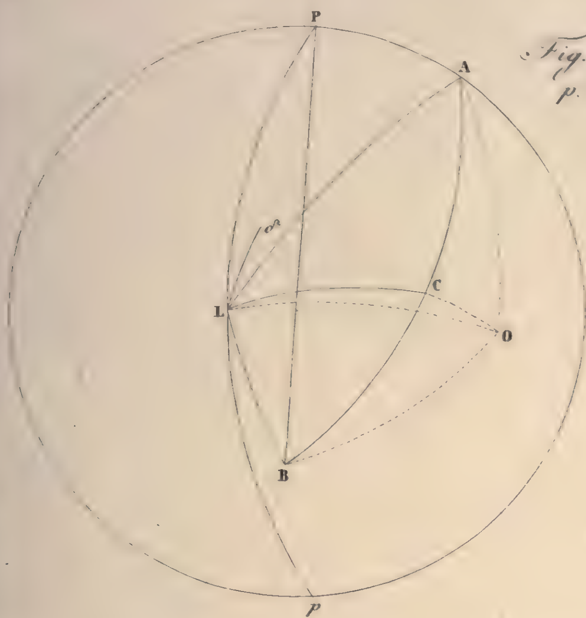



Fig. 273. p. 785.

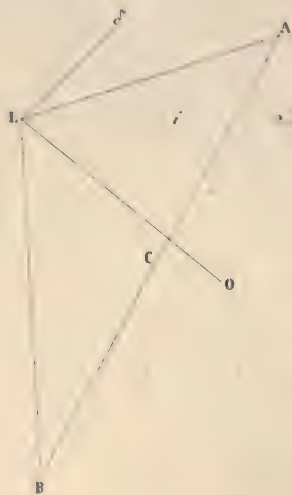



Fig. 274. p. 787.

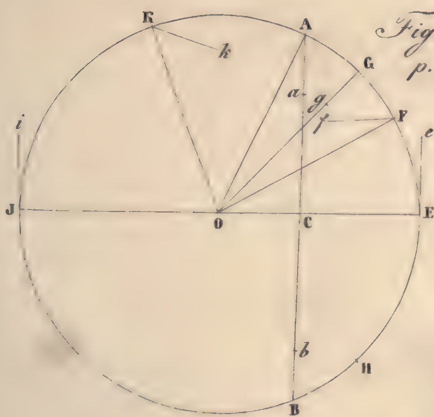



Fig. 275. p. 788.

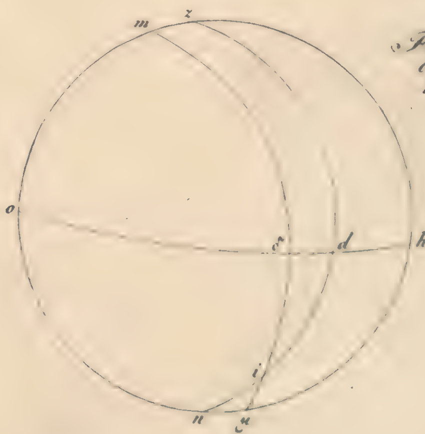
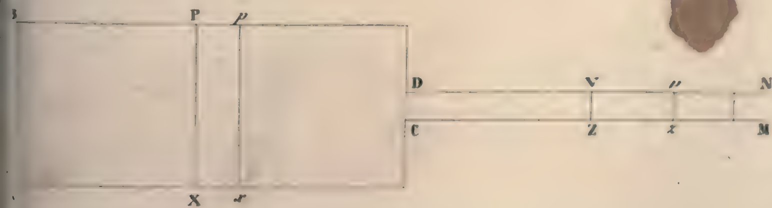



Fig. 276. p. 789.

Fig. 277. p. 816.



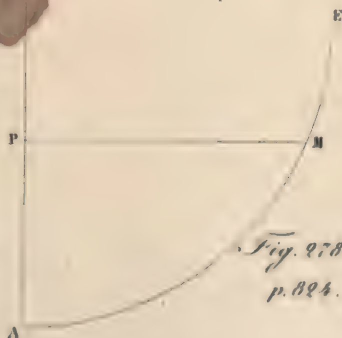




Fig. 278. p. 824.